Sistemi di equazioni lineari

Erica Boatto
I.T.I.S. V.Volterra
San Donà di Piave

Piero Fantuzzi
I.T.I.S. V.Volterra
San Donà di Piave

6 febbraio 2009

Sommario

Indice

Capitolo 1

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

1.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti è stato affrontato lo studio delle equazioni di primo grado e di alcune particolari di grado superiore, contenenti tutte una sola incognita. In questa sezione ci proponiamo di esaminare equazioni in più incognite. Ricordando quanto studiato nel volume 1 capitolo 7, una soluzione di un' equazione in più incognite non è un numero, ma rispettivamente una coppia, terna .... ordinata di numeri, in relazione a quante sono le incognite presenti.
Pertanto con riferimento all'equazione $x^2 - y = 2x$ una soluzione è ad esempio la coppia $(2, 0)$, mentre non è una sua soluzione la coppia $(1, 2)$ (farne la verifica). Con riferimento all'equazione $2x + y - 3z$ è una sua soluzione la terna $(6, -3, 3)$, non è soluzione invece $(1, 5, -2)$.

In generale le equazioni in più incognite hanno infinite soluzioni e sono quindi indeterminate. Infatti con l'esempio che segue è facile convincerci che per ogni valore (scelto tra gli infiniti possibili) attribuito ad una delle incognite è possibile determinare il valore da assegnare alle rimanenti in modo da verificare l'uguaglianza.

Esempio 1.1.1. Data l'equazione: $2x - y + 1 = 0$
se $x = 0$ dall'equazione si ottiene $-y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ quindi $(0, 1)$ è una soluzione
se $x = -2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (-2, -3)$ è una soluzione
se $y = 6 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{5}{2}, 6\right)$ è una soluzione
. . . .
L'equazione è quindi indeterminata, ma non un'identità perchè esistono oltre alle infinite coppie soluzione, infinite altre che non lo sono come ad esempio: $(0, 0)$; $\left(\dfrac{1}{2}, 7\right)$; $\left(-1, \dfrac{5}{3}\right)$ ....

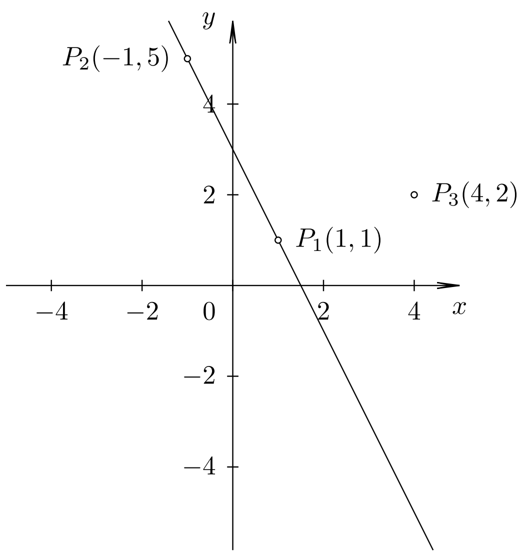
E' bene precisare che non tutte le equazioni in più incognite sono indeterminate perchè esistono casi particolari di equazioni che o non hanno soluzioni (impossibili) o ne hanno in numero finito (determinate).

Esempio 1.1.2.

L'equazione $x^2 + y^2 = -7$ non ha soluzioni perchè la somma di quadrati non può essere negativa.
L'equazione $(x+2)^2 + y^2 = 0$ ha come unica soluzione la coppia $(-2, 0)$ perchè la somma di quadrati è nulla solo se lo sono entrambi gli addendi.
Per lo stesso motivo, l'equazione $(x-1)^2 + (y^2-9)^2 = 0$ ha per soluzioni le due coppie $(1, 3)$ e $(1, -3)$

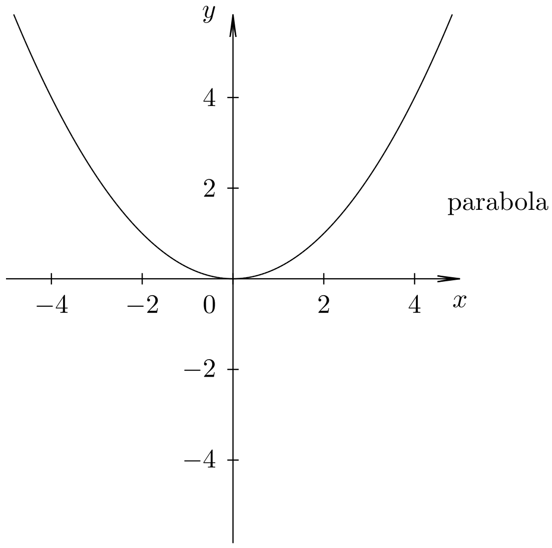
E' possibile dare un'interpretazione geometrica delle equazioni con due (tre) incognite infatti, poichè ad ogni coppia (terna) ordinata di numeri corrisponde un punto del piano (spazio), all'equazione corrisponderà una *curva* (*superficie*) costituita dall'insieme dei punti le cui coordinate sono soluzione dell'equazione.

Esempio 1.1.3. In laboratorio verificheremo che l'equazione $2x + y - 3 = 0$ ha per rappresentazione grafica la curva:

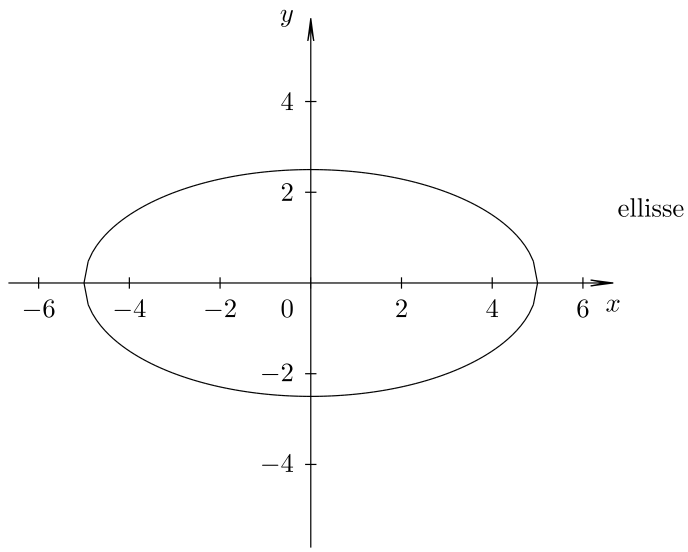


Facciamo notare che i punti $P_1(1, 1)$ e $P_2(-1, 5)$ appartengono alla curva in quanto le loro coordinate sono soluzione dell'equazione, mentre $P_3(4, 2)$ non vi appartiene perchè $(4, 2)$ non è una soluzione dell'equazione.

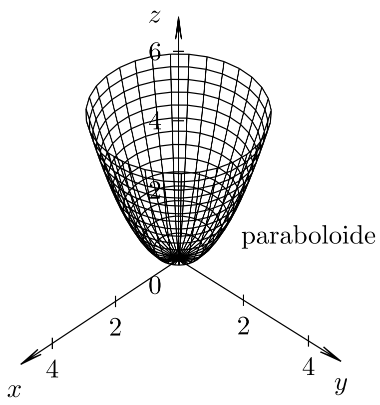
L'equazione $2y - x^2 = 0$ ha per rappresentazione grafica la curva:



L'equazione $x^2 + 4y^2 - 25 = 0$ ha per rappresentazione grafica la curva:



L'equazione $x^2 + y^2 - z = 0$ ha per rappresentazione grafica la superficie:



Abbiamo finora osservato che la maggior parte delle equazioni in più incognite è indeterminata, a questo punto viene naturale affrontare il problema della ricerca delle eventuali soluzioni comuni a più equazioni in più incognite; a tal proposito diamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.1.1. Si dice *sistema di equazioni* un insieme di equazioni.

Definizione 1.1.2. Si dice *soluzione* di un sistema di equazioni una coppia, terna ... ordinata di numeri che è soluzione di ogni equazione componente.

Definizione 1.1.3. *Risolvere* un sistema di equazioni significa determinare tutte le sue soluzioni

Con riferimento all'insieme delle soluzioni un sistema di equazioni può essere classificato come segue:

determinato $\Leftrightarrow$ l'insieme delle soluzioni è non vuoto e di cardinalità finita
impossibile $\Leftrightarrow$ l'insieme delle soluzioni è vuoto
indeterminato $\Leftrightarrow$ l'insieme dele soluzioni ha cardinalità infinita

Anche per un sistema è possibile dare la seguente definizione di grado:

Definizione 1.1.4. Si dice *grado* di un sistema di equazioni il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Nel caso in cui un sistema abbia grado uno esso si dice *sistema lineare*

Esempio 1.1.4. I sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0 \\ -y^3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - 2x = y \\ 2x = y - z \\ x^2 + y^2 = 4z \end{cases}$$

hanno rispettivamente grado $6, 1, 4$.

In questo capitolo ci occuperemo della risoluzione di sistemi lineari di equazioni in cui il numero di incognite è uguale a quello delle equazioni.

1.2 Sistemi lineari di due equazioni in due incognite (2 × 2)

I sistemi di cui ci occuperemo in questo paragrafo, in quanto lineari, devono contenere solo equazioni di primo grado e quindi, dopo aver portato ciascuna equazione a forma normale, si presenteranno nella forma:

$$\Sigma : \begin{cases} ax + by + c = 0 & a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q} \\ -a'x + b'y + c' = 0 & \text{con } a \text{ e } b \text{ così come } a' \text{ e } b' \text{ non contemporaneamente nulli} \end{cases}$$

detta *forma normale* del sistema.

A volte si preferisce scrivere il sistema nella forma:

$$\Sigma' : \begin{cases} ax + by = c \\ -a'x + b'y = c' \end{cases}$$

che continueremo a chiamare forma normale, nella quale i termini noti sono scritti al secondo membro.

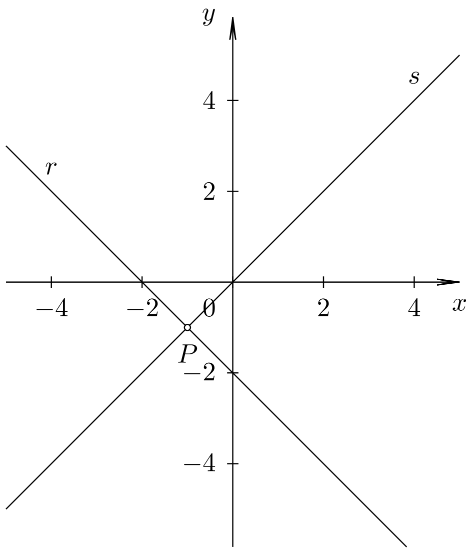
Poichè, come può essere verificato in laboratorio, un'equazione lineare in due incognite ha per grafico una retta, possiamo, ancor prima di imparare a risolvere algebricamente il sistema, dare ad esso e alle sue eventuali soluzioni un significato geometrico.

Possiamo affermare che risolvere un sistema, significa, da un punto di vista grafico, determinare le eventuali intersezioni tra le rette associate alle equazioni componenti.

Esempio 1.2.1. La rappresentazione geometrica del sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 & \to r \\ x - y = 0 & \to s \end{cases}$$

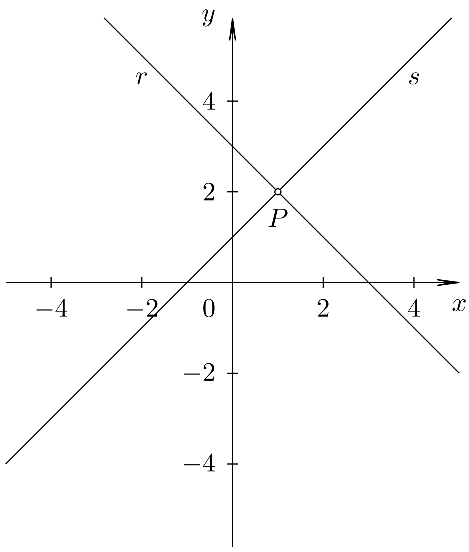
é:



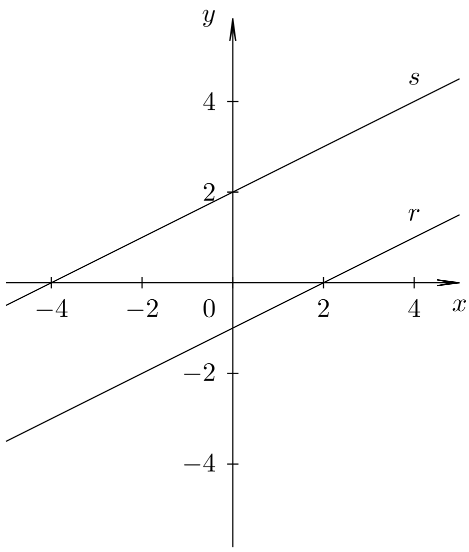
dunque la soluzione del sistema sarà la coppia ordinata costituita dalle coordinate del punto P che in seguito impareremo a determinare algebricamente.

In generale, poichè, come sappiamo dalla geometria, due rette possono essere incidenti o parallele (distinte o coincidenti), un sistema, pensando alla sua interpretazione geometrica, potrà avere:

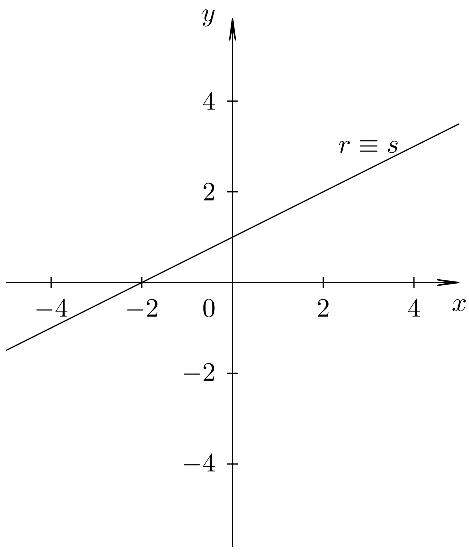
una soluzione se le rette sono incidenti (sistema determinato)



nessuna soluzione se le rette sono parallele distinte (sistema impossibile)



infinite soluzioni se le rette sono parallele coincidenti (sistema indeterminato)



A questo punto la classificazione di un sistema può essere dedotta già dalla sua forma normale, ricorrendo al seguente teorema facilmente verificabile in laboratorio e che sarà dimostrato nella classe terza:

Teorema 1.2.1. *Due rette r e s di equazione rispettivamente:*

$$ax + by + c = 0 \quad e \quad a'x + b'y + c' = 0$$

per le quali esistano i rapporti $\frac{a}{a'}$ $\frac{b}{b'}$ $\frac{c}{c'}$ *sono:*

incidenti $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

(questo significa che i coefficienti delle due equazioni non sono direttamente proporzionali)

parallele distinte $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

(questo significa che solo i coefficienti delle incognite delle due equazioni sono direttamente proporzionali)

parallele coincidenti $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

(questo significa che tutti i coefficienti delle due equazioni sono direttamente proporzionali)

Esempio 1.2.2.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ x + 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

è determinato perchè $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{7}$ essendo $a = 2, b = -3, c = 5, a' = 1, b' = 7, c' = -2$

$$\begin{cases} -x+2y-5=0 \\ 2x-4y+2=0 \end{cases}$$

è impossibile perchè $\dfrac{-1}{2} = \dfrac{2}{-4} \neq \dfrac{-5}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{2}y - \dfrac{1}{6} = 0 \\ \\ -2x - 15y + 1 \end{cases}$$

è indeterminato perchè $\dfrac{1/3}{-2} = \dfrac{5/2}{-15} = \dfrac{-1/6}{1}$

Esercizio 1.2.1. Stabilisci se i seguenti sistemi sono determinati, indeterminati, impossibili:

$$\begin{cases} 2x+3y=-9 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y=5 \\ 6x+2y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+5=y+12 \\ x-3=y+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x(y-1)-y(x+1)=2 \\ x+y+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+1}{4} = 1 \\ \dfrac{2x-1}{2} - \dfrac{2y+1}{6} = 1 \end{cases}$$

Procediamo ora alla descrizione dei metodi algebrici per la risoluzione dei sistemi lineari 2×2

Metodo di sostituzione

Consiste nell'esplicitare una incognita da un'equazione e sostituirla nell'altra equazione con l'espressione trovata a secondo membro. E' possibile così risolvere l'equazione ottenuta determinando l'unica incognita presente; l'altra verrà calcolata di conseguenza.

Esempio 1.2.3.

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ -x+3y+1=0 \end{cases}$$

essendo $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{1}{3}$ il sistema è determinato.

Calcoliamo dunque la soluzione.

E' conveniente esplicitare la y dalla prima equazione o la x dalla seconda in modo da ottenere una espressione intera così da semplificare i calcoli.

Scegliamo di esplicitare la y dalla prima equazione:

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ -x+3y+1=0 \end{cases}$$

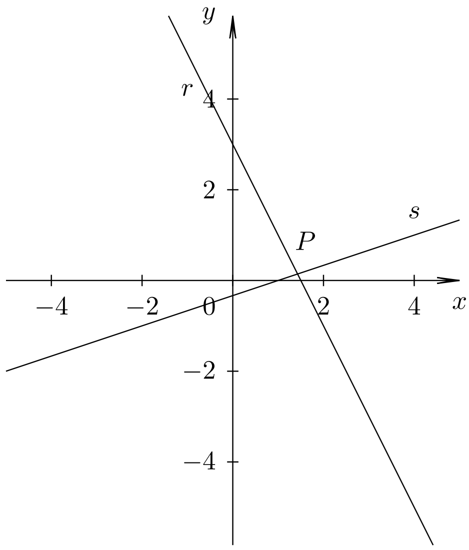
Sostituendo nella seconda si ottiene:

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ -x+3(-2x+3)+1=0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ -7x+10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x+3 \\ \\ x=\dfrac{10}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2\left(\dfrac{10}{7}\right)+3 \\ \\ x=\dfrac{10}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{7} \\ \\ x=\dfrac{10}{7} \end{cases}$$

La soluzione è dunque la coppia ordinata $\left(\frac{10}{7}, \frac{1}{7}\right)$.
La rappresentazione grafica del sistema è la seguente:



Esempio 1.2.4.

$$\begin{cases} (x+1)^2 - x(x+5y) + 5y(1+x) = 4 \\ \dfrac{x+2}{5} = 2 - \dfrac{y+3}{2} \end{cases}$$

condotto a forma normale:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ 2x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

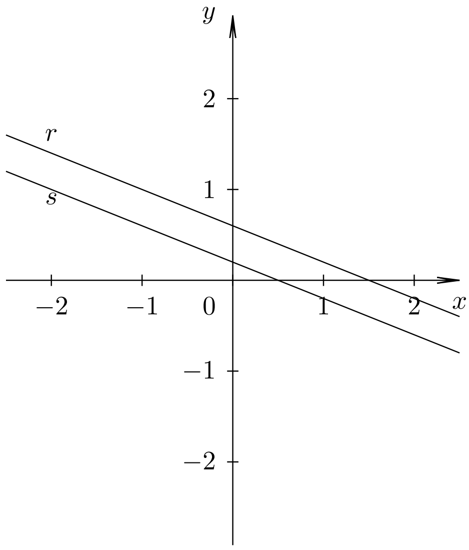
essendo $\frac{2}{3} = \frac{5}{5} \neq \frac{-3}{-1}$ il sistema è impossibile.
Se non operiamo questo controllo possiamo giungere alla stessa conclusione risolvendolo col metodo studiato:
esplicitiamo la x dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ x = \dfrac{-5y+1}{2} \end{cases}$$

Sostituendo nella prima si ottiene: $\begin{cases} 2\left(\dfrac{-5y+1}{2}\right)+5y-3=0 \\ \\ x=\dfrac{-5y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2=0 \text{ impossibile } (\nexists y) \\ \\ x=\dfrac{-5y+1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ sistema impossibile in quanto non si può determinare alcuna coppia che ne sia soluzione.

La rappresentazione grafica del sistema è:



Esercizio 1.2.2. Risolvi, con il metodo di sostituzione, i seguenti sistemi:

$\begin{cases} 3x=y-3 \\ x-5=4y-6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2(x-1)=3(y+1)-10 \\ 3(x+1)-2(y-1)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=4 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{3(x-1)}{4} \\ x=\dfrac{2x+y}{2} \end{cases}$

Metodo del confronto

Consiste nell'esplicitare la stessa incognita in entrambe le equazioni ed uguagliare i secondi membri trovati così da ottenere un'equazione in una sola incognita che prenda il posto di una delle precedenti. A questo punto si procede come col primo metodo studiato.

Esempio 1.2.5.

$$\begin{cases} 5x-y-11=0 \\ 7x-3y-17=0 \end{cases}$$

essendo $\dfrac{5}{7} \neq \dfrac{1}{3}$ il sistema è determinato.

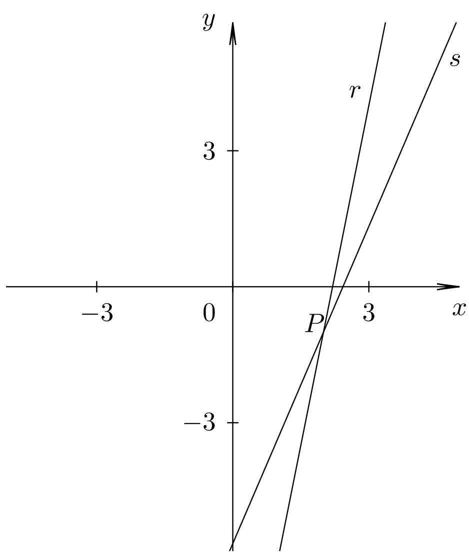
Esplicitiamo la y:

$$\begin{cases} y = 5x - 11 \\ y = \dfrac{7x - 17}{3} \end{cases}$$

Uguagliando i secondi membri, mantenendo l'equazione più semplice, nel nostro caso la prima, si ottiene:

$$\begin{cases} y = 5x - 11 \\ 5x - 11 = \dfrac{7x - 17}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 11 \\ 15x - 33 = 7x - 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

La soluzione è dunque la coppia $(2, -1)$.
La rappresentazione grafica del sistema è :

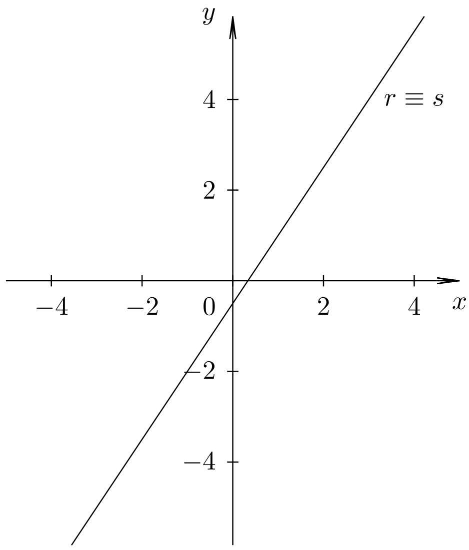


Esempio 1.2.6.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 12x - 8y = 4 \end{cases}$$

essendo $\dfrac{3}{12} = \dfrac{-2}{-8} = \dfrac{1}{4}$ il sistema è indeterminato.
Anche in questo caso, applicando il metodo del confronto, si arriva alla stessa conclusione, infatti:

esplicitando la x: $\begin{cases} x = \dfrac{2y+1}{3} \\ x = \dfrac{8y+4}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y+1}{3} \\ \dfrac{2y+1}{3} = \dfrac{8y+4}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y+1}{3} \\ \dfrac{2y+1}{3} = \dfrac{\cancel{4}(y+2)}{\cancel{12}_3} \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} x = \dfrac{2y+1}{3} \\ 0 = 0 \text{ identità } (\forall y) \end{cases}$
$\Rightarrow$ sistema indeterminato perchè, in corrispondenza agli infiniti valori di y, si ottengono infinite coppie soluzione, tutte del tipo $\left(\dfrac{2\overline{y}+1}{3}, \overline{y}\right)$.
La rappresentazione grafica del sistema (che d'ora in poi non sempre faremo) è:



Esercizio 1.2.3. Risolvi con il metodo del confronto i sistemi:
$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = x + y - 3 \\ y + 2 = 9x \end{cases}$ $\begin{cases} 2(3x-2) = y - 1 \\ 3(x+y) + 2(x-y) = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x + \dfrac{y-2}{4} = 1 \\ x - \dfrac{3}{2}y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{y+5}{6} = 2 \\ \dfrac{5x+4}{6} + \dfrac{y-2}{9} = 2 \end{cases}$

Metodo di combinazione lineare

Definizione 1.2.1. Date le equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, l'equazione:

$$h(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0 \qquad h, k \in \mathbb{Q}$$

si dice loro combinazione lineare.

Dato il sistema Σ: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ se si considerano i sistemi

$$\Sigma': \begin{cases} ax+by+c=0 \\ h(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0 \end{cases} \quad \text{e } \Sigma'': \begin{cases} a'x+b'y+c'=0 \\ h(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0 \end{cases}$$

ottenuti da Σ sostituendo ad una delle equazioni, una loro combinazione lineare, si può enunciare il seguente teorema:

Teorema 1.2.2. Σ, Σ', Σ'' *sono equivalenti* $\forall h,k \in \mathbb{Q}^*$

Dimostrazione. (dimostriamo prima che Σ è equivalente a Σ')

$\Rightarrow$ Sia $(\overline{x},\overline{y})$ una soluzione di Σ, allora $\begin{cases} a\overline{x}+b\overline{y}+c=0 \\ a'\overline{x}+b'\overline{y}+c'=0 \end{cases}$

da cui $\underbrace{h(a\overline{x}+b\overline{y}+c)}_{=0}+\underbrace{k(a'\overline{x}+b'\overline{y}+c')}_{=0}=0 \qquad \forall h,k$

quindi $\begin{cases} a\overline{x}+b\overline{y}+c=0 \\ h(a\overline{x}+b\overline{y}+c)+k(a'\overline{x}+b'\overline{y}+c')=0 \end{cases}$ perciò $(\overline{x},\overline{y})$ è soluzione di Σ'

$\Leftarrow$ sia $(\overline{x},\overline{y})$ una soluzione di Σ' allora $\begin{cases} a\overline{x}+b\overline{y}+c=0 \\ h(a\overline{x}+b\overline{y}+c)+k(a'\overline{x}+b'\overline{y}+c')=0 \end{cases}$

pertanto da $\underbrace{h(a\overline{x}+b\overline{y}+c)}_{=0}+\underbrace{k(a'\overline{x}+b'\overline{y}+c')}_{=0}=0$ si ottiene $k(a'\overline{x}+b'\overline{y}+c')=0$.

Essendo $k \neq 0$ si ha $a'\overline{x}+b'\overline{y}+c'=0$ da cui $\begin{cases} a\overline{x}+b\overline{y}+c=0 \\ a'\overline{x}+b'\overline{y}+c'=0 \end{cases}$ perciò $(\overline{x},\overline{y})$ è soluzione di Σ

Analoga è la dimostrazione che Σ è equivalente a Σ'' □

Esempio 1.2.7. Detto Σ:$\begin{cases} x-5y-3=0 \\ -2x+3y+6=0 \end{cases}$

sono sistemi equivalenti quelli che si ottengono con le seguenti combinazioni lineari:

se $h=1,\ k=-3 \Rightarrow \begin{cases} x-5y-3=0 \\ 1(x-5y-3)-3(-2x+3y+6)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5y-3=0 \\ 7x-14y-21=0 \end{cases}$

se $h=-2,\ k=5 \Rightarrow \begin{cases} x-5y-3=0 \\ -2(x-5y-3)+5(-2x+3y+6)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5y-3=0 \\ -12x+25y+36=0 \end{cases}$

se $h=2,\ k=2 \Rightarrow \begin{cases} -2x+3y+6=0 \\ 2(x-5y-3)+2(-2x+3y+6)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+3y+6=0 \\ -2x-4y+6=0 \end{cases}$

se $h=2,\ k=1 \Rightarrow \begin{cases} x-5y-3=0 \\ 2(x-5y-3)+1(-2x+3y+6)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5y-3=0 \\ -6y=0 \end{cases}$

E' facile constatare che tra tutti i sistemi equivalenti il più facile da risolvere è l'ultimo in quanto l'equazione combinazione lineare contiene una sola incognita il cui valore si può determinare in modo immediato.

L'osservazione fatta nell'esempio precedente fornisce l'idea alla base del metodo di combinazione lineare: esso consiste nel trasformare il sistema iniziale in uno equivalente nel quale l'equazione combinazione lineare contenga una sola incognita per poi procedere come con i casi precedenti.

Esempio 1.2.8.

$$\begin{cases} 9x - 4y - 12 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

essendo $\dfrac{9}{3} \neq \dfrac{-4}{-1}$ il sistema è determinato
Sostituiamo la prima equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la prima equazione per 1 e la seconda per -4:

$$\begin{cases} -3x + 12 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

La soluzione è la coppia ordinata $(4, 6)$

Esempio 1.2.9.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 19 = 0 \\ 5x + 9y - 7 = 0 \end{cases}$$

essendo $\dfrac{3}{5} \neq \dfrac{-2}{9}$ il sistema è determinato.
Sostituiamo la seconda equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la prima equazione per 5 e la seconda per -3:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 19 = 0 \\ -37y - 74 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 19 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

La soluzione è la coppia $(5, -2)$

In alcuni casi può essere conveniente sostituire entrambe le equazioni componenti il sistema con le due combinazioni lineari, una nella sola x e l'altra nella sola y.

Esempio 1.2.10.

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 5x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

essendo $\dfrac{1}{5} \neq \dfrac{3}{1}$ il sistema è determinato.
Sostituiamo la prima equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la prima equazione per 1 e la seconda per -1 e sostituiamo la seconda equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la prima equazione per -5 e la seconda per 1:

$$\begin{cases} -4x + 8 = 0 \\ -4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

La soluzione è la coppia ordinata $(2, -1)$.

Esercizio 1.2.4. Risolvi con il metodo di combinazione lineare i sistemi:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 6x - y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = -4 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2 = y - 2 \\ x + 4 = 2y - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$$

Metodo di Cramer

Il metodo di Cramer trae origine dalla più generale teoria sui sistemi lineari di n equazioni in n incognite che sarà sviluppata durante il triennio e che si basa sui concetti di matrice e suo determinante che ora definiremo riferendoci tuttavia solo al caso di due equazioni in due incognite.

Definizione 1.2.2. Si dice *matrice quadrata* di ordine due, una tabella avente due righe e due colonne.

Essa si scrive nella forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ove gli elementi a e b costituiscono la prima riga
gli elementi c e d costituiscono la seconda riga
gli elementi a e c costituiscono la prima colonna
gli elementi b e d costituiscono la seconda colonna
gli elementi a e d formano quella che viene detta *diagonale principale*
mentre gli elementi b e c formano la *diagonale secondaria*

Definizione 1.2.3. Si dice *determinante* di una matrice quadrata di ordine due il numero che si ottiene calcolando la differenza tra il prodotto degli elementi della diagonale principale e il prodotto degli elementi della diagonale secondaria.

Detta A la matrice, il suo determinante viene così indicato e calcolato:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Esempio 1.2.11. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ allora $|A| = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 3 + 10 = 13$

Data $B = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/2 \\ 1/2 & -10 \end{pmatrix}$ allora $|B| = 3/5 \cdot (-10) - 1/2 \cdot 1/2 = -6 - 1/4 = -25/4$

Data $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ allora $C = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-6) = 12 - 12 = 0$

Osservazione. Se una matrice ha determinante nullo allora le sue righe e le sue colonne sono direttamente proporzionali. Infatti se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc \Rightarrow$ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ purchè $c \neq 0 \neq d$ e $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ purchè $b \neq 0 \neq d$

Dato il sistema Σ scritto nella forma normale: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ad esso sono associate le seguenti tre matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$$

i cui determinanti vengono indicati rispettivamente con $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$.
Il metodo di Cramer consiste nel risolvere il sistema calcolando $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ e procedendo come di seguito riportato:

se $\Delta \neq 0 \Rightarrow \Sigma$ è determinato e la sua soluzione è $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$ cioè la coppia $\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, \dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right)$

se $\Delta = 0 \Rightarrow$
- se $\Delta_x \neq 0$ e $\Delta_y \neq 0 \Rightarrow \Sigma$ è impossibile
- se $\Delta_x = 0$ e $\Delta_y = 0 \Rightarrow \Sigma$ è indeterminato

(con i sistemi lineari numerici, come quelli sinora risolti, se $\Delta = 0$ allora Δ_x e Δ_y sono entrambi nulli o entrambi diversi da zero quindi, quando $\Delta = 0$, possiamo calcolare solo Δ_x oppure Δ_y)

Osservazione. Una parziale giustificazione del metodo di Cramer si può ottenere dal teorema 1.2.1.e dall'osservazione sul legame tra Δ e la proporzionalità tra i coefficienti.

Esempio 1.2.12. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases}$ essendo $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{-1}{4}$ il sistema è determinato
Calcoliamo i determinanti:
$\Delta = 12 + 2 = 14$
$\Delta_x = 8 - 1 = 7$
$\Delta_y = -3 - 4 = -7$
La soluzione è $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2} \\ \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-7}{14} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ossia la coppia $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

Esempio 1.2.13. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -6x + 10y = 3 \end{cases}$ essendo $\dfrac{3}{-6} = \dfrac{-5}{10} \neq \dfrac{7}{3}$ il sistema è impossibile.
Risolvendolo col metodo di Cramer si arriva (ovviamente) alla stessa conclusione infatti:
$\Delta = 30 - 30 = 0$
$\Delta_x = 70 + 15 = 85$ (se vuoi verifica che anche $\Delta_y \neq 0$)
Poichè $\Delta = 0$ e $\Delta_x \neq 0$ il sistema è impossibile

Esempio 1.2.14. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}y = -5 \\ \\ \dfrac{3}{2}y - x = 10 \end{cases}$
Ricordiamoci di portarlo a forma normale:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}y = -5 \\ \\ -x + \dfrac{3}{2}y = 10 \end{cases}$$

essendo $\dfrac{\frac{1}{2}}{-1} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{-5}{10}$ il sistema è indeterminato.

Anche in questo caso, risolviamolo ugualmente, per esercizio, con il metodo di Cramer:

$\Delta = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4} = 0$

$\Delta_x = \dfrac{-15}{2} + \dfrac{15}{2} = 0$ (se vuoi verifica che anche $\Delta_y = 0$)

Poichè $\Delta = 0$ e $\Delta_x = 0$ il sistema è indeterminato.

Esercizio 1.2.5. Risolvi con il metodo di Cramer i sistemi:

$\begin{cases} 7x + y = 31 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 5y = 5x + y \\ 7x + 1 = 8y - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 - 5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5} - y = -1 \\ \dfrac{x-6}{5} + y = -1 \end{cases}$

I sistemi risolti finora contenevano equazioni numeriche intere.
Vediamo, a questo punto, degli esempi di sistemi contenenti equazioni fratte e parametriche:

Esempio 1.2.15. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2y} = 1 \\ \\ \dfrac{y+2}{2} = x \end{cases}$

Il sistema, messo in forma normale diventa:

$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$ C.E: $y \neq 0$

Utilizzando uno dei metodi illustrati si ottiene: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \text{ non accettabile} \end{cases}$ $\Rightarrow$ sistema impossibile

Esempio 1.2.16. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = 2 \\ \dfrac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$ Il sistema, messo in forma normale diventa: $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

C.E: $x \neq \pm y$

Risolvendolo si ottiene:

$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ accettabile $\Rightarrow$ la coppia $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ è soluzione

Esempio 1.2.17. $\begin{cases} 2x + y = 3k - 1 \\ kx - (k+1)y = 1 \end{cases}$

Per la risoluzione di questo sistema parametrico consigliamo di ricorrere al metodo di Cramer:

$\Delta = -2k - 2 - k = -3k - 2$

$\Delta_x = -3k^2 - 3k + k + 1 - 1 = -3k^2 - 2k$

$\Delta_y = 2 - 3k^2 + k$

Se $\Delta \neq 0$ cioè $-3k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq -2/3$ il sistema è determinato e la sua soluzione è:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3k^2 - 2k}{-3k - 2} = \dfrac{k(-3k-2)}{-3k-2} = k \\ \\ y = \dfrac{-3k^2 + k + 2}{-3k - 2} = \dfrac{(-3k-2)(k-1)}{-3k-2} = k - 1 \end{cases}$$

Se $\Delta = 0$ cioè $k = -\dfrac{2}{3}$ si ottiene:

$\Delta_x = -3\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = 0$

$\Delta_y = 2 - 3\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow$ il sistema è indeterminato.

Esempio 1.2.18. $\begin{cases} kx - 2y = 4 \\ -2x + ky = -4 \end{cases}$

$\Delta = k^2 - 4$

$\Delta_x = 4k - 8$

$\Delta_y = -4k + 8$

Se $\Delta \neq 0$ cioè $k^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (k+2)(k-2) \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 2 \Rightarrow$ il sistema è determinato e la sua soluzione è:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4k - 8}{k^2 - 4} = \dfrac{4(k-2)}{(k+2)(k-2)} = \dfrac{4}{k+2} \\ \\ y = \dfrac{-4k + 8}{k^2 - 4} = \dfrac{-4(k-2)}{(k+2)(k-2)} = \dfrac{-4}{k+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{k+2} \\ \\ y = -\dfrac{4}{k+2} \end{cases}$$

Se $\Delta = 0$ $\quad k$ può valere 2 oppure -2

se $k = 2 \Rightarrow \Delta_x = 4 \cdot 2 - 8 = 0$ e $\Delta_y = -4 \cdot 2 + 8 = 0 \Rightarrow$ sistema indeterminato

se $k = -2 \Rightarrow \Delta_x = 4 \cdot (-2) - 8 = -16 \neq 0 \Rightarrow$ sistema impossibile

Esercizio 1.2.6. Risolvi i sistemi:

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ \dfrac{x^2 - 2y + 3}{x - 1} - x + 1 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y}{x - y} - \dfrac{x}{y - x} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{2x - y} - \dfrac{y}{y - 2x} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = a \\ 4x - 2y = b \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = 2ab \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

1.3 Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite (3×3)

I metodi illustrati per la risoluzione dei sistemi lineari 2×2 possono essere adattati anche al caso di sistemi lineari con n equazioni e n incognite. In questo paragrafo risolveremo sistemi lineari 3×3 con i metodi di sostituzione o combinazione lineare eventualmente utilizzandoli entrambi in uno stesso esercizio. La risoluzione col metodo di Cramer verrà affrontata nel corso del triennio.

Esempio 1.3.1. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

Procedendo col metodo di sostituzione esplicitiamo z dalla terza equazione e la sostituiamo nelle rimanenti:

$$\begin{cases} z = 4x + y \\ 2x + 3y + 4x + y = 7 \\ 2x - y + 2(4x + y) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ 6x + 4y = 7 \\ 10x + y = 6 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni costituiscono un 'sottosistema' 2×2 che possiamo risolvere con uno qualsiasi dei metodi studiati. Proponiamo due svolgimenti, il primo col metodo di sostituzione (a) il secondo con quello di combinazione lineare (b).

(a) esplicitiamo y dalla terza equazione dell'ultimo sistema ottenuto e la sostituiamo nella seconda: $\begin{cases} z = 4x + y \\ y = -10x + 6 \\ 6x + 4(-10x + 6) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ y = -10x + 6 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

sostituendo il valore di x ottenuto nella seconda equazione ricaviamo il valore di y ed infine possiamo calcolare z:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{la soluzione è la terna } \left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$$

(b) Sostituiamo la seconda equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la seconda equazione per 1 e la terza per -4:

$\begin{cases} z = 4x + y \\ -34x = -17 \\ 10x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ x = \dfrac{1}{2} \\ 10x + y = 6 \end{cases}$ Procedendo come nel caso (a) si ottiene, ovviamente, la stessa soluzione $\left(\dfrac{1}{2}, 1, 3\right)$

Per risolvere il sistema ci siamo ricondotti ad un 'sotto sistema' 2×2 ; per raggiungere lo stesso scopo possiamo utilizzare il metodo di combinazione lineare. Quindi, considerato il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo la prima equazione con la combinazione lineare ottenuta moltiplicando sia la prima equazione che la terza per 1 e sostituiamo la seconda equazione con la combinazione lineare ottenuta moltiplicando la seconda equazione per 1 e la terza per 2 .

Si ottiene: $\begin{cases} 6x + 4y = 7 \\ 10x + y = 6 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

Ora si può procedere come già visto.

Esercizio 1.3.1. Risolvi i sistemi 3×3:

$\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 10 \\ x - y - 2z = -1 \\ 9x + y - 4z = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} 8x - y + z = 23 \\ 3y + z = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 8x - 6y + z = -1 \\ 6x - 8y - z = -13 \\ x - 3y + 5z = 22 \end{cases}$

1.4 Problemi

Nel volume Matematica 1 sono stati affrontati e risolti vari problemi ricorrendo alle equazioni in una incognita. Ora, con i sistemi lineari, siamo in grado di risolvere problemi che non si possono ricondurre facilmente ad una sola variabile perchè, a questo punto, è possibile utilizzare più incognite.

Esempio 1.4.1. Trovare due numeri naturali, sapendo che il doppio della loro somma supera di 55 la loro differenza e che la somma dei 3/8 del maggiore con il doppio del minore è pari a 25

Il problema presenta due incognite x, y

$x =$ numero maggiore

$y =$ numero minore

$x, y \in \mathbb{N}$ (vincolo)

Dal testo del problema possiamo ricavare le seguenti relazioni (equazioni) tra le incognite:

$2(x + y) = 55 + (x - y), \qquad 3/8x + 2y = 25$

che, messe a sistema, consentono di ricavare i valori richiesti:

$\begin{cases} 2(x + y) = 55 + (x - y) \\ \dfrac{3}{8}x + 2y = 25 \end{cases}$ $\Rightarrow$ mettendo in forma normale si ottiene il sistema:

$\begin{cases} x + 3y = 55 \\ 3x + 16y = 200 \end{cases}$

che risolto (con un metodo a scelta che si consiglia di svolgere per esercizio) dà:

$\begin{cases} x = 40 \\ y = 5 \end{cases}$ conforme al vincolo e quindi accettabile.

Esempio 1.4.2. Un autocarro può trasportare fino a $1500kg$ di merce. In un primo viaggio, a carico pieno, porta 40 sacchi di riso e 15 sacchi di grano. In un altro viaggio vengono trasportati metà sacchi di riso e una decina in più di quelli di grano: il carico risulta così alleggerito di $400kg$. Quanto pesa ciascun sacco di riso o di grano?

Indichiamo con x il peso in kg di un sacco di riso e con y il peso in kg di un sacco di grano.

$x, y \in \mathbb{Q}^{>}$ (con tale simbolo si indicano i razionali positivi)
Sfruttando l'informazione relativa al primo viaggio (a carico pieno) si ottiene:
$40x + 15y = 1500 \Rightarrow 8x + 3y = 300.$
Sfruttando l'informazione relativa al secondo viaggio (fatta con 20 sacchi di riso e 25 sacchi di grano per un carico di $1100kg$) si ha:
$20x + 25y = 1100 \Rightarrow 4x + 5y = 220$
e risolvendo il sistema: $\begin{cases} 8x + 3y = 300 \\ 4x + 5y = 220 \end{cases}$ si ottiene la soluzione accettabile:
$\begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$

Esempio 1.4.3. La somma delle età di Paolo, Giovanni e Luca è 31 anni. Sapendo che il sestuplo dell'età di Paolo è pari alla somma delle età degli altri due e che il doppio della somma delle età di Paolo e Giovanni supera di 9 l'età di Luca, quali sono le età dei tre amici?
$x =$ età Paolo in anni
$y =$ età Giovanni in anni
$z =$ età Luca in anni
$x, y, z \in \mathbb{N}$
Dal testo si ricava il seguente sistema:
$$\begin{cases} x + y + z = 31 \quad \text{(ricavata dalla somma delle età)} \\ 6x = y + z \quad \text{ricavata da ‘il sestuplo dell'età di...'} \\ 2(x + y) = 9 + z \quad \text{ricavata da ‘il doppio dell'età di...)} \end{cases}$$
che, risolto (è bene farlo per esercizio perchè ‘fidarsi è bene, ma...'), dà la soluzione accettabile:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 11 \end{cases}$$

Esercizio 1.4.1. 1. Qual è la frazione che risulta uguale a 2 se si aggiunge 11 al suo numeratore e risulta uguale ad 1 se si sottrae 4 al suo denominatore?
2. Il fattorino di una ditta provvede a presentare allo sportello di un ufficio postale un certo numero di lettere raccomandate , un certo numero di ‘espressi' e 36 lettere normali. Determinare le raccomandate e gli ‘espressi' sapendo che il numero delle prime è i $9/26$ del totale e che il loro triplo supera di 18 la differenza tra il totale e il nummero degli ‘espressi'
3. Dieci anni fa l'età di una persona era il doppio di quella dell'altra mentre tra 16 anni, l'età della prima sarà i $4/3$ di quella dela seconda. Calcolare l'età attuale di ciascuna delle due persone.