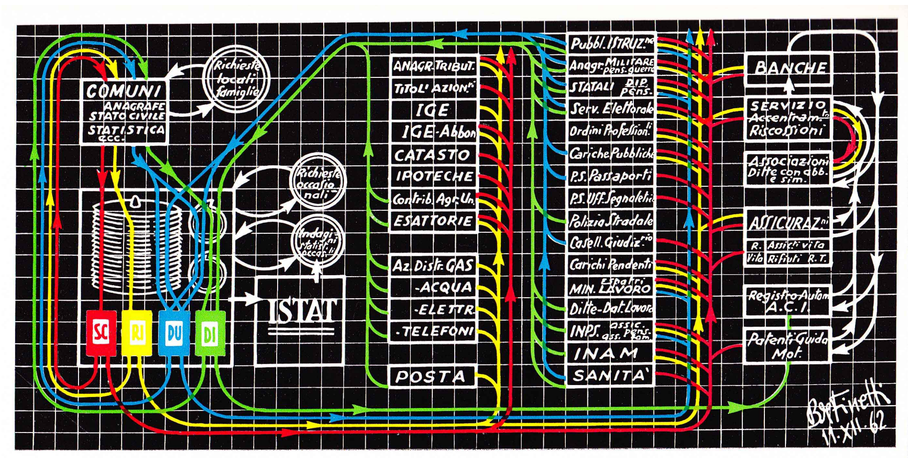
TEORIA DELLA PROBABILITÀ I

Dipartimento di Matematica



ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [2015-16]

Indice

Capitolo 1

Probabilità

1.1 Introduzione

Il lancio di un dado, il lancio di una moneta, l'estrazione di un numero al Lotto sono tutti esempi di *esperimenti aleatori* o *casuali* ove il risultato non può essere previsto con certezza.
Per valutare il grado di probabilità attribuibile ad un evento, è necessario ragionare sempre all'interno di un insieme di *casi possibili* o *esiti possibili.*

Esempio 1.1.1. Nel lancio di un dado (regolare a 6 facce) i *casi possibili* o *esiti possibili* sono le corrispondenti facce $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

1.2 Eventi

Definizione 1.2.1. Diremo *Spazio Campionario* o *Insieme Universo* Ω l'insieme di tutti i possibili casi o esiti di un esperimento aleatorio o casuale.

Definizione 1.2.2. Diremo *Spazio degli Eventi* l'insieme delle parti di Ω cioè $\mathcal{P}(\Omega)$.

In particolare, diremo
Evento Elementare ogni sottoinsieme di Ω formato da un solo elemento;
Evento Certo l'insieme Ω stesso;
Evento Impossibile l'insieme vuoto cioè $\emptyset$.

Gli eventi si indicano con con una lettera maiuscola dell'alfabeto latino ma possono essere anche descritti con una frase.

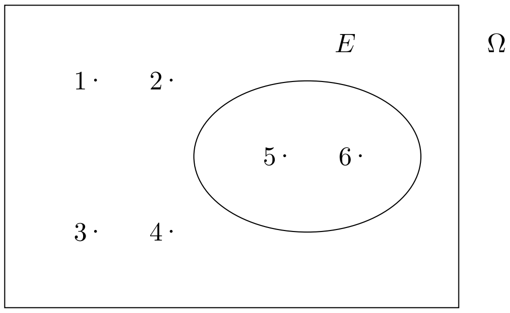
Esempio 1.2.1. Nel lancio di un dado (regolare a 6 facce), si ha
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
l'evento E_1:"'**esce un numero dispari**"' nel linguaggio degli insiemi diventa $E_1 = \{1, 3, 5\}$;
l'evento certo coincide con Ω;
un evento elementare è $E_2 = \{5\}$.

Esempio 1.2.2. Nel lancio di una moneta (regolare con testa e croce), si ha
$\Omega = \{T, C\}$;
l'evento E_1:"'**esce testa**"' nel linguaggio degli insiemi diventa $E_1 = \{T\}$;
l'evento impossibile può essere E_2:"'**esce stellina**"' oppure se dopo il lancio la moneta resta in piedi;
un evento elementare è $E_3 = \{C\}$.

Esempio 1.2.3. Nell'estrazione da un'urna con 10 palline uguali e numerate da 1 a 10, si ha
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
l'evento E_1:”’**esce un multiplo di 3**”’ nel linguaggio degli insiemi diventa $E_1 = \{3, 6, 9\}$;
l'evento impossibile può essere E_2:”’**esce il numero 11**”’;
un evento elementare è $E_3 = \{7\}$.

Per risolvere problemi di probabilità, può essere utile rappresentare graficamente lo spazio campionario, allo scopo di visualizzare e determinare meglio gli eventi. Chiariamo con alcuni esempi.

Esempio 1.2.4. Nel lancio di un dado (regolare a 6 facce), si determini l'evento E:”’**esce un numero maggiore di 4**”’ mediante rappresentazione grafica.



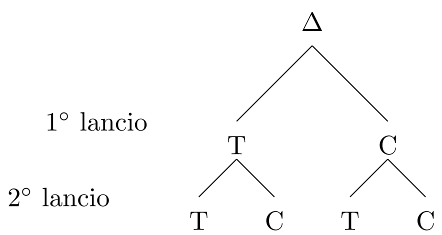
Dal grafico risulta evidente che $E = \{5, 6\}$.

Esempio 1.2.5. Nel lancio di una moneta (regolare con testa e croce) per 2 volte successive, si determini l'evento E:”’**esce croce almeno una volta**”’ mediante rappresentazione grafica.

tab	T	C
T	TT	TC
C	CT	CC

Dalla tabella risulta evidente che
$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$
$E = \{TC, CT, CC\}$.

Osservazione. Anzichè rappresentare il lancio con una tabella, si può darne un'efficace illustrazione con il seguente diagramma ad albero, la cui radice è stata indicata con la lettera greca Δ:



Esempio 1.2.6. Nel lancio di una coppia di dadi (regolari a 6 facce), si determinino l'evento E_1:"'**la somma dei numeri usciti è minore o uguale a 4**"' e l'evento E_2:"'**i numeri sulle due facce sono uguali**"' mediante rappresentazione grafica.

tab	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dalla tabella risulta evidente che
$\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(6,5),(6,6)\}$
$E_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$
$E_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

1.3 Operazioni con gli eventi

Sia Ω uno spazio campionario, siano A e B due eventi (cioè $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ovvero $A, B \subseteq \Omega$);

Definizione 1.3.1. diremo *Evento Unione* $A \cup B$ (indicato anche con A o B) l'evento che si realizza quando si realizza A o si realizza B o si realizzano entrambi.

Definizione 1.3.2. diremo *Evento Intersezione* $A \cap B$ (indicato anche con A e B) l'evento che si realizza quando si realizzano sia A che B.

Definizione 1.3.3. diremo *Evento Differenza* tra A e B, e lo indicheremo con $A \setminus B$, l'evento che si realizza quando si verifica A ma non B.

Definizione 1.3.4. diremo *Evento Contrario o Complementare o Negato* di A, e lo indicheremo con $\overline{A}$ (e leggeremo non A), l'evento differenza tra Ω e A cioè l'evento che si realizza quando non si realizza A.

Si forniscono inoltre le seguenti definizioni:

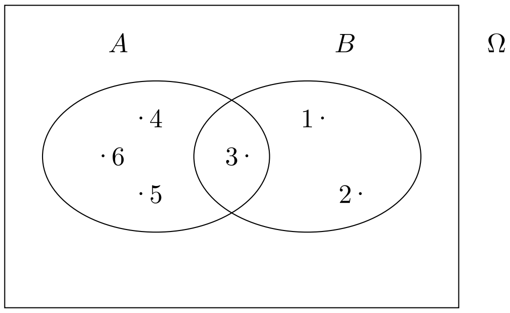
Definizione 1.3.5. diremo che due eventi A e B sono *Esaustivi* se $A \cup B = \Omega$ cioè la loro unione è l'insieme universo.

Definizione 1.3.6. diremo che due eventi A e B sono *Incompatibili* se $A \cap B = \emptyset$ cioè non possono verificarsi contemporaneamente.

Definizione 1.3.7. diremo che gli eventi E_1, E_2,..., E_m formano una *Partizione* dell'universo se sono non vuoti, a due a due incompatibili ed esaustivi.

Si forniscono i seguenti esercizi risolti a titolo di esempio.

Esempio 1.3.1. Nel lancio di un dado (regolare a 6 facce), siano A:"'**esce un numero maggiore di 2**"'e B:"'**esce un numero minore di 4**"'; si determinino $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.



Dal grafico risulta evidente che
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e dunque:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ quindi A e B sono easaustivi
$A \cap B = \{3\}$ quindi A e B sono compatibili
$A \setminus B = \{4, 5, 6\}$ $B \setminus A = \{1, 2\}$ $\overline{A} = \Omega - A = \{1, 2\}$
$\overline{B} = \Omega - B = \{4, 5, 6\}$
si noti che A e B non formano una partizione di Ω poichè sono compatibili.

Esercizio 1.3.1. Nel lancio di un dado (regolare a 6 facce), siano A:”’**esce un numero minore o uguale di 5**”’e B:”’**esce un numero maggiore di 3**”’; si determinino $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ e si stabilisca se A e B formano una partizione di Ω.

Esercizio 1.3.2. Nell’estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte, siano A:”’**esce una donna**”’e B:”’**esce una carta di cuori**”’; si determinino $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Esercizio 1.3.3. Nel lancio di due dadi (regolari a 6 facce), siano A:”’**la somma dei due numeri è minore o uguale a 4**”’e B:”’**i numeri sulle due facce sono uguali**”’; si determinino $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.
(si veda la tabella relativa all’esempio 2.6)

Esercizio 1.3.4. Nel lancio di due dadi (regolari a 6 facce), siano A:”’**la somma dei due numeri è maggiore di 4**”’e B:”’**i numeri sulle due facce sono diversi**”’; si determinino $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.
(si veda la tabella relativa all’esempio 2.6)

Esercizio 1.3.5. Nell’estrazione di una pallina da un’urna contenente 20 palline uguali numerate da 1 a 20, siano A:”’**esce un numero multiplo di 3**”’, B:”’**esce un numero primo maggiore di 4**”’e $C = \{1, 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20\}$; si determinino $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $C \setminus B$ $\overline{A}$, $\overline{B}$ e si stabilisca se A, B e C formano una partizione di Ω.

1.4 La Probabilità

1.4.1 Le Teorie di Probabilità

Il calcolo della probabilità è quella parte della matematica che sviluppa metodi per misurare il grado di realizzazione di un evento aleatorio.
Si sono sviluppate storicamente quattro diverse teorie, ciascuna adatta a specifici contesti.
Esse sono:

- la teoria classica o della probabilità a priori;

- la teoria frequentista;
- la teoria soggettiva;
- la teoria assiomatica.

1.4.2 La Probabilità Classica o a Priori

Dato un esperimento aleatorio, supponiamo che gli **n casi possibili siano ugualmente verificabili** (con $n \in \mathbb{N}^*$); sia E un evento formato da **k** casi, detti **casi favorevoli**.

Definizione 1.4.1. Diremo *Probabilità di un Evento E*, e scriveremo **p(E)**, il rapporto $\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$ ove **k** è il numero dei casi favorevoli ed **n** il numero dei casi possibili, ossia

$$\mathbf{p(E)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$$

Esempio 1.4.1. Nel lancio di un dado (regolare a 6 facce), siano A:"'**esce il numero 5**"', B:"'**esce un multiplo di 2**"', C:"'**esce un numero maggiore o uguale a 2**"' e D:"'**esce un numero compreso fra 7 e 10**"'; si determinino $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ e $p(D)$.

Risulta evidente (lo studente diligente realizzi un opportuno grafico) che
$A = \{5\}$ e quindi $p(A) = \frac{1}{6}$,
$B = \{2, 4, 6\}$ e quindi $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
$C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e quindi $p(C) = \frac{5}{6}$,
$D = \emptyset$ e quindi $p(D) = \frac{0}{6} = 0$

Esercizio 1.4.1. Nel lancio di un dado (regolare a 6 facce), siano A:"'**esce un numero primo**"', B:"'**esce un numero dispari**"', C:"'**esce un quadrato perfetto**"' e D:"'**esce un numero non positivo**"'; si determinino $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ e $p(D)$.

Esercizio 1.4.2. Nel lancio di una moneta (regolare con testa e croce) per 2 volte successive, siano A:"'**escono due simboli diversi**"', B:"'**esce lo stesso simbolo**"', C:"'**esce testa almeno una volta**"' e D:"'**non esce mai croce**"'; si determinino $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ e $p(D)$.

Esercizio 1.4.3. Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 52, siano A:"'**esce una figura**"' e B:"'**esce un asso**"'; si determinino $p(A)$, $p(B)$, $p(\overline{A})$ e $p(\overline{B})$.

1.4.3 La Probabilità Frequentista

Dato un esperimento aleatorio **ripetibile quante volte si vuole**, supponiamo che gli **n casi possibili non siano ugualmente verificabili** come, per esempio, nel lancio di un dado truccato.

Definizione 1.4.2. Diremo *Frequenza di un Evento E*, e scriveremo **f(E)**, il rapporto $\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$ ove **k** è il numero delle prove in cui l'evento si è verificato ed **n** il numero delle prove, ossia

$$\mathbf{f(E)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$$

Al crescere del numero n delle prove si osserva che il valore di f si stabilizza e **assumeremo tale valore come misura della probabilità** dell'evento stesso.

Esempio 1.4.2. Dopo aver lanciato una moneta truccata un milione di volte, si registra la seguente situazione: esce testa 654782 volte. Si calcolino le probabilità di uscita di testa e croce.
Il giorno seguente, la stessa moneta truccata viene lanciata ancora un milione di volte e si registra la seguente situazione: esce testa 602000 volte. Si calcolino le probabilità di uscita di testa e croce del secondo giorno.
Il giorno ancora seguente, la stessa moneta truccata viene lanciata dieci milioni di volte e si registra la seguente situazione: esce testa 6234504 volte. Si calcolino le probabilità di uscita di testa e croce del terzo giorno.

Calcoliamo la frequenza degli eventi richiesti relativi al primo giorno:

$$f(T_1) = \frac{654782}{1000000} = 0.654782 \quad , \quad f(C_1) = \frac{345218}{1000000} = 0.345218$$

In base alla definizione, assumiamo $p(T_1) = f(T_1)$ e $p(C_1) = f(C_1)$.

Calcoliamo la frequenza degli eventi richiesti relativi al secondo giorno:

$$f(T_2) = \frac{602000}{1000000} = 0.602000 \quad , \quad f(C_2) = \frac{398000}{1000000} = 0.398000$$

In base alla definizione, assumiamo $p(T_2) = f(T_2)$ e $p(C_2) = f(C_2)$.

Calcoliamo la frequenza degli eventi richiesti relativi al terzo giorno:

$$(T_3) = \frac{6234504}{10000000} = 0.6234504 \quad , \quad f(C_3) = \frac{3765496}{10000000} = 0.3765496$$

In base alla definizione, assumiamo $p(T_3) = f(T_3)$ e $p(C_3) = f(C_3)$.

Osservazione. Le probabilità relative allo stesso evento sono diverse nei tre giorni: ciò è compatibile con la definizione data. Inoltre, i dieci milioni di lanci fatti il terzo giorno devono ripartire da capo, non è possibile utilizzare i due milioni di lanci già fatti nei giorni precedenti perchè le serie di prove devono essere indipendenti.

Tra le probabilità trovate, quale è bene considerare la più attendibile?

1.4.4 La Probabilità Soggettiva

E' dato un esperimento aleatorio **non ripetibile**, ove gli **n casi possibili non siano ugualmente verificabili** come, per esempio, nella scommessa sull'esito della prossima partita della propria squadra.

Definizione 1.4.3. Diremo *Probabilità di un Evento E* **la misura del grado di fiducia** che un individuo **coerente** attribuisce al verificarsi dell'evento in base alle **informazioni e opinioni** in proprio possesso, e scriveremo $\mathbf{p(E)} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{v}}$ ove **s** è il prezzo che si è disposti a pagare per partecipare alla scommessa che, se vinta, fa ottenere la vincita **v**, ossia

$$\mathbf{p(E)} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{v}}$$

Esempio 1.4.3. Toni scommette a proposito della partita Juventus-Milan: è disposto a pagare 5 euro sulla vittoria della Juve per ricavarne 25, invece ne scommette 10 sul Milan per ottenerne 40. Si calcolino le probabilità che Toni attribuisce alla vittoria di ciascuna squadra.

$\mathbf{p(J)} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{25}} = 0.2$ che corrisponde al 20%

$\mathbf{p(M)} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{40}} = 0.25$ che corrisponde al 25%

Osservazione. La coerenza di Toni si misura nella sua disponibilità a scambiare il proprio ruolo con quello del banco.

1.4.5 La Probabilità Assiomatica

La probabilità può, in alternativa ma compatibilmente con la definizione data nella sottosezione precedente, essere definita mediante assiomi.

Definizione 1.4.4. Sia Ω uno spazio campionario e sia E un evento ($E \subseteq \Omega$); la probabilità dell'evento E, $\mathbf{p(E)}$, è un numero reale tale che:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_1) & 0 \leq p(E) \leq 1 \\ \mathcal{A}_2) & p(\Omega) = 1 \\ \mathcal{A}_3) & \text{se } A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) \end{array}$$

(Si noti che nell'assioma $\mathcal{A}_1$ sarebbe sufficiente $p(E) \geq 0$.)
Si dimostrano, inoltre, i seguenti teoremi:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}_1) & p(\emptyset) = 0 \\ \mathcal{P}_2) & p(\overline{A}) = 1 - p(A) \\ \mathcal{P}_3) & \text{se } A, B \subseteq \Omega \Rightarrow p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B) \\ \mathcal{P}_4) & p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ \mathcal{P}_5) & p\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} p(E_i) = 1, \text{ ove gli eventi } E_i \text{ formano una partizione di } \Omega \end{array}$$

Dim. $\mathcal{P}_1$) (*Probabilità dell'Evento Impossibile*)
$1 = p(\Omega) = p(\emptyset \cup \Omega) = p(\emptyset) + p(\Omega) = p(\emptyset) + 1$
da cui: $p(\emptyset) = 0$,
essendo $\emptyset$ e Ω incompatibili ed avendo usato $\mathcal{A}_2$) e $\mathcal{A}_3$). □

Dim. $\mathcal{P}_2$) (*Probabilità dell'Evento Contrario*)
$1 = p(\Omega) = p(\overline{A} \cup A) = p(\overline{A}) + p(A)$
essendo $\overline{A}$ e A incompatibili ed avendo usato $\mathcal{A}_2$) e $\mathcal{A}_3$). □

Dim. $\mathcal{P}_3$) (*Probabilità della Differenza*)
$p(A) = p((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = p(A \setminus B) + p(A \cap B)$
da cui $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$
essendo ($A \setminus B$ e $A \cap B$ incompatibili ed avendo usato $\mathcal{A}_3$). □

Dim. $\mathcal{P}_4$) (*Probabilità dell'Evento Unione*)
$p(A \cup B) = p((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)) = p(A \setminus B) + p(A \cap B) + p(B \setminus A) = p(A) - p(A \cap B) + p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
essendo $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$ incompatibili ed avendo usato $\mathcal{A}_3$) e la proprietà $\mathcal{P}_3$). □

Dim. $\mathcal{P}_5$) (*Probabilità della Partizione*)
$1 = p(\Omega) = p\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} p(E_i)$
avendo usato $\mathcal{A}_2$), $\mathcal{A}_3$) e la definizione di partizione. □

Esempio 1.4.4. Nel lancio di due dadi (regolari a 6 facce), sia E:"'**la somma dei due numeri è pari o un multiplo di 3**"'; si determini $p(E)$ direttamente o, alternativamente, usando assiomi e proprietà. (si veda la tabella relativa all'esempio 2.6)
Individuando direttamente E, si ottiene $p(E) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$;
osservando, invece, che:
$E = A \cup B$ ove A:"'**la somma dei due numeri è pari** e B:"'**la somma dei due numeri è un multiplo di 3**"'
$p(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$,
$p(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$,
$p(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
ed usando ora la proprietà $\mathcal{P}_3$):

$$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(E) = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

Esempio 1.4.5. Nell'estrazione di una pallina da un'urna contenente 12 palline uguali numerate da 1 a 12, sia E:"'**esce un numero divisibile per 2 o per 3**"'; si determini $p(E)$ direttamente o, alternativamente, usando assiomi e proprietà.
Individuando direttamente E, si ottiene $p(E) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$;
osservando, invece, che:
$E = A \cup B$ ove A:"'**esce un numero divisibile per 2** e B:"'**esce un numero divisibile per 3**"'
$p(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$,
$p(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,
$p(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
ed usando ora la proprietà $\mathcal{P}_3$):

$$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(E) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Esempio 1.4.6. Nel lancio di una moneta (regolare con testa e croce) per 4 volte successive, sia E:"'**esce testa almeno una volta**"'; si determini $p(E)$ direttamente o, alternativamente, usando assiomi e proprietà.
Per individuare direttamente E,si realizzi un diagramma ad albero da cui si ottiene $p(E) = \frac{15}{16}$;
osservando, invece, che:
$\overline{E}$:"'**non esce mai testa**
$p(\overline{E}) = \frac{1}{16}$,
ed usando ora la proprietà $\mathcal{P}_1$):
$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Esempio 1.4.7. Nel lancio di una moneta truccata (la testa ha probabilità tripla della croce), si determini la probabilità degli eventi T:"'**esce testa** "' e C:"'**esce croce**"'.
Per ipotesi risulta:
$p(T) = 3 \cdot p(C)$
inoltre, poichè T e C costituiscono una partizione:
$p(T) + p(C) = 1$
risolvendo il sistema così ottenuto si ha $p(T) = \dfrac{3}{4}$ e $p(C) = \dfrac{1}{4}$.

Esercizio 1.4.4. Nel lancio di due dadi (regolari a 6 facce), sia E:"'**la somma dei due numeri ottenuti è diversa da 7**"'; si determini $p(E)$.

$$\left[\frac{5}{6}\right]$$

Esercizio 1.4.5. Nel lancio di una moneta (regolare con testa e croce) per 6 volte successive, sia A:"'**esce testa almeno una volta** "'; si determini $p(E)$.

$$\left[\frac{63}{64}\right]$$

Esercizio 1.4.6. Nell'estrazione di un numero al Lotto, sia E:"'**esce un multiplo di 6 o di 8"'** ; si determini $p(E)$.

$$\left[\frac{23}{90}\right]$$

Esercizio 1.4.7. Nel lancio di un dado (truccato a 6 facce, ciascuna delle quali ha probabilità di uscire proporzionale al valore), si determinino le probabilità di uscita di ciascuna faccia.

$$\left[\frac{1}{21}, ..., \frac{2}{7}\right]$$

La Teoria della Probabilità può essere estesa anche a situazioni in cui il numero dei casi non è finito. Proponiamo di seguito un esempio.

Esempio 1.4.8. Nel lancio di una freccetta su un bersaglio (costituito da 5 circonferenze concentriche di raggio $5cm$, $10cm$,..., $25cm$ inserite in un quadrato di lato $50cm$, di punteggio rispettivamente 100, 75, 50, 25, 10), si determinino le probabilità di realizzare ciascun punteggio, un punteggio maggiore di 25, un punteggio compreso tra 25 e 100; la probabilità di non realizzare alcun punteggio pur colpendo il bersaglio; la probabilità di non realizzare 50.
Supponiamo che la freccetta colpisca senz'altro il bersaglio.

L'allievo diligente realizzi il grafico che illustri il problema.
Nel calcolo delle probabilità richieste sarà sufficiente sostituire il noto rapporto fra casi favorevoli e casi possibili (e il risultato era un numero razionale) con il rapporto fra l'area favorevole alla realizzazione dell'evento e quella che è possibile colpire (e il risultato sarà un numero reale).

La probabilità di totalizzare 100 punti è data da
$p(E_{100}) = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{50^2} = \dfrac{\pi}{100}$.

La probabilità di totalizzare 75 punti è data da
$p(E_{75}) = \dfrac{\pi \cdot (10^2 - 5^2)}{50^2} = \dfrac{3\pi}{100}$.

In maniera analoga si ricavano le probabilità per gli altri punteggi.

La probabilità di totalizzare un punteggio maggiore di 25 punti è data da
$p(E_{50}) + p(E_{75}) + p(E_{100}) = \frac{5\pi}{100} + \frac{3\pi}{100} + \frac{\pi}{100} = \frac{9\pi}{100}$.

La probabilità di totalizzare un punteggio compreso tra 25 e 100 punti è data da
$p(E_{50}) + p(E_{75}) = \frac{5\pi}{100} + \frac{3\pi}{100} = \frac{8\pi}{100}$.

La probabilità di non realizzare alcun punteggio è data da
$p(E_0) = \frac{\pi \cdot (50^2 - \pi \cdot 25^2)}{50^2} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

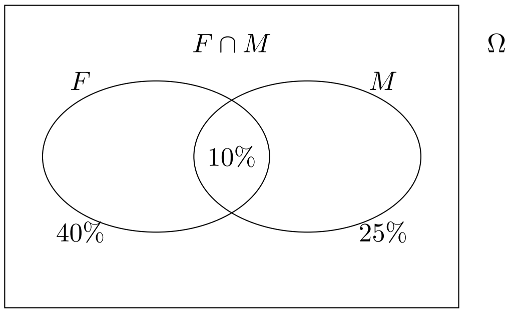
La probabilità di non realizzare 50 punti è data da
$p(\overline{E}_{50}) = 1 - p(E_{50}) = 1 - \frac{5\pi}{100} = 1 - \frac{\pi}{20}$.

Esercizio 1.4.8. La pista da ballo di una nota discoteca è rivestita da 100 mattonelle quadrate di colore bianco di lato $30cm$ in ciascuna delle quali è disegnato un semicerchio di diametro coincidente con un lato e di colore nero, e un triangolo isoscele di colore rosso con base coincidente con il lato opposto al diametro e vertice coincidente con il centro del quadrato. Una ragazza, ballando, perde un minuscolo orecchino (consideriamolo puntiforme).
Si calcoli la probabilità che l'orecchino cada nella zona bianca, in quella nera e in quella colorata.

Esercizio 1.4.9. Sulla tratta ferroviaria San Donà-Portogruaro ($30km$) si incontrano la stazione di Ceggia al km 8 e quella di San Stino al km 17. Un ragazzo (maleducato!) lancia, in un momento casuale del viaggio, una lattina dal finestrino.
Si calcoli la probabilità che la lattina cada tra Ceggia e San Stino e quella che non cada tra San Stino e Portogruaro.

1.4.6 La Probabilità Condizionata

Esempio 1.4.9. Sia Ω l'insieme della popolazione adulta di un determinato paese, di cui è noto che il 40% è fumatore abituale, cioè l'evento F:**"'essere fumatore"'** ha una probabilità $p(F) = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, ed è nota l'incidenza del 25% di una determinata malattia, cioè l'evento M:**"'essere malato"'** ha una probabilità $p(M) = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Inoltre è noto che coloro che sono sia fumatori che malati sono il 10% della popolazione, cioè l'evento $F \cap M$:**"'essere fumatore e malato"'** ha una probabilità $p(F \cap M) = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.
Qual è l'incidenza della malattia per i soli fumatori?



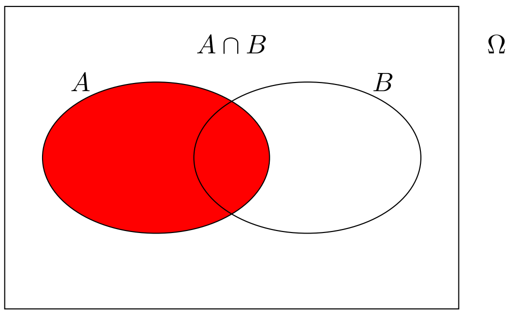
Dal grafico risulta evidente che la probabilità dell'evento essere malato per un fumatore, cioè la probabilità di M condizionata ad F, vale a dire la probabilità che si verifichi M essendosi già verificato F, è

$$\frac{p(F \cap M)}{p(F)} = \frac{10\%}{40\%} = \frac{1}{4}.$$

Definizione 1.4.5. Diremo *Probabilità Condizionata* di un evento B rispetto ad un evento A, con $A \neq \emptyset$, la probabilità di B nell'ipotesi che A si sia già verificato

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}.$$

Schematicamente



in pratica, è come se l'evento A fungesse da nuovo insieme universo di cui l'evento $B \cap A$ è un sottoinsieme.

Dalla precedente definizione consegue che

$$p(B \cap A) = p(A) \cdot p(B|A)$$

Esempio 1.4.10. Nel lancio di un dado (regolare a 6 facce), calcola la probabilità di B:"'**esce un numero minore di 4**"' nell'ipotesi che A:"'**esce un numero pari**"' si sia già verificato.
$B \cap A$:"'**esce un numero minore di 4 e pari**"'
$p(B \cap A) = \frac{1}{6}$

$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$

Lo studente rappresenti graficamente l'esercizio.

Definizione 1.4.6. Se $p(B|A) = p(B)$ allora A e B si dicono *Eventi Indipendenti.*

Se A e B sono indipendenti vale la *Regola del Prodotto*

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Osservazione. Se A e B sono indipendenti significa che il verificarsi dell'evento A non modifica la probabilità dell'evento B e, simmetricamente, il verificarsi dell'evento B non modifica la probabilità dell'evento A, cioè $p(B|A) = p(B)$ e simmetricamente $p(A|B) = p(A)$.

Esempio 1.4.11. Da un mazzo di 40 carte, qual è la probabilità che vengano estratti successivamente 2 assi dopo aver rimesso la prima carta estratta nel mazzo?
A:”’**la prima carta estratta è un asso**”’ da cui $p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$
B:”’**la seconda carta estratta è un asso**”’ da cui $p(B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$
A e B sono indipendenti perchè la prima carta estratta viene rimessa nel mazzo
$A \cap B$:”’**la prima carta estratta è un asso e la seconda carta estratta è un asso**”’
per la regola del prodotto, risulta
$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

Esempio 1.4.12. Da un mazzo di 40 carte, qual è la probabilità che vengano estratti successivamente 2 assi senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo?
A:”’**la prima carta estratta è un asso**”’ da cui $p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$
$B|A$:”’**la seconda carta estratta è un asso**”’ da cui $p(B|A) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$
A e B non sono indipendenti perchè la prima carta estratta non viene rimessa nel mazzo
$B \cap A$:”’**la prima carta estratta è un asso e la seconda carta estratta è un asso**”’
non vale la regola del prodotto e per la definizione di probabilità condizionata risulta
$p(B \cap A) = p(A) \cdot p(B|A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{130}$

Osservazione. E' interessante notare come nel secondo esempio sia cambiata la composizione del mazzo alla seconda estrazione, nell'ipotesi che l'evento A si sia già verificato.

Esercizio 1.4.10. Da un mazzo di 52 carte, qual è la probabilità che vengano estratti successivamente 2 figure dopo aver rimesso la prima carta estratta nel mazzo?

$$\left[\frac{9}{169}\right]$$

Esercizio 1.4.11. Da un mazzo di 52 carte, qual è la probabilità che vengano estratti successivamente 2 figure senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo?

$$\left[\frac{33}{663}\right]$$

Esercizio 1.4.12. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 rosse, qual è la probabilità che vengano estratte successivamente 2 palline bianche dopo aver rimesso la prima pallina estratta nell'urna?

$$\left[\frac{9}{25}\right]$$

Esercizio 1.4.13. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 rosse, qual è la probabilità che vengano estratte successivamente 2 palline bianche senza rimettre la prima pallina estratta nell'urna?

$$\left[\frac{3}{10}\right]$$

Parte I

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Algebra Lineare - Integrazione - Matematica 5 - Statistica descrittiva - Sistemi dinamici
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II - Teoria della probabilità III
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

STUDENTI

Matteo Alessandrini classe VA 2012-2013	Algebra Lineare
Simone Simonella classe IVA 2014-2015	Sistemi dinamici

Dipartimento di Matematica
ITIS V.Volterra
San Donà di Piave