Funzioni trascendenti

Lucia Perissinotto
I.T.I.S. V.Volterra
San Donà di Piave

Beatrice Hitthaler
I.T.I.S. V.Volterra
San Donà di Piave

17 novembre 2007

Sommario

Esponiamo la teoria fondamentale delle funzioni esponenziali e goniometriche.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Introduzione

Le funzioni finora incontrate erano di tipo algebrico, cioè esprimibili attraverso un numero finito di operazioni algebriche su $\mathbb{R}$ (addizione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice). Sono algebriche, per esempio, le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 4x^2 + 5 && \text{(polinomiale)} \\ f(x) &= \frac{2x+1}{2x-3} && \text{(razionale fratta)} \\ f(x) &= \sqrt{x-2} && \text{(irrazionale)} \end{aligned}$$

Vogliamo ora introdurre un nuovo tipo di funzioni, non esprimibile come le precedenti, che diremo *funzioni trascendenti*. Si tratta di funzioni dette *esponenziale*, *logaritmica* e *goniometrica*. Con la teoria degli sviluppi in serie (somme infinite) vedremo, molto più in là, che anche le funzioni trascendenti si possono esprimere attraverso un numero, però infinito, di operazioni algebriche. Per questo, in generale, il calcolo del valore di tali funzioni in un punto assegnato può avvenire solo per approssimazioni. Vedremo che, per esempio, la funzione che chiameremo esponenziale in base e (numero di Nepero, con il quale prenderemo confidenza fra breve) $f(x) = e^x$ è esprimibile attraverso la seguente somma infinita

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$e \approx 1 + 1 = 2$$

oppure

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ma anche

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \approx \frac{8}{3}$$

e così via, a seconda del grado di precisione voluto.

Capitolo 2

Funzioni esponenziali e logaritmiche

2.1 Potenze ad esponente naturale, intero e razionale

Definizione 2.1.1. Sia $a \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}^*$; diremo potenza n-esima di base a, e scriveremo a^n, il prodotto di n fattori uguali ad a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ volte}}$$

e assumeremo che $a^1 = a$.

Proprietà:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{P}_1) & a^n \cdot a^m = a^{n+m} & \forall a \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N}^* \\
\mathcal{P}_2) & a^n : a^m = a^{n-m} & \forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall n, m \in \mathbb{N}^*, n > m \\
\mathcal{P}_3) & (a^n)^m = a^{nm} & \forall a \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N}^* \\
\mathcal{P}_4) & (a^n)(b^n) = (ab)^n & \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\
\mathcal{P}_5) & (a^n) : (b^n) = (a : b)^n & \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*
\end{array}$$

Per convenzione si assume che

$$a^0 = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^*$$

così facendo la convenzione è compatibile con la seconda proprietà nel caso $n = m$! Per convenzione si assume che

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}$$

così facendo si è dato significato alle potenze ad esponente intero e la nuova definizione risulta compatibile con le proprietà su esposte. Per convenzione si assume che

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^>, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{Z}$$

così facendo si è dato significato alle potenze con esponente razionale e la nuova definizione risulta compatibile con le proprietà su esposte. Nella pratica la scelta della base potrebbe anche essere meno restrittiva in relazione ai diversi esponenti.

Esempio 2.1.1. $0^{2/3} = \sqrt[3]{0^2} = \sqrt[3]{0} = 0$ mentre $0^{-1/3}$ non esiste in $\mathbb{R}$ perchè non esiste il reciproco di 0 !

Esempio 2.1.2. $(-2)^{1/3} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ mentre $(-2)^{1/2}$ non esiste in $\mathbb{R}$ essendo negativo il radicando e pari l'indice di radice !

Esempio 2.1.3. La funzione $y = x^{1/2}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}^{\geq}$ mentre $y = x^{1/3}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, invece $y = x^{-1/2}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}^>$, infine $y = x^{-1/3}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

2.2 Potenze ad esponente reale

Teorema 2.2.1 (Teorema di monotonia delle potenze)**.** *Le potenze di un numero reale maggiore di* 1 *crescono al crescere dell'esponente razionale e quelle di un numero reale compreso fra* 0 *e* 1 *decrescono al crescere dell'esponente razionale.*

$$a^r > a^s \Leftrightarrow r > s \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{>}, a > 1, \forall r, s \in \mathbb{Q}$$
$$a^r < a^s \Leftrightarrow r > s \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{>}, 0 < a < 1, \forall r, s \in \mathbb{Q}$$

Definizione 2.2.1. Sia $a \in \mathbb{R}^{>}$ e $\beta \in \mathbb{R}$; si definisce *potenza ad esponente reale* a^β l'elemento di separazione delle 2 classi contigue di numeri

$$A = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r \leq \beta\}$$

e

$$B = \{a^s | s \in \mathbb{Q}, s \geq \beta\}.$$

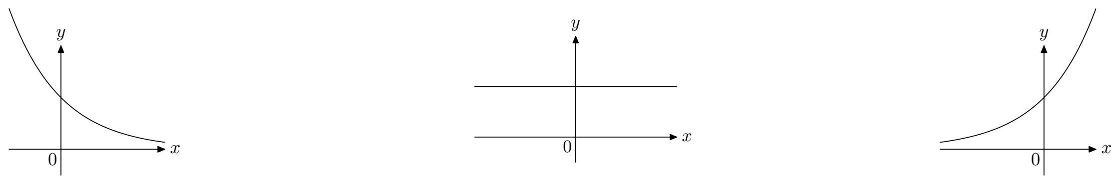
A e B sono separate e godono della proprietà dell'avvicinamento indefinito (perciò ammettono un unico elemento di separazione, a^β, appunto). Valgono anche per le potenze ad esponente reale le consuete proprietà delle potenze ed anche il teorema di monotonia sopra citato.

2.3 Funzione esponenziale elementare

Definizione 2.3.1. Sia $a \in \mathbb{R}^{>}$; diremo funzione esponenziale la funzione definita ponendo

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = a^x \end{aligned}$$

il cui grafico in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale risulta:



Osserviamo che la funzione è:

monotona decrescente	costante	monotona crescente
assume valori positivi	assume valore 1	assume valori positivi
passa per $(0, 1)$		passa per $(0, 1)$
asintotica al semiasse		asintotica al semiasse
positivo delle x		negativo delle x
è iniettiva	non è iniettiva	è iniettiva
diventa anche suriettiva	nè suriettiva	diventa anche suriettiva
restringendo il codominio		restringendo il codominio
a $\mathbb{R}^{>}$, quindi invertibile		a $\mathbb{R}^{>}$, quindi invertibile

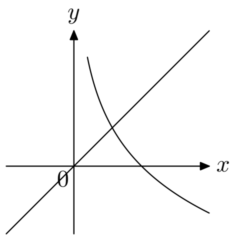
Osservazione. Particolarmente frequente risulta l'uso della funzione esponenziale in base e (detto numero di Nepero); essendo $e \approx 2.7$, la funzione esponenziale che ne risulta è crescente. Analogamente per la base 10, anche questa molto usata.

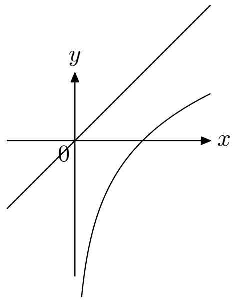
2.4 Funzione logaritmica

Definizione 2.4.1. Sia $a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1$; diremo funzione inversa della funzione esponenziale o *funzione logaritmica*, la funzione definita ponendo

$$\begin{aligned} \exp_a^{-1} = \log_a \colon \mathbb{R}^{>} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \exp_a^{-1}(x) = \log_a x \end{aligned}$$

il cui grafico in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale risulta il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante dei grafici precedenti:





Osservazione. Particolarmente frequente risulta l'uso della funzione logaritmica in base e (detto numero di Nepero); essendo $e \approx 2.7$, la funzione logaritmica che ne risulta è crescente. Analogamente per la base 10, anche questa molto usata. Si conviene di indicare il logaritmo in base e di x con $\ln x$ e il logaritmo in base 10 di x con $\log x$.

Esempio 2.4.1. $\log_2 8 = 3$ poichè, essendo stata definita la funzione logaritmica come inversa di quella esponenziale, $\log_2 8$ è l'esponente da assegnare alla base 2 per ottenere l'argomento 8. Quindi deve risultare $2^3 = 8$.

Esempio 2.4.2. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ infatti: $3^{-3} = \frac{1}{27}$.

Esempio 2.4.3. $\log_a 1 = 0$ infatti: $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1$.

Esempio 2.4.4. $\log_a a = 1$ infatti: $a^1 = a, \forall a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1$.

Esempio 2.4.5. $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ infatti: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Dimostriamo ora alcune proprietà dei logaritmi richiamando alcune proprietà degli esponenziali:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{L}_1) & \log_a mn = \log_a m + \log_a n & \forall a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1, \forall n, m \in \mathbb{R}^{>} \\
\mathcal{L}_2) & \log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n & \forall a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1, \forall n, m \in \mathbb{R}^{>} \\
\mathcal{L}_3) & \log_a m^y = y \cdot \log_a m & \forall a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1, \forall m \in \mathbb{R}^{>}, y \in R \\
\mathcal{L}_4) & \log_{a^\alpha} m^\alpha = \log_a m & \forall a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1, \forall m \in \mathbb{R}^{>}, \alpha \in R^* \\
\mathcal{L}_5) & (\log_a b) \cdot (\log_b c) = \log_a c & \forall a, b, c \in \mathbb{R}^{>}, a, b \neq 1
\end{array}$$

Dim. $\mathcal{L}_1$)

posto $\log_a m = x$	si ha $a^x = m$
posto $\log_a n = y$	si ha $a^y = n$
per la proprietà $\mathcal{P}_1$) risulta che	$m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
quindi	$x + y = \log_a mn$
da cui	$\log_a m + \log_a n = \log_a mn.$

□

Dim. $\mathcal{L}_2$)

posto $\log_a m = x$	si ha $a^x = m$
posto $\log_a n = y$	si ha $a^y = n$
per la proprietà $\mathcal{P}_2$) risulta che	$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
quindi	$x - y = \log_a \frac{m}{n}$
da cui	$\log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}$.

□

Dim. $\mathcal{L}_3$)

posto $\log_a m = x$	si ha $a^x = m$
elevando ambo i membri alla y	si ha $(a^x)^y = m^y$
per la proprietà $\mathcal{P}_3$) risulta che	$a^{xy} = m^y$
quindi	$xy = \log_a m^y$
da cui	$y \cdot \log_a m = \log_a m^y$.

□

Dim. $\mathcal{L}_4$)

posto $\log_a m = x$	si ha $a^x = m$
elevando ambo i membri alla α	si ha $(a^x)^\alpha = m^\alpha$
per la proprietà $\mathcal{P}_3$) risulta che	$a^{x\alpha} = (a^\alpha)^x = m^\alpha$
quindi	$x = \log_{a^\alpha} m^\alpha$
da cui	$\log_a m = \log_{a^\alpha} m^\alpha$.

□

Dim. $\mathcal{L}_5$) (*Formula del cambiamento di base*)

posto $\log_a b = x$	si ha $a^x = b$
posto $\log_b c = y$	si ha $b^y = c$
per la proprietà $\mathcal{P}_3$) risulta che	$c = b^y = (a^x)^y = a^{xy}$
quindi	$xy = \log_a c$
da cui	$(\log_a b) \cdot (\log_b c) = \log_a c$.

□

2.5 Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche elementari

Si tratta di risolvere equazioni e disequazioni del tipo

$$a^x \leq\geq b \qquad \log_a x \leq\geq b \qquad \text{ove} \quad a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1$$

Attraverso alcuni semplici esempi illustriamo la casistica.

Esercizio 2.5.1.

$2^x = 4$	esprimiamo 4 come potenza in base 2
$2^x = 2^2$	essendo la funzione esponenziale iniettiva
$x = 2$	

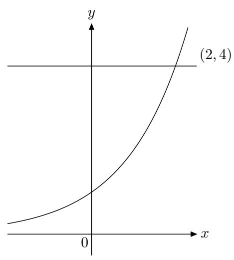
Esercizio 2.5.2.

$2^x > 4$	esprimiamo 4 come potenza in base 2
$2^x > 2^2$	essendo la funzione esponenziale monotona crescente
$x > 2$	

Esercizio 2.5.3.

$2^x < 4$	esprimiamo 4 come potenza in base 2
$2^x < 2^2$	essendo la funzione esponenziale monotona crescente
$x < 2$	

Dal punto di vista grafico è interessante osservare qual è l'interpretazione geometrica degli esempi fatti. Si osserva che l'ascissa del punto P d'intersezione fra le curve di equazione $y = 2^x$ e $y = 4$ è proprio la soluzione dell'equazione.



Esercizio 2.5.4.

$(\frac{1}{3})^x = 27$	esprimiamo 27 come potenza in base $\frac{1}{3}$
$(\frac{1}{3})^x = (\frac{1}{3})^{-3}$	essendo la funzione esponenziale iniettiva
$x = -3$	

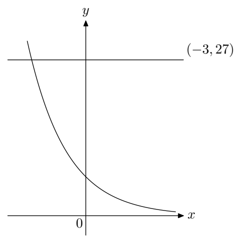
Esercizio 2.5.5.

$(\frac{1}{3})^x > 27$	esprimiamo 27 come potenza in base $\frac{1}{3}$
$(\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{3})^{-3}$	essendo la funzione esponenziale monotona decrescente
$x < -3$	

Esercizio 2.5.6.

$(\frac{1}{3})^x < 27$	esprimiamo 27 come potenza in base $\frac{1}{3}$
$(\frac{1}{3})^x < (\frac{1}{3})^{-3}$	essendo la funzione esponenziale monotona decrescente
$x > -3$	

Dal punto di vista grafico è interessante osservare qual è l'interpretazione geometrica degli esempi fatti (le unità di misura per i due assi sono diverse). Si osserva che l'ascissa del punto P d'intersezione fra le curve di equazione $y = (\frac{1}{3})^x$ e $y = 27$ è proprio la soluzione dell'equazione.



Esercizio 2.5.7.

$2^x = 0$ non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi l'equazione è impossibile

Esercizio 2.5.8.

$2^x = -8$ non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi l'equazione è impossibile

Esercizio 2.5.9.

$2^x < 0$ non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi la disequazione è impossibile

Esercizio 2.5.10.

$2^x \leq 0$ non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi la disequazione è impossibile

Esercizio 2.5.11.

$2^x > 0$ non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi la disequazione è sempre verificata

Esercizio 2.5.12.

$2^x \geq 0$ non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi la disequazione è sempre verificata

Esercizio 2.5.13.

$2^x < -8$ non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi la disequazione è impossibile

Esercizio 2.5.14.

$2^x \leq -8$ non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi la disequazione è impossibile

Esercizio 2.5.15.

$2^x > -8$ non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi la disequazione è sempre verificata

Esercizio 2.5.16.

$2^x \geq -8$ non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$ quindi la disequazione è sempre verificata

Esercizio 2.5.17.

$2^x = 7$ esprimiamo 7 come potenza in base 2

$2^x = 2^{\log_2 7}$ essendo la funzione esponenziale iniettiva

$x = \log_2 7$

Esercizio 2.5.18.

$2^x < 3$ esprimiamo 3 come potenza in base 2

$2^x < 2^{\log_2 3}$ essendo la funzione esponenziale monotona crescente

$x < \log_2 3$

Esercizio 2.5.19.

$(\frac{1}{3})^x > 5$ esprimiamo 5 come potenza in base $\frac{1}{3}$

$(\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{3})^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ essendo la funzione esponenziale monotona decrescente

$x < \log_{\frac{1}{3}} 5$

Esercizio 2.5.20.

$e^{2x} - 3e^x - 4 \leq 0$

poniamo $e^x = t$ ed otteniamo:

$t^2 - 3t - 4 \leq 0$

$-1 \leq t \leq 4$

da cui, ritornando alla variabile x, si ha:

$-1 \leq e^x \leq 4$

ed infine, tenendo conto che $e^x > 0$ per ogni x reale:

$x < \ln 4$.

Esercizio 2.5.21.

$\log_2 x = 3$ C.E.: $x > 0$

$\log_2 x = \log_2 2^3$ avendo espresso 3 come logaritmo in base 2

$x = 8$ soluzione accettabile

Esercizio 2.5.22.

$\log_3 x > -1$ C.E.: $x > 0$

$\log_3 x > \log_3 3^{-1}$ avendo espresso -1 come logaritmo in base 3

$x > \frac{1}{3}$ confrontando con le condizioni

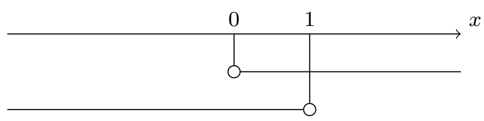
$x > \frac{1}{3}$

Esercizio 2.5.23.

$\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ C.E.: $x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^0$ avendo espresso 0 come logaritmo in base $\frac{1}{2}$

$x < 1$ ma confrontando con le condizioni



risulta $0 < x < 1$

Esercizio 2.5.24.

$\ln^2 x - \ln x - 2 \geq 0$ C.E.: $x > 0$

poniamo $\ln x = t$ ed otteniamo:

$t^2 - t - 2 \geq 0$

$t \leq -1, t \geq 2$

da cui, ritornando alla variabile x, si ha:

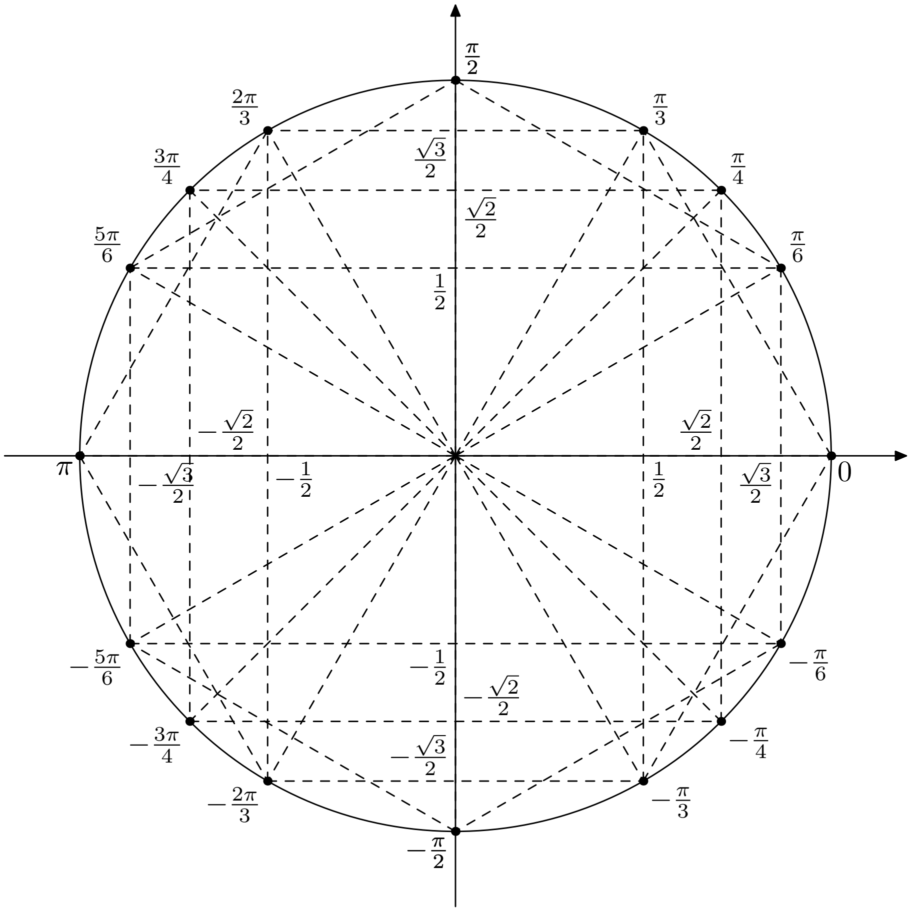
$\ln x \leq -1, \ln x \geq 2$

ed infine, intersecando con le condizioni di esistenza:

$0 < x \leq e^{-1}, x \geq e^2$.

Capitolo 3

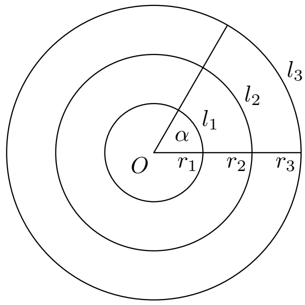
Funzioni goniometriche



[1]

[1] Figura trovata all'indirizzo: `http://melusine.eu.org/syracuse/metapost/cours/gosse/trigo.html`

3.1 Introduzione alla goniometria



Consideriamo le circonferenze concentriche in O di raggio $r_i > 0$; l'angolo al centro α individua su ciascuna gli archi l_i.

Dalla geometria elementare sappiamo che gli insiemi

$$R = \{r_1, r_2, r_3, ...\}$$

e

$$L = \{l_1, l_2, l_3, ...\}$$

sono 2 classi di grandezze direttamente proporzionali. Pertanto si ha che:

$$l_1 : r_1 = l_2 : r_2 = l_3 : r_3 = ...$$

tale rapporto è costante ed origina la seguente

Definizione 3.1.1. diremo *misura in radianti* di un angolo al centro di una circonferenza il rapporto (costante) fra l'arco da esso individuato e il raggio.

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Osservazione. La misura in radianti, essendo rapporto di grandezze omogenee, risulta un numero puro.

Determiniamo ora la misura in radianti di alcuni angoli notevoli. Dalla geometria elementare sappiamo che la lunghezza della circonferenza di raggio r è

$$\mathcal{C} = 2\pi r$$

L'angolo giro, angolo al centro corrispondente a tale arco, misura in radianti

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Si ricavano quindi facilmente le misure in radianti dell'angolo piatto

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

dell'angolo retto

$$\frac{l}{r} = \frac{\frac{\pi}{2} r}{r} = \frac{\pi}{2}$$

e, in generale, mediante la proporzione

$$\alpha \div \pi = \alpha^\circ \div 180^\circ$$

si può ricavare la misura in radianti di un angolo, nota quella in gradi, o viceversa.

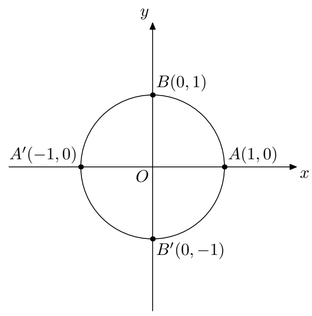
Osservazione. Dalla teoria della misura è noto che il rapporto fra 2 grandezze omogenee è uguale al rapporto fra le relative misure rispetto a qualunque unità di misura

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{mis(\mathcal{A})}{mis(\mathcal{B})}$$

α°	α
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$
135°	$3\pi/4$
150°	$5\pi/6$
180°	π
...	...

Dalle osservazioni fatte fin qui, non è restrittivo limitarsi a lavorare con la circonferenza di raggio $r = 1$.

Definizione 3.1.2. Diremo *circonferenza goniometrica* la circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano Oxy.



Osservazione. Poichè $\alpha = \frac{l}{r}$, lavorando con la circonferenza goniometrica, angolo e arco hanno la stessa misura.

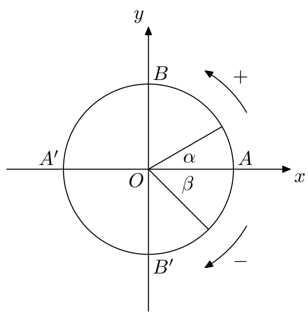
Per posizionare un angolo α, misurato in radianti, al centro della circonferenza goniometrica, abbiamo bisogno di alcune convenzioni:

1. il primo lato dell'angolo coincide con il semiasse positivo delle x;
2. assumiamo come verso di percorrenza positivo degli archi quello antiorario.

A è origine degli archi

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

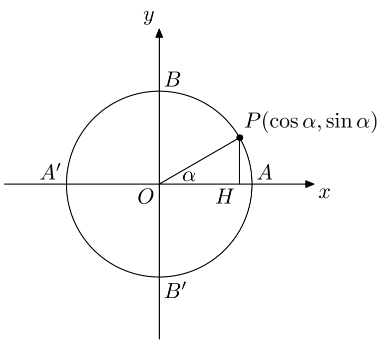
$$\beta = \frac{\pi}{4}$$



Detto P il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo α e la circonferenza goniometrica, diamo le seguenti definizioni.

Definizione 3.1.3. Diremo *seno* di un angolo α (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, l'ordinata del punto P.

Definizione 3.1.4. Diremo *coseno* di un angolo α (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, l'ascissa del punto P.



Teorema 3.1.1. *Prima relazione fondamentale della goniometria*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad \forall \alpha$$

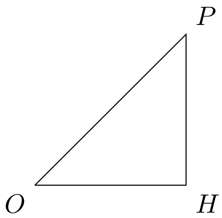
Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPH:

$$OH^2 + PH^2 = OP^2$$

da cui la tesi. □

3.2 Richiami geometrici

Ricordiamo alcune classiche applicazioni del Teorema di Pitagora. Consideriamo il triangolo rettangolo isoscele:



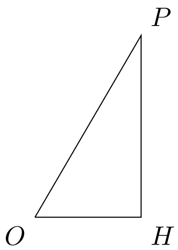
$$\widehat{O} \cong \widehat{P} \cong \pi/4$$

$$\widehat{H} \cong \pi/2$$

$$\overline{OP} = 1$$

$$\overline{OP} = \overline{OH}\sqrt{2}$$

Consideriamo il triangolo rettangolo semi-equilatero:



$$\widehat{O} \cong \pi/3$$

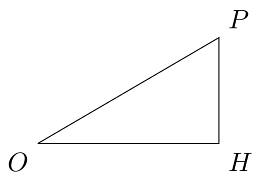
$$\widehat{P} \cong \pi/6$$

$$\widehat{H} \cong \pi/2$$

$$\overline{OP} = 1$$

$$\overline{PH} = \overline{OH}\sqrt{3}$$

Consideriamo il triangolo rettangolo semi-equilatero:



$\widehat{O} \cong \pi/6$

$\widehat{P} \cong \pi/3$

$\widehat{H} \cong \pi/2$

$\overline{OP} = 1$

$\overline{OH} = \overline{PH}\sqrt{3}$

Se i triangoli sopra considerati vengono ora riferiti alla circonferenza goniometrica in modo che OH si sovrapponga al semiasse positivo delle x e OP coincida con un suo raggio, si ottiene facilmente la seguente tabella di valori delle funzioni goniometriche seno e coseno di angoli notevoli:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0

Osservazione.

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

poichè il punto P di riferimento è lo stesso. Analogamente sarà:

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Questa relazione ci consente di osservare che seno e coseno sono funzioni dell'angolo α, definite come segue:

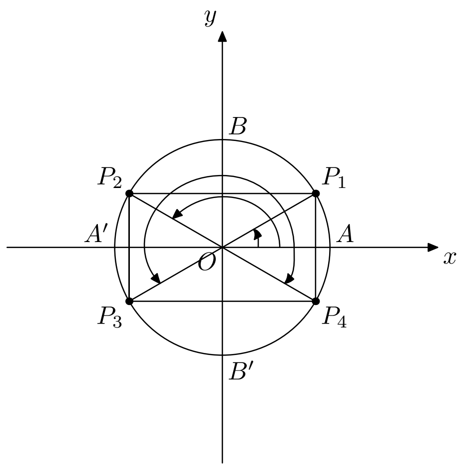
$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sin x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \cos x \end{aligned}$$

ove si è inteso essere x la misura in radianti dell'angolo x; diremo pertanto che tali funzioni godono della proprietà di periodicità con periodo $T = 2\pi$, esssendo questo il minimo dell'insieme $\{2k\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$.

3.3 Archi associati (per seno e coseno)

In questa sezione, mostreremo come il calcolo delle funzioni goniometriche seno e coseno di particolari archi sia riconducibile a conoscenze geometriche elementari.

Consideriamo un angolo α e il punto P_1 ad esso associato, il suo supplementare $\pi - \alpha$ associato a P_2, l'angolo $\pi + \alpha$ associato a P_3 e l'esplementare di α associato a P_4.

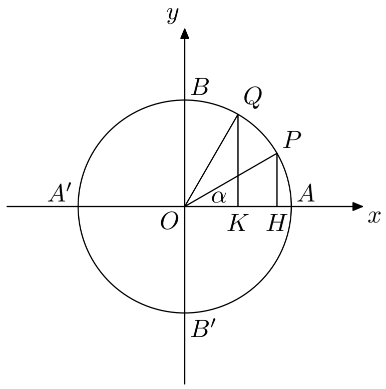


Dal grafico si deduce facilmente che:

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha) = -\sin(-\alpha) = -\sin(2\pi - \alpha)$$

$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\pi + \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha)$$

Consideriamo ora un angolo α e il punto P ad esso associato, il suo complementare $\pi/2 - \alpha$ associato a Q.



Osserviamo che i triangoli OPH e OQK sono congruenti:

1. $OP \cong OQ$ (raggi stessa circonferenza)
2. $O\widehat{H}P \cong O\widehat{K}Q \cong \pi/2$
3. $H\widehat{O}P \cong O\widehat{Q}K \cong \alpha$

Si deduce quindi che:

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$$

Ciò giustifica il nome dato alla funzione goniometrica coseno che dal latino significa *complementi sinus* (cioè seno del complementare).

Osservazione.

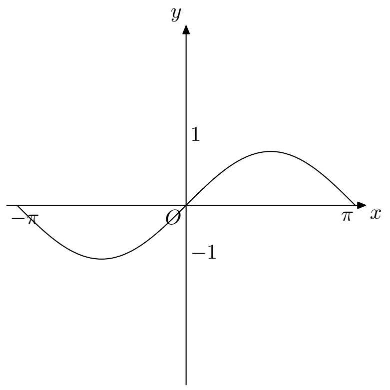
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

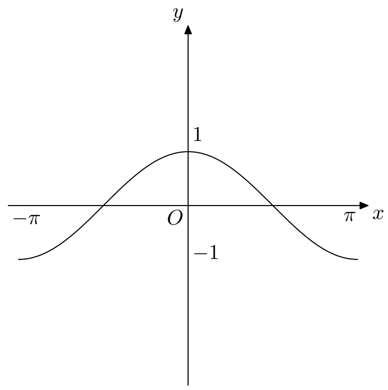
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Queste proprietà ci consentono di concludere che le funzioni seno e coseno sono rispettivamente *dispari* e *pari*.

Esamiamo ora i grafici delle funzioni seno e coseno detti rispettivamente *sinusoide* e *cosinusoide*. La periodicità delle funzioni ci permette di rappresentarle in un qualunque intervallo di ampiezza 2π e la loro simmetria ci suggerisce di scegliere $[-\pi, \pi]$.

Grafici sinusoide e cosinusoide

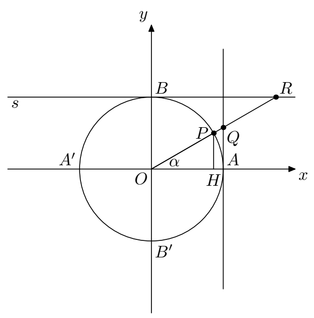




Detti P il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo α e la circonferenza goniometrica, Q il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo α o il suo prolungamento e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A di coordinate $(1, 0)$, R il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo α o il suo prolungamento e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto B di coordinate $(0, 1)$, diamo le seguenti definizioni.

Definizione 3.3.1. Diremo *tangente* di un angolo α (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, l'ordinata del punto Q.

Definizione 3.3.2. Diremo *cotangente* di un angolo α (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, l'ascissa del punto R.



$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$Q(1, \tan\alpha)$

$R(\cot\alpha, 1)$

Teorema 3.3.1 (Seconda relazione fondamentale della goniometria)**.**

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \forall\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. Consideriamo i triangoli rettangoli OHP e OAQ; essi sono simili:

1. $O\widehat{H}P \cong O\widehat{A}T \cong \frac{\pi}{2}$
2. $P\widehat{O}H \cong T\widehat{O}A \cong \alpha$
3. $O\widehat{P}H \cong O\widehat{T}A \cong \frac{\pi}{2} - \alpha$

pertanto i lati corrispondenti sono in proporzione:

$$PH : OH = QA : OA$$

da cui facilmente si ricava la tesi. □

Teorema 3.3.2 (Terza relazione fondamentale della goniometria)**.**

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \forall\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente. □

Osservazione. Dalle suddette relazioni si deduce che:

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1, \qquad \forall \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0	0	1	0	non esiste
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	1	0	non esiste	0

Osservazione.

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

poichè il punto P di riferimento è lo stesso. Analogamente sarà:

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Questa relazione ci consente di osservare che tangente e cotangente sono funzioni dell'angolo α, definite come segue:

$$\begin{aligned} \tan\colon \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \cot x \end{aligned}$$

ove si è inteso essere x la misura in radianti dell'angolo x; diremo pertanto che tali funzioni godono della proprietà di periodicità con periodo $T = \pi$, esssendo questo il minimo dell'insieme $\{k\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$.

3.4 Archi associati (per tangente e cotangente)

In questa sezione, mostreremo come il calcolo delle funzioni goniometriche tangente e cotangente di particolari archi sia riconducibile a conoscenze geometriche e goniometriche elementari. Dalle relazioni fondamentali e dalle considerazioni sugli archi associati fatte su seno e coseno, si deduce facilmente che:

$$\tan\alpha = -\tan(\pi - \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = -\tan(-\alpha) = -\tan(2\pi - \alpha)$$
$$\cot\alpha = -\cot(\pi - \alpha) = \cot(\pi + \alpha) = -\cot(-\alpha) = -\cot(2\pi - \alpha)$$

Allo stesso modo, dalle relazioni fondamentali e dalle considerazioni sugli archi complementari fatte su seno e coseno, si deduce facilmente che:

$$\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan\alpha$$

Ciò giustifica il nome dato alla funzione goniometrica cotangente che dal latino significa *complementi tangens* (cioè tangente del complementare).

Osservazione.

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Queste proprietà ci consentono di concludere che le funzioni tangente e cotangente sono *dispari.*

Esamiamo ora i grafici delle funzioni tangente e cotangente detti rispettivamente *tangentoide* e *cotangentoide.* La periodicità delle funzioni ci permette di rappresentarle in un qualunque intervallo di ampiezza π e la loro simmetria ci suggerisce di scegliere $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3.5 Funzioni inverse

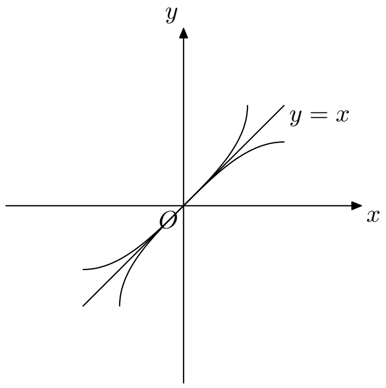
In questa sezione, renderemo biiettive le funzioni goniometriche e definiremo le loro inverse. Consideriamo quindi la seguente restrizione della funzione $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} \sin\colon [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto y = \sin x \end{aligned}$$

La funzione goniometrica $y = \sin x$ con le restrizioni operate sul dominio e sul codominio risulta biiettiva e quindi invertibile. Notiamo che essa è anche monotona crescente.

Definizione 3.5.1. Diremo funzione inversa della funzione goniometrica $y = \sin x$ o funzione *arcoseno*, la funzione così definita

$$\begin{aligned} \arcsin\colon [-1, 1] &\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x &\longmapsto y = \arcsin x \end{aligned}$$



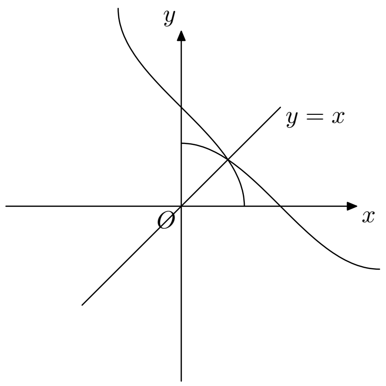
Consideriamo quindi la seguente restrizione della funzione $y = \cos x$.

$$\begin{aligned} \cos\colon [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto y = \cos x \end{aligned}$$

La funzione goniometrica $y = \cos x$ con le restrizioni operate sul dominio e sul codominio risulta biiettiva e quindi invertibile. Notiamo che essa è anche monotona decrescente.

Definizione 3.5.2. Diremo funzione inversa della funzione goniometrica $y = \cos x$ o funzione *arcocoseno*, la funzione così definita

$$\begin{aligned} \arccos\colon [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto y = arc\cos x \end{aligned}$$



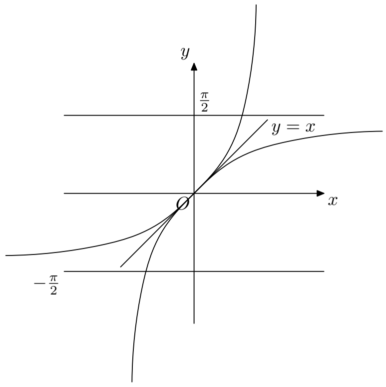
Consideriamo quindi la seguente restrizione della funzione $y = \tan x$.

$$\begin{aligned} \tan\colon]-\pi/2, \pi/2[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \tan x \end{aligned}$$

La funzione goniometrica $y = \tan x$ con le restrizioni operate sul dominio e sul codominio risulta biiettiva e quindi invertibile. Notiamo che essa è anche monotona crescente.

Definizione 3.5.3. Diremo funzione inversa della funzione goniometrica $y = \tan x$ o funzione *arcotangente*, la funzione così definita

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[\\ x &\longmapsto y = \arctan x \end{aligned}$$



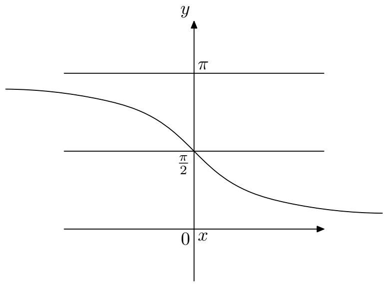
Consideriamo quindi la seguente restrizione della funzione $y = \cot x$.

$$\begin{aligned} \cot\colon]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \cot x \end{aligned}$$

La funzione goniometrica $y = \cot x$ con le restrizioni operate sul dominio e sul codominio risulta biiettiva e quindi invertibile. Notiamo che essa è anche monotona decrescente.

Definizione 3.5.4. Diremo funzione inversa della funzione goniometrica $y = \cot x$ o funzione *arcocotangente*, la funzione così definita

$$\begin{aligned} \text{arccot}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow]0, \pi[\\ x &\longmapsto y = \text{arccot } x \end{aligned}$$



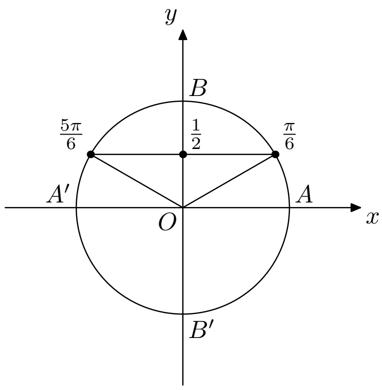
3.6 Equazioni e disequazioni goniometriche elementari

Sono del tipo $\sin x \lessgtr b$ e $\cos x \lessgtr b$. Per la loro risoluzione si proceda come negli esempi seguenti.

Esercizio 3.6.1. $\sin x = \dfrac{1}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

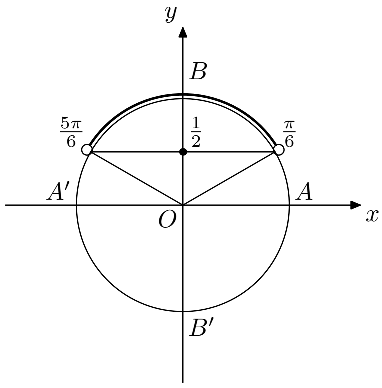
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



Esercizio 3.6.2. $\sin x > \dfrac{1}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



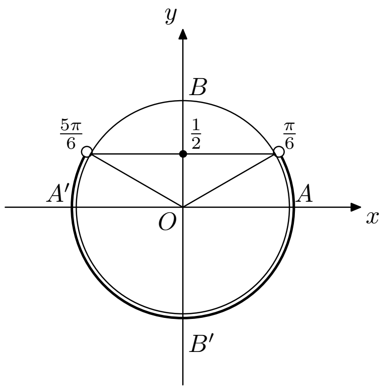
Esercizio 3.6.3. $\sin x < \frac{1}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$$

oppure:

$$\frac{-7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$



Osservazione. La soluzione di una disequazione goniometrica è generalmente un'unione di intervalli limitati; la periodicità della funzione consente una scrittura sintetica mediante la scelta di uno qualunque di questi intervalli.

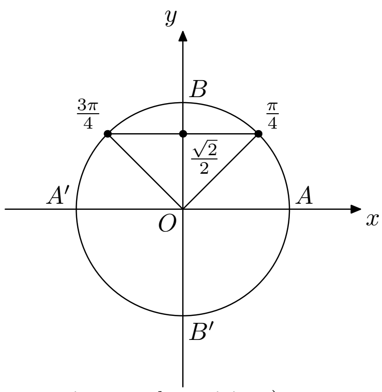
Esercizio 3.6.4. $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$
$$2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

cioè

$$x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi,$$
$$x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$$



ove si intende che $k \in \mathbb{Z}$ (di seguito intenderemo senz'altro sottintesa tale posizione).

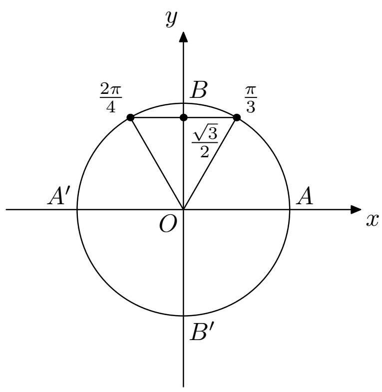
Esercizio 3.6.5. $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$
$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

cioè

$$x = k\pi,$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$



Esercizio 3.6.6. $2\sin^2 x - \sin x - 1 \geq 0$

poniamo

$$\sin x = t \qquad 2t^2 - t - 1 \geq 0$$

le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$t_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \quad t_2 = 1$$

quindi la disequazione è verificata per:

$$t \leq -\frac{1}{2}; \qquad t \geq 1$$

per la posizione fatta

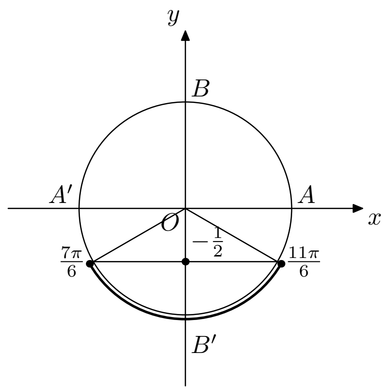
$$\sin x \leq -\frac{1}{2}; \qquad \sin x \geq 1$$

ovvero, vista la definizione di seno di un angolo

$$\sin x \leq -\frac{1}{2}; \qquad \sin x = 1$$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$



Esercizio 3.6.7. $2\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$

poniamo

$$\cos x = t \qquad 2t^2 - t - 1 < 0$$

le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$t_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad t_2 = 1$$

quindi la disequazione è verificata per:

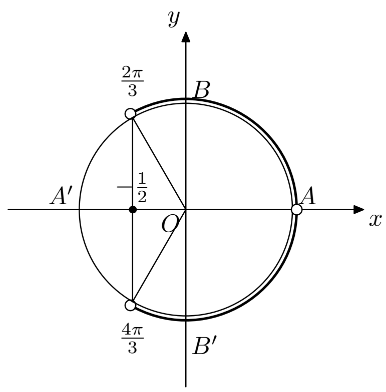
$$-\frac{1}{2} < t < 1$$

per la posizione fatta

$$-\frac{1}{2} < \cos < 1$$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

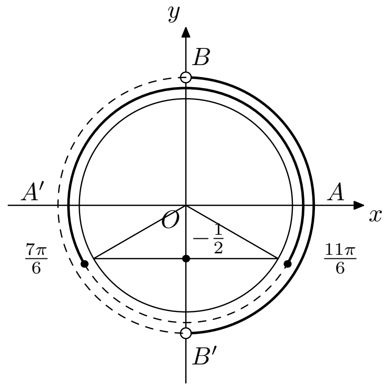
$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x \neq 2k\pi$$



Esercizio 3.6.8. $\dfrac{2\sin x + 1}{cosx} \geq 0$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura e studiamo il segno dei fattori riportandolo in un grafico di segno

$$2\sin x + 1 \geq 0$$
$$\sin x \geq -\frac{1}{2}$$
$$\cos x > 0$$



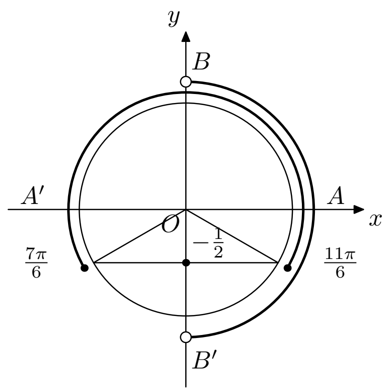
le soluzioni sono:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Esercizio 3.6.9. $\begin{cases} 2\sin x + 1 \geq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura e risolviamo separatamente le 2 disequazioni riportandone le soluzioni in un grafico di sistema

$$2\sin x + 1 \geq 0$$
$$\sin x \geq -\frac{1}{2}$$
$$\cos x > 0$$



le soluzioni sono:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

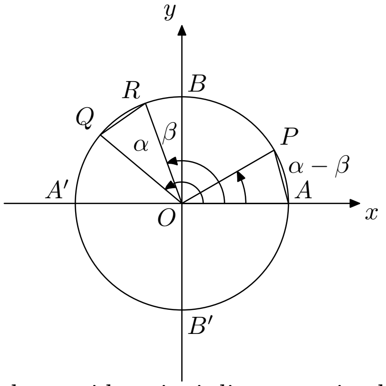
3.7 Formule goniometriche

Dimostreremo di seguito alcune formule di particolare rilevanza per le molteplici applicazioni all'interno di equazioni e disequazioni goniometriche.

3.7.1 Formule di addizione e sottrazione

1. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha \qquad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
4. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha \qquad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dim. (1.)
Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura



$A(1, 0)$

$P(\cos\alpha - \beta)$

$Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$R(\cos\beta, \sin\beta)$

da considerazioni di geometria elementare si deduce che

$$d(A, P) = d(Q, R)$$

e ricordando la formula della distanza fra 2 punti del piano si ottiene:

$$\sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$

da cui

$$\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

$$\underbrace{\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)}_{1} + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) =$$

$$= \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1} + \underbrace{\cos^2\beta + \sin^2\beta}_{1} - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

avendo usato la 1^a relazione fondamentale e semplificando

$$-2\cos(\alpha - \beta) = -2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

infine dividendo per -2 ambo i membri si ottiene la tesi, ovvero

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

□

Dim. (2.)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta)) = \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

avendo usato la formula precedente, la parità della funzione coseno e la disparità della funzione seno. □

Dim. (3.)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \cos(\pi/2-(\alpha-\beta)) = \cos((\pi/2-\alpha)+\beta) = \\ &= \cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta-\sin(\pi/2-\alpha)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

avendo usato le formule precedenti e le proprietà delle funzioni coseno e seno. □

Dim. (4.)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos(\pi/2-(\alpha+\beta)) = \cos((\pi/2-\alpha)-\beta) = \\ &= \cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta+\sin(\pi/2-\alpha)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

avendo usato le formule precedenti e le proprietà delle funzioni coseno e seno. □

Osservazione. Le formule relative alle funzioni tangente e cotangente si ricavano usando le relazioni fondamentali:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} = \\ &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi/2+k\pi\end{aligned}$$

avendo opportunamente diviso numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$ e posto le necessarie condizioni di esistenza. Analogamente si ricavano tutte le altre.

Esercizio 3.7.1. $\sqrt{3}\sin x-\cos x>1$

osserviamo che $\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$ e sostituiamo quindi nella disequazione:

$$\tan\frac{\pi}{3}\sin x-\cos x>1$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x-\cos x>1$$

moltiplichiamo ambo i membri per $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ e otteniamo:

$$\sin x\sin\frac{\pi}{3}-\cos x\cos\frac{\pi}{3}>\frac{1}{2}$$

moltiplichiamo ambo i membri per -1 e utilizziamo la formula di addizione per il coseno:

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})<-\frac{1}{2}$$

la disequazione così ottenuta è del tipo sopra svolto ed ha come soluzione:

$$\frac{2\pi}{3}+2k\pi<x+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

da cui:

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\pi+2k\pi$$

3.7.2 Formule di duplicazione

1. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}$

Dim. (1.)

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

avendo utilizzato le formule di addizione. Inoltre, usando la 1^a relazione fondamentale, si ottengono le altre forme equivalenti:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

□

Dim. (2.)

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

avendo utilizzato le formule di addizione. □

Osservazione. Le formule relative alle funzioni tangente e cotangente si ricavano usando le relazioni fondamentali:

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \alpha \neq \pi/4 + k\pi/2\end{aligned}$$

avendo opportunamente diviso numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$ e posto le necessarie condizioni di esistenza. Analogamente si ricavano tutte le altre.

Esercizio 3.7.2. $\sin 2x = \sin x$ utilizziamo la formula di duplicazione per il seno:

$$2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

raccogliamo $\sin x$ a fattor comune:

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

per la legge di annullamento del prodotto otteniamo:

$$\sin x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

da cui:

$$x = k\pi, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Proponiamo ora per lo stesso esercizio una diversa strategia risolutiva:

$$\sin 2x = \sin x$$

osserviamo che 2 angoli hanno lo stesso seno quando sono uguali oppure quando sono supplementari (a meno di multipli interi di 2π) e quindi:

$$2x = x + 2k\pi, \quad 2x = (\pi - x) + 2k\pi$$

da cui:

$$x = 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$$

notiamo che le soluzioni ottenute sono del tutto equivalenti alle precedenti.

3.7.3 Formule di bisezione

$$1. \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$$2. \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

Dim. (1.)

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad 2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

avendo utilizzato le formule di duplicazione.

□

Dim. (2.)

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

avendo utilizzato le formule di duplicazione.

□

Osservazione. Le formule relative alle funzioni tangente e cotangente si ricavano usando le relazioni fondamentali:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \qquad \forall\alpha\neq\pi+2k\pi$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \qquad \forall\alpha\neq\pi+2k\pi$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \forall\alpha\neq k\pi$$

avendo usato le formule di bisezione per ottenere la prima delle tre forme equivalenti e avendo moltiplicato numeratore e denominatore opportunamente per $1+\cos\alpha$ (rispettivamente per $1-\cos\alpha$) per ottenenere la 2^a e la 3^a e posto le necessarie condizioni di esistenza. Analogamente si ricavano tutte le altre.

Esercizio 3.7.3. $\cos^2\frac{x}{2} = \cos x$

utilizziamo la formula di bisezione relativa al coseno: $\frac{1+\cos x}{2} = \cos x$ usando opportunamente i principi di equivalenza, otteniamo: $\cos x = 1$ da cui: $x = 2k\pi$.

3.7.4 Formule di prostaferesi

1. $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \forall p,q \in \mathbb{R}$
2. $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \forall p,q \in \mathbb{R}$
3. $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \forall p,q \in \mathbb{R}$
4. $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \forall p,q \in \mathbb{R}$

Dim. (1.)

Riprendiamo le formule di addizione e sottrazione relative alla funzione seno:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$$

sommando membro a membro otteniamo:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \quad (1)$$

ponendo

$$\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ \alpha-\beta = q \end{cases}$$

risulta che

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{p+q}{2} \\ \beta = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

da cui sostituendo nella (1) si ottiene la tesi. □

Osservazione. Le altre 3 formule si ricavano in modo del tutto analogo, considerando a coppie le formule di addizione o sottrazione relative alla sola funzione seno o coseno e sommando oppure sottraendo opportunamente membro a membro.

Osservazione. Le formule di prostaferesi relative alle funzioni tangente e cotangente si ricavano usando le relazioni fondamentali e le formule dimostrate.

$$\begin{aligned} \tan p + \tan q &= \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p\cos q + \sin q\cos p}{\cos p\cos q} = \\ &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q} \qquad \forall p,q \neq \pi/2 + k\pi \end{aligned}$$

Analogamente si ricavano tutte le altre.

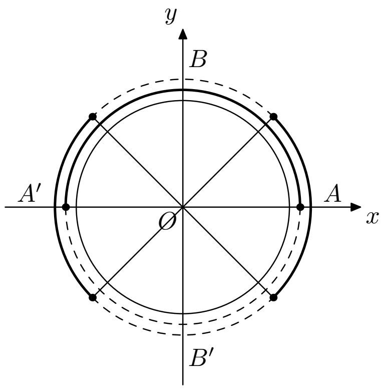
Esercizio 3.7.4. $\sin 3x - \sin x > 0$

utilizziamo la 2^a formula di prostaferesi e otteniamo:

$$2\cos 2x\sin x > 0$$

come visto precedentemente, ci riferiamo alla circonferenza goniometrica come in figura e studiamo il segno dei fattori riportandolo in un grafico di segno:

$$\cos 2x \geq 0$$
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$\sin x \geq 0$$



le soluzioni sono:

$2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$.

3.7.5 Formule di Werner

Sono le formule inverse delle precedenti.

1. $\sin\alpha\cos\beta = 1/2(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$ $\quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
2. $\cos\alpha\cos\beta = 1/2(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ $\quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
3. $\sin\alpha\sin\beta = -1/2(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$ $\quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Dim. (1.2.3.)

Si applicano le formule di prostaferesi al secondo membro.
Si farà uso di tali formule prevalentemente nel calcolo integrale.

□

3.7.6 Formule razionali in tangente

1. $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \forall\alpha \neq \pi + 2k\pi$
2. $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \forall\alpha \neq \pi + 2k\pi$

Dim. (1.)

$$\sin\alpha = \sin 2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

che è la tesi, con le dovute condizioni di esistenza. □

Dim. (2.)

$$\cos\alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

che è la tesi, con le dovute condizioni di esistenza. □

Esercizio 3.7.5. $\sqrt{3}\sin x - \cos x > 1$

utilizziamo le formule razionali in $\tan\frac{x}{2}$ e, sotto la condizione $x \neq \pi + 2k\pi$ cui è vincolato l'uso delle stesse, otteniamo:

$$\sqrt{3}\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} > 1$$

moltiplicando ambo i membri per $1+\tan^2\frac{x}{2}$ si ha:

$$2\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} - 1 + \tan^2\frac{x}{2} > 1 + \tan^2\frac{x}{2}$$

semplificando e razionalizzando otteniamo:

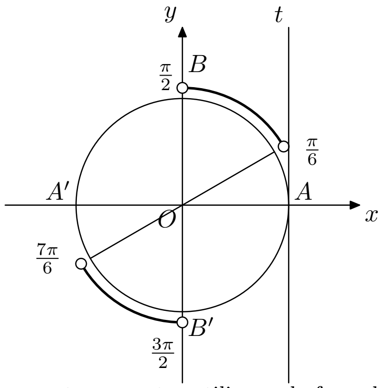
$$\tan\frac{x}{2} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Riferiamoci ora alla circonferenza goniometrica come in figura

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

da cui

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$



non rimane ora che controllare se le condizioni aggiuntive poste per poter utilizzare le formule razionali costituiscono delle soluzioni. Sostituendo $x = \pi + 2k\pi$ nella disequazione data, si ottiene: $0+1 > 1$ che è evidentemente assurda. Pertanto le soluzioni sono:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

che coincidono con quelle trovate utilizzando le formule di addizione. Proponiamo ora, per lo stesso esercizio, una ulteriore strategia risolutiva che richiede conoscenze elementari di geometria analitica.

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x > 1$$

la disequazione risulta equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x - \cos x > 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

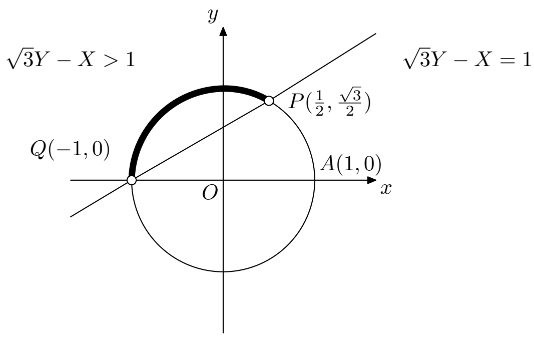
ponendo $\sin x = Y$ e $\cos x = X$ e sostituendo nel sistema si ha:

$$\begin{cases} \sqrt{3}Y - X > 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

Riferiamoci ora alla circonferenza goniometrica come in figura

I punti della circonferenza di equazione $Y^2 + X^2 = 1$ comuni al semipiano di equazione $\sqrt{3}Y - X > 1$ sono tutti e soli quelli dell'arco PQ non passante per A; essendo infine i punti P e Q associati agli angoli $\frac{\pi}{3}$ e π rispettivamente, le soluzioni sono:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi.$$



3.8 Esercizi riassuntivi proposti

1. $2 - \dfrac{1}{5^{1-2x}} = \dfrac{1}{25^{1-2x}}$

$[x = \frac{1}{2}]$

2. $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x-3) > 0$

$[3 < x < \frac{7}{2}]$

3. $\dfrac{16 - 8x + x^2}{3^x - \sqrt{3}} \leq 0$

$[x < \frac{1}{2}, x = 4]$

4. $2^{x+2} - 2^{x+1} - 2^x - 2^{x-1} - 2^{x-2} = 1$

$[x = 2]$

5. $\log_2 \dfrac{1+x}{1-x} + 1 < 0$

$[-1 < x < -\frac{1}{3}]$

6. $\dfrac{9^x - 4 \cdot 3^x + 3}{\log_{\frac{1}{3}} |x|} \geq 0$

$[-1 < x < 0]$

7. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{9-x^2}} < 32$

$[-3 \leq x \leq 3]$

8. $\begin{cases} 3^{x^2} - 81 < 0 \\ 1 - \log_2(2x-1) > 0 \end{cases}$

$[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}]$

9. $\log_3(x-2) - \log_3 x + 1 < \log_3(4-x)$

$[2 < x < 3]$

10. $2\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x+7)$

$[-\frac{7}{4} < x \leq -\sqrt{3}, x \geq \sqrt{3}]$

11. $\log_4 |x| \cdot \log_{|x|}(x^2+1) = \dfrac{1}{2}$

$[\{\}]$

12. $1 + 2\log_9 x^2 \leq \log_3(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

$[-\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \text{ ma } x \neq 0]$

13. $\ln x - 2\log_x e = 1$

$[x = e^2, x = \frac{1}{e}]$

14. $\dfrac{\log_2(5x - x^2) - 2}{3^{\frac{x}{x^2-4}}} \geq 0$

$[1 \leq x \leq 4 \text{ ma } x \neq 2]$

15. $\log_x(2x-1) > 1$

$[x > \frac{1}{2} \text{ ma } x \neq 1]$

16. $\sin 5x - 1 = 0$

$[x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}]$

17. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$[-\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi]$

18. $3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$

$[x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$

19. $\sin 2x = 2\cos x$

$[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$

20. $\frac{1 - 2\sin x}{\tan x - 1} \leq 0$

$[\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

21. $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin x > 1$

$[2k\pi < x < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi]$

22. $\frac{\sin 3x + \sin x}{2\sin^2 x \cos x} \geq 0$

$[k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

23. $2\sin x = \sin 2x$

$[x = k\pi]$

24. $\frac{1 - 2\cos x}{\tan x} \leq 0$

$[2k\pi < x \leq\leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]$

25. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos x > 1$

$[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi]$

26. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \cos 3x} < 0$

$[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x \neq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$

27. $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

$[\forall x \in \mathbb{R}]$

28. $\ln(\cos^2 x - 3) = 2$

$[\{\}]$