Disequazioni

Erica Boatto
I.T.I.S. V.Volterra
San Donà di Piave

Piero Fantuzzi
I.T.I.S. V.Volterra
San Donà di Piave

4 febbraio 2009

Sommario

Questo articolo si occupa delle *disequazioni*

Indice

Capitolo 1

DISEQUAZIONI

1.1 Introduzione

Definizione 1.1.1. Si dice *disequazione* una disuguaglianza tra due espressioni algebriche.

Dette A e B le due espressioni algebriche, la disequazione si presenterà nella forma:

$$A < B \quad \text{oppure} \quad A > B$$

E' consuetudine considerare disequazioni anche le relazioni: $A \leq B$ e $A \geq B$ che consentono l'uguaglianza dei due membri.
Sono esempi di disequazioni:

$$5x - 2 < 3x + 4$$
$$\frac{x-1}{x} > \frac{2}{3}$$
$$2x - \frac{1}{2}y \leq 3x + 1$$

Analogamente a quanto detto in relazione alle equazioni, assumiamo che:
(a) un numero (coppia, terna ...di numeri) si dice *soluzione* di una disequazione se, sostituito nei due membri, rende vera la disuguaglianza.

Il lettore volenteroso verifichi quali dei seguenti numeri sono soluzione delle prime due disequazioni dell'esempio:

$$1, \frac{7}{2}, 3, 100, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

e quali delle seguenti coppie sono soluzione della terza disequazione:

$$(0,0), (-3,2), (3,-8), (-\frac{7}{2}, 0)$$

E' opportuno sottolineare che il numero 3 è soluzione della prima disequazione (la verifica porta a $13 \leq 13$) , ma non della seconda (la verifica porta a $\frac{2}{3} > \frac{2}{3}$) in quanto solo la prima disequazione contempla l'uguaglianza dei due membri.
(b) Risolvere una disequazione significa determinare l'insieme di tutte le sue soluzioni.
(c) Con riferimento alla sua forma algebrica una disequazione potrà essere intera o fratta.
(d) Con riferimento alle lettere presenti potrà essere numerica o letterale.
(e) Due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

1.2 Disequazioni in una incognita

Il metodo per risolvere una disequazione, analogamente a quanto visto con le equazioni, consiste nel trasformarla in una ad essa equivalente della quale sia immediato determinare le soluzioni. A questo scopo si usano i *principi di equivalenza delle disequazioni*:

Teorema 1.2.1 (Primo principio di equivalenza)**.** *Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di una disequazione una stessa espressione algebrica (purchè esista per gli stessi valori per i quali esistono i due membri) si ottiene una disequazione equivalente a quella iniziale.*

Questo teorema ha come conseguenze pratiche il *principio del trasporto* e quello di *cancellazione.*

Teorema 1.2.2 (Secondo principio di equivalenza)**.** *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per una stessa espressione algebrica non nulla (purchè esista per gli stessi valori per i quali esistono i due membri) si ottiene una disequazione equivalente a quella iniziale, ma con verso cambiato se la quantità è negativa.*

La necessità di cambiare il verso della disequazione nel caso si moltiplichi o si divida per una quantità negativa, risulta evidente applicando il secondo principio, per esempio, alla relazione $5 < 7$; se moltiplichiamo i due membri per -2 è scorretto, mantenendo il verso, scrivere $-10 < -14$, la disuguaglianza corretta è invece $-10 > -14$.
Disequazioni intere

In questo paragrafo proponiamo la risoluzione, mediante alcuni esempi, di disequazioni intere.

Esempio 1.2.1.

$$(x+1)^2 + 5x < x^2 - 3$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + 5x < \cancel{x^2} - 3$$

$$3x + 1 < -3$$

$$3x < -4$$

$$x < -\frac{4}{3}$$

E' evidente che la disequazione finale e, quindi, quella di partenza, ha come insieme di soluzioni $S = \left\{x \in \mathbb{Q} | x < -\frac{4}{3}\right\}$ e pertanto essa ha infinite soluzioni.

Esempio 1.2.2.

$$\frac{2x-3}{2} \geq 1 - \frac{x+3}{10} \qquad m.c.d. = 10$$

$$10x - 15 \geq 10 - x - 3$$

$$10x - 15 \geq -x + 7$$

$$11x \geq 22$$

$$x \geq 2$$

(spesso si tralascia la scrittura insiemistica).

Esempio 1.2.3.

$$(2x-1)^3 + 2 > 2x(2x+1)(2x-1) - 3(3-2x)^2$$

$$\cancel{8x^3} - \cancel{12x^2} + 6x - 1 + 2 > \cancel{8x^3} - 2x - 27 + 36x - \cancel{12x^2}$$

$$6x + 1 > 34x - 27$$

$$-28x > -28$$

$$x < 1$$

(Ricorda: il verso è cambiato perchè abbiamo diviso per una quantità negativa).

Anche con le disequazioni è possibile isolare l'incognita in modo che il suo coefficiente risulti positivo, trasportandola nel membro più opportuno. Con riferimento all'ultimo esempio da $6x + 1 > 34x - 27$ avremmo potuto ricavare, eseguendo mentalmente i calcoli e leggendo la relazione da destra a sinistra, $28x < 28$ da cui $x < 1$.

Esempio 1.2.4.

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)<\frac{x+3}{6}$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}<\frac{x+3}{6} \qquad \text{m.c.d.=6}$$

$$3x-2x<x+3$$

$$\cancel{x}<\cancel{x}+3$$

$$0<3$$

La disequazione ottenuta, e quindi quella iniziale, è verificata qualsiasi sia il valore assegnato all'incognita (la relazione ottenuta non dipende infatti da x). L'insieme delle sue soluzioni è dunque:

$$S=\mathbb{Q} \quad \text{spesso sintetizzato con la scrittura } \forall x$$

Facciamo notare che se la disequazione avesse avuto verso opposto la relazione finale $0>3$ sarebbe risultata impossibile pertanto la disequazione non avrebbe avuto soluzioni ossia $S=\emptyset$.

Esempio 1.2.5.

$$2(x-2)^2+5x+3x(1-x)>(x+4)(4-x)-8$$

$$2x^2-8x+8+5x+3x-3x^2>-x^2+16-8$$

$$-x^2+8>-x^2+8$$

$$0>0$$

La disequazione ottenuta, e quindi quella iniziale, è impossibile in quanto non è mai verificata (anche in questo caso la relazone è indipendente da x).
L'insieme delle soluzioni è pertanto $S=\emptyset$ spesso sintetizzato con la scrittura $\nexists x$.

Osservazione. Se nell'ultimo esempio ci fosse stato $\geq$ anzichè $>$ avremmo ottenuto $0\geq 0$ che è sempre verificata ($\forall x$) in quanto è unione di due relazioni: $0>0$ e $0=0$ (quest'ultima sempre verificata)

Esempio 1.2.6.

$$(y-\frac{1}{4})(y+\frac{1}{4})+\frac{1}{16}-y\geq(y-\frac{1}{5})(y+\frac{1}{2})+\frac{1}{10}$$

$$\cancel{y^2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - y \geq \cancel{y^2} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{5}y - \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$$
$$-10y \geq 5y - 2y$$
$$13y \leq 0$$
$$y \leq 0$$

Alle disequazioni intere è naturale estendere la definizione di forma normale e quella di grado date per le equazioni. Gli esempi sinora svolti si riferivano a disequazioni intere di primo gardo.

Risolvere disequazioni intere di grado superiore una volta che sono state portate a forma normale (cioè del tipo $P(x) \leq 0$ oppure $P(x) \geq 0$) equivale a determinare per quali valori dell'incognita il polinomio $P(x)$ è positivo, negativo o nullo, il che significa studiare il *segno* di $P(x)$. Per fare questo è sufficiente scomporre il polinomio in fattori e, confrontando i segni di questi ultimi, applicare le regole sul segno di un prodotto.
Per chiarire la procedura descritta procediamo ora con un esempio nel quale verrà illustrato il metodo operativo per eseguirla.

Esempio 1.2.7.

$$x^2 + x \geq 3 - x$$

portiamo la disequazione a forma normale:

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

scomponiamo in fattori il polinomio:

$$(x + 3)(x - 1) \geq 0$$

Per studiare il segno dei fattori conveniamo di determinare i valori dell'incognita che li rendono positivi o nulli (≥ 0); in tal modo si ricavano anche i valori, complementari dei precedenti, che li rendono negativi. Pertanto:

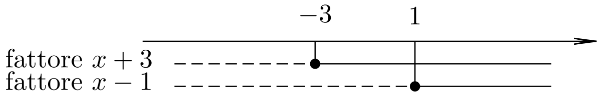
primo fattore:

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

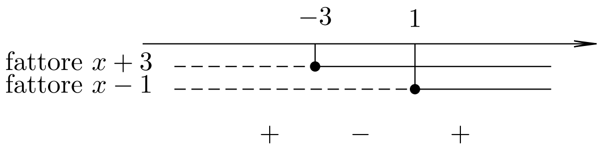
secondo fattore:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

Per confrontare i segni dei fattori si ricorre ad una rappresentazione grafica detta *Grafico di segno.* Essa consiste nel tracciare, con riferimento ad un sistema di ascisse, per ogni fattore una linea orizzontale continua in corrispondenza dei valori per i quali il fattore è positivo, tratteggiata dove esso è negativo; indichamo inoltre con un pallino pieno il valore che annulla il fattore.Applicando quanto descritto all'esempio, otteniamo:



Nel grafico di segno si individuano 3 'zone' (prima di -3, tra -3 e 1, dopo di 1) in ciascuna delle quali, applicando le regole sul segno del prodotto, possiamo stabilire il segno del polinomio della forma normale che conveniamo di riassumenre con i simboli+ oppure $-$ collocandoli sotto ad ogni zona alla quale si riferiscono. Il grafico di segno nella sua forma definitiva diventa:



Possiamo pertanto stabilire che il polinomio è:

positivo per $x < -3$ oppure $x > 1$

negativo per $-3 < x < 1$

nullo per $x = -3$ oppure $x = 1$

Nella disequazione ridotta a forma normale veniva richiesto di individuare i valori che rendevano positivo o nullo il polinomio. Possiamo dunque concludere che la soluzione della disequazione è

$$x \leq -3 \vee x \geq 1$$

Osservazione. Qualora la disequazione precedente in forma normale fosse stata una delle seguenti:

$x^2 + 2x - 3 \leq 0$

$x^2 + 2x - 3 < 0$

$x^2 + 2x - 3 > 0$

è evidente che il metodo risolutivo sarebbe rimasto il medesimo, ma sarebbero cambiate ovviamente le soluzioni dedotte dal grafico di segno. Avremmo infatti ottenuto rispettivamente:

$-3 \leq x \leq 1$

$-3 < x < 1$
$x < -3 \vee x > 1$

Il procedimento per risolvere una disequazione intera può essere così riassunto:

1. riduzione della disequazione a forma normale
2. scomposizione in fattori del polinomio ottenuto
3. studio del segno di ogni fattore
4. rappresentazione dei segni dei fattori nel grafico di segno
5. lettura delle soluzioni.

Esempio 1.2.8.

$$x - 4x^3 < 0$$

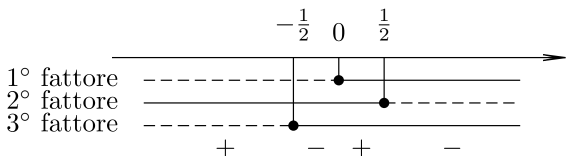
$$x(1 - 4x^2) < 0$$

$$x(1 - 2x)(1 + 2x) < 0$$

1° fattore: $x \geq 0$

2° fattore: $1 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

3° fattore: $1 + 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$



$$S: -\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > \frac{1}{2}$$

Esempio 1.2.9.

$$x^4 + 3x(x - 29 > 1 + 2x(x - 1) + x^2 - 4x$$

$$x^4 + 3x^2 - 6x > 1 + 2x^2 - 2x + x^2 - 4x$$

$$x^4 + \cancel{3x^2} - \cancel{6x} > \cancel{3x^2} - \cancel{6x} + 1$$

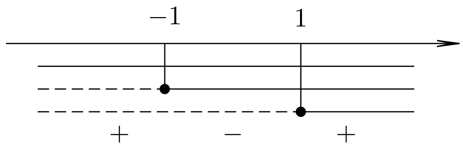
$$x^4 - 1 > 0$$

$$(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) > 0$$

studiamo il segno dei fattori senza enumerarli

$x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow \forall x$ in quanto il valore minimo di questa somma è 1
$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

é prassi consolidata non indicare il fattore al quale si riferisce la linea di segno.



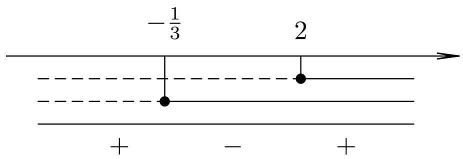
$$S : x < -1 \vee x > 1$$

Osservazione. Il fattore x^2+1, in quanto sempre positivo, avrebbe potuto essere trascurato perchè non influenza il segno del polinomio, oppure semplificato applicando il secondo principio di equivalenza.

Esempio 1.2.10.

$$27x^4 - 2 \leq x(54x^2 - 1)$$
$$27x^4 - 2 \leq 54x^3 - x$$
$$27x^4 - 54x^3 + x - 2 \leq 0$$
$$27x^3(x - 2) + 1(x - 2) \leq 0$$
$$(x - 2)(27x^3 + 1) \leq 0$$
$$(x - 2)(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) \leq 0$$

$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
$3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{3}$
$9x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow \forall x$ (la dimostrazione che i 'falsi quadrati' sono sempre positivi, verrà data nei prossimi capitoli)



$$S : -\frac{1}{3} \leq x \leq 2$$

Osservazione. I falsi quadrati e le somme di quantità positive (vedi ultimi due esempi) in quanto positivi per ogni valore della x, volendo, possono essere trascurati.

Esempio 1.2.11.

$$(25x^2 - 10x + 1)(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) > 0$$
$$(5x - 1)^2(x + 2)^3 > 0$$

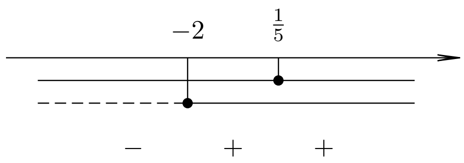
Per studiare il segno di questi fattori è sufficiente ricordare che le potenze con esponente pari non sono mai negative mentre quelle con esponente dispari mantengono il segno della base, pertanto:

$(5x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$

pur essendo formalmente corretta, questa scrittura non è del tutto esauriente perchè non esplicita il valore che annulla il fattore. Scegliamo allora di indicare tale valore tra parentesi per poter rappresentare in modo completo il segno del fattore nel grafico; scriviamo pertanto:

$(5x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$ (si annulla per $x = \frac{1}{5}$)

$(x+2)^3 \geq 0 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$



$$S : x > -2 \wedge x \neq \frac{1}{5} \quad \text{che si può anche scrivere} \quad -2 < x < \frac{1}{5} \vee x > \frac{1}{5}$$

Esempio 1.2.12.

$$(2x^5 - x^4)(3-x)^5(x-2)^2 \geq 0$$

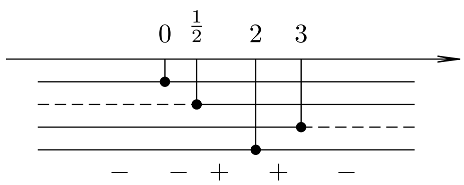
$$x^4(2x-1)(3-x)^5(x-2)^2 \geq 0$$

$x^4 \geq 0 \Rightarrow \forall x$ (si annulla per $x = 0$)

$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$(3-x)^5 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$

$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$ (si annulla per $x = 2$)



$$S : x = 0 \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

Esempio 1.2.13.

$$(x-2)(x-1) \geq 1 - x$$

$$x^2 - \cancel{x} - 2x + 2 \geq 1 - \cancel{x}$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow S : \forall x$$

Non serve esplicitare il valore che annulla il fattore perchè, essendo esso unico, per determinare la soluzione, non è necessaria la rappresentazione grafica.

Si invita a prendere visione con attenzione del prossimo esempio nel quale ogni disequazione è ricondotta allo studio della potenza di un unico fattore:

Esempio 1.2.14.

$$\begin{aligned}
&(2x+1)^2 > 0 \Rightarrow S : \forall x \neq -\frac{1}{2} \\
&(3x-5)^5 \leq 0 \Rightarrow S : x \leq \frac{5}{3} \\
&(x-3)^4 < 0 \Rightarrow S : \nexists x \\
&(2-7x)^3 > 0 \Rightarrow S : x < \frac{2}{7} \\
&(2-x)^2 \leq 0 \Rightarrow S : x = 2 \\
&x^4 \geq 0 \Rightarrow S : \forall x
\end{aligned}$$

Disequazioni fratte

Ogni disequazione fratta, mediane il primo principio e i calcoli algebrici, può essere portata ad una delle forme:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

E' opportuno far notare che $B(x)$ non può essere semplificato, come accadeva con le equazioni, in quanto anch'esso influisce sul segno della frazione.
Risulta evidente che la risoluzione di una disequazione fratta è riconducibile alla determinazione del segno di una frazione e, poichè le regole sul segno di un quoziente sono le stesse relative al segno di un prodotto, possiamo utilizzare la stessa procedura descritta per le disequazioni di grado superiore al primo.
Possiamo così schematizzare:

1. Riduzione della disequazione fratta ad una delle forme:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

2. scomposizione in fattori di $A(x)$ e $B(x)$.
3. studio del segno dei fattori ricordando che i fattori a denominatore non possono annullarsi perchè, se ciò accadesse, la frazione perderebbe di significato.
4. realizzazione del grafico di segno.
5. lettura delle soluzioni.

A questo punto procediamo con alcuni esempi chiarificatori.

Esempio 1.2.15.

$$\frac{x^2-7x+6}{2x-3x^2} \leq 0$$

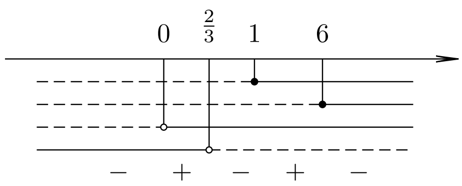
la disequazione si presenta già nella forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leq 0$

Scomponendo in fattori:

$$\frac{(x-6)(x-1)}{x(2-3x)} \leq 0 \qquad C.E.\ x \neq 0; x \neq \frac{2}{3}$$

$x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$
$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
$x > 0$
$2 - 3x > 0 \Rightarrow x < \dfrac{2}{3}$

ogni fattore al denominatore deve essere posto > 0 e non ≥ 0 in quanto non può annullarsi. In tal modo vengono ribadite le C.E. che pertanto potrebbero essere omesse perchè già esplicite nello studio del segno di tali fattori.
Sulla riga di segno di ciascun fattore a denominatore conveniamo di indicare con un pallino vuoto i valori che lo annullano in quanto sono da escludere (nel nostro caso 0 e 2/3).



$$S : x < 0 \vee \frac{2}{3} < x \leq 1 \vee x \geq 6$$

Esempio 1.2.16.

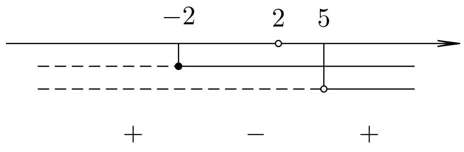
$$\frac{x^2-4}{x^2-7x+10} < 0$$

$$\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x-5)\cancel{(x-2)}} < 0 \qquad C.E.\ x \neq 2; x \neq 5$$

$$\frac{(x+2)}{(x-5)} < 0$$

Osservazione (importante). La condizione $x \neq 5$, formalmente corretta, è dal punto di vista pratico, contenuta nello studio del segno di $x - 5$ e quindi avremmo potuto ometterla.(D'ora in poi condizioni di questo tipo non verranno più esplicitate). Diversamente la condizione $x \neq 2$ è indispensabile in quanto il fattore $x - 2$ non compare più nella frazione ottenuta. Nel grafico di segno conveniamo di indicare tale C.E. indispensabile con un pallino vuoto in corrispondenza del 2 sul sistema di ascisse di riferimento.

$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
$x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$



$$S: -2 < x < 5 \wedge x \neq 2 \quad \text{che si può anche scrivere} \quad S: -2 < x < 2 \vee 2 < x < 5$$

Esempio 1.2.17.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} > \frac{1}{x-1}$$

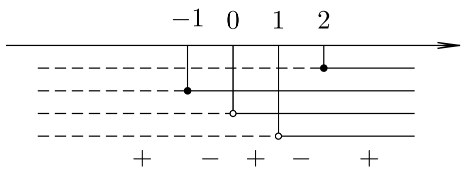
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x-1} > 0$$

$$\frac{2x - 2 + x^2 - x - 2x}{2x(x-1)} > 0$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)} > 0$$

$$\frac{(x-2)(x+1)}{2x(x-1)} > 0$$

$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
$x > 0$
$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$



$$S: x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee x > 2$$

Esempio 1.2.18.

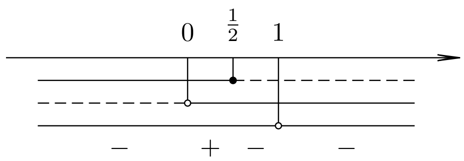
$$\frac{1}{x} \leq \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\frac{1}{x} \leq -\frac{x}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1 - x^2}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$$\frac{-2x + 1}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$-2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$
$x > 0$
$(x-1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \neq 1$



$$S : x < 0 \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \vee x > 1 \quad \text{si può anche scrivere} \quad x < 0 \vee (x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 1)$$

1.3 Sistemi di disequazioni

Definizione 1.3.1. Si dice *sistema* di disequazioni un insieme di disequazioni.

E' pertanto un sistema di disequazioni il seguente:

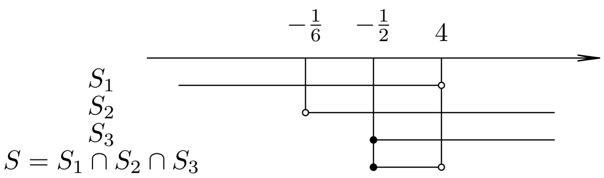
$$\left\{(x+1)^2 - 5 < x^2 + 4, 3x + \frac{1}{2} > 0, 4x + 5 \geq 7\right\}$$

che è consuetudine indicare in modo più chiaro:

$$\begin{cases} (x+1)^2 - 5 < x^2 + 4 \\ 3x + \dfrac{1}{2} > 0 \\ 4x + 5 \geq 7 \end{cases}$$

Definizione 1.3.2. Una soluzione di un sistema di disequazioni è un valore che è soluzione di tutte le disequazioni che lo compongono.

Per risolvere un sistema, cioè determinare l'insieme di tutte le sue soluzioni, è sufficiente individuare l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di tutte le disequazioni componenti; pertanto risolta singolarmente ogni disequazione, si determina l'intersezione delle soluzioni come studiato nel corso del primo anno (matematica 1 capitolo 2 paragrafo 4.1).
Il grafico che viene usato allo scopo viene chiamato grafico di intersezione o di sistema; con riferimento al sistema iniziale, procediamo come segue:
prima disequazione: $x^2 + 2x + 1 - 5 < x^2 + 4 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow S_1 : x < 4$
seconda disequazione: $3x > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow S_2 : x > -\dfrac{1}{6}$
terza disequazione: $4x \geq 2 \Rightarrow S_3 : x \geq \dfrac{1}{2}$



$$S : \frac{1}{2} \leq x < 4$$

Nei prossimi esempi non indicheremo più i nomi degli insiemi soluzione nel grafico di intersezione e non rappresenteremo la linea che indica l'intersezione delle soluzioni scrivendole direttamente osservando il grafico.

Esempio 1.3.1.

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-3} \leq 1 \\ (x-2)^2 - 4(x+1) > x^2 + 16 \end{cases}$$

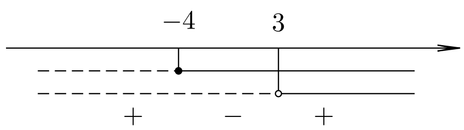
prima disequazione:

$$\frac{2x+1}{x-3} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x+1-x+3}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{x+4}{x-3} \leq 0$$

$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$
$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 43$



$$S_1 : -4 \leq x < 3$$

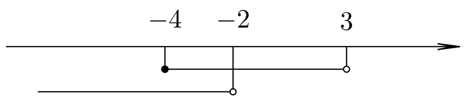
seconda disequazione:

$$x^2 - 4x + 4 - 4x > x^2 + 16$$

$$-8x > 16$$

$$S_2 : x < -2$$

intersechiamo le soluzioni:



$$S : -4 \leq x < -2$$

Esempio 1.3.2.

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{2}{x^2-x-2} \geq \dfrac{2x}{(1+x)(2-x)} \\ x^2-6x+9>0 \\ \dfrac{1}{x} \geq -1 \end{cases}$$

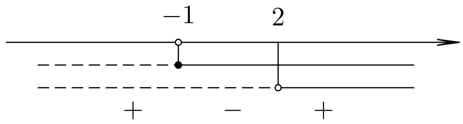
prima disequazione:

$$\frac{x^2-1+2+2x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{(x-2)\cancel{(x+1)}} \geq 0 \qquad C.E. x \neq -1$$

$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
$x-2>0 \Rightarrow x>2$



$$S_1 : x < -1 \vee x > 2$$

seconda disequazione:

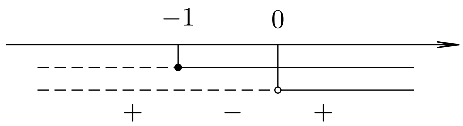
$$(x-3)^2 > 0$$

$$S_2 : \forall x \neq 3$$

terza disequazione:

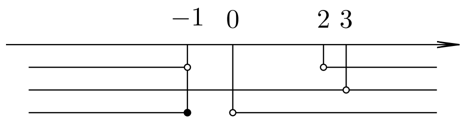
$$\frac{1+x}{x} \geq 0$$

$1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
$x>0$



$$S_3 : x \leq -1 \vee x > 0$$

intersechiamo le soluzioni:



$$S : x < -1 \vee (x > 2 \wedge x \neq 3)$$

1.4 Equazioni e disequazioni con moduli

E' possibile estendere la definizione di modulo di un numero, data nel primo volume, ad una espressione algebrica nel modo seguente:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) \text{ se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) \text{ se } A(x) < 0 \ (*) \end{cases}$$

(*) si potrebbe anche scrivere $A(x) \leq 0$ in quanto se $A(x) = 0$ allora $-A(x) = A(x) = 0$
$A(x)$ viene detto *argomento* del modulo.

Proponiamo i seguenti esempi chiarificatori:

$$|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5 \text{ se } 2x - 5 \geq 0 \text{ ossia } x \geq \dfrac{5}{2} \\ -(2x - 5) \text{ se } 2x - 5 < 0 \text{ ossia } x < \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$|3 - 4x| = \begin{cases} 3 - 4x \text{ se } x \leq \dfrac{3}{4} \\ -3 + 4x \text{ se } x > \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 \text{ se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$|x^2 + 1| = x^2 + 1$ abbiamo un solo caso in quanto $A(x)$ non è mai negativo.

Osservazione. Dalla definizione risulta evidente che un modulo è una quantità non negativa qualunque sia il valore della variabile (ovviamente purchè esista l'argomento).

Per semplificare un'espressione contenente delle quantità in modulo è opportuno trasformarla in una scrittura equivalente costituita dall'unione di altre espressioni senza moduli. Il caso più semplice in cui è presente un unico modulo, poichè esso può dare origine a due casi, si può ridurre all'unione di due espressioni non contenenti moduli come illustrato nel prossimo esempio

Esempio 1.4.1. Dopo aver semplificato l'espressione $E(x) = |x-2| + x - 5$, calcolarne il valore per $x = 0,\ x = 2,\ x = 3$.

Poichè

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ se } x \geq 2 \\ -x+2 \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

l'espressione è equivalente a:

$$E(x) = \begin{cases} E_1(x) = x-2+x-5 = 2x-7 \text{ se } x \geq 2 \\ E_2(x) = -x+2+x-5 = -3 \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

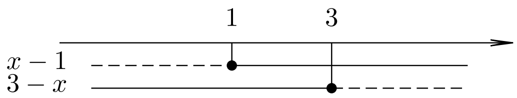
$E(0) = E_2(0) = -3$ essendo $0 < 2$
$E(2) = E_1(2) = E_2(2) = -3$ essendo 2 il valore che annulla l'argomento del modulo
$E(3) = E_1(3) = -1$ essendo $3 \geq 2$

E' facile comprendere che più sono i moduli presenti nell'espressione, maggiore è il numero delle 'sottoespressioni' la cui unione equivale all'espressione iniziale. Per la loro determinazione si ricorre ad un opportuno grafico in cui vengono rappresentati i segni degli argomenti dei moduli.
Illustriamo il procedimento mediante il seguente esempio:

Esempio 1.4.2.

$$E(x) = |x-1| + 3x - |3-x| + 1$$

Segno degli argomenti dei moduli:
$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
$3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$
La rappresentazione dei segni riportata nel seguente grafico:



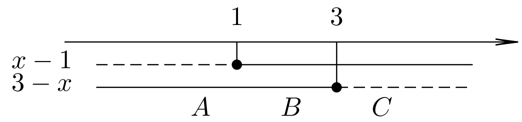
consente di individuare 3 casi possibili e quindi di trasformare $E(x)$ nell'unione di 3 espressioni:

$$E(x) = \begin{cases} E_1(x) = -x+1+3x-(-x+3)+1 = 3x-1 \text{ se } x \leq 1 \\ E_2(x) = x-1+3x-(-x+3)+1 = 5x-3 \text{ se } 1 < x \leq 3 \\ E_3(x) = x-1+3x-(x-3)+1 = 3x+3 \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

Osservazione. Il grafico utilizzato per il confronto dei segni degli argomenti dei moduli, non va confuso con il grafico di segno delle disequazioni, pur avendo la stessa struttura.

Per evitare ambiguità, ma non solo per questo,(come vedremo più avanti) è spesso utile contrassegnare ogni zona di tale grafico con una etichetta (solitamente le prime lettere dell'alfabeto).

In tal modo, con riferimento all'esempio precedente, il grafico assumerà questa forma:



Quanto visto per le espressioni contenenti moduli si estende in modo naturale alle equazioni e disequazioni con moduli. Quindi ogni equazione e disequazione di tal genere verrà trasformata nell'unione di più equazioni e disequazioni come viene illustrato negli esempi che seguono.

Equazioni

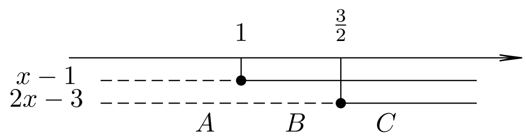
Esempio 1.4.3.

$$|x-1| = 4 - |2x-3|$$

Studiamo e rappresentiamo il segno degli argomenti dei moduli:

$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$



Analizziamo ogni sottocaso risolvendo l'equazione che per esso si ottiene ricorrendo ad un sistema, detto *sistema misto* , contenente una condizione, che esplicita il sottocaso, ed una equazione.

A: $\begin{cases} x \leq 1 \\ -x+1 = 4-(-2x+3) \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1 \\ -x+1 = 4+2x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1 \\ 3x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1 \\ x = 0 \end{cases}$ è accettabile in quanto soddisfa la condizione $x \leq 1$

B: $\begin{cases} 1 < x \leq \dfrac{3}{2} \\ x-1 = 4-(-2x+3) \end{cases}$ $\begin{cases} 1 < x \leq \dfrac{3}{2} \\ x-1 = 4+2x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 < x \leq \dfrac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases}$ non accettabile

C: $\begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x-1 = 4-(2x-3) \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x-1 = 4-2x+3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ \\ x = \dfrac{8}{3} \end{cases}$ accettabile

L'insieme soluzione dell'equazione iniziale è l'unione delle soluzioni ottenute nei tre sottocasi svolti; dunque

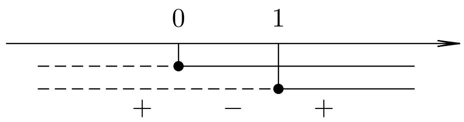
$$S = \left\{0, \frac{8}{3}\right\} \text{ si può anche scrivere } S : x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$$

Esempio 1.4.4.

$$|x^2 - x| - 2 = |x - 2|$$

Segno degli argomenti:

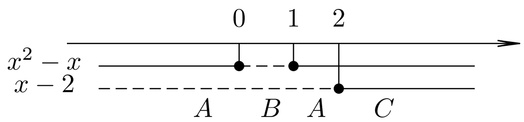
$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \; x \geq 0 \; x \geq 1$



$x \leq 0 \vee x \geq 1$

$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Rappresentazione del segno degli argomenti:



A: $\begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2 \\ x^2 - \cancel{x} - 2 = \cancel{x} + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2 \\ (x+2)(x-2) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2 \\ x = 2 \vee x = -2 \end{cases}$ entrambe accettabili

B: $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + x - 2 = -x + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow \nexists x \end{cases}$ (falso quadrato)

C: $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x - \cancel{2} = x - \cancel{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2 \\ x(x-2) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x = 0 \text{ accettabile } \vee \; x = 2 \text{ non accettabile} \end{cases}$$

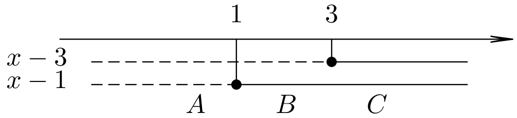
$$S : x = -2 \vee x = 2 \vee x = 0$$

Esempio 1.4.5.

$$\frac{|x-3| - x^2}{|x-1|} = 1 - |x-1| \qquad C.E. x \neq 1$$

$|x-3| - x^2 = |x-1| - |x-1|^2$
$|x-3| - \cancel{x^2} = |x-1| - \cancel{x^2} + 2x - 1$
$|x-3| = |x-1| + 2x - 1$

Segno degli argomenti:
$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
Rappresentazione del segno degli argomenti:



A: $\begin{cases} x \leq 1 \\ -x+3=-x+1+2x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ non accettabile

B: $\begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ -x+3=x-1+2x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ x=\dfrac{5}{4} \end{cases}$ accettabile

C: $\begin{cases} x > 3 \\ x-3=x-1+2x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ non accettabile

$$S: x=\frac{3}{2}$$

Esempio 1.4.6.

$$(|x|+2)^2 = |x^2+2| - 3|x| + |-3|$$

Si possono togliere i moduli a $|x^2+2|$ e a $|-3|$ in quanto i loro argomenti sono rispettivamente positivo e negativo.

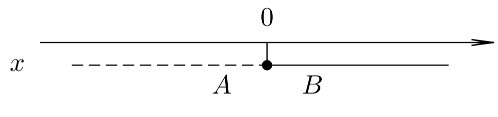
$$|x|^2+4|x|+4 = x^2+2-3|x|+3$$

poichè $|x|^2 = x^2$(prova a verificarlo) possiamo scrivere:

$$\cancel{x^2}+4|x|+4=\cancel{x^2}-3|x|+5$$

$$7|x|-1=0$$

Segno dell'argomento e sua rappresentazione:
$x \geq 0$



A: $\begin{cases} x \leq 0 \\ -7x-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x=-\dfrac{1}{7} \end{cases}$ accettabile

B: $\begin{cases} x > 0 \\ 7x - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x = \dfrac{1}{7} \end{cases}$ accettabile

$$S : x = -\frac{1}{7} \vee x = \frac{1}{7}$$

L'equazione svolta nell'ultimo esempio avrebbe potuto essere risolta in modo più sintetico anche come segue:
da $7|x|-1 = 0$ si ottiene $|x| = \dfrac{1}{7}$ che permette di concludere che le soluzioni sono $x = \pm\dfrac{1}{7}$ in quanto affinchè un modulo sia uguale a $\dfrac{1}{7}$ il suo argomento deve valere $\dfrac{1}{7}$ oppure $-\dfrac{1}{7}$.
Questa considerazione che ci ha permesso di risolvere in modo elegante l'equazione, può essere estesa ad ogni equazione riconducibile alla forma $|A(x)| = k$ con k costante, distinguendo i seguenti casi:

1) se $k < 0$ $\quad |A(x)| = k$ è impossibile perchè un modulo non può essere negativo $\Rightarrow \nexists x$
2) se $k = 0$ $\quad |A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = 0$
3) se $k > 0$ $\quad |A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = -k \vee A(x) = k$

Esempio 1.4.7.

$$(x+1)^2 - |x-3| = (x+5)(x-5) + 2x$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1 - |x-3| = \cancel{x^2} - 25 + \cancel{2x}$$

$$|x-3| = 26$$

$$x - 3 = -26 \vee x - 3 = 26$$

$$x = -23 \vee x = 29$$

Esempio 1.4.8.

$$|x^2 - 3x + 1| + 5 = 2$$

$$|x^2 - 3x + 1| = -3 \qquad \nexists x$$

Esempio 1.4.9.

$$(x-3)^2 - 5x - |-x^2 + 4| = (x-1)(x+1) - 11x + 10$$

$$\cancel{x^2} - 6x + 9 - 5x - |4 - x^2| = \cancel{x^2} - 1 - 11x + 10$$

$$-\cancel{11x} + \cancel{9} - |4 - x^2| = -\cancel{11x} + \cancel{9}$$

$$|4 - x^2| = 0$$

$$4 - x^2 = 0 \qquad (2-x)(2+x) = 0 \qquad x = -2 \vee x = 2$$

Disequazioni

Illustriamo il procedimento da usare per la risoluzione di disequazioni con moduli mediante gli esempi che seguono:

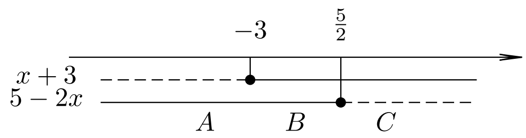
Esempio 1.4.10.

$$2x + |x+3| < |5-2x|$$

Procediamo, come fatto per le equazioni, allo studio e alla rappresentazione del segno degli argomenti dei moduli:

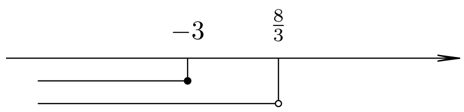
$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$5 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{5}{2}$



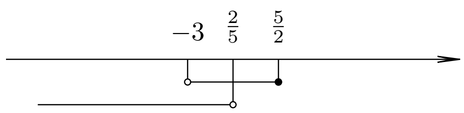
E' sufficiente risolvere ciascuno dei sistemi di disequazioni che si ottengono nei tre sottocasi e unire le soluzioni determinate per ognuno di essi.

A: $\begin{cases} x \leq -3 \\ 2x - x - 3 < 5 - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq -3 \\ x < \dfrac{8}{3} \end{cases}$



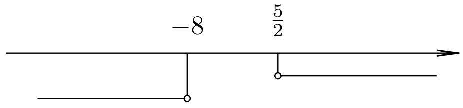
$S_1 : x \leq -3$

B: $\begin{cases} -3 < x \leq \dfrac{5}{2} \\ 2x + x + 3 < 5 - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x \leq \dfrac{5}{2} \\ x < \dfrac{2}{5} \end{cases}$



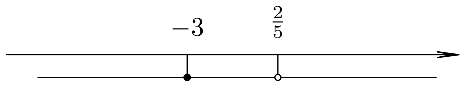
$S_2 : -3 < x < \dfrac{2}{5}$

C: $\begin{cases} x > \dfrac{5}{2} \\ 2x + x + 3 < -5 + 2x \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{5}{2} \\ x < -8 \end{cases}$



$S_3 : \nexists x$

La soluzione S della disequazione, come già anticipato, è data dall'unione di S_1, S_2 ed S_3; per ottenerla può essere utile rappresentare, rispetto ad un sistema di ascisse, su un'unica riga, i tre insiemi ottenuti:



da cui si deduce che:

$$S : x < \frac{2}{5}$$

Esempio 1.4.11.

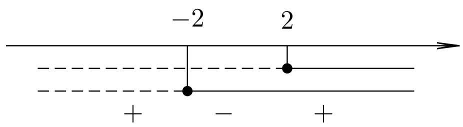
$$|x^2 - 4| \leq |x^2 - 7x|$$

Segno degli argomenti

$x^2 - 4 \geq 0 \qquad (x-2)(x+2) \geq 0$

$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

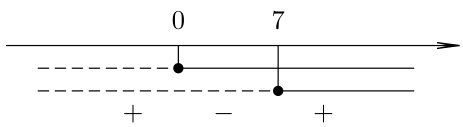


$x \leq -2 \vee x \geq 2$

$x^2 - 7x \geq 0 \qquad x(x-7) \geq 0$

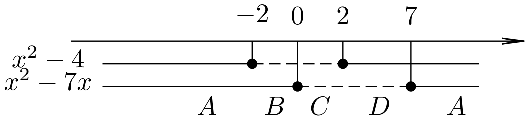
$x \geq 0$

$x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7$

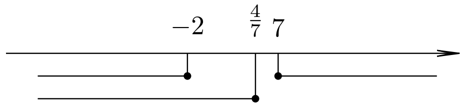


$x \leq 0 \vee x \geq 7$

Rappresentazione del segno degli argomenti:



A: $\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 7 \\ x^2-4 \leq x^2-7x \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 7 \\ x \leq \dfrac{4}{7} \end{cases}$



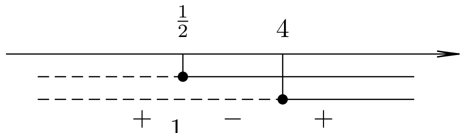
$S_1 : x \leq -2$

B: $\begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ -x^2+4 \leq x^2-7x \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ 2x^2-7x-4 \geq 0 \end{cases}$

2^a disequazione del caso B: $(2x-1)(x-4) \geq 0$

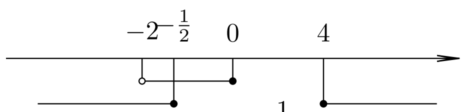
$2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$

$x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$



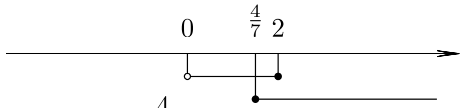
$x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq 4$

intersecando :



$S_2 : -2 < x \leq -\dfrac{1}{2}$

C: $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ -x^2+4 \leq -x^2+7x \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \geq \dfrac{4}{7} \end{cases}$

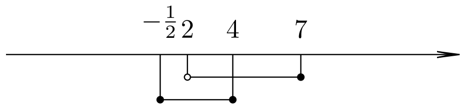


$S_3 : \frac{4}{7} \leq x \leq 2$

D: $\begin{cases} 2 < x \leq 7 \\ x^2 - 4 \leq -x^2 + 7x \end{cases}$ $\begin{cases} 2 < x \leq 7 \\ 2x^2 - 7x - 4 \leq 0 \end{cases}$

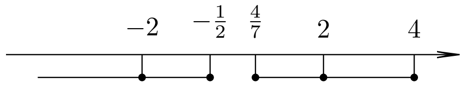
le soluzioni della 2^a disequazione del caso D si possono ricavare dal grafico di segno della 2^a disequazione del caso B

$$\begin{cases} 2 < x \leq 7 \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 4 \end{cases}$$



$S_4 : 2 < x \leq 4$

Unendo le soluzioni :



$$S : x \leq -\frac{1}{2} \vee \frac{4}{7} \leq x \leq 4$$

Esempio 1.4.12.

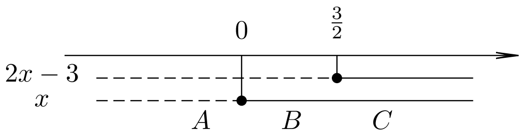
$$|2x - 3| < |x| + x$$

Segno degli argomenti:

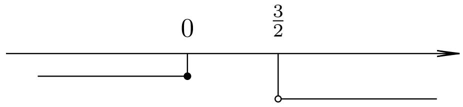
$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$

$x \geq 0$

Rappresentazione del segno degli argomenti:



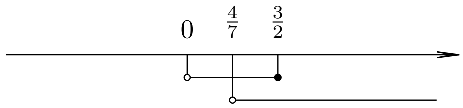
$$\text{A: }\begin{cases} x \leq 0 \\ -2x+3 < -x+x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 0 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$



$$S_1 : \nexists x$$

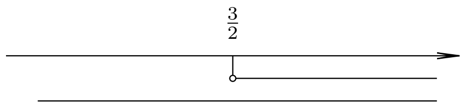
(soluzione che poteva essere facilmente intuita senza ricorrere al grafico di intersezione)

$$\text{B: }\begin{cases} 0 < x \leq \dfrac{3}{2} \\ -2x+3 < x+x \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x \leq \dfrac{3}{2} \\ \\ x > \dfrac{3}{4} \end{cases}$$



$$S_2 : \frac{3}{4} < x \leq \frac{3}{2}$$

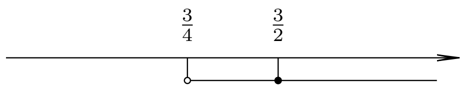
$$\text{C: }\begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ 2x-3 < x+x \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ -3 < 0 \Rightarrow \forall x \end{cases}$$



$$S_3 : x > \frac{3}{2}$$

(anche in questo caso il grafico di intersezione poteva essere evitato)

Unendo le soluzioni:



$$S : x > \frac{3}{4}$$

Come per le equazioni del tipo $|A(x)| = k$, anche nel caso di disequazioni riconducibili alla forma $|A(x)| < k$ oppure $|A(x)| > k$ con k costante, è possibile determinare le soluzioni in modo più rapido ed elegante pensando alla definizione di modulo e al suo segno come di seguito descritto:

Primo caso:

$$|A(x)| < k$$

1) se $k < 0$ $\quad |A(x)| < k \Rightarrow \nexists x$
2) se $k = 0$ $\quad |A(x)| < 0 \Rightarrow \nexists x$
3) se $k > 0$ $\quad |A(x)| < k \Rightarrow \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$ equivalente a $-k < A(x) < k$

la seconda forma è preferibile se $A(x)$ è un polinomio di primo grado perchè in tal caso è possibile isolare l'incognita.

Secondo caso:

$$|A(x)| > k$$

1) se $k < 0$ $\quad |A(x)| > k \Rightarrow \forall x$
2) se $k = 0$ $\quad |A(x)| > 0 \Rightarrow \forall x$ che non annulla $A(x)$
3) se $k > 0$ $\quad |A(x)| > k \Rightarrow A(x) < -k \vee A(x) > k$

Esempio 1.4.13.

$$|x - 2| < 5 \Rightarrow -5 < x - 2 < 5$$

risolvendo simultaneamente le due disequazioni si ottiene:

$$-5 + 2 < x < 5 + 2$$

$$-3 < x < 7$$

Osservazione: si ottiene lo stesso risultato con il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 2 > -5 \\ x - 2 < 5 \end{cases}$$

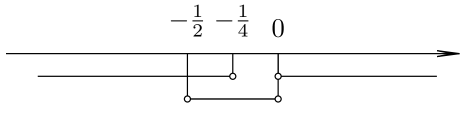
Esempio 1.4.14.

$$\left|\frac{3x+1}{x}\right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x} > -1 \\[2ex] \dfrac{3x+1}{x} < 1 \end{cases}$$

Risolvendo separatamente ogni disequazione otteniamo:

$$\begin{cases} x < -\dfrac{1}{4} \vee x > 0 \\ -\dfrac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

e intersecando:



$$S : -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4}$$

Esempio 1.4.15.

$$3 - |5 - 2x| > 6$$

$$|5 - 2x| < -3 \Rightarrow \nexists x$$

Esempio 1.4.16.

$$|3x - 7| > 4 \Rightarrow 3x - 7 < -4 \vee 3x - 7 > 4$$

$$3x < 3 \vee 3x > 11$$

$$x < 1 \vee x > \frac{11}{3}$$

Esempio 1.4.17.

$$|25 - 4x^2| > 0 \Rightarrow \forall x \text{ purchè } 25 - 4x^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow (5 - 2x)(5 + 2x) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{5}{2} \wedge x \neq -\frac{5}{2}$$

quindi

$$S : \forall x \neq \pm\frac{5}{2}$$

Esempio 1.4.18.

$$(x - 2)^2 - 3|x| < x(x - 1) - 3x + 8$$

$$\cancel{x^2} - 4x + 4 - 3|x| < \cancel{x^2} - x - 3x + 8$$

$$-\cancel{4x} + 4 - 3|x| < -\cancel{4x} + 8$$

$$|x| > -\frac{4}{3} \Rightarrow \forall x$$

Esempio 1.4.19.

$$\left|\frac{x}{x-2}\right| > -7 \quad \Rightarrow \forall x \neq 2 \text{ } (x \neq 2 \text{ è una condizione di esistenza })$$

Esempio 1.4.20.

$$|1 - x| - 3 \leq 0$$

$$|1 - x| \leq 3 \;\Rightarrow\; -3 \leq 1 - x \leq 3 \;\Rightarrow\; -4 \leq -x \leq 2 \qquad (4 \geq x \geq -2)$$

$$-2 \leq x \leq 4$$

Esempio 1.4.21.

$$|x+5|+3x \geq 3(x+|x+5|)$$

$$|x+5|+\cancel{3x} \geq \cancel{3x}+3|x+5|$$

$$2|x+5| \leq 0$$

$$|x+5| \leq 0 \Rightarrow x=-5$$

infatti $|x+5|<0$ non è mai verificata e quindi la disequazione equivale a $|x+5|=0$ da cui la soluzione.

Proponiamo ora esercizi più complessi che richiedono l'utilizzo simultaneo delle procedure studiate:

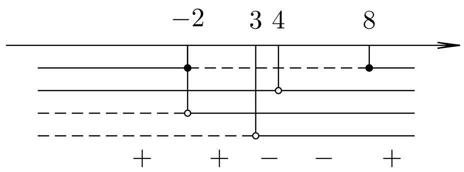
Esempio 1.4.22.

$$\frac{|x-3|-5}{|4-x|(x^2-x-6)} \geq 0$$

E' necessario scomporre per avere tutti fattori dei quali siamo in grado di studiare il segno.

$$\frac{|x-3|-5}{|4-x|(x+2)(x-3)} \geq 0$$

$|x-3|-5 \geq 0 \Rightarrow |x-3| \geq 5 \Rightarrow\ x-3 \leq -5 \vee x-3 \geq 5\ \Rightarrow\ x \leq -2 \vee x \geq 8$
$|4-x|>0 \Rightarrow \forall x \neq 4$
$x+2>0 \Rightarrow x>-2$
$x-3>0 \Rightarrow x>3$



$$S:(x<3 \wedge x \neq -2) \vee x \geq 8$$

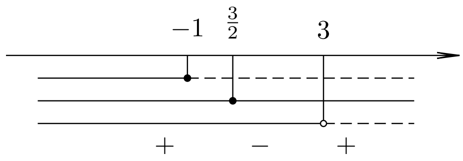
Esempio 1.4.23.

$$\frac{(4x^2-12x+9)(|2-x|-|x+5|+1)}{(3-x)^3(x^2-6x+9)}<0$$

$$\frac{(2x-3)^2(|2-x|-|x+5|+1)}{(3-x)^5}<0$$

$(2x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \left(\text{ si annulla per} x=\dfrac{3}{2}\right)$

$|2-x|-|x+5|+1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$
(lo si verifichi per esercizio come esposto relativamente alle disequazioni con moduli)
$(3-x)^5 > 0 \Rightarrow x < 3$



$$S: -1 < x < 3 \wedge x \neq -\frac{3}{2}$$

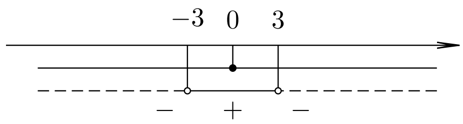
Esempio 1.4.24.

$$\begin{cases} \dfrac{x^8}{3-|x|} \leq 0 \\[2ex] \dfrac{x^2+3x+2}{5x+2} > 1 \\[2ex] \left|\dfrac{2x+1}{x}\right| < 3 \end{cases}$$

Si risolvono singolarmente le tre disequazioni:
Prima disequazione:

$$\frac{x^8}{3-|x|} \leq 0$$

$x^8 \geq 0 \Rightarrow \forall x$ (si annulla per $x=0$)
$3-|x| > 0 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$



$S_1: x < -3 \vee x = 0 \vee x > 3$

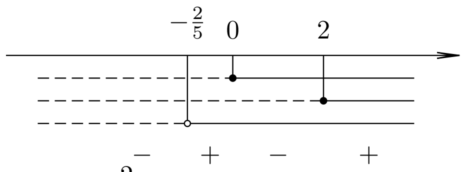
Seconda disequazione:

$$\frac{x^2+3x+2}{5x+2} > 1$$

$$\frac{x^2-2x}{5x+2} > 0$$

$$\frac{x(x-2)}{5x+2} > 0$$

$x \geq 0$
$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
$5x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{2}{5}$



$S_2 : -\dfrac{2}{5} < x < 0 \vee x > 2$

Terza disequazione:

$$\left| \frac{2x+1}{x} \right| < 3$$

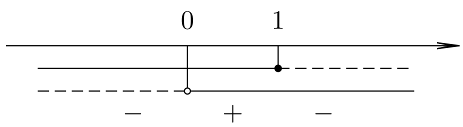
per risolvere questa disequazione è necessario risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} < 3 \\[2ex] \dfrac{2x+1}{x} > -3 \end{cases}$$

eseguendo i calcoli:

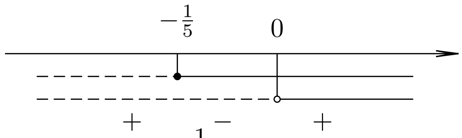
$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{x} < 0 \\[2ex] \dfrac{5x+1}{x} > 0 \end{cases}$$

1^a disequazione di quest'ultimo sistema $\dfrac{1-x}{x} < 0$
$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$
$x > 0$



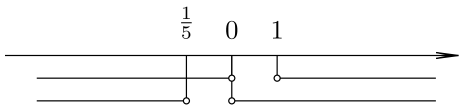
$S_1' : x < 0 \vee x > 1$

2^a disequazione dell'ultimo sistema $\dfrac{5x+1}{x} > 0$
$5x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{5}$
$x > 0$



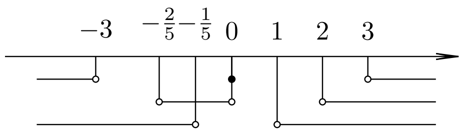
$S_2' : x < -\dfrac{1}{5} \vee x > 0$

intersecando le soluzioni del sistema risolvente la terza disequazione:



$S_3 : x < -\dfrac{1}{5} \vee x > 1$

Intersecando le tre soluzioni del sistema iniziale:



$$S : -\frac{2}{5} < x < -\frac{1}{5} \vee x > 3$$