# IL CONCETTO DI INFINITO IN MATEMATICA[1]

*di Gerhard Gentzen*

La più grande controversia che è fiorita negli ultimi decenni riguardo i fondamenti della Matematica è, soprattutto, una controversia sulla natura dell'infinito in Matematica. Di seguito, cercherò di caratterizzare nel modo meno tecnico possibile i precisi problemi che sono da qui scaturiti.

Dapprima darò una classificazione della Matematica in tre distinti livelli, associando a ciascuno di essi la nozione di infinito che é usata nelle varie branche della matematica.

Il primo e più basso livello è rappresentato dalla *teoria elementare dei numeri*, cioè dalla teoria dei numeri che non fa uso delle tecniche dell'analisi. Qui l'infinito interviene nella forma più semplice. Si coinvolge una sequenza infinita di oggetti, in questo caso i numeri naturali. Diverse altre branche della Matematica sono logicamente equivalenti alla teoria elementare dei numeri, ossia tutte quelle teorie i cui oggetti possono essere messi in corrispondenza uno-a-uno con i numeri naturali e che sono pertanto *enumerabili*. Quasi l'intera

[1] Traduzione italiana, da una traduzione inglese della versione originale in tedesco, di Pietro Sinico. Diffidate, gente, diffidate. Le note sono del traduttore. Diffidate, ancora di più.

algebra vi appartiene - i numeri razionali, i numeri algebrici, anche polinomiali, si può dimostrare che sono numerabili - così pure la topologia combinatoria, vale a dire quella parte della topologia che si occupa soltanto di oggetti le cui proprietà sono descrivibili con molti dati ma finitamente. Il celeberrimo problema dei quattro colori è un classico della topologia combinatoria. Tutte queste teorie sono, logicamente parlando, interamente equivalenti. È pertanto sufficiente occuparsi soltanto della teoria elementare dei numeri; i teoremi e le dimostrazioni nelle rimanenti teorie possono essere reinterpretati come teoremi e dimostrazioni numerico-teoriche[2] da una correlazione dei loro oggetti con i numeri naturali. Al problema dei quattro colori, per esempio, corrisponde, difatti, un equivalente problema numerico-teorico, quantunque il nostro interesse per esso derivi, naturalmente, esclusivamente dalla sua intuitiva formulazione topologica.

Il secondo livello della Matematica è rappresentato dall'analisi. Per quanto riguarda l'applicazione del concetto di infinito, l'aspetto essenzialmente nuovo è qui il fatto che ora perfino i singoli oggetti della teoria possono essi stessi essere insiemi infiniti. I numeri reali, cioè gli oggetti dell'analisi, sono dopo tutto definiti come insiemi infiniti, in quanto sono infinite sequenze di numeri razionali. In questa connessione non fa alcuna differenza se la particolare definizione scelta è quella per intervalli nidificati, o per tagli di Dedekind, o per altri modi. L'intera teoria delle funzioni complesse appartiene pure a questo livello; essenzialmente, nient'altro è da aggiungere.

Il terzo livello di applicazione del concetto di infinito, finalmente, è incontrato nella teoria generale degli insiemi. In questa teoria sono ammessi come oggetti non solo i numeri naturali e altre quantità descrivibili finitamente, come il primo livello, come pure insiemi infiniti di quelle, come il secondo livello, ma, in aggiunta, insiemi infiniti di insiemi infiniti e ancora insiemi di siffatti insiemi, ecc., fino all'estrema generalità immaginabile.

La classificazione data riassume ogni branca della Matematica. Per quanto riguarda la Geometria, per esempio, essa non presenta alcun problema speciale in connessione con il concetto di infinito. Tale problema appartiene o alla fisica oppure si presenta in una forma equivalente in analisi; le diverse geometrie possono, in definitiva, sempre essere interpretate in termini di modelli logicamente equivalenti all'analisi.

Ci sono essenzialmente due differenti interpretazioni fondamentali della natura dell'infinito in Matematica, ed ora passerò ad esporle. Le chiamerò

[2] Vale a dire, nel dominio della teoria dei numeri. La traduzione della locuzione originale è piuttosto problematica in italiano; si è preferito, pertanto, la trasposizione letterale.

interpretazione *attualista* ed interpretazione *costruttivista* dell'infinito. La prima è l'interpretazione della Matematica classica come ci viene trasmessa all'università[3]. Diversi matematici hanno adottato la via costruttivista - sebbene non sempre allo stesso livello - tra cui Kronecker, Poicarè, Brouwer e Weyl. Questi pochi nomi indicano che ci stiamo occupando di una direzione di pensiero che deve ancora essere approfondita. Io cercherò di mettere in evidenza l'essenza del punto di vista costruttivista *vis-à-vis*[4] l'interpretazione attualista; nel breve spazio a disposizione questo può essere fatto solo in maniera imperfetta.

Comincerò con le antinomie della teoria degli insiemi. Qui abbiamo una situazione in cui le considerazioni attualiste hanno portato ad un assurdo che non risulterebbe dall'interpretazione costruttivista della questione. Poiché sulla base del concetto piuttosto generale di insieme indicato sopra è anche possibile formare, per esempio, il concetto di *insieme di tutti gli insiemi*; questo é un insieme definito correttamente. Tuttavia, da esso seguono, piuttosto comprensibilmente, delle contraddizioni: l'insieme di tutti gli insieme deve dopo tutto contenere sé stesso come elemento e, in un certo senso - facilmente precisabile - deve essere, pertanto, più grande di sé stesso e questo, ovviamente, non può essere possibile. In definitiva, diventa facilmente visibile come l'assurdo viene fuori: strettamente parlando, l'insieme di tutti gli insiemi non deve esso stesso essere considerato come appartenente agli insiemi; è una formazione susseguente che produce interamente una nuova collezione da una data collezione di insiemi. Questo è, infatti, il punto di vista costruttivista della situazione: nuovi insiemi possono, in linea di principio, essere formati soltanto costruttivamente uno per uno, sulla base degli insiemi già costruiti. In accordo col punto di vista attualista, d'altra parte, tutti gli insiemi sono definiti in anticipo dal concetto astratto di insieme e sono, pertanto, già disponibili come tali, indipendentemente da come insiemi singoli possono essere selezionati da essi per mezzo di speciali costruzioni. Questo punto di vista ha portato alle antinomie.

Se noi stessimo cercando di esprimere l'essenza del punto di vista costruttivista, in generale tramite un principio, se possibile, lo formuleremmo come segue: *un ente infinito non deve mai essere riguardato come completo, ma solo come un qualcosa che è in divenire, che può essere edificato costruttivamente senza fine*. Ricordo il celebre detto di Gauss secondo il quale "*... l'uso di una quantità infinita come una quantità completa non é mai permesso in Matematica*".

[3] Si parla dei primi anni del secolo XX.

[4] Faccia-a-faccia

Se è accettato questo principio di interpretare costruttivamente l'infinito, allora le differenze con l'interpretazione attualista della Matematica classica si manifestano non solo nella teoria degli insiemi, ma già nell'ambito della teoria elementare dei numeri. Ora discuteremo queste differenze in maggior dettaglio. Nella teoria elementare dei numeri, noi incontriamo l'infinito solo nella sua forma più semplice, vale a dire in forma di sequenza di numeri naturali. Secondo l'interpretazione attualista, possiamo riguardare questa sequenza come *una totalità infinita completa*, mentre l'interpretazione costruttivista ci concede di dire solo questo: noi possiamo andare avanti senza fine nella sequenza di numeri e sempre costruire nuovi numeri, ma non dobbiamo parlare di una totalità completa. Una proposizione come "*tutti i numeri naturali hanno la proprietà* P", per esempio, ha, in ciascun caso, un diverso significato. Secondo l'interpretazione attualista: la proprietà P si conserva per qualsiasi numero che può in qualche modo essere estratto dalla totalità completa dei numeri. Secondo l'interpretazione costruttivista possiamo dire solo questo: senza badare a quanto lontano arriviamo nella formazione di nuovi numeri, la proprietà P continua a valere per questi nuovi numeri.

In pratica, questa differenza nell'interpretazione è, comunque, qui immateriale. Una proposizione sui numeri naturali è normalmente provata per induzione completa e questa inferenza appare certamente in armonia anche con l'interpretazione costruttivista; in particolare, poiché l'induzione completa è basata sull'idea del nostro *procedere* nella sequenza di numeri. La situazione è diversa nel caso di *proposizioni esistenziali*. La proposizione "*esiste un numero naturale con la proprietà* P" afferma, secondo l'interpretazione attualista: "*in qualche parte della sequenza completa dei numeri naturali si presenta un tale numero*". Secondo l'interpretazione costruttivista, una tale asserzione é, naturalmente, senza senso. Ma ciò non vuol dire che sotto questa interpretazione le proposizioni esistenziali devono essere rigettate completamente. Se un definito numero *n*, per cui vale la proprietà P, può essere specificato, allora anche sotto questa interpretazione possiamo parlare dell'esistenza di un tale numero; la proposizione esistenziale ora non si riferisce più alla totalità infinita dei numeri; sarebbe sufficiente, dopo tutto, parlare solo dei numeri da *1* a *n*. Le dimostrazioni di esistenza che si trovano in pratica sono ancora per lo più tali che possiamo esibire un esempio. Comunque, sono anche possibili dimostrazioni dove non è il caso di battere, quali le *dimostrazioni indirette di esistenza*: si assume che non c'è alcun numero per cui vale la proprietà P. Se questa assunzione porta ad una contraddizione, si assume che, in definitiva, esiste un numero per cui vale la proprietà P. Può allora accadere che una procedura effettiva per produrre questo numero sia assolutamente insostenibile. Dal punto di vista costruttivista, questa dimostrazione deve essere di conseguenza rigettata. Un'altra tecnica di dimostrazione che diventa allo stesso modo inaccettabile da questo punto di vista e che usualmente viene citata a questo riguardo, è l'applicazione della *legge del terzo escluso* alle proposizioni che concernono molti oggetti, in senso infinito. Secondo l'interpretazione costruttivista, per esempio, non possiamo dire pure: "*una proprietà* P *vale per tutti i numeri naturali oppure non vale per tutti i numeri naturali*". La resezione della legge del terzo escluso sembra particolarmente paradossale, a prima vista, ma è solo una conseguenza necessaria del principio che interpreta l'infinito potenzialmente. Dopo tutto, questa legge é basata sull'idea che la sequenza dei numeri sia completa. Ciò non deve essere interpretato con il fatto che i costruttivisti riguardano questa legge come falsa; dal loro punto di vista é più corretto riguardarla come una legge *senza senso*. Non ha così significato parlare della totalità dei numeri come qualcosa di completo, precisamente perché nella realtà, la sequenza numerica non é mai completa, tutto ciò è dato in un processo estendibile indefinitamente nella progressione.

In pratica queste forme di inferenza, che sono inammissibili secondo l'interpretazione costruttivista, si manifestano fortemente ancora nella teoria elementare dei numeri. Questa situazione è differente nell'analisi e nella teoria degli insiemi. Qui le differenze tra le due interpretazioni sono essenzialmente le stesse che quelle descritte per i numeri naturali; non discuterò, pertanto, di loro in seguito. Nel caso dell'analisi e della teoria degli insiemi, comunque, il significato della differenza è considerevolmente più grande con il risultato che dal punto di vista costruttivista *parti estensive* dell'analisi e di quasi tutta la teoria degli insiemi non possono essere accettate.

In questa connessione, l'attenzione si focalizzerebbe sul fatto che il limite tra ciò che è permesso costruttivamente e ciò che non è possibile definire univocamente in certi casi limite, e che le opinioni dei diversi matematici che sostengono questo punto di vista non sono concordi.[5] Tuttora, queste differenze non sono importanti a sufficienza nella formazione di una unitarietà che garantisca una discussione più dettagliata. Parole come *intuizionista* (Brouwer) e *finitista*[6] (Hilbert) denotano tali differnze nella corrente costruttivista.

Ora il problema cardine diventa questo: quale delle due interpretazioni é corretta in base alle nostre conoscenze? Entrambe hanno dei sostegni. Da una parte, abbiamo gli intuizionisti guidati da Brouwer con tesi totalmente radicali che tutto quanto della Matematica che non sia compatibile col punto di vista

[5] Modo ingarbugliatissimo per dire: tra i costruttivisti ci sono due correnti, quella formalista (moderata) e quella intuizionista (radicale).

[6] I metodi *finitari* permettono di considerare solo oggetti intuitivamente concepibili e processi effettivamente eseguibili.

costruttivista deve essere scartato. Dall'altra parte, la maggioranza dei matematici sono comprensibilmente riluttanti all'idea di questo sacrificio. Le antinomie, dicono, sono ancora basate sulla formulazione di concetti inamissibili; ma questi concetti possono essere evitati ponendo dei limiti; l'intera analisi e *a fortiori* la teoria dei numeri, rivendicano, sono interamente irreprensibili. Sfortunatamente, la limitazione delle inferenze inamissibili può essere effettuata in modi basicamente diversi senza che esse conducano necessariamente a un definito punto di vista comune, e devo dire che, per me, la più chiara e conseguenziale limitazione sembra essere quella data dal principio di interpretare l'infinito costruttivamente[7].

Noi saremo tuttavia riluttanti a scartare la parte estensiva non-costruttiva dell'analisi che ha, tra le altre cose, messo su una varietà di applicazioni della fisica. Hilbert vede nella sua *teoria della dimostrazione*[8] un modo per risolvere queste difficoltà. Questa teoria è intesa a chiarire quanto sia possibile la mutua relazione tra le due interpretazioni dell'infinito per mezzo di una *investigazione puramente matematica*[9].

Come può essere fatto ciò? Il primo e più gravoso compito è di stabilire la *consistenza* della Matematica, ammesso che una tale consistenza esista. Qui dopo tutto abbiamo la più forte argomentazione dei costruttivisti: l'interpretazione attualista ha portato a contraddizioni nella teoria degli insiemi; chi lo sa che un giorno non si verifichino anche in analisi. Questa obiezione sarebbe annullata da una dimostrazione di consistenza per l'analisi. È, infatti, piuttosto concepibile che la consistenza di una teoria matematica possa essere provata con tecniche matematiche esatte. Per vedere ciò, noi richiamiamo alla mente il fatto che una proposizione che asserisce la consistenza è formalizzabile come un'asserzione matematica; essa dice: *non esiste alcuna dimostrazione all'interno della teoria che porta ad una contraddizione*. Le *dimostrazioni* in una teoria possono creare gli oggetti di una investigazione matematica, vale a dire, *la teoria della dimostrazione*, esattamente come i numeri naturali, per esempio, creano gli oggetti della teoria dei numeri. Per questa ragione è consuetudine *formalizzare le dimostrazioni*, cioè, noi sostituiamo le espressioni linguistiche nelle dimostrazioni con simboli definiti e combinazioni di simboli - alle inferenze ora corrispondono certi riarrangiamenti formali di combinazioni di simboli - cosicché noi otteniamo alla fine come controparti delle dimostrazioni certe figure composte di simboli.

---

[7] Gentzen non si vuole schierare in modo netto?

[8] Nel programma hilbertiano è la *metamatematica*.

[9] Idea geniale!

Queste figure sono ora suscettibili di investigazione matematica allo stesso modo delle figure geometriche. Allo scopo di poter dare una precisa formale limitazione del concetto di *dimostrazione in una teoria* è naturalmente essenziale, in particolare, che si esprima una limitazione delle *forme di inferenza* che nella dimostrazione possono essere date in seguito.

In pratica il numero delle forme di inferenza che sono usate in Matematica é fortunatamente relativamente piccolo.

Se è ottenuta, allora, una dimostrazione di consistenza, certe forme di inferenza devono naturalmente esse stesse essere usate per la dimostrazione. La correttezza di queste inferenze deve essere presupposta da principio, altrimenti l'intera dimostrazione sarebbe ovviamente circolare. Può non esserci alcuna *dimostrazione di consistenza assoluta*. Quali tipi di inferenza devono essere presupposti segue dalle nostre considerazioni precedenti: le inferenze devono essere compatibili con il punto di vista costruttivista. L'attendibilità del punto di vista costruttivista è presupposta e non dubitabile. L'obiettivo è, dunque, di provare la consistenza dell'interpretazione attualista per mezzo delle inferenze costruttiviste.

Recentemente, sono riuscito ad ottenere una siffatta dimostrazione per la teoria elementare dei numeri, cioè per il primo dei tre livelli del concetto di infinito. Dimostrazioni corrispondenti devono ancora essere fatte per l'analisi e, finalmente, per la teoria degli insiemi, per quanto l'ultima sia attualmente consistente. Nel corso di questa investigazione teorico-dimostrativa ci possiamo aspettare di migliorare, in quanto possiamo andare avanti senza incontrare antinomie e trovare risposte a nuove domande correlate.

Quale sarebbe la relazione tra le due interpretazioni dell'infinito se la dimostrazione di consistenza fosse completa? Anche allora si potrebbero sostenere diverse opinioni. Una possibilità sarebbe di riguardare la dimostrazione di consistenza come ancora insufficientemente sicura da generare dubbi sulle inferenze costruttive usate nella dimostrazione. Io non riguardo il pericolo di questa obiezione come particolarmente grande. *Qualcosa* sarà sempre stata guadagnata se l'attendibilità delle forme di inferenza della Matematica sarà mostrato che dipendono da un minimo di inferenze completamente insindacabili; fare di più è semplicemente impossibile; e io sono certo che questo fondamento é considerevolmente più sicuro di quello proposto dall'interpretazione attualista.

Più importante é una diversa obiezione partorita dagli intuizionisti: anche se fosse provata la consistenza, le proposizioni della Matematica attualista rimarrebbero ancora senza senso e, pertanto, dovrebbero essere rigettate come non mai. Una proposizione esistenziale provata indirettamente[10] è chiamata senza senso; la ragione è che l'asserzione di esistenza è garantita in un senso reale se può essere dato inequivocabilmente un esempio. Come può essere questo esibito? Ammetteremo che una proposizione esistenziale provata indirettamente ha un differente, più debole senso di una che é stata provata costruttivamente; ma, tuttavia, un certo *senso* è innegabile. Di più, anche se noi non concediamo un immediato significato alle proposizioni provate non-costruttivamente, rimane ancora la possibilità di usarle per provare proposizioni semplici come equazioni numeriche verificabili direttamente, che non sono certamente senza senso costruttivo; tali proposizioni devono allora essere vere in virtù della dimostrazione di consistenza e può succedere che una dimostrazione costruttiva diretta per la stessa proposizione sia più laboriosa o affatto inottenibile. Questo sembrerebbe avvalorare le forme attualiste di inferenza almeno di un valore pratico che anche i costruttivisti dovrebbero ammettere. Questa intera questione di *significato* non sembra essere, per me, al momento, pronta per una decisione finale. È particolarmente dalla ricerca teorico-dimostrativa che possono essere raggiunti contributi significativi verso una soluzione di questo problema. Una certa parte residua può, alla fine, sempre rimanere materia di opinione. L'obiezione contro il senso delle proposizioni attualiste non deve in qualsiasi caso essere preso troppo alla leggera; non è interamente senza merito. Io credo che nella teoria generale degli insiemi, per esempio, un'attenta investigazione teorico-dimostrativa confermerà eventualmente il punto di vista che tutte le cardinalità eccedenti quelle dei numerabili sono in un senso veramente definito solo entità fittizie e sarebbe saggio fare a meno di questi concetti.

Dopo queste considerazioni generali, ora discuterò in dettaglio alcune delle difficoltà che sorgono nelle dimostrazioni di consistenza. Dovrò parlare, in particolare, del *Teorema di Goedel* e del significato dei *numeri ordinali transfiniti* per le dimostrazioni di consistenza.

Goedel ha dimostrato il seguente importante teorema: *la consistenza di una teoria matematica che contiene la teoria elementare dei numeri non può essere provata - dato che la teoria é realmente consistente - con le tecniche di dimostrazione di quella teoria stessa*. A prima vista, sembrerebbe che anche la possibilità di una dimostrazione di consistenza sia diventata illusoria, poiché una tale dimostrazione è intesa coinvolgere meno tecniche di quelle contenute nella teoria che si vuole provare che è consistente. Rimane piuttosto

[10] Gli intuizioni, come detto, ritengono senza senso l'applicazione del principio del terzo escluso nel contesto di quantità infinite; di conseguenza non ammettono l'applicazione del principio della doppia negazione: $\neg\neg p = p$ .

concepibile, comunque, che la consistenza della teoria elementare dei numeri, per esempio, può essere provato che è costruttiva da una parte e non coinvolge gli aspetti attualisti della teoria elementare dei numeri, ma che, d'altra parte, trascende ancora la struttura della teoria elementare dei numeri. Nella mia dimostrazione questa tecnica è *la regola di induzione transfinita* applicata a certi numeri ordinali transfiniti. Indicherò, brevemente, che cosa si intende per questo, e come questi concetti sono connessi con la dimostrazione di consistenza.

Il concetto di *numeri ordinali transfiniti* viene da Georg Cantor e appartiene realmente alla teoria degli insiemi. Noi richiederemo, comunque, solo una porzione molto limitata dei numeri ordinali sviluppati in quella teoria - un *segmento della seconda classe di numeri* nella terminologia della teoria degli insiemi - un segmento che può essere costruito in maniera strettamente costruttiva e che non ha niente in comune con gli aspetti disputabili dell'interpretazione attualista, che sono particolarmente vistosi nella teoria degli insiemi e che devono essere evitati nella dimostrazione di consistenza.

I numeri ordinali transfiniti sono costruiti nel modo seguente. Dapprima viene la sequenza dei numeri naturali: 1, 2, 3, ecc. Quindi si introduce un nuovo numero $\omega$ , che é definito come collocato posteriormente a tutti i numeri naturali. $\omega$ é seguito da $\omega+1$, quindi $\omega+2, \omega+3$, ecc. Dopo tutti i numeri $\omega+n$ segue $\omega\cdot 2$, quindi $\omega\cdot 2+1$, $\omega\cdot 2+2$, ecc., dopo questi $\omega\cdot 3$, quindi $\omega\cdot 3+1$, $\omega\cdot 3+2$, ecc. Dopo tutti i numeri della forma $\omega\cdot n+n$ segue il numero$\omega^2$,quindi ancora $\omega^2+1$, $\omega^2+2$, ..., $\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1,...$, $\omega^2+\omega\cdot 2,...$, $\omega^2+\omega\cdot 3,...$, $\omega^2\cdot 2,...$, $\omega^2\cdot 3$, ecc., finalmente $\omega^3$, e possiamo andare avanti in questo modo per formare $\omega^4,\ldots,\omega^5,\ldots$, finalmente $\omega^\omega$, e ancora ulteriori numeri, se si desidera. L'intera procedura - che qui ho solo sintetizzato - può, a primo acchito, sembrare un qualcosa di stupefacente. Tuttavia, basilarmente sono coinvolte solo due operazioni la cui applicazione ripetuta genera automaticamente tutti questi numeri: 1. dato un numero già esistente, noi possiamo formare il suo successore (addizione di 1); 2. data una sequenza infinita di numeri, possiamo formare un nuovo numero collocato posteriormente all'intera sequenza (formazione di un limite).

Il fatto che questa procedura è non-costruttiva, poichè la concezione attualista della *sequenza completa* dei numeri naturali sembra già entrare nella formazione di $\omega$, viene fuori che é infondato. Il concetto di infinito può qui essere definitivamente interpretato potenzialmente per dire, per esempio: senza pensare a come possiamo andare avanti nel formare costruttivamente nuovi numeri naturali, il numero $\omega$ sta nella relazione d'ordine $n \prec \omega$ con qualsiasi numero naturale *n*. E le sequenze infinite che sorgono dalla formazione degli altri numeri ordinali sarebbero interpretate precisamente allo stesso modo.

Ora riguardo al concetto di *induzione transfinita*: questa induzione non è niente più che l'estensione della regola di induzione completa dai numeri naturali ai numeri ordinali transfiniti. L'induzione completa può, come è noto, essere formulata come segue: se una proposizione vale per il numero 1, e se é stato provato che la sua validità per tutti i numeri precedenti il numero $n$ implica la sua validità per $n$, allora la proposizione vale per tutti i numeri naturali. Se sostituissimo qui *numero naturale* con *numero ordinale transfinito*, avremo la regola di induzione transfinita. Noi possiamo facilmente convincerci della correttezza di questa regola per segmenti iniziali della sequenza di numeri transfiniti come segue: supponiamo che la proposizione vale per il numero 1, e che è stato provato inoltre che se la proposizione vale per tutti i numeri precedenti un certo numero ordinale, essa vale anche per quel numero ordinale. Allora noi ragioniamo così: la proposizione vale per il numero 1, quindi anche per il numero 2, così anche per il 3, ecc., quindi per tutti i numeri naturali. Di conseguenza vale per il numero $\omega$, precisamente perché vale per tutti i predecessori. Per la stessa ragione vale per il numero $\omega+1$, così anche per $\omega+2$, ecc., finalmente per $\omega\cdot 2$; e inoltre, corrispondentemente, noi mostriamo la sua validità per $\omega\cdot 3$ , $\omega\cdot 4$, ecc., finalmente anche per $\omega^2$. Continuando in questo modo, possiamo convincerci della validità della regola di induzione transfinita procedendo passo per passo nella sequenza dei numeri ordinali transfiniti. Come i numeri diventano più grandi, la situazione diventa, per ammissione, piuttosto complicata da scriversi, ma il principio rimane sempre lo stesso.

Chiarirò ora come il concetto di numeri ordinali transfiniti e la regola di induzione transfinita entrano nella dimostrazione di consistenza. La connessione è piuttosto naturale e semplice. Nel dare una dimostrazione di consistenza per la teoria elementare dei numeri dobbiamo considerare tutte le dimostrazioni numerico-teoriche e dobbiamo mostrare che, in un certo senso, per essere formalmente definita, ciascuna singola dimostrazione produce un risultato *corretto*, in particolare, nessuna contraddizione. La correttezza di una dimostrazione dipende dalla correttezza di certe altre dimostrazioni più semplici contenute in essa come casi speciali o parti costituenti. Questo fatto ha motivato l'arrangiamento di dimostrazioni di *ordine lineare* in un tale modo che, quelle dimostrazioni sulla cui correttezza dipende la correttezza di un'altra dimostrazione, precedono l'ultima dimostrazione nella sequenza. Questo arrangiamento delle dimostrazioni è determinato dal correlare con ciascuna dimostrazione un certo numero ordinale transfinito; le dimostrazioni precedenti una data dimostrazione sono precisamente quelle dimostrazioni i cui numeri ordinali precedono il numero ordinale della data dimostrazione nella sequenza di numeri ordinali. In principio, noi possiamo pensare che i numeri naturali siano adeguati quanto i numeri ordinali per una tale classificazione. Allo stato attuale, noi abbiamo bisogno dei numeri ordinali transfiniti per la seguente ragione: può accadere che la correttezza di una dimostrazione dipenda dalla correttezza di infinite dimostrazioni più semplici. Un esempio: supponiamo che nella dimostrazione una proposizione sia provata per tutti i numeri naturali per induzione completa; in questo caso della dimostrazione dipende ovviamente dalla correttezza di ogni singola delle singole infinite dimostrazioni ottenute avendo fissato un particolare numero naturale. Qui un numero naturale è insufficiente rispetto ad un numero ordinale per la dimostrazione, poiché ciascun numero naturale è preceduto da soli infiniti altri numeri dell'ordinamento naturale. Noi, pertanto, ci serviamo dei numeri ordinali transfiniti in modo da rappresentare l'ordinamento naturale delle dimostrazioni a seconda della loro complessità.

Ora diventa chiaro anche perché è la regola di induzione transfinita che è necessaria come regola cruciale per la dimostrazione di consistenza; questa regola è usata per provare la *correttezza* di ciascuna singola dimostrazione. La dimostrazione numero 1 è dopo tutto banalmente corretta; e una volta che è stata stabilita la correttezza di tutte le dimostrazioni precedenti una particolare dimostrazione della sequenza, è anche corretta la dimostrazione in questione, precisamente perché l'ordinamento era chiuso in un tale modo che la correttezza di una dimostrazione dipende dalla correttezza di certe precedenti dimostrazioni. Da questo noi possiamo ora ricavare ovviamente la correttezza di tutte le dimostrazioni per mezzo di una induzione transfinita, e abbiamo così provato, in particolare, la consistenza considerata.

Risulta che questa induzione transfinita è precisamente quella inferenza nella dimostrazione di consistenza che necessariamente, in accordo con il teorema di Goedel, non può essa stessa essere provata vera per mezzo di tecniche della teoria elementare dei numeri.

La correttezza dell'induzione transfinita è attualmente stabilita da un argomento speciale del tipo usato prima sopra i numeri $\omega^2$. Ma anche per la teoria elementare dei numeri noi richiediamo un segmento considerevolmente più grande dei numeri transfiniti, vale a dire: nello stesso modo in cui, in uno schizzo, io definivo sopra $\omega^\omega$, noi otteniamo $\omega^{\left(\omega^\omega\right)}$, quindi $\omega^{\left(\omega^{\left(\omega^\omega\right)}\right)}$, ecc., per estendere la procedura corrispondentemente; dopo tutti questi numeri segue il numero $\varepsilon_0$[11], il primo $\varepsilon$*-numero*. Questo numero rappresenta il limite superiore di quel segmento di numeri ordinari transifiniti che è richiesto per la

[11] $\varepsilon_0$ è il primo ordinale $a$ tale che $\omega^a = a$, che sono denominati $\varepsilon$-numeri.

dimostrazione di consistenza della teoria elementare dei numeri, se quella teoria é formalmente limitata nel modo solito.

Io mi aspetto - quantunque questa sia solo una congettura, oggi - che la consistenza dell'analisi - e della teoria degli insiemi, se possibile - diventeranno provabili allo stesso modo; in ciascun caso, noi possiamo naturalmente avviarci verso una distanza considerevolmente più grande nella sequenza dei numeri della seconda classe di numeri. Nell'insieme, sembrerebbe così emergere il seguente quadro: l'incremento in complessità del concetto di infinito ai tre livelli della Matematica descritti all'inizio - teoria elementare dei numeri, analisi e teoria degli insiemi - è accompagnato da una corrispondente estensione della sequenza di numeri ordinali transfiniti; allo stesso modo in cui il numero $\varepsilon_0$ forma il limite superiore per la teoria elementare dei numeri, noi avremo un numero specifico della seconda classe di numeri come limite superiore per l'analisi, e un altro numero come limite superiore per una teoria degli insiemi formalmente limitata - in questo modo una tale teoria degli insiemi ha significato. Ma noi non sopravaluteremo il significato assoluto di questi numeri limite: persino nella teoria elementare dei numeri succede che per risolvere ordinatamente certi problemi associati, ancora ulteriori forme di inferenza dovrebbero essere incluse e questo amplierebbe ulteriormente l'ossatura della teoria elementare dei numeri; questo vuol dire che possono essere richiesti ancora numeri ordinali di ordine più alto per la dimostrazione di consistenza. Per questo, ci può non essere alcun limite più in alto; Goedel ha mostrato che ogni sistema limitato formalmente di questo tipo è incompleto, nel senso che certi problemi associati possono essere risolti solo con l'inclusione di ulteriori tecniche. Questo, attualmente, non fa alcuna differenza per la dimostrazione di consistenza; noi abbiamo bisogno soltanto di estendere la dimostrazione con l'inclusione di nuove tecniche.