SSIS Udine
Anno Accademico 2005/2006

Corso Didattica della Logica e Laboratorio

Introduzione alla Logica

Giada Marzinotto

16 maggio 2006

Classe Primo anno di liceo; se liceo scientifico l'unità serve come parte introduttiva alla logica ma va ampliata e corredata da una scelta di esercizi di ambito disciplinare.

Prerequisiti Non sono necessari particolari prerequisiti in quanto l'unità didattica è costruita in gran parte su osservazioni e considerazioni che scaturiscono dall'uso comune del linguaggio. Dal momento che si accenna in qualche punto a dimostrazioni, sarebbe opportuno trattare l'argomento possibilmente in parallelo alla presentazione dei primi teoremi di geometria piana.

Obiettivi introdurre gli elementi della logica proposizionale e predicativa; in particolare riconoscere le regole d'uso dei connettivi logici e dei quantificatori, saperle motivare e individuare i riscontri di tali regole nell'uso quotidiano del linguaggio. La scelta di trarre gli esempi dal racconto di L. Carroll *Alice nel paese delle meraviglie* è stata attuata sia per mostrare questo collegamento tra logica e pensiero razionale anche al di fuori dell'ambito puramente matematico, sia per avere un modo vicino alla sensibilità degli studenti di trattare il problema della conseguenza logica e del valore di verità delle proposizioni.

Tempi 7 unità orarie (4 per la logica proposizionale, 3 per la logica predicativa)

Indice

1 Introduzione

In questa unità didattica ci occuperemo di introdurre i concetti fondamentali della Logica proposizionale e della Logica predicativa: cerchiamo innanzitutto di capire cosa intendiamo quando parliamo di Logica.

Borogars are mimsy whenever it is brilling.
It is now brilling and this thing is a borogar.

This thing is mimsy.

Quello sopra riportato è un sillogismo che è stato commentato anche da Lewis Carroll: è cioè una forma di ragionamento composta da due affermazioni, dette *premesse*, dalle quali si deduce una terza affermazione detta *conclusione*. La deduzione è segnalata dalla linea orizzontale che separa premesse e conclusione; potremmo esprimere la stessa cosa dicendo che se vale la premessa 1 e se vale la premessa 2 allora vale la conclusione. Osserviamo con attenzione il ragionamento: la struttura che lo caratterizza è la stessa che si riconosce nel seguente:

Marco è triste ogni volta che piove.
Ora piove e questa persona è Marco.

Questa persona è triste.

Non abbiamo problemi a riconoscere, nel modo di ragionare cui siamo usualmente abituati, che se una determinata persona di nome Marco è sempre triste quando piove e se in questo momento piove e abbiamo davanti proprio lo stesso Marco vedremo che quella persona è triste; ciò indipendentemente dal fatto che davvero conosciamo una persona che si chiami Marco e che questa persona sia effettivamente triste ogni volta che piove. Allo stesso modo allora dovremo ammettere che se degli oggetti chiamati "borogars" hanno la proprietà di essere "mimsy" ogni volta che si verifica la condizione "it is brilling" e se in questo momento "it is brilling" e abbiamo davanti un oggetto che è un "borogar" allora quell'oggetto dovrà essere "mimsy": questo a prescindere dal fatto che i termini "borogar", "mimsy" e "it is brilling" non abbiano un significato riconosciuto né nella nostra lingua né in nessun'altra, nel senso che non vengono associati ad alcun oggetto, proprietà o situazione determinata. Se preferiamo possiamo pensare che, se in un qualche mondo si trovano degli oggetti detti "borogar" che sono "mimsy" quando "it is brilling" e se ..., allora ..., e così via. La Logica (per lo meno quella che presenteremo in questa unità) si occupa appunto di studiare la *validità* di un ragionamento, ovvero di stabilire se il processo con cui da determinate assunzioni o *premesse* vengono ricavate delle *conclusioni* segua in modo corretto le regole del pensiero razionale: si tratta dunque di prendere in considerazione la struttura che regge un determinato processo di pensiero, piuttosto che i significati contingenti dei termini e delle espressioni che in esso compaiono: questo non vuol dire, chiaramente, che la Logica si occupa di ragionamenti "senza senso", bensì che essa ricerca e analizza le strutture comuni a ragionamenti che possono essere contestualizzati negli ambiti più disparati. A questo punto è indispensabile stabilire quali siano le regole che riconosciamo come corrette e in che modo vadano applicate affinché si possa dire di un ragionamento che è valido: vogliamo capire insomma quando, dato un certo insieme Γ di assunzioni (o ipotesi), è da considerarsi "corretto" trarre da Γ una determinata conclusione p. In termini logici, quando ciò accade si dice che "da Γ deriva p" o che "p è derivabile da Γ" o che "esiste una derivazione di p da Γ". Questa relazione di derivabilità viene indicata in generale con

$$\Gamma \rhd p \qquad \text{oppure} \qquad \begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ p\end{array}$$

Una derivazione verrà rappresentata in generale come un albero in cui alle foglie troviamo le ipotesi e alla radice la conclusione: ad esempio

Se Lucia va al cinema allora Marta rimane a casa. Marta non è rimasta a casa, oppure è stata invitata Stefania. Sappiamo che Stefania non è stata invitata. Allora Lucia non è andata al cinema.

è una derivazione formata dalle *proposizioni* (che indichiamo con lettere minuscole)

p: Lucia va al cinema
q: Marta rimane a casa
r: Stefania è stata invitata

e si rappresenta con

$$\dfrac{p \to q \qquad \dfrac{\neg q \lor r \qquad \neg r}{\neg q}}{\neg p}$$

Procederemo d'ora in poi nel lavoro traendo gli esempi necessari dal racconto *"Alice nel paese delle meraviglie"* di L. Carrol.

2 La logica proposizionale

"Il pepe rende la gente così infiammabile... e l'aceto la rende acida... e la camomilla la rende amara... e le caramelle e i dolci fan diventare mansueti i bambini... Se gli adulti sapessero queste cose, non sarebbero tanto avari di dolci." (cap. 9)
"Dovrò mangiare o bere qualcosa..." (cap. 4)
"Ti sarei grato se non mi schiacciassi in questo modo" disse il Ghiro (cap. 11)

Ogni volta che parliamo o scriviamo o in qualche modo ci esprimiamo, utilizziamo delle frasi; in modo più preciso, diciamo che utilizziamo delle *proposizioni* collegate tra loro da dei *connettivi*. Nelle frasi riportate qui sopra si riconoscono i connettivi *e* (congiunzione), *o* (disgiunzione), *se ... allora ...* (implicazione); si può inoltre osservare l'uso del *non* (negazione). Il linguaggio che usiamo tutti i giorni è naturalmente molto ricco e vario: basta pensare che i verbi si usano in tempi diversi, ad esprimere azioni ed eventi presenti, passati o futuri; usiamo forme condizionali e imperative, che esprimono desideri o comandi; arricchiamo il discorso con forme anche complicate di subordinazione, con complementi e talvolta con esclamazioni; in più sappiamo bene che molto spesso il linguaggio assume sfumature (implicazioni emotive, doppi sensi, ironie ...)

che non sono classificabili perché in genere strettamente legate al contesto in cui ci si pone, alla sensibilità di chi riceve il messaggio e così via. Non ci occuperemo di tutti questi aspetti: nostro compito sarà piuttosto studiare la struttura essenziale, e dunque molto semplificata rispetto alla ricchezza del linguaggio, di un ragionamento. Ci occuperemo in questa fase di riconoscere e studiare le norme che regolano l'introduzione, l'eliminazione e in genere l'utilizzo in un processo di pensiero proprio di quei connettivi che abbiamo riconosciuto nei brani di cui sopra e che vengono indicate in Logica con determinati simboli:

- la congiunzione *e* ($\wedge$);
- la disgiunzione *o* ($\vee$);
- l'implicazione *se ... allora* ($\rightarrow$);
- inoltre la negazione *non*, che non è un connettivo ($\neg$)

2.1 Le regole per $\wedge$

Introduzione *Alcuni uccelli se la batterono di corsa; una vecchia Gazza prese a imbacuccarsi con ogni cura ...* (cap. 3)

Le proposizioni che riconosciamo nell'esempio sono due:

p: alcuni uccelli se la batterono di corsa
q: una vecchia Gazza prese a imbacuccarsi con ogni cura

Se assumiamo sia l'affermazione p sia l'affermazione q, nel nostro modo di ragionare è legittimo indicare p *e* q: in altri termini la congiunzione lega due proposizioni quando assumiamo che valgano entrambe: la regola di introduzione si esprime dunque come

$$\frac{p \qquad\qquad q}{p \wedge q}$$

Eliminazione *"Come bambino sarebbe stato orribilmente brutto, ma come maialino non mi sembra affatto male ..."* (cap. 6)

Iniziamo osservando un fatto: nel ragionamento, per collegare proposizioni non usiamo solo i connettivi di cui abbiamo parlato sopra, ma anche altre particelle (ma, però, quando, ecc), oltre a segni di interpunzione; in generale però è possibile, con opportune semplificazioni, ricondurre tali particelle e segni di interpunzione ai connettivi già elencati. Un esempio è proprio nel brano riportato sopra, in cui la virgola e il "ma", dal punto di vista logico, sono del tutto equivalenti a una congiunzione; dunque la proposizione è del tipo p $\wedge$ q, con

p: come bambino sarebbe stato orribilmente brutto
q: come maialino non mi sembra affatto male

Proprio per il significato che attribuiamo alla congiunzione, significato di cui abbiamo già discusso sopra, se ammettiamo due proposizioni congiunte allora dobbiamo ammettere separatamente l'una e l'altra: formuleremo dunque la regola di eliminazione di $\wedge$ come

$$\frac{p \wedge q}{p} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

2.2 Le regole per $\vee$

Introduzione *Il pozzo era molto profondo o lei [Alice] stava precipitando molto lentamente ...* (cap. 1)

Consideriamo la frase riportata: è costituita da due proposizioni

p: il pozzo era molto profondo
q: lei stava precipitando molto lentamente

unite dalla disgiunzione "o": si può dunque esprimere come $p \vee q$. Siamo naturalmente disposti ad ammettere che se il pozzo è profondo allora il pozzo è profondo o Alice sta precipitando molto lentamente; allo stesso modo possiamo tranquillamente accettare che se Alice sta precipitando molto lentamente allora il pozzo è profondo o Alice sta precipitando molto lentamente: in altri termini, una qualsiasi delle due proposizioni p e q è sufficiente per derivare $p \vee q$. Diamo quindi la regola di *introduzione del* $\vee$:

$$\frac{p}{p \vee q} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{q}{p \vee q}$$

Eliminazione *"Se mi fai allungare posso afferrare la chiave, se mi fai rimpicciolire posso strisciare sotto la porta, così in un modo o nell'altro arrivo nel giardino..."* (cap. 1)

Esprimiamo la frase in modo più articolato: Alice è convinta che la torta che sta per mangiare la farà allungare oppure rimpicciolire e da entrambe le ipotesi trae alcune conclusioni. Schematizziamo:

p: mi fai allungare
q: mi fai rimpicciolire
r: arrivo nel giardino
s: posso afferrare la chiave
t: posso strisciare sotto la porta

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{p}}{s}}{r} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{q}}{t}}{r} \qquad p \vee q}{r}$$

In generale la regola di eliminazione di $\vee$ rappresenta il *ragionamento per* *casi* e si esprime in questa forma:

$$\cfrac{\begin{array}{ccc} \overline{p} & \overline{q} & \\ \nabla & \nabla & \\ r & r & p \vee q \end{array}}{r}$$

Osservazione 1. *La lineetta sopra le ipotesi p e q indica un'operazione di* scarico. *Questa regola afferma in sostanza che, sapendo che sia nell'ipotesi p sia nell'ipotesi q si può dedurre r, allora si può dedurre r sapendo che $p \vee q$: questo significa che p e q vengono considerate separatamente come ipotesi di lavoro, assunzioni temporanee che servono a dedurre r, ma al fine di dedurre r è sufficiente l'ipotesi $p \vee q$: l'operazione di scarico consiste appunto nel segnalare quali sono le ipotesi di lavoro che non è necessario inserire nell'insieme Γ di ipotesi della derivazione.*

Osservazione 2. *Abbiamo considerato fin qui una disgiunzione "debole", indicata come disgiunzione inclusiva o con il termine latino* vel*: il significato del* vel *è che si ammette la disgiunzione $p \vee q$ se si ammette* almeno una *tra p e q, cioè o p, o q o anche entrambe. Esiste anche una forma "forte" di disgiunzione, detta disgiunzione esclusiva o* aut *e che indichiamo con $|$: ammettere $p \mid q$ significa ammettere* esattamente una *tra p e q, ossia p oppure q ma non entrambe. Nonostante questo tipo di disgiunzione sia forse anche più comune dell'altro nel linguaggio comune, dal punto di vista logico è più interessante studiare* vel*; si tenga conto tra l'altro che $p \mid q$ si può esprimere in modo equivalente usando* vel*, la congiunzione e la negazione nel modo seguente, che esclude la possibilità di ammettere entrambi i disgiunti:*

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

2.3 Le regole per $\rightarrow$

Prima di elencare le regole che determinano l'uso di $\rightarrow$ è bene specificare esattamente cosa intendiamo con questo connettivo: abbiamo detto che nell'uso corrente si traduce con *se ... allora ...* o con espressioni equivalenti. Il significato di una implicazione $p \rightarrow q$ è dichiarare che ogni volta che si assume p si deve assumere anche q, o in altri termini che non può nello stesso tempo darsi p e non darsi q:

$$\neg(p \wedge \neg q)$$

o ancora equivalentemente che si assume q oppure non si assume p:

$$q \vee \neg p$$

Esercizio 3. *Si dimostri l'equivalenza tra questi due enunciati, ossia si mostri una derivazione del primo dal secondo e una derivazione del secondo dal primo (meglio se dopo aver visto anche le regole sull'uso di $\neg$).*

Questa osservazione può aiutare a capire più chiaramente alcune regole che verranno presentate di seguito.

Introduzione *"Da allora lui [il tempo] non vuole più fare niente di quel che gli chiedo. Adesso sono sempre le sei [...] Allora è sempre l'ora del tè, quindi non abbiamo neanche un minuto per sciacquare le tazze tra un sorso e l'altro."* (cap. 7)

Raccontando ad Alice le proprie disavventure, il Cappellaio parte da una premessa ("Adesso sono sempre le sei") e trae una conseguenza ("Allora è sempre l'ora del tè") che lo porta ad una conclusione ("Non abbiamo tempo per sciacquare le tazze"). Non è affatto in contrasto col nostro modo di ragionare concludere che "se sono sempre le sei allora non abbiamo tempo per sciacquare le tazze". Usando le nostre rappresentazioni

p: sono sempre le sei
r: è sempre l'ora del tè
q: non abbiamo tempo per sciacquare le tazze

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{p}}{r}}{q}}{p \to q}$$

In generale formuleremo la regola di introduzione di $\to$ in questo modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overline{p}\\ \nabla\\ q\end{array}}{p \to q}$$

Osservazione 4. *Ritroviamo anche qui lo scarico dell'ipotesi p. Di nuovo p serve come ipotesi di lavoro per la deduzione, non come dato di fatto: la differenza è sottile ma sostanziale. Come accade di solito nelle deduzioni in cui si introduce un $\to$ (e non solo), quello che ci interessa è stabilire che* se *o* quando *si verifica una determinata circostanza* allora *se ne verificherà un'altra, non che si è* effettivamente *verificata la prima e quindi si verifica effettivamente anche la seconda.*

Eliminazione (o modus ponens) *"C'erano una volta tre sorelline che vivevano in fondo a un pozzo [...]" cominciò il Ghiro. "E di cosa vivevano?" disse Alice [...] "Vivevano di melassa" disse il Ghiro [...] "Ma non potevano! Si sarebbero ammalate!" osservò Alice [...] "Infatti lo erano" disse il Ghiro* (cap.7)

In questo dialogo tra Alice e il Ghiro riconosciamo l'utilizzo di un'importante regola per l'implicazione. Si afferma, sostanzialmente, che se le bambine vivono di melassa allora si ammalano: le bambine nel pozzo vivevano di melassa; allora erano ammalate. Come al solito, semplifichiamo le nostre proposizioni:

p: le bambine vivono di melassa
q: le bambine sono ammalate

Allora il dialogo si può rappresentare con

$$\frac{p \qquad p \to q}{q}$$

2.4 Le regole per $\neg$

Sillogismo disgiuntivo *"Fa' la tua deposizione," disse il Re, "e non essere nervoso o ti faccio giustiziare sul momento!"* (cap. 11)

Consideriamo questa minaccia del Re al Cappellaio: sostituiamo per comodità "non essere nervoso" con "stai tranquillo" in modo da evitare (per il momento) doppie negazioni. Il senso della frase è che il Cappellaio ha due alternative, stare tranquillo oppure venir giustiziato: visto il significato già discusso di $\vee$, è immediato ammettere che se non si verifica la prima per lo sfortunato Cappellaio si verificherà la seconda.

Osservazione 5. *Notiamo che in questa regola sarebbe indifferente parlare di disgiunzione inclusiva o esclusiva: in entrambe se uno dei disgiunti non viene ammesso* deve *essere ammesso l'altro.*

Rappresentiamo:

p: stai tranquillo
q: ti faccio giustiziare

$$\frac{p \vee q \qquad \neg p}{q}$$

Modus tollens *"Se avessero un po' di cervello cercherebbero di scoperchiare il tetto"* (cap. 4)

Spesso quando parliamo sottintendiamo significati che non vengono espressi direttamente: è proprio il caso di questa frase, in cui l'uso del condizionale ci fa capire che il reale pensiero di Alice andrebbe completato così: "visto che non cercano di scoperchiare il tetto allora non hanno cervello". Le proposizioni sono, semplificando

p: hanno cervello
q: cercano di scoperchiare il tetto

e il ragionamento di Alice, che esprime la regola detta *modus tollens*, si rappresenta con

$$\frac{p \to q \qquad \neg q}{\neg p}$$

Ex falso *"Vai a giocare a croquet con la Regina oggi?" disse il Gatto. "Magari!" disse Alice "Ma non sono stata invitata." "Allora ci vediamo là."* (cap. 6)

Completiamo questa strana affermazione del Gatto del Cheshire in modo che ci risulti un po' più ragionevole: se la frase fosse "Se sei stata invitata allora ci vediamo là" non avremmo alcun problema a seguire il ragionamento. La regola logica che rappresenta tale procedimento di pensiero è una regola piuttosto discussa che si rappresenta in questo modo:

p: sei stata invitata
q: ci vediamo là

$$\frac{\neg p}{p \to q}$$

Vale la pena di spendere qualche parola sulla giustificazione di questa regola. Essa si motiva con la derivazione

$$\cfrac{\cfrac{\neg p \qquad \cfrac{\overline{p}}{p \vee q}}{q}}{p \to q}$$

che può sembrare piuttosto discutibile quando se ne considera il significato, ma è perfettamente coerente con le regole introdotte finora per i connettivi logici. Dal momento che l'ipotesi p viene scaricata al termine della deduzione, abbiamo dedotto $p \to q$ da $\neg p$ come afferma la regola appena introdotta.
Questo tipo di regole può risultare difficile da accettare perché ci sembra strano che si possa ricavare da una determinata ipotesi una conclusione che con essa non ha alcuna attinenza; tuttavia al fondo di questo tipo di regole ce n'è una, detta *Ex falso (quodlibet)* (*Dal falso* nel senso di "contraddizione" *segue qualunque cosa*) che dobbiamo necessariamente accettare perché anche questa del tutto coerente con le regole individuate fino a qui; la regola ex falso si esprime con

$$\frac{p \wedge \neg p}{q}$$

ed è motivata dalla derivazione

$$\cfrac{\cfrac{p \wedge \neg p}{\neg p} \qquad \cfrac{\cfrac{p \wedge \neg p}{p}}{p \vee q}}{q}$$

dove la "contraddizione" sta nella congiunzione p $\wedge\neg$p in quanto, proprio per il significato che attribuiamo alla negazione, è contraddittorio ammettere una qualche circostanza e la sua negazione (ad esempio "piove e non piove").

2.5 La regola del terzo escluso e il problema della verità

Esiste una regola, oltre a quelle presentate fin qui per la logica proposizionale, che possiamo decidere di accettare o non accettare: si tratta della regola del *terzo escluso*, che afferma che data una qualsiasi proposizione p vale p oppure $\neg$p. Questa regola caratterizza tradizionalmente la *Logica classica* in quanto è stata accettata e utilizzata fin dalla formulazione della Logica data da Aristotele. Teorie logiche molto più recenti però hanno messo in discussione questa regola: l'osservazione cruciale in questo caso nasce dal fatto che i logici classici hanno in genere espresso lo stesso principio affermando che "è vero p oppure è vero $\neg$p", o anche che “p è vero o è falso” (*tertium non datur*, non vi è una terza possibilità). Questa restrizione potrebbe anche essere accettata in via di principio, ma se ci si occupa in Logica di problemi un po’ più vicini al ragionamento e soprattuttto al linguaggio anche comune ci si accorge che essa è troppo limitante: non è affatto vero che, quando parliamo, siamo in grado di decidere per ogni affermazione che facciamo se essa è “vera” o “falsa”, nè che ragioniamo solo su affermazioni vere o false, principalmente per due motivi:

1. non è ben chiaro cosa intendiamo per “verità”: ad esempio possiamo dire che ciò che accade ad Alice è *vero*? Nel nostro mondo non esistono Gatti del Cheshire e Lepri Marzoline, quindi saremmo tentati da un certo punto di vista di dire di no, ma nel sogno di Alice, che è una sorta di “altro mondo”, le sue avventure accadono “davvero”...

2. nessuno impedisce di costruire un ragionamento perfettamente “logico” su proposizioni di cui *non si sa* se sono vere o false; di nuovo ci viene in aiuto Alice, poiché nel racconto da cui stiamo traendo i nostri esempi ci sono numerosi ragionamenti e di tutti possiamo dire con sicurezza, analizzandoli sulla base delle regole fin qui presentate, se sono *logici* (o, se preferiamo, *corretti, coerenti, ...*) senza aver affatto risolto la questione di cui al punto precedente.

Il problema della verità è stato ampiamente discusso soprattutto dai logici dell’ultimo secolo; in questa sede non ce ne occuperemo in modo troppo dettagliato in quanto la questione è estremamente complessa. Ci limitiamo a chiarire che non assumeremo la regola del terzo escluso, inserendoci quindi nel filone della logica detta *intuizionistica* anziché in quello della logica classica: non a caso finora non abbiamo mai usato espressioni del tipo “se p è vera” ma piuttosto “se ammettiamo p”. Diremo che “vero” e “falso” sono valori attribuiti a ciascuna proposizione da una certa funzione detta *valutazione*, non ci interessa in che modo (possiamo pensare che p è vera in un qualche mondo - che potrebbe non essere il nostro - se in quel mondo si verifica la circostanza espressa da p); in una derivazione il valore di verità della conclusione dipenderà esclusivamente dai valori di verità attribuiti alle ipotesi. Si può dimostrare, anche se non lo faremo qui, che da $\Gamma \rhd p$ segue segue che Γ è *conseguenza logica* di p, il che significa che quando tutte le proposizioni in Γ sono vere lo è anche p; nel caso si ammettesse il terzo escluso, varrebbe anche il viceversa. Notiamo, come ultime osservazioni sull’argomento, che

Osservazione 6. *la relazione di conseguenza logica differisce quindi da quella di derivabilità perché entra nel merito* semantico*, cioè del significato, mentre la derivabilità si limita a un gioco meccanico di tipo* sintattico*, basato cioè soltanto sulle relazioni tra le proposizioni determinate dai connettivi*

Osservazione 7. *se rinunciamo al terzo escluso dobbiamo rinunciare anche alla* doppia negazione*, ossia non possiamo affermare che $\neg\neg p$ equivale a p*

Esercizio 8. *Pensando al significato comunemente attribuito alla congiunzione, alla disgiunzione, alla negazione, scrivere la negazione di $p \wedge q$, di $p \vee q$, di $p \to q$.*

3 La logica dei predicati

"Non sapevo che i Gatti del Cheshire sogghignano sempre, anzi, non sapevo neanche che i gatti potessero sogghignare" disse Alice. "Tutti sanno farlo," disse la Duchessa, "e quasi tutti lo fanno." "Io non ne conoscevo nessuno" disse Alice. (cap. 6)

Se volessimo rappresentare come abbiamo fatto finora le proposizioni di questo dialogo, ci troveremo in una grossa difficoltà: non siamo in grado di esprimere i pronomi *tutti, nessuno, qualcuno* .... Il problema è meno banale di quanto sembra: ad esempio, dal fatto che "tutti i Gatti del Cheshire sanno sogghignare" ci sembra naturale dedurre che anche "il gatto della Duchessa sa sogghignare", eppure usando solo gli strumenti della logica proposizionale saremmo costretti a rappresentare la prima affermazione come una proposizione p, la seconda come una proposizione q e non c'è alcuna derivazione giustificabile da p a q. Non solo: ci accorgiamo anche che non abbiamo alcun modo di riferire una condizione (ad esempio il saper sogghignare) a individui distinti (ad esempio il gatto della Duchessa piuttosto che il gatto della vicina di casa); sarebbe molto ragionevole poterlo fare senza dover usare due proposizioni diverse e del tutto indipendenti, dal momento che la condizione di cui parliamo è la stessa e cambia solo l'individuo cui è riferita. Abbiamo dunque bisogno di nuovi strumenti:

- i *quantificatori* $\forall$ (per ogni) ed $\exists$ (esiste): servono a specificare se parliamo di tutti, alcuni, nessuno degli individui di un determinato insieme o *dominio*
- le *variabili* x, y, z, ...: servono a indicare generici elementi del dominio;
- le *costanti* a, b, c, ...: servono a specificare singoli individui del dominio;
- i *simboli funzionali* P, Q, ...: permettono di costruire *predicati*, ossia espressioni che associano determinate proprietà a variabili. Si dicono unari se fanno riferimento a una sola variabile, binari se a due e così via;
- i *simboli relazionali* R1, R2, ...: esprimono relazioni tra due o più oggetti.

Ad esempio, in riferimento alle frasi del dialogo sopra, potremo porre
G(x): x è un gatto del Cheshire (predicato unario)
S(x): x sa sogghignare (predicato unario)
F(x): x sogghigna (predicato unario)
d : il gatto della Duchessa

Con questo potremmo già dire, ad esempio, che

- il gatto della Duchessa è un gatto del Cheshire: $G(d)$
- tutti i gatti del Cheshire sanno sogghignare: $\forall x(G(x) \rightarrow S(x))$
  (precisamente, "per ogni oggetto x se x è un gatto del Cheshire allora x sa sogghignare")
- alcuni gatti del Cheshire sogghignano: $\exists x(G(x) \wedge F(x)$
  (precisamente, "esistono oggetti x tali che x è un gatto del Cheshire e x sogghigna")

e così via. Vedremo ora di capire quali sono le regole per introdurre ed eliminare i quantificatori.

Nota: utilizzeremo esempi semplici, in cui compare un solo predicato quantificato: le stesse regole però valgono se al posto dei predicati si mettono formule, ossia composizioni di predicati costruite tramite connettivi, come si potrà vedere negli esercizi riportati in fondo.

3.1 Le regole per $\forall$

Eliminazione *"I premi andranno a tutti" disse il Dodo [...] "Ma anche lei [Alice] deve ricevere un premio, no?"* (cap. 3)

In una specie di gara tutti sono stati dichiarati vincitori, dunque tutti ricevono un premio; pioché Alice fa parte dei giocatori, anche lei riceverà un premio. Se poniamo

P(x): x riceve un premio
a: Alice

otteniamo la rappresentazione della regola di eliminazione di $\forall$ o *passaggio dall'universale al particolare*, secondo cui se è stato derivato un universale allora si possono derivare tutte le sue *istanze*, le applicazioni a individui specifici appartenenti al dominio.

$$\frac{\forall x\, P(x)}{P(a)}$$

Introduzione *"Che ne è stato del bambino?" chiese il gatto. "Si è trasformato in un porcellino" disse Alice. "Ecco, lo sapevo"* (cap. 6)

La risposta del gatto lascia intendere che, almeno secondo lui, tutti i bambini allora si trasformano in porcellini. Leggendo in questo modo il dialogo e ponendo P(x): il bambino x si trasforma in porcellino, possiamo rappresentare così:

$$\frac{P(b)}{\forall x\, P(x)}$$

Questa è effettivamente la regola di introduzione di $\forall$, ma è soggetta ad un'importante restrizione: l'universale non si può introdurre sempre in questo modo, ma solo quando sul parametro b non sono state imposte condizioni, in particolare se siamo all'interno di una derivazione b non deve far parte delle ipotesi e non deve essere già stato utilizzato in altre parti della derivazione stessa. Si tratta di quello che in generale nelle dimostrazioni è indicato come un *elemento generico* sul quale fare considerazioni. Per inciso, è proprio per questo che l'affermazione del gatto in questo caso non ci sembra molto coerente: se un qualsiasi bambino si trasforma in porcellino possiamo anche pensare che tutti i bambini lo facciano, ma non si vede il motivo di trarre la stessa conclusione se sappiamo solo che lo ha fatto quel preciso bambino che Alice teneva in braccio (e che dunque è un individuo su cui abbiamo posto precise condizioni), dunque l'applicazione che il gatto fa della nostra regola non è corretta ...

Negazione *"Tutti si sedettero in cerchio"* (cap. 3)

La frase riportata può essere tradotta con

$$\forall x\ S(x)$$

dove S(x): x si sedette. Supponiamo ora di voler negare questa frase: se non ammettiamo (o "non è vero", ricordando quanto già detto sulla questione della verità) che tutti si siano seduti allora qualcuno non si sarà seduto. Punto cruciale: basta appunto che *qualcuno* non si sia seduto, non è necessario che tutti non si siano seduti. Di conseguenza, la negazione di questa frase si esprimerà non con un quantificatore universale ma con un quantificatore esistenziale:

$$\exists x\ \neg S(x)$$

3.2 Le regole per $\exists$

Introduzione *Una porcellina d'India tentò un applauso ...* (cap. 11)

Se sappiamo che un determinato individuo, ad esempio la porcellina d'India, soddisfa una determinata condizione, ad esempio tentare un applauso, è immediato ammettere che esiste un qualche individuo che la soddisfa: in altri termini, posto A(x): x tenta un applauso e p: la porcellina d'India, si ha

$$\frac{A(p)}{\exists x\ A(x)}$$

Eliminazione *Al centro della cucina sedeva la Duchessa intenta a cullare un lattante ...* (cap. 6)

C'è un bambino che la Duchessa sta cullando: se poniamo C(x): x è cullato dalla Duchessa, possiamo decidere anche di dare un nome, ad esempio b, al bambino, e dunque scrivere

$$\frac{\exists x\ C(x) \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ C(b)\end{array}}{C(b)}$$

Si tratta della regola di eliminazione di $\exists$, che si traduce nel tipico procedimento per cui, ad esempio, in una dimostrazione in cui stiamo parlando di triangoli diciamo "Sia ABC un triangolo tale che ...": stiamo insomma dando un nome, individuando un oggetto di cui sappiamo che esiste. Attenzione però: anche in questo caso il nome, ossia la costante, va scelto con alcune accortezze. Per intenderci: se in *Alice*, qualche pagina prima, fosse stato chiamato b il bambino della vicina che sta giocando in cortile, non saremmo autorizzati a riutilizzare lo stesso nome per un bambino diverso, a scanso di confusioni più o meno gravi, così come in una dimostrazione non è mai opportuno scegliere lo stesso nome per due oggetti distinti.

Negazione *Il Dodo aveva lasciato cadere una pausa come se qualcuno dovesse prendere la parola, ma nessuno si era sognato di farlo.* (cap. 3)

Abbiamo in questa frase un predicato e la sua negazione. Ponendo P(x): x parla, "qualcuno parla" si rappresenta con

$$\exists x\ P(x)$$

Se però nessuno parla, ovviamente, *tutti* stanno zitti: la negazione di un esistenziale richiede un universale

$$\forall x\ \neg P(x)$$

4 Esercizi

I seguenti esercizi sono proposte di attività da svolgere in classe per esemplificare i contenuti inseriti nell'unità didattica.

Esercizio 9. "Ma io sono una bambina!" "No, tu sei un serpente, confessa! Adesso mi dirai anche che non hai mai assaggiato un uovo!" "Certo che ho assaggiato le uova! Ma solo perché le bambine mangiano le uova come i serpenti, tutto qui!" "[...] se è vero allora sono una specie di serpenti anche loro, punto e basta!" *(cap. 5)*
In questo vivace dialogo tra Alice ed il Piccione, ti sembra corretta la conclusione a cui arriva il Piccione? Perché? (suggerimento: poni a: Alice, B(x): x è una bambina, S(x): x è un serpente, U(x): x mangia le uova, poi rappresenta il ragionamento compiuto nelle ultime due battute del dialogo)

Esercizio 10. [...] Tanto per cominciare, i cani non sono matti [...] Un cane quando è arrabbiato ringhia e quando è contento muove la coda. Io invece ringhio quando sono contento e muovo la coda quando sono arrabbiato. Perciò sono matto *(cap. 6)*
Studia la validità di questo ragionamento del Gatto del Cheshire, ponendo g: il Gatto del Cheshire, C(x): x è un cane, M(x): x è matto, R(x): x ringhia, S(x): x muove la coda, B(x): x è arrabbiato, N(x): x è contento

Riferimenti bibliografici

[1] F. D'Agostini, *Le ali al pensiero*, ed. Paravia, 2003

[2] Appunti del corso

[3] L. Carroll, *Alice nel paese delle meraviglie*, ed. Feltrinelli, 1993 (testo originale a fronte)