La matematica e le scienze matematiche nel 2010: che cosa dovrebbero sapere gli studenti?

ABSTRACT: Questa relazione è un richiamo alla partecipazione da parte dei matematici. La Commissione per i programmi universitari di matematica (CUPM) sta raccogliendo informazioni per preparare una Guida curricolare che aiuti i dipartimenti a programmare ulteriori sviluppi ed evoluzioni dei loro curricula universitari. Nell'ultimo anno e mezzo la CUPM ha tenuto paper sessions, tavole rotonde, focus groups su problemi da prendere in considerazione nella programmazione dei curricula. La CUPM ha anche sponsorizzato lavori di gruppo in cui docenti di matematica e di scienze matematiche si sono incontrati per discutere i prerequisiti matematici di cui hanno bisogno altre discipline. Nell'estate del 2000, la CUPM ha invitato un gruppo di matematici a scrivere articoli ponderati e provocatori che illustrassero le loro opinioni in merito ad argomenti curricolari. Nel settembre del 2000 la CUPM ha incontrato gli autori degli articoli ed alcuni altri esperti di educazione matematica universitaria per un seminario di tre giorni. L'obiettivo era quello di identificare le questioni più scottanti e di produrre suggerimenti per redigere la Guida curricolare. Le conclusioni di quel lavoro sono riassunte nella presente relazione. La CUPM vi invita ora, in quanto membri della comunità matematica, a dare il vostro contributo alla discussione in termini di commenti e suggerimenti.

Che cosa avete appreso sul curriculum di matematica? Qual è la vostra opinione sul curriculum? I docenti impiegano molte energie a pensare, preparare e rendere più facile l'apprendimento della matematica. Oggi a ogni bambino viene promessa un'educazione universitaria. Il mercato del lavoro considera le capacità analitiche superiori a tutte le altre. Gli studenti che si laureano in matematica trovano lavoro e puntano a specializzazioni post-universitarie in un numero sempre maggiore di campi. Gli studenti che un tempo avrebbero potuto specializzarsi in matematica si volgono ora a discipline affini che comportano notevoli competenze matematiche. Una nuova ondata di studenti sta facendo ingresso nell'educazione superiore e si aspetta dai docenti una preparazione specifica nelle loro discipline, ma anche una preparazione di fondo per la carriera futura. Da ogni parte negli Stati Uniti c'è una sempre maggiore carenza di insegnanti di matematica e di materie scientifiche. Le università stanno istituendo procedure di responsabilizzazione.

In questo nuovo contesto quale programma è appropriato? Per rispondere a questa domanda, relativamente ai propri studenti, molti dipartimenti mantengono i contatti con gli studenti che si sono specializzati, chiedono ai datori di lavoro quali sono le caratteristiche di un dipendente di successo e raccolgono dati sulle proprie politiche di collocamento. Molti docenti fanno studi sull'innovazione educativa. La Commissione per i programmi universitari di matematica (CUPM) sta raccogliendo informazioni da coloro che hanno intrapreso questo tipo di lavoro e allo stesso tempo sta cercando di ottenere pareri autorevoli da matematici ed esperti di altre discipline.

Vogliate gentilmente leggere questa relazione, riflettete sui suggerimenti in essa contenuti, mettete a fuoco le idee espresse negli articoli con cui concordate, analizzate le domande che condividete, sollevate le questioni che la relazione trascura, ma soprattutto discutete i curricula e le aspettative con i vostri colleghi e fate sapere le vostre conclusioni alla CUPM (CUPM-curric@maa.org)

Parte I. L'obiettivo dell'iniziativa curricolare

La Commissione per i programmi universitari di matematica (CUPM) dell'Associazione Matematica Americana (MAA) circa ogni dieci anni pubblica delle linee guida curricolari. L'attuale commissione si sta al momento occupando di raccogliere informazioni che favoriscano la preparazione di una Guida curricolare. A causa della sempre maggiore diversità fra le istituzioni, la preparazione degli studenti e le aspettative dell'educazione superiore, non è più possibile e non è neppure desiderabile limitarsi ad elencare e descrivere il contenuto di alcuni corsi che potrebbero costituire una specializzazione. Dobbiamo chiederci: "Che cosa dovrebbero sapere gli studenti?" E l'operazione stessa di fornire una risposta a questa domanda fornirà un'utile base su cui costruire un curriculum che risponda alle esigenze di questa o quella università. Tenendo presente queste considerazioni, la CUPM elaborerà un documento diverso da quelli prodotti in precedenza. L'obiettivo della Guida non sarà tanto rispondere alla domanda "Che corsi dovrebbe offrire o richiedere un dipartimento?" quanto trovare una risposta a "Che cosa vogliamo che i nostri studenti sappiano e sappiano fare?". L'elaborazione di un programma che risponda a questo interrogativo è un processo che richiede molte riflessioni, informazioni e confronti. La CUPM si augura di poter essere da guida ai dipartimenti nel corso di tutte queste operazioni.

Per facilitare il processo di programmazione la CUPM fornisce assistenza ai dipartimenti nel porre le domande appropriate, nel suggerire percorsi volti a trovare le risposte e nel fornire esempi ed informazioni in modo che i dipartimenti possano trarre vantaggi dalla conoscenza delle esperienze di altri colleghi. Le raccomandazioni iniziali sono suddivise nelle sei aree di massima presentate sotto.

A. Conoscenza matematica: aspettative generali

Che cosa dovrebbero sapere gli studenti quando si laureano? Le conoscenze degli studenti si sviluppano in modi diversi. A un primo livello, strettamente disciplinare, possiamo fissare quei contenuti matematici che ci aspettiamo che gli studenti siano in grado di comprendere. C'è poi un secondo livello, non meno importante, relativo allo sviluppo di abilità. Con i più recenti sviluppi tecnologici e il numero sempre crescente di studenti che entrano direttamente nel mondo del lavoro, si è aggiunto un terzo livello. Gli studenti di oggi potrebbero aver bisogno di conoscere potenti strumenti di software matematico non solo per favorire l'apprendimento della matematica, ma anche per essere pronti ad affrontare una vasta gamma di software che potranno incontrare in seguito.

Occorre dare a ogni studente l'opportunità di "mettere insieme il tutto" con esperienze individuali o di gruppo? I datori di lavoro si attendono che un laureato sappia leggere, scrivere e parlare di matematica a vantaggio sia dei suoi colleghi esperti che di altri laureati che non hanno una formazione matematica. Noi ci aspettiamo dai nostri laureati che amino la matematica e che ne siano portatori nel mondo. Quali esperienze di studio possono favorire il conseguimento di queste mete?

B. Una responsabilità particolare per i futuri insegnanti

Quante volte, avendo spiegato a qualcuno che avete incontrato per caso che voi "fate matematica", vi è capitato che vi abbiano risposto: "Matematica? Non potrei mai farlo"? La prima difesa contro questa forma di analfabetismo sono gli insegnanti nelle scuole. Il nostro paese incontra sempre maggiori difficoltà a reperire insegnanti di matematica e di materie scientifiche. Non solo vogliamo bravi insegnanti che amino la matematica, ma vogliamo che quei docenti insegnino ai nostri figli ciò che ci aspettiamo questi debbano apprendere. Mentre alcune università si sono assunte come loro compito principale la formazione dei futuri insegnanti, altre università hanno studenti di matematica che prendono in considerazione la possibilità di diventare insegnanti. Ogni dipartimento dovrebbe discutere il ruolo dei propri programmi per la formazione dei futuri insegnanti di matematica e di materie scientifiche.

C. Esperienze di apprendimento extracurricolare

Alcuni dei dipartimenti di maggiore successo hanno studiato e preparato esperienze extracurricolari per i loro studenti. Poiché la motivazione influisce sull'apprendimento in modo determinante, questi dipartimenti hanno favorito un elevato numero di studenti appassionati a ciò che stanno facendo. A quale realtà al di fuori della classe dovrebbe rivolgersi un dipartimento? Quale tipo di azione si traduce in un vantaggio per gli studenti?

D. Valutazione

A chiunque piacerebbe sapere di essere riuscito a fare qualcosa. A noi piacerebbe anche sapere se ci stiamo movendo verso le nostre aspettative. E questa informazione può venire soltanto dalla consapevolezza della nostra meta e dalle informazioni che andiamo raccogliendo sui progressi che stiamo facendo in quella direzione. Come valutiamo i nostri studenti? In modo coerente con il conseguimento degli obiettivi? La nostra programmazione sta avendo successo? Riusciamo a trovare, mantenere e laureare l'utenza che avevamo previsto? Una volta che i nostri studenti hanno lasciato l'università, ci fanno sapere se sono rimasti soddisfatti della loro preparazione?

E. Il ruolo e le responsabilità del dipartimento

Considerate:

- Un'università *major land grant* frequentata da 20.000 studenti in una regione che comprende un intero stato,
- Un'università statale di 13.000 studenti istituita per rispondere a esigenze diversificate in un'area limitata.
- Un'università privata con l'incombenza di essere "la migliore e più illuminata" del mondo,
- Un college universitario che raccoglie 2.000 studenti da ogni parte del paese e ha come obiettivo la formazione nelle discipline umanistiche,
- Un college universitario di 1.500 studenti che risponde a particolari esigenze del territorio,
- Un college biennale di 3.000 studenti che prepara alcuni ad inserirsi immediatamente nel mondo del lavoro, mentre ne invia altri a istituzioni quadriennali per prepararli a una vasta gamma di carriere (compreso l'insegnamento).

Tutte queste istituzioni offrono ai propri studenti molte modalità diverse di lezione e un'ampia scelta di opportunità. Ovviamente, in queste istituzioni diverse anche i programmi varieranno per tipologie di offerte formative, scansioni didattiche ed esperienze. Una programmazione elaborata localmente, tenendo conto delle caratteristiche della proprie utenza e delle finalità dell'istituzione, risponderà nel modo migliore alle esigenze di chi la frequenta. Ma non sembra d'altra parte ragionevole che tutti gli studenti che si laureano con una forte formazione matematica in una qualsiasi di queste istituzioni debbano possedere conoscenze e competenze che si possano definire come "preparazione in matematica"?

Se il compito dei docenti è quello di aiutare gli studenti a realizzare ciò che ci aspettiamo da loro, quali sono allora i bisogni dei docenti? Come si possono fissare e conseguire gli obiettivi in modo che ai singoli docenti possa piacere la loro professione e nel contempo i docenti possano crescere come insegnanti e come matematici?

F. Questioni per la disciplina

La Guida curricolare sarà la prima di questo tipo pubblicata dalla CUPM. Produrre qualcosa di importante per i dipartimenti e fornir loro le informazioni di cui hanno bisogno comporta diverse responsabilità. Molti fanno sapere alla CUPM che sono particolarmente utili modelli che illustrano tentativi riusciti, come i programmi universitari in Modelli che funzionano (Note MAA 38) e i programmi di università per la ricerca contenuti in Verso l'eccellenza (AMS,1999). Che informazioni e quale guida possono fornire i matematici ai dipartimenti?

All'interno della stessa fascia d'età il 4-5% si specializzano in matematica, materie scientifiche o ingegneria, ovvero in facoltà tradizionalmente ad alto contenuto di matematica. Questa percentuale è rimasta abbastanza costante a partire dagli anni '50, attraversando sia la riforma della matematica che i movimenti "torniamo-ai-fondamenti". Le specializzazioni aumentano o diminuiscono ridistribuendosi all'interno di questo 5%. In questi ultimi dieci anni, gli studenti che si sarebbero precedentemente specializzati in matematica hanno deciso di farlo in altre facoltà. Dobbiamo tentare di recuperarli? Sarebbe meglio se cercassimo di indirizzare i bisogni matematici di chi si specializza verso queste altre facoltà ad alto contenuto matematico? O dovremmo incoraggiarli a specializzarsi in matematica? In che modo i matematici possono aiutare i dipartimenti che ci pongono queste domande?

Parte II. Il processo di raccolta di informazioni

Prima di pubblicare questa relazione, la CUPM si è impegnata in una serie di progetti di raccolta di informazioni. Il primo consisteva nel riprendere in esame i suggerimenti forniti dalla CUPM in passato. Nel 1981 la CUPM rilevava che molti studenti desideravano abbinare lo studio della matematica a quello di altre discipline per estendere le loro conoscenze di base, favorendo così le proprie future opportunità di carriera. I consigli del 1981 furono ripubblicati nel 1988 con il titolo *Come rimodellare la matematica universitaria* (Note MAA 13). I consigli della CUPM del 1991 compaiono al termine di *Prestare attenzione al richiamo al cambiamento* (Note MAA 22). In quegli anni non era già più facile stilare una lista di corsi di specializzazione e i matematici si occupavano di grandi discussioni sul calcolo infinitesimale. Di conseguenza, il documento relativo ai curricola del 1991 risulta breve. A partire dal 1991, *Modelli che funzionano* (Note MAA 38) ha illustrato esempi di programmi mentre *A confronto con il nucleo del curriculum* (Note MAA 45) si è rivolto alla preparazione nei primi due anni. L'ultimo libro sulla valutazione, *Norme di valutazione per la matematica universitaria* (Note MAA 49) prende in esame un ampio spettro di questioni di valutazione e comprende modelli che illustrano approcci produttivi. Tutti questi documenti possono risultare utili ai dipartimenti che si trovano a programmare. Inoltre, possono essere una base per le attuali discussioni curricolari.

A partire dall'estate 1999, la CUPM ha raccolto informazioni direttamente dai matematici secondo le seguenti modalità:

Incontri e tavole rotonde

Al Mathfest 1999, la CUPM ha sponsorizzato una tavola rotonda con interventi da parte di un folto pubblico molto partecipe.

Durante gli incontri ASM/MAA/SIAM del gennaio 2000, la CUPM ha sponsorizzato un'altra tavola rotonda che ha nuovamente visto un folto pubblico, seguita da *paper sessions* che hanno avuto un'alta partecipazione con numerosi contributi.

Al Mathfest 2000, la CUPM ha sponsorizzato una tavola rotonda di industriali che hanno commentato il curriculum di fronte a un pubblico numeroso e partecipe.

Gruppi di lavoro

Nel gennaio 2000, la CUPM ha invitato dei matematici a partecipare a gruppi di lavoro che hanno discusso questioni curricolari, aggregandosi a seconda del tipo di istituzione.

Conferenze interdisciplinari

Sotto il titolo "*Progetto fondamenti curricolari*", la sottocommissione Riforma del calcolo infinitesimale e i primi due anni (CRAFTY) sta svolgendo 11 diversi seminari in cui dei matematici si incontrano con docenti di altre facoltà ad alto contenuto di matematica per discutere il curriculum universitario. Da questi incontri le altre facoltà pubblicheranno una serie di relazioni sui bisogni matematici dei propri studenti. Durante gli incontri ASM/MAA/SIAM del gennaio 2001 verranno discussi in due tavole rotonde i risultati dei seminari fino a quel momento. Nel 2001 si terranno altri seminari e le relazioni delle diverse facoltà verranno messe a confronto per essere poi divulgate successivamente durante l'anno. Le relazioni verranno precedentemente messe a disposizione su Internet.

Invited papers seguiti da discussioni in gruppo (Settembre 2000)

La CUPM ha invitato un gruppo di matematici a produrre articoli che affrontassero questioni centrali all'elaborazione di documenti di programmazione per i dipartimenti. Gli autori, membri della CUPM, si sono incontrati con alcuni altri esperti nel settembre 2000 per lavori di gruppo centrati sulle questioni affrontate negli articoli. Questi articoli sono inclusi in questa relazione unitamente alla sintesi delle decisioni a cui si è giunti nei gruppi di lavoro e a raccomandazioni di massima che la CUPM desidererebbe discutere con un numero maggiore di esperti.

Un invito alla discussione

Questa relazione verrà pubblicata in vista degli incontri AMA/MAA/SIAM del gennaio 2001. In quel convegno è stata prevista una tavola rotonda allargata per stimolare commenti da parte di altri matematici. Si intende organizzare una serie di gruppi di discussione con il compito specifico di sollecitare riflessioni approfondite da parte dei matematici che vi prenderanno parte.

Coinvolgimento di discipline ad alto contenuto matematico

I rappresentanti di associazioni analoghe in ingegneria, fisica ed economia hanno partecipato ai lavori di gruppo del settembre 2000 di cui si è parlato sopra. L'AMS è rappresentata all'interno della CUPM sia in quanto membro effettivo sia attraverso il legame costituito dal presidente dell'AMS. I presidenti di MAA, SIAM e AMATYC hanno contribuito al seminario con articoli e con la partecipazione diretta. L'anno prossimo si chiederà di contribuire alle deliberazioni della CUPM attraverso collegamenti con una gamma più vasta di altre discipline.

La CUPM cerca di coinvolgere i principali *stakeholders* con un'attenzione particolare ai matematici. Se riusciremo a coinvolgervi in una discussione attiva, con i vostri colleghi e la vostra associazione, avremo già fatto molto per una maggiore competenza sui curricula e sul loro miglioramento. Inoltre, attraverso le informazioni che ci vorrete fornire, saremo in grado di offrire a tutti la miglior guida e consulenza. I nostri articoli sono stati pubblicati regolarmente su Focus ed altri ne seguiranno. Il seguente indirizzo e-mail è a vostra disposizione e vi permette di contattare direttamente la CUPM (CUPM-curric@maa.org). Nel momento in cui verrà pubblicato questa relazione, speriamo di possedere già un sito web. La CUPM desidera ricevere le vostre osservazioni.

Parte III. Questioni e possibili raccomandazioni individuate durante il seminario di settembre 2000 della CUPM

Come abbiamo già detto nella Parte II di questa relazione, alcuni membri della CUPM stanno prendendo parte a una serie di conversazioni per elaborare una guida per aiutare i dipartimenti di matematica a sviluppare, modificare e migliorare i loro programmi universitari generali. Questa guida definitiva è stata provvisoriamente intitolata Matematica e altre specializzazioni ad alto contenuto di matematica:una guida curricolare della CUPM.

Al seminario di settembre 2000 della CUPM, di cui si è parlato nella Parte II, hanno preso parte membri della CUPM, gli autori degli articoli che sono inclusi in questa relazione, alcuni rappresentanti delle associazioni professionali di discipline ad alto contenuto matematico e qualche esperto matematico. Durante il seminario i partecipanti si sono confrontati in piccoli gruppi per identificare le questioni fondamentali e le domande da porre nella Guida Curricolare.

Questa relazione è presentata sotto forma di una serie di possibili raccomandazioni seguite dalla discussione delle ragioni che le sostengono, unitamente alle possibili obiezioni che si potrebbero porre. Le raccomandazioni possono essere viste come una serie di domande che sollevano importanti questioni. Tuttavia non costituiscono una bozza della Guida curricolare. Inoltre, occorre sottolineare che né il seminario della CUPM, né la CUPM in quanto commissione hanno sottoscritto alcuna delle raccomandazioni che seguono. In realtà, questi gruppi non hanno neppure formalmente deciso se le questioni prese in esame siano effettivamente le più importanti. Sono state selezionate in quanto sono emerse durante la discussione e non riflettono il pensiero di gran parte della CUPM e di altri che hanno preso parte all'attività di questo ultimo anno.

La CUPM ritiene che sia giunto il momento di condividere queste riflessioni con l'intera comunità dei matematici e di avere un feed-back di questa fase preliminare di lavoro. Ci auguriamo e ci aspettiamo che la Guida definitiva possa essere uno strumento utile per impostare la discussione all'interno dei dipartimenti e, quindi, per potersi presentare ai presidi di facoltà e ad altri amministratori a spiegare i bisogni e le aspettative di una programmazione universitaria di matematica efficace. Vi invitiamo pertanto a non dimenticare questi due destinatari nell'approntare i vostri suggerimenti alla CUPM per la Guida. Sono graditi suggerimenti sia nelle varie questioni prese in esame che in qualsiasi altra vi sembri non sia stata trattata.

I primi tre gruppi di domande affrontano in modo diretto la questione: "Che cosa vogliamo che i nostri studenti sappiano fare?". Nella presente relazione, la CUPM intende per "nostri studenti" quelli che sono iscritti a corsi di scienze matematiche e si stanno specializzando in matematica o in facoltà ad alto contenuto matematico, comprese le scienze fisiche, ingegneria, informatica e molti sottocampi di un grande numero di discipline. Gli obiettivi non debbono riferirsi soltanto alla padronanza dei contenuti, ma anche alle abilità cognitive superiori nonché alle competenze a sostegno di queste, anche se gli obiettivi generali sono separati da quelli specifici.

A. La conoscenza matematica: Obiettivi generali

1. Un suggerimento: tutti gli studenti dovrebbero conseguire la padronanza di un ricco insieme di concetti matematici diversificati.

Le idee particolari potranno variare – non potrà esserci un elenco valido per ogni facoltà o programma e tanto meno per ogni studente. Tuttavia la matematica si occupa di concetti ed occorre prestare attenzione ai contenuti concettuali della disciplina. Quanto più i programmi degli studenti sono diversificati, tanta più attenzione va comunque prestata ai collegamenti e alle tematiche generali (linearizzazione, ottimizzazione, simmetria, calcolo approssimato, ecc.) che non possono essere trascurate da nessun tipo di specializzazione.

Una considerazione: Alcuni sostengono che dovremmo tentare di identificare un nucleo di concetti con cui chi si specializza in matematica deve avere familiarità.

2. Un suggerimento: tutti gli studenti dovrebbero essere in grado di pensare analiticamente e criticamente, di formulare problemi, risolverli e interpretarne le soluzioni.
   Con il crescere del numero di argomenti che gli studenti devono padroneggiare, la richiesta sempre maggiore di competenze tecnologiche e la particolare attenzione alle abilità comunicative, è possibile che possa passare in secondo piano l'obiettivo principale dell'insegnamento della matematica, ovvero pensare analiticamente e criticamente. I docenti dovrebbero enfatizzare queste abilità cognitive generali e aiutare gli studenti a imparare a pensare matematicamente. Per esempio, anche la semplice richiesta agli studenti se hanno mai incontrato un problema simile in precedenza può tradursi in un'occasione per riflettere sull'uso dell'analogia come strumento.

Una considerazione: Ha senso che la CUPM faccia una raccomandazione del genere? Pensare in termini matematici è fondamentale rispetto alla nostra disciplina e forse non ha bisogno di essere esplicitato come obiettivo.

3. Un suggerimento: tutti gli studenti dovrebbero giungere alla comprensione della natura della dimostrazione.
   La dimostrazione è ciò che rende speciale la matematica. Gli studenti dovrebbero comprendere ed apprezzare il nucleo della cultura matematica: il valore e la validità del ragionamento attento, il rigore della definizione e la completezza del discorso. Lo sviluppo di questa comprensione può essere favorito con attività quali la ricerca di controesempi ad affermazioni false, la lettura critica di brevi dimostrazioni o il completamento di una dimostrazione di cui vengono forniti solo uno o due passaggi. In realtà, tutti i corsi di matematica dovrebbero dare il loro contributo allo sviluppo di capacità di pensiero e di ragionamento critico in modo da insegnare agli studenti a pensare, invece che a vedere la matematica in termini di procedura. E gli studenti che si specializzano in matematica dovrebbero essere in grado di muoversi oltre il livello formativo appena descritto, acquisendo la capacità di fornire dimostrazioni complete.

Una considerazione: Questa richiesta di familiarizzare con la capacità di dimostrare potrebbe allontanare molti studenti? Nessuno sostiene che i corsi, e in particolar modo quelli rivolti a specialisti non matematici, debbano essere impostati solo secondo la logica della dimostrazione di teoremi. D'altra parte, il suggerimento di includere la dimostrazione come componente centrale del curriculum di matematica potrebbe portare ad un vuoto formalismo insignificante per gli studenti o potrebbe avere l'effetto di distrarre l'attenzione dall'efficacia che esempi ben scelti hanno nel motivare i concetti e nel rendere più chiare le interrelazioni. Inoltre, la questione della dimostrazione potrebbe diventare ciò che caratterizza la separazione fra coloro che credono in una specializzazione matematica tradizionale per studenti che puntano a conseguire il PhD e coloro che invece pensano soprattutto a ciò che possono fare gli studenti che si specializzano in matematica solo con il bachelor.

4. Un suggerimento: tutti gli studenti dovrebbero fare esperienza di applicazione di conoscenze da un ramo della matematica ad un altro e dalla matematica ad altre discipline.
   I diversi gruppi di lavoro hanno discusso le esigenze degli studenti che volevano laurearsi in matematica, entrare nel mondo del lavoro oppure prepararsi all'insegnamento. Ogni gruppo di lavoro ha suggerito che gli studenti presi in esame dovessero acquisire la capacità di matematizzare i problemi di altre discipline e di esprimere la soluzione in un linguaggio comprensibile a coloro che non avevano conoscenze matematiche approfondite. I corsi di statistica, informatica, grafica con il computer e ricerca operativa sono particolarmente validi per studenti che vogliono entrare nel mondo del lavoro. Tutti gli studenti dovrebbero apprezzare il ruolo che la matematica gioca nelle applicazioni, specialmente nello sviluppo delle nuove tecnologie, per esempio, in informatica, nelle applicazioni mediche e nella comunicazione.

Una considerazione: Per alcuni il seguente suggerimento è particolarmente importante: tutti gli studenti dovrebbero avere una conoscenza approfondita di almeno un'altra disciplina che usi la matematica.

5. Un suggerimento: tutti gli studenti dovrebbero sperimentare la matematica come un terreno di confronto su questioni aperte e di attualità e non come un elegante corpus di conoscenze statiche e complete.
Alcuni esempi coinvolgenti dovrebbero giocare fin dall'inizio un ruolo di primissimo piano in tutti i corsi astratti e gli studenti dovrebbero essere esposti alle profonde interconnessioni e collegamenti fra i diversi argomenti matematici e le applicazioni scientifiche attuali. Questa consapevolezza dovrebbe essere sviluppata lungo tutto l'arco del curriculum e poi rinforzata con lo studio approfondito di alcuni argomenti specifici, forse attraverso due corsi successivi. L'argomento due corsi successivi è meno importante della sua capacità di sviluppare la sicurezza e la scioltezza dello studente nel leggere la matematica, nell'analizzare ragionamenti matematici, nello svilupparne altri in proprio, nell'approfondire i concetti e nel formulare domande e ipotesi personali. Il contatto diretto con questioni aperte risulta fondamentale in questa fase.

Una considerazione: Non sono state fatte considerazioni in merito a questo suggerimento.

6. Un suggerimento: tutti gli studenti che si specializzano in matematica o in discipline ad alto contenuto matematico dovrebbero essere in grado di utilizzare diversi strumenti tecnologici: p.es. software algebrico e di visualizzazione, pacchetti statistici, un linguaggio di programmazione ad alto livello.
La tecnologia è diventata uno strumento fondamentale in tutti gli studi scientifici e di ingegneria. I ricercatori matematici utilizzano potenti strumenti informatici per studiare esempi e prendere in esame una miriade di casi. Gli scienziati si avvalgono di software per formulare teorie e per poter operare con la raccolta e l'analisi di dati su larga scala. Gli ingegneri spesso si fidano più dei modelli informatici che dei prototipi. In tutti questi casi ci troviamo in presenza di software che permette a matematici, scienziati ed ingegneri di organizzare e comunicare le loro idee. Anche l'industria impiega strumenti informatici avanzati per poter mantenere una posizione competitiva sul mercato. Fare esperienza nell'utilizzo della tecnologia e dei linguaggi informatici è di importanza fondamentale per la comprensione e l'analisi della matematica, d'altra parte, per trovare lavoro è necessario avere competenze nell'uso di questi strumenti.

Una considerazione: Fra i possibili pericoli nell'utilizzo delle varie tecnologie ci può essere quello di sviare tempi e risorse in altre direzioni. Curvature tecnologiche molto forti possono creare nuovi problemi. Secondo alcuni, questi pericoli potenziali superano nettamente i possibili vantaggi al punto da sollevare la questione se effettivamente la tecnologia favorisca l'apprendimento. Inoltre, l'uso della tecnologia potrebbe accentuare ancor più il divario fra gli studenti relativamente alle risorse formative ed economiche. Infine, la diversità delle esperienza in campo tecnologico potrebbe tradursi in una potenziale discriminazione degli studenti di sesso femminile.

7. Un suggerimento: tutti gli studenti dovrebbero essere in grado di comunicare in termini matematici sia in forma orale che in forma scritta.
Durante lo svolgimento del loro programma universitario, gli studenti dovrebbero incontrare molte occasioni in cui viene loro richiesto di esporre presentazioni matematiche sia in forma orale che in forma scritta. Queste presentazioni e relazioni dovrebbero ricevere un feedback critico adeguato in modo che gli studenti possano potenziare le loro abilità. Ci sono molte occasioni, formali e informali, in cui gli studenti possono sviluppare queste competenze. Per esempio, se gli studenti rispondono a domande poste da altri studenti durante le lezioni, ciò contribuisce indubbiamente a migliorarsi sia nell'ascolto che nel parlato.

Una considerazione: Fornire esperienze per sviluppare queste abilità a tutti gli studenti che si specializzano richiede un notevole investimento di tempo e di energie da parte dei docenti. L'importanza di queste abilità giustifica l'impiego di risorse? (la maggior parte ha risposto affermativamente).

B. La conoscenza matematica: Obiettivi specifici

1. Un suggerimento: tutti gli studenti che si specializzano in matematica dovrebbero padroneggiare concetti e tecniche che spaziano dall'analisi a una variabile a quella a più varibili, alla matematica discreta, all'algebra lineare, alla statistica e alle equazioni differenziali.
Questi argomenti sono la soglia attraverso la quale si accede alla matematica più potente ed approfondita. In molte aree della matematica, i concetti che emergono da queste aree si fondono per diventare potenti strumenti per la comprensione della matematica più profonda. Essi costituiscono il fondamento per uno studio avanzato

della matematica e l'apertura necessaria per applicare la matematica con flessibilità. Tuttavia, questo suggerimento non significa che questi argomenti debbano necessariamente essere inclusi nei corsi universitari di primo livello seguiti da potenziali specialisti.

Una considerazione: Alcuni partecipanti hanno affermato che se si fornissero percorsi di specializzazione diversificati si potrebbero attrarre studenti diversi, rendendo più stimolante la specializzazione. Essi sostenevano che la drastica riduzione di specializzazioni in matematica rende inevitabile considerare gli studenti di scienze informatiche (*Computer Science, CS*) come un'importante fonte di potenziali doppi specialisti. Gli ultimi suggerimenti curricolari per CS riducono drasticamente il ruolo del calcolo infinitesimale, il che indurrà molti studenti di scienze informatiche a posticiparlo per iniziare invece il loro corso di studi con la matematica discreta. Altri esperti erano semplicemente preoccupati per la lunghezza di questa lista di argomenti (vedi considerazioni successive).

2. Un suggerimento: tutti gli studenti che si specializzano in matematica dovrebbero avere competenze di algebra, analisi, geometria, calcolo delle probabilità e modelli matematici, con un'esperienza significativa in almeno una di queste aree.
   Queste esperienze dovrebbero essere fornite all'interno di un programma coerente. D'altra parte, una scelta di corsi o di combinazioni di corsi diversi potrebbe fornire a ognuno queste esperienze. Per esempio, gli studenti potrebbero avere un'esperienza in algebra in una serie di realtà diverse dal tradizionale corso astratto di algebra. Inoltre, si potrebbe prevedere che all'interno dello stesso corso si possano fare due o più esperienze di questo genere.

Una considerazione: La specializzazione sarebbe indebolita dal fatto che non tutti gli studenti che seguono i corsi non lo farebbero per specializzarsi in matematica? Sebbene non ci sia un consenso su che cosa debba costituire il nucleo fondante della specializzazione, alcuni esperti ritenevano che i suggerimenti della CUPM dovessero essere volti a individuarlo. Da un'angolatura diversa, c'era anche una minoranza che sosteneva che i suggerimenti non dovrebbero richiedere esperienze in alcuna area di contenuti specifici. Data la diversità delle istituzioni e la vasta gamma di abilità e di aspettative degli studenti, questa linea di pensiero esige che la CUPM fornisca un quadro estremamente flessibile, raccomandando soltanto che gli studenti siano esposti a una varietà di prospettive: algebrica, geometrica, formale, intuitiva, orientata alle applicazioni, analitica, deduttiva, sperimentale ecc. Alcuni programmi di validità indiscussa non richiedono che gli specializzandi seguano algebra o analisi e molti al momento non richiedono alcuna geometria (vedi sotto). Infine, se la lista degli argomenti inclusi in questi suggerimenti diventa troppo lunga, si rischia di trasformare la specializzazione in matematica ancor meno attraente, proprio in un momento in cui registriamo un minore interesse per la specializzazione stessa.

3. Un suggerimento: tutti gli studenti dovrebbero sviluppare abilità nella visualizzazione tridimensionale e in geometria, decisamente al di sopra di quanto è normalmente previsto dai programmi universitari.
   Le competenze di visualizzazione tridimensionale dei laureandi non sono buone e potrebbero essere potenziate con insegnamenti mirati. La geometria, da tempo relegata a un ruolo secondario nei programmi universitari, ha bisogno di essere rinnovata e di riconquistare un ruolo più importante nella formazione di tutti gli studenti. La geometria costituisce un quadro ideale di riferimento per corsi che integrano rami diversi della matematica e gli esperti che hanno preso parte ai gruppi di lavoro ritengono che per sua natura sia attraente ed accessibile a tutti gli studenti universitari.

Una considerazione: Perché dare tutta questa importanza alla geometria, visto che altre aree della matematica non l'hanno? In molti hanno affermato che, visto il ruolo di cenerentola occupato dalla geometria negli ultimi 40 anni, questo suggerimento è pienamente giustificato.

4. Un suggerimento: tutti gli specialisti di matematica dovrebbero acquisire esperienze lavorando a un progetto intensivo che richieda loro di analizzare e creare argomentazioni matematiche per poi elaborare una relazione scritta ed orale.
   Questa esperienza dovrebbe permettere agli studenti di integrare la matematica che hanno appreso per potenziare le loro abilità di lettura e di analisi matematica nonché per dimostrare di essere in grado di formarsi delle opinioni e di comunicarle in modo efficace. Per gli studenti che si preparano all'insegnamento questa potrebbe essere un'esperienza di ricerca, ovvero un'opportunità di sperimentare le soddisfazioni e le frustrazioni della ricerca di conoscenze matematiche. Per gli studenti che invece intendono entrare nel mondo

del lavoro, questo potrebbe essere un progetto d'equipe volto a risolvere un problema industriale. Un corso volto alla creazione di modelli a livello avanzato potrebbe costituire un'altra valida alternativa..

Una considerazione: Per fornire a tutti gli specializzandi in matematica esperienze di questo genere è necessario un alto numero di ore da parte dei docenti.

C. Le esigenze specifiche dei futuri insegnanti

Molti specialisti di matematica si preparano per diventare insegnanti. La maggior parte dei suggerimenti di carattere generale proposti per chi si specializza in matematica valgono anche per loro, pur con qualche considerazione particolare. I membri della CUPM stanno prestando particolare attenzione al rapporto del Conference Board of Mathematical Sciences sulla preparazione dei futuri insegnanti. La CUPM è in particolare interessata ai numerosi laureati che non hanno una specializzazione in matematica e che insegnano al momento nelle scuole medie e superiori. Questa situazione è particolarmente grave a livello di scuola media. Tutti concordano sul fatto che un buon insegnante debba possedere una solida preparazione in matematica, anche se ci si interroga sempre più spesso se una specializzazione "tradizionale" sia il modo migliore. Ciò che si intende per appropriata preparazione per un futuro insegnante merita una maggiore attenzione ed un esame più attento.

1. Un suggerimento: i laureandi che si preparano all'insegnamento della matematica nella media superiore hanno bisogno di una visione abbastanza ampia della disciplina; inoltre hanno bisogno di uno studio approfondito in modo da poter operare collegamenti e interagire con gli studenti in modo efficace.
   Gli argomenti dovrebbero comprendere geometria, statistica, calcolo infinitesimale, modelli matematici e fisica.

Una considerazione: Alcuni hanno messo in discussione la presenza della fisica. Altri ritenevano invece che si debbano aggiungere la matematica del discreto e/o il calcolo delle probabilità.

2. Un suggerimento: gli studenti dovrebbero essere immediatamente in grado di operare collegamenti fra ciò che apprendono nei corsi universitari di matematica e ciò che andranno a insegnare nella scuola media superiore.
   Questo tipo di collegamenti potrebbero essere forniti più facilmente se alcuni dei corsi seguiti da questi studenti fossero mirati appositamente a formare futuri insegnanti.

   Una considerazione: Non si è trovato un accordo sulla opportunità di istituire corsi speciali per futuri insegnanti. In piccole facoltà, è molto facile che tali corsi siano difficili da organizzare.

3. Un suggerimento: i futuri insegnanti dovrebbero acquisire competenze didattiche prima di completare il corso di studi.
   Ciò comporterebbe fornire occasioni di esperienze di insegnamento prima dello stage ufficiale di insegnamento al termine del corso. (È stata anche proposta la sigla TEU: Teaching Experiences for Undergraduates – Esperienze di insegnamento per laureandi). In aggiunta, i futuri insegnanti dovrebbero sentire la necessità e il desiderio di un aggiornamento matematico continuo come parte di un programma di sviluppo professionale .

   Una considerazione: Non si è trovato un accordo sulla opportunità di istituire corsi speciali per futuri insegnanti. In piccole facoltà, è molto facile che tali corsi siano difficili da organizzare.

I suggerimenti contenuti nelle sezioni da A-C ruotano attorno alla domanda: "Che cosa vogliamo che i nostri studenti sappiano fare?" I suggerimenti che seguono sono invece rivolti alle infrastrutture e al sostegno di cui hanno bisogno studenti e docenti affinché quelle capacità possano svilupparsi.

D. Ambiente di apprendimento extracurricolare

Secondo i partecipanti al seminario, non è probabilmente possibile sviluppare le abilità richieste restando sempre all'interno delle lezioni formali seguite da chi si specializza. Occorre anche un lavoro al di fuori delle aule universitarie.

1. Un suggerimento: i dipartimenti dovrebbero creare spazi per contatti informali con gli studenti.
   Un esempio significativo di uno spazio per studenti che ha riscosso successo è l'aula di matematica creata da una università per gli studenti che si specializzano. L'aula ha un angolo destinato all'ufficio di consulenza per i programmi universitari, alcuni computer, scrivanie, fotografie di studenti e lavagne. Gli studenti che si specializzano sono invitati a trascorrervi la pausa pranzo e a formare gruppi di studio attorno a un tavolo o a una lavagna. Uno spazio di questo tipo può rendere possibile la realizzazione di molti suggerimenti avanzati nelle sezioni precedenti.

Una considerazione: Questo suggerimento è realistico per tutti i dipartimenti di matematica?

2. Un suggerimento: gli studenti dovrebbero comunicare matematica in diverse realtà al di fuori dell'aula.
   Sebbene la maggior parte dei dipartimenti molto probabilmente non sarebbe in grado di offrire le opportunità che seguono, tutti i dipartimenti dovrebbero permettere e puntare al fatto che gli specialisti prendano parte alle seguenti attività: conversazioni di matematica per laureandi, club di matematica o *student MAA chapters*, progetti di ricerca per laureandi, convegni a livello regionale / nazionale, impieghi all'interno del dipartimento con mansioni differenziate, gare di modelli matematici e gare Putnam, contatti informali con docenti in avvenimenti sociali, pranzi ecc. Un esempio particolarmente significativo sono i Colloqui di matematica per laureandi istituiti da una facoltà. I Colloqui si svolgono ogni due settimane e vedono la presenza di oratori sia interni che esterni, prevedono applicazioni di matematica, di nuove matematiche e altre attività di approfondimento. In alcuni casi vengono invitati anche neolaureati per parlare delle loro esperienze di lavoro e del grado di preparazione fornito dai programmi universitari. Tutti gli studenti devono partecipare ad almeno 12 incontri durante il loro corso di studi universitari e devono scrivere delle relazioni su quattro delle 12 presentazioni.

Una considerazione: Questo suggerimento è realistico per tutti i dipartimenti di matematica?

3. Un suggerimento: i dipartimenti dovrebbero riconoscere con modalità e strumenti diversificati le borse di studio conseguite e i servizi prestati dagli studenti.
   Fra le varie possibilità occorre tenere presente: la Putnam Competition, il concorso per modelli matematici, il premio di calcolo, il premio per servizi nel dipartimento, per il migliore studente dell'ultimo anno, il premio per il migliore studente del secondo anno, borse di studio del dipartimento, premi intitolati a docenti in pensione.

Una considerazione: non ne è stata fatta nessuna. Non dovrebbe essere difficile per i dipartimenti organizzarsi in questo senso.

4. Un suggerimento: a tutti gli specializzandi si dovrebbero offrire programmi di orientamento.
   Le donne e i membri di gruppi notoriamente poco rappresentati dovrebbero essere incoraggiati a specializzarsi in matematica, ma tutti gli studenti traggono vantaggi da un buon orientamento. Una modalità particolarmente efficace consiste nell'invitare neolaureati a parlare delle loro esperienze di lavoro e della loro preparazione. Anche gli studenti delle classi superiori possono aiutare moltissimo i principianti nell'orientamento.

Una considerazione: non ne è stata fatta nessuna. Non dovrebbe essere difficile per i dipartimenti organizzarsi in questo senso, particolarmente se si impiegano studenti per l'orientamento.

E . Valutazione

1. Un suggerimento: la valutazione dovrebbe essere continua e non soltanto limitata alla fase terminale di un progetto.
   Porre domande mentre stiamo lavorando ci permette di ricevere informazioni per rimodellare il nostro pensiero. Ciò che apprendiamo, d'altra parte, pone nuove domande e favorisce nuovo apprendimento. La verifica è soltanto uno dei fini della valutazione. Il feedback è perlomeno altrettanto importante ai fini del miglioramento. La valutazione ci può inoltre fornire una valida documentazione relativamente agli sforzi e ai successi. La verifica dovrebbe essere sempre continua e svolta in modo da essere utile.

2. Un suggerimento: nel formulare un obiettivo, dovremmo individuare anche dei possibili indicatori attraverso i quali rilevare in quale grado l'obiettivo è stato raggiunto.
   Gli obiettivi devono essere dichiarati anticipatamente in modo esplicito. Per poter apportare miglioramenti in modo continuo ed efficace, anche la valutazione dev'essere continua. I dipartimenti devono dotarsi di strumenti affidabili per verificare in che misura centrano i loro obiettivi e devono attivare meccanismi per utilizzare queste informazioni in modo da migliorare i propri programmi. "Chiudere l'anello sulla valutazione" non è soltanto una frase fatta: è un requisito essenziale.

Una considerazione:molti matematici hanno una scarsa familiarità con procedure formali di valutazione. Sarebbe di grande aiuto ai dipartimenti e ai loro programmi accedere a modelli di valutazione efficace in diverse istituzioni. La CUPM sta valutando la possibilità di descrivere simili modelli all'interno della *Guida curricolare*.

F . Ruolo e responsabilità del dipartimento

È necessario un forte sostegno di infrastrutture a livello locale per realizzare programmi che assicurino che i laureati ottengano le varie abilità, competenze e punti di vista auspicati. I partecipanti alla conferenza della CUPM ritengono che si debbano sviluppare programmi efficaci a livello locale e che lo sviluppo di programmi di qualità superiore richieda la guida e il contributo da parte dei docenti.

1. Un suggerimento: ogni programma universitario deve essere elaborato localmente. Ogni dipartimento ha bisogno di raccogliere informazioni sui propri studenti, sulle proprie risorse dipartimentali ed istituzionali e sulle proprie limitazioni.
   Il primo passo perché ogni dipartimento si muova verso la realizzazione dei propri obiettivi consiste nell'articolare questi ultimi e nel possedere una visione del dipartimento in quanto tale. Quest'ultima si dovrebbe focalizzare su ciò che si vuole sappiano fare gli studenti. I dipartimenti hanno bisogno di avere a loro disposizione dati d'archivio su carichi di insegnamento, iscrizioni ai corsi, percentuali di successo nonché i risultati di diversi studenti in modo da formulare obiettivi da poter conseguire realisticamente.

Una considerazione: non ne è stata fatta nessuna.

2. Un suggerimento: nella progettazione curricolare si deve prestare la massima attenzione al coordinamento e alla collaborazione con discipline partner.
   Occorre costruire rapporti collaborativi con le discipline partner relativamente all'elaborazione di un curricolo, ai risultati degli studenti nei corsi e all'aggiornamento degli insegnanti. Da queste collaborazioni possiamo trarre grandi vantaggi.

Una considerazione: questo non deve essere inteso come una limitazione all'autonomia dei dipartimenti, che li rilegherebbe di fatto a semplici sportelli di servizio.

3. Un suggerimento: i dipartimenti dovrebbero essere incoraggiati a studiare e a favorire specializzazioni congiunte con discipline partner.
   Le specializzazioni congiunte possono andare al di là delle specializzazioni in "scienze matematiche" suggerite nell'ultima relazione della CUPM, diventando corsi più equamente bilanciati fra le scienze matematiche e le discipline partner. Ogni dipartimento dovrebbe cogliere la forza della propria istituzione, sia all'interno che all'esterno del dipartimento di matematica, per individuare quali opportunità siano più interessanti.

Una considerazione: alcuni partecipanti vorrebbero essere rassicurati sul fatto che tali programmi, in qualche modo, non finiscano per indebolire la specializzazione in matematica.

4. Un suggerimento: ogni dipartimento deve fornire le infrastrutture necessarie per sostenere tutti i docenti (a tempo pieno, part-time, GTA) ad avvalersi delle risorse tecnologiche.
   Le istituzioni vengono utilizzate per supportare i docenti con programmi di materie scientifiche e di informatica, ma non viene pienamente compresa la necessità di rifornire un'ampia gamma di sostegni in modo da offrire la tecnologia appropriata in matematica.

Una considerazione: non ne è stata fatta nessuna.

5. Un suggerimento: il corpo docenti e i suoi singoli componenti devono focalizzare la loro attenzione sui bisogni degli studenti.
   Dobbiamo comprendere l'ampiezza e la natura del loro background in matematica e in altre aree. Queste informazioni sono essenziali per andare incontro ai bisogni degli studenti in altre discipline ad alto contenuto matematico e per elaborare corsi e programmi per studenti che si specializzano in matematica.

Una considerazione: non ne è stata fatta nessuna.

G. Questioni aperte

1. Un suggerimento: occorre dare una risposta al calo del numero di specializzazioni in matematica in un momento di grande domanda sia a livello locale che nazionale.
   Dobbiamo valutare se le considerazioni fin qui espresse si tradurranno a livello nazionale nel numero auspicato di specializzazioni in matematica. La MAA può fungere da camera di compensazione per idee e programmi innovativi da parte di istituzioni da tutto il paese in modo da incrementare il numero di studenti che si specializzano in scienze matematiche.
2. Un suggerimento: il calo nel numero delle specializzazioni ci dovrebbe indurre a riflettere su modalità più efficaci per incoraggiare donne e minoranze ad entrare nella professione.
   Di fronte a questi dati di domanda matematica disattesa, occorre ottimizzare le nostre risorse.
3. Un suggerimento: la CUPM e, su scala maggiore, la comunità matematica può fornire il proprio contributo soprattutto fornendo modelli di dipartimenti che funzionano in modo efficace.
   Questi modelli illustrano come i dipartimenti hanno indirizzato i loro sforzi iniziali, quali informazioni hanno raccolto per stimolare e/o guidare il loro lavoro, in che misura e come hanno apportato cambiamenti e le conseguenze di tutto ciò. Quello che serve non sono tanto ricette quanto modelli, poiché, relativamente ai programmi, ogni istituzione ha bisogno di riflettere sulla tipologia di studente, le forze e gli interessi dei docenti e la natura dell'istituzione.

Una considerazione: non ne è stata fatta nessuna. Tuttavia la CUPM avrà bisogno del contributo dei lettori di questo documento per ottenere informazioni in merito.

Bibliografia

- Conference Board of the Mathematical Sciences, Mathematical Education of Teachers (in preparazione). Stesura provvisoria on-line al sito www.maa.org/cbms.
- Dossey, John A. (a cura di), *Confronting the Core Curriculum: Considering Change in the Undergraduate Mathematics Major*, MAA Notes 45, MAA, Washington, DC, 1998.
- Gold, Bonnie, Sandra Keith, and William Marion (a cura di), *Assessment Practices in Undergraduate Mathematics*, MAA Notes 49, MAA, Washington, DC, 1999.
- Steen, L.A. (a cura di), *Reshaping College Mathematics,* MAA Notes 13, MAA, Washington, DC, 1989.
- Steen, L.A. (a cura di), *Heeding the Call for Change,* MAA Notes 22, MAA, Washington, DC, 1992.
- Tucker, A. (a cura di), Models that Work, MAA Notes 38, MAA, Washington, DC, 1995

La matematica e le scienze matematiche nel 2010: che cosa dovrebbe sapere un laureato? Alcune previsioni per i prossimi dieci anni

Thomas Banchoff
Brown University

Che cosa è cambiato oggi, rispetto a dieci o vent'anni fa, nel modo in cui rispondiamo all'interrogativo posto nel titolo? Sia dieci che vent'anni fa sembrava che i matematici fossero più sicuri in merito alle risposte da dare. D'altra parte la matematica esisteva da secoli e il contenuto dei corsi non aveva subito grandi cambiamenti. Ma oggi, e in questi ultimi dieci anni in particolare, il ritmo dei cambiamenti è stato così veloce che è difficile immaginarsi che cosa potrà succedere da qui a dieci anni. I paragrafi che seguono costituiscono un tentativo di formulare alcune previsioni rispetto a quanto i nostri studenti sapranno al termine dei loro corsi di studi universitari in matematica e in discipline scientifiche. Ovviamente si tratta soltanto di previsioni di ciò che potrebbe accadere.

Obiettivi attuali

Per molti anni ci siamo ritrovati d'accordo su una piano di studi iniziale per studenti universitari interessati a materie ad alto contenuto matematico, ovvero che tutti dovessero seguire l'equivalente di tre semestri di calcolo infinitesimale e un semestre di algebra lineare come prerequisiti di base per qualsiasi laurea in scienze matematiche. E su questo concordano più o meno tutti. Ma, andando avanti, si aprono molte strade diverse. È possibile che uno studente completi una specializzazione in matematica senza seguire un corso di calcolo delle probabilità o di statistica, oppure senza seguire corsi di geometria o topologia o ancora un corso di equazioni differenziali ordinarie o parziali, anche se la maggior parte dei laureandi seguirà uno o più corsi nelle aree suddette.

Di solito ci si aspetta che uno specialista in matematica segua almeno un corso di "Gruppi, anelli e campi". Ci saranno sempre anche delle richieste quantitative, di solito articolate in una serie di corsi individuali. Alcuni dipartimenti tendono ad individuare due specializzazioni diverse: una di tipo generico e l'altra mirata a fornire una preparazione per l'insegnamento nella scuola media superiore, con quest'ultima che richiede corsi particolari, spesso con percorsi obbligati.

Collocazione futura

Se questa è la situazione presente, quale sarà il futuro? Entro dieci anni il divario fra studenti universitari ben preparati e meno preparati sarà ancora più netto. In molti posti è già vero che la maggior parte degli studenti che si vogliono laureare in matematica hanno seguito un corso di calcolo infinitesimale nella scuola media superiore. Coloro che hanno superato un test di Advanced Placement possono confidare di trovarsi in un corso universitario adeguato, che non richiederà loro di dover ripetere percorsi che già hanno dimostrato di conoscere. Per la maggior parte degli studenti questo equivale a un semestre di "collocazione", il che significa che al termine del primo anno avranno completato il corrispettivo di tre semestri di calcolo infinitesimale. Fra dieci anni, questo tipo di studenti saranno verosimilmente in grado di dimostrare di aver completato l'equivalente di un intero anno universitario di calcolo infinitesimale.

Per un numero sempre maggiore di studenti, il background in pre-calcolo e calcolo sarà acquisito attraverso programmi di insegnamento a distanza gestiti da agenzie private o da estensioni di reparti delle università. In alcuni casi ci saranno interventi mirati per gruppi, o per un numero di studenti di una particolare scuola secondaria che possono puntare ad obiettivi al di là di quelli richiesti dai loro insegnanti oppure per una "classe virtuale" composta da studenti in locazioni diverse, guidati da un coordinatore che lavora per un'agenzia di apprendimento a distanza. Le università dovranno accettare la sfida posta da queste nuove modalità di ottenere e certificare competenze in corsi che erano tradizionalmente seguiti nelle aule universitarie.

In aggiunta a corsi di analisi a una variabile, gli studenti presenteranno certificazioni di corsi seguiti in altre materie, verosimilmente analisi a più variabili, equazioni differenziali ed algebra lineare. Ci saranno sempre più studenti che avranno esperienze di statistica e di corsi di matematica del discreto. Potrà capitare che ci siano corsi di sistemi dinamici o di teoria dei numeri o su argomenti di algebra moderna. È difficile immaginare come studenti con una formazione di base così differenziata possano trovare posto all'interno degli attuali programmi universitari e sarà necessario che i dipartimenti di scienze matematiche trovino il modo di valorizzare le esperienze dei principianti dalla preparazione così differenziata. Questo processo potrebbe essere facilitato da una maggiore flessibilità delle linee di demarcazione tradizionali fra un corso e l'altro ed è fortemente connesso con il continuo sviluppo dei supertesti.

La comparsa dei supertesti

Con il continuo sviluppo della tecnologia ipertestuale e con la costruzione accelerata di corsi via internet, la linea di demarcazione fra i corsi sarà sempre meno marcata mentre i corsi stessi si faranno sempre più flessibili. Per corso si intenderà una serie di moduli con l'ordine degli argomenti e il livello di approfondimento fissato dall'istruttore. Questo in una certa misura accade già oggi, con gli istruttori che vanno a prendere qui e là fra dai diversi materiali di vari libri di testo, proponendo talvolta anche di modificarne l'ordine di presentazione degli argomenti. Nel caso di una situazione ipertestuale, la differenza sta nel fatto che ogni argomento del corso sarà accompagnato da materiale di sostegno per gli studenti che hanno lacune nella preparazione, ma allo stesso tempo ci saranno anche discussioni su approfondimenti e applicazioni in molte altre discipline. Lo studente sarà in grado di scegliere i materiali adatti alla sua preparazione di fondo, al livello di comprensione e agli interessi particolari. Ci saranno anche collegamenti con altri corsi di matematica e discipline correlate, in modo che gli studenti possano avere un quadro prospettico dei corsi di matematica di livello superiore e addirittura dei problemi della ricerca in matematica e nelle discipline correlate. Un ipertesto può anche fornire un panorama storico e filosofico a diversi livelli, molto più di quanto non si possa inserire occasionalmente in un libro attraverso occhielli, note a piè di pagina e altre annotazioni.

Dal momento che sto preparando dei corsi di analisi a più variabili e geometria differenziale, permettetemi di citare alcune idee tratte da quegli argomenti.

Esempio: Un insegnante di analisi a più variabili sarà in grado di presentare una serie di definizioni di continuità richiamando la definizione tradizionale di una funzione a valori reali di variabile reale. La funzione f è continua nel punto x_0 se, per ogni ε esiste un valore δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ogniqualvolta che $|x - x_0| < \delta$. È sorprendente che questa definizione sia ancora valida se consideriamo x un vettore nello spazio m-dimensionale e $f(x)$ un vettore nello spazio n-dimensionale, dove il segno di valore assoluto va interpretato come modulo del vettore. La stessa definizione è ancora valida se x ed $f(x)$ sono intesi come numeri complessi.

Inoltre molte dimostrazioni restano invariate passando da una variabile a questo ambito più generale. Per esempio, se f è una funzione continua e l'insieme dei valori $f(x)$ è un sottoinsieme del dominio di una funzione continua g, allora anche la composizione $g \circ f$ sarà continua.

Dimostrazione: Dato $\varepsilon > 0$, esiste un valore δ tale che $| g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ se $| y - y_0| < \delta$, ed esiste un valore δ_i tale che $| f(x) - f(x_0)| < \delta$ se $| x - x_0| < \delta_i$. Pertanto, dato ε, esiste un valore δ_i tale che $| g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ se $| x - x_0| < \delta_i$. Lo studente che comprende questo nel caso più semplice sarà in grado di capirlo in tutte le dimensioni, una volta che il valore assoluto della differenza viene inteso come una misura di lunghezza.

Un esempio un po' più raffinato è dato dalla proprietà del valore intermedio. Una funzione reale f di una variabile reale soddisfa la proprietà del valore intermedio se, quando è vero che $f(a) < C < f(b)$ in un intervallo $[a,b]$ all'interno del dominio, esiste un c appartenente a quell'intervallo tale che $f(c) = C$. Possiamo ottenere una funzione analoga a questa per mappe da uno spazio n-dimensionale a uno spazio n-dimensionale. Se D è un disco di raggio r e di centro x_0 nel dominio di una funzione continua f da uno spazio n-dimensionale a uno spazio n-dimensionale, e se c'è un raggio che parte dal punto C e che interseca l'immagine della sfera $\{x$ tale che $| x - x_0| = r \}$ per un numero dispari di volte, allora per un c appartenente a D, si ha che $f(c) = C$. Affinché lo studente possa comprendere questo teorema, dovrà essere in grado di cogliere l'idea che la frontiera di una sfera a n dimensioni è una sfera a $n - 1$ dimensioni. I particolari di queste argomentazioni vengono solitamente trattati in corsi di topologia differenziale e sarebbe auspicabile darne qualche anticipazione agli studenti.

Nel 2010 la generalizzazione dovrebbe essere una reazione naturale per la specializzazione in matematica. Dovremmo restare sorpresi se qualcosa non si prestasse a essere generalizzato.

E la continuità di Lipschitz? Si dice che una funzione reale di variabile reale è continua secondo Lipschitz se esiste un k tale che $| f(x) - f(y)| < k | x - y |$, per ogni x e y appartenente al dominio. L'interpretazione geometrica è che il grafico della funzione è contenuto in qualsiasi angolo solido, intorno di un punto del dominio, di ampiezza dipendente da k. Allora $| f(x) - f(x_0)| < k | x - x_0 |$ e pertanto otteniamo automaticamente la continuità scegliendo $\delta = (1/k) \varepsilon$. Ancora una volta, ciò è vero in tutte le dimensioni. Se il dominio è bidimensionale, allora, invece di un doppio cuneo, otteniamo un doppio cono come frontiera di riferimento. Allo stesso modo, la continuità di Hoelder con un coefficiente α significa che il grafico è contenuto, non in un doppio cono, bensì in un doppio "α cono", di forma $| f(x) - f(x_0)| < k | x - x_0|^{\alpha}$ Di conseguenza una funzione può soddisfare la continuità di Hoelder senza soddisfare la continuità di Lipschitz. Gli stessi esempi che sono validi per funzioni a variabile singola, varranno anche in generale. C'è una sottile differenza fra il dare definizioni di carattere generale per poi applicarle alle situazioni più semplici e il partire dai casi più semplici per poi passare a definizioni formulate in modo che si possano generalizzare automaticamente.

Il superamento delle barriere fra i corsi

I precedenti esempi vogliono evidenziare che in futuro ci saranno differenze sempre meno marcate fra le varie discipline, e i materiali di studio renderanno molto più agevole per gli studenti il passaggio da un livello ad un altro. I manuali specialistici su singole materie saranno sostituiti da "supertesti" che copriranno una vasta gamma di materiali, molto probabilmente scritti non da un solo autore o da un paio, ma piuttosto da équipe di autori con il contributo di esperti di discipline complementari. Oltre a specialisti per quanto riguarda i contenuti, ci saranno pedagogisti e programmatori di ipertesti, di interfacce per Internet e di strumenti di verifica e di valutazione. Con queste iniziative si cercherà di fornire materiali relativamente a un ampio spettro di corsi, corredati da una registrazione sistematica del percorso. In qualunque punto acceda a questo ipertesto, il lettore può chiedere quali prerequisiti siano necessari per affrontare un particolare argomento e gli verranno mostrati tutti i percorsi adeguati su una specie di tabella sinottica dei contenuti. In molti testi attuali, al termine della prefazione, si presentano diagrammi di flusso che vengono sistematicamente ignorati. In un ipertesto, invece, simili grafici interattivi devono essere lo strumento privilegiato di navigazione, sia per insegnanti che per studenti.

Il modo in cui in passato ci si è avvicinati di più a un supertesto è stato, per esempio, attraverso una serie di libri a livello di primi anni di corso di Earl Swokowski. A un livello un po' più alto si può trovare, per esempio, una notevole raccolta di testi di Serge Lang. In futuro sembra meno probabile che una sola persona possa pubblicare una grande raccolta di questo genere. Da un lato, è necessario un aggiornamento continuo, tanto che edizioni e ristampe diverranno qualcosa di obsoleto. Potrebbe darsi che ci si aspetti e che si esiga dagli studenti che utilizzino gli stessi testi in continua evoluzione che vengono usati dai loro insegnanti, proprio nello stesso modo in cui gli studenti attualmente usano i primi due terzi di un grande libro di calcolo infinitesimale come corso introduttivo, per poi comprare una nuova edizione dell'ultimo terzo l'anno seguente. Qualsiasi progetto ipertestuale dovrà avere un'équipe che curi l'integrità del testo. Può darsi che queste persone apportino revisioni significative soltanto a scadenze prefissate. Ci potrebbe facilmente stare anche un file di errata corrige costantemente aggiornato, con segnalazioni disposte nei vari punti del testo.

Come abbiamo detto sopra, uno dei vantaggi di questo tipo di approccio sarebbe una trattazione coerente del calcolo infinitesimale a una o più variabili. Uno sviluppo naturale potrebbe essere un corso su funzioni a variabile complessa, che si ritiene possa essere seguito da qualsiasi studente di matematica o di discipline scientifiche, piuttosto della situazione abbastanza frammentata che troviamo oggi, dove l'analisi complessa è ben diversa dalla sua reale controparte.

Un altro corso che abbastanza logicamente potrebbe seguire l'analisi a più variabili e l'algebra lineare è quello di geometria differenziale, un corso che può potenziare la comprensione di curve e superfici e condurre a un notevole risultato come il teorema di Gauss-Bonnet. Sarà molto interessante scoprire che gli studenti condividono la stessa preparazione di fondo quando seguono questo corso, e che ci può essere un luogo naturale verso cui indirizzare gli studenti che non posseggono un background specifico.

Al momento, i testi avanzati devono portare, per i problemi le indicazioni "per quelli che hanno familiarità con l'analisi complessa" o "per coloro che conoscono le equazioni differenziali". Questi collegamenti fra i vari corsi saranno abbastanza naturali e facili da operare in un ambiente ipertestuale.

Valutazione dei profili

Nell'era dell'ipertesto, le aspettative saranno un po' diverse da quelle attuali. Nel 2010 gli studenti che vorranno seguire un corso universitario saranno in grado di certificare i loro livelli di competenza secondo modalità che renderanno superfluo qualsiasi esame preliminare. Una versione dei Graduate Record Exams sarà predisposta per tutti gli argomenti universitari di base, con *subscores* che indicheranno esattamente che cosa ogni studente sa o non sa fare a un determinato livello di competenza. Gli studenti giungeranno con un profilo completo indicante ciò che sanno fare velocemente e ciò che richiede invece maggiori tempi di riflessione. La semplice trascrizione di un voto sarà considerata un residuo risibile di un passato illuminato. Un profilo globale sostituirà una *grade point average*. È possibile che questo profilo globale possa dipendere da una scelta, simile a quella per cui oggi gli studenti possono designare alcuni dei loro corsi come pass/fail or satisfactory/no credit. Chiunque può fare affidamento su referenze vecchio stile, che si possono ottenere da qualsiasi archivio universale. La selezione in ingresso dei diplomati sarà in gran parte svolta filtrando i processi a partire dal data base che sostituisce i Graduate Record Examinations. Verranno standardizzati e test su competenze, con documentazioni comprensive di *sound clips* (registrazioni), e prove scritte svolte con limiti di tempo diversi.

Gli assistenti verranno scelti fra gli studenti che hanno già svolto il ruoloo di assistenti universitari, svolgendo sezioni di ripetizione virtuale. Ci saranno simulazioni di discussioni alternate con esempi e compiti, senza che gli studenti debbano ammassarsi in un'unica aula più di quanto non fanno per una semplice ora di laboratorio. La naturale predisposizione per uno stile di insegnamento o apprendimento sarà garantita nel momento in cui gli studenti avranno non solo l'opportunità di sentire i contributi dei loro compagni dati in una determinata lezione, ma potranno anche leggere il materiale che nasce all'interno di una discussione on-line strutturata. All'interno di un corso, ognuno avrà la possibilità di leggere quello che gli altri hanno inviato e, in una certa misura, ciò verrà anche richiesto in modo da essere partecipanti a pieno titolo. Saranno possibili anche livelli di preparazione diversi. Per le classi abbastanza numerose, ci potranno essere sottogruppi di apprendimento (l'equivalente delle sezioni di ripetizione ormai obsolete). Queste attività, ovviamente, potranno essere monitorate dal titolare del corso per garantire la coerenza e il controllo di qualità, più o meno come quando si fa la resa dei conti nei corsi a più sezioni al tempo dell'esame finale comune. Gli esami si terranno "on a universal honor system" con controlli incorporati per identificare chi copia. Gli studenti decideranno quando fare un esame e si iscriveranno, ricevendo una postazione sicura e isolata da altri studenti e da altre forme di informazione. Verranno controllati i materiali a cui potranno accedere.

La matematica e le concentrazioni informatiche nel 2010

Al momento, operiamo ancora distinzioni fra lauree in matematica e lauree in informatica, ma può darsi che nel 2010 la distinzione possa già essere obsoleta, tanto antidiluviana quanto una laurea in matematica che in passato non richiedeva neppure un semestre di calcolo infinitesimale. I nostri migliori laureati alla Brown in questi ultimi anni hanno avuto molta esperienza di computer. La maggior parte di loro ha seguito diversi corsi nel dipartimento di informatica e coloro che non l'avevano fatto non hanno incontrato difficoltà nell'apprendere un certo numero di linguaggi informatici e programmi complessi. Alcuni di questi studenti si laureano sia in matematica che in informatica. I migliori fra loro termineranno con una laurea combinata di *Bachelor of Science* in matematica e in informatica. Altri studenti seguiranno una serie di corsi di informatica, ma senza laurearsi in questa disciplina. Ovviamente, una laurea in informatica presuppone una conoscenza approfondita in molte aree diverse in questa disciplina, mentre uno studente di matematica potrebbe essere interessato soltanto ad alcuni settori, come la robotica o la grafica al computer e passare al livello di laurea in quell'area, evitando però corsi sull'hardware o sui sistemi operativi. Potrebbe essere auspicabile mantenere queste opzioni, ma, da un punto di vista pratico, lo studente di matematica del 2010 che non avrà una buona conoscenza di grafica al computer sarà abbastanza raro.

Alcuni dei miei migliori studenti, quelli che hanno seguito più di un mio corso e che poi sono diventati miei assistenti e collaboratori, hanno proseguito facendo carriera in informatica, nella maggior parte dei casi in grafica al computer. Alcuni di loro hanno ottenuto il dottorato e insegnano nelle università. Usano molta matematica per il loro lavoro e incoraggiano i loro studenti a seguire molti corsi di matematica. E questo va bene per la nostra materia. D'altra parte, ho un certo numero di studenti che sono andati avanti e hanno ottenuto una laurea in matematica e fra questi alcuni hanno evitato qualsiasi corso di informatica. Ma nessuno di loro incoraggerebbe altri studenti a farlo. In ogni caso, credo che la caricatura del matematico puro che disprezza i computer faccia ormai parte del passato. Non faccio certo la previsione che noi matematici ci troveremo a insegnare informatica, sebbene alcuni fra i colleghi più giovani si troveranno a farlo senza alcuno sforzo, soprattutto nei dipartimenti più piccoli.

Mi sembra così di reagire al vero e proprio panico espresso da alcuni nostri colleghi quando si accorgono che c'è un numero sempre maggiore di lauree in informatica che in matematica e che alcuni fra i migliori studenti potenziali vengono attirati altrove. Non credo che fra dieci anni ci sarà ancora un'alternativa secca fra le due discipline.

La matematica interdisciplinare nel 2010

Lo stesso si può dire delle applicazioni e del lavoro interdisciplinare. Un numero sempre maggiore di matematici e di loro studenti saranno coinvolti in progetti con professionisti in altre aree, non soltanto le discipline tradizionali di ingegneria, fisica e statistica, ma anche chimica, biologia, geologia, economia, demografia, arte e design. Ci saranno sempre più collaborazioni che coinvolgeranno algebristi e geometri e non solo analisti puri. E ciò avverrà anche con i matematici che non sono esperti nelle aree previste della statistica, dell'analisi numerica o delle equazioni differenziali. Le applicazioni, specialmente quelle connesse con modelli matematici, vedranno la partecipazione di molti matematici provenienti da settori molto diversi.

Che sarà invece di quelli che non si curano delle applicazioni, quelli che preferiscono lavorare in un campo così astratto dove solo i migliori luminari possono cominciare a dare un assaggio dei problemi cruciali in quell'area anche a un gruppo di matematici di professione? Ci sarà sempre posto per loro, ma ci sarà meno spazio.

Durante la seconda settimana di agosto, ho partecipato alla congresso AMS sulle sfide matematiche del ventunesimo secolo. Che cosa dovranno sapere gli studenti dal 2010 per prendere parte alla ricerca su questi problemi aperti? In linea di massima, dovranno imparare molta matematica tradizionale, ma allo stesso tempo dovranno iniziare a imparare come interagire con biologi, fisici e analisti di dati. Dovranno tenersi al passo delle nuove idee non appena queste emergono e si spera che apprendano anche a trovare loro stessi nuove idee. La differenza principale sta nel livello di interazione che ci si aspetterà dai ricercatori al di fuori della matematica. Pertanto, lo studente di matematica del 2010 dovrà imparare a essere un buon comunicatore e ad apprendere i linguaggi e le tecniche di persone che non sono matematici, più di quanto non sapessero fare i suoi insegnanti.

Tempi e collocazione dell'apprendimento a distanza

Ci stiamo rapidamente avvicinando a una società in cui la gente seguirà più o meno gli stessi programmi televisivi ma in tempi diversi. La maggior parte dei programmi sono inscatolati a un certo livello e anche quelli che si prefiggono di essere spontanei possono essere registrati e visti quando meglio pare allo spettatore (fino al punto di vedere un film privato di spot pubblicitari, una potente minaccia alla costosa struttura della pubblicità televisiva). Perché gli insegnanti dovrebbero aspettarsi un trattamento diverso? Alcuni studenti potranno decidere di assistere alle lezioni dal vivo. Altri potranno accontentarsi di vederne le registrazioni, avvolgendo velocemente le parti che già conoscono e rallentando per seguire o anche ripetere parti che sono nuove. E questo è in realtà molto meglio che la semplice visione completa e senza interruzioni della registrazione di una lezione, dal momento che, stoppando e riavvolgendo, ogni studente può "porre delle domande" in qualsiasi istante. Il professore può registrare le risposte nella rubrica FAQ (Frequently asked questions – Domande più frequenti), mettendo in grado gli studenti di sentire una spiegazione, proprio come avverrebbe se fossero presenti in classe. Tutto questo si potrebbe verificare anche nel caso in cui venisse fornito semplicemente uno schema di appunti dopo la lezione e non il testo completo della registrazione. Ovviamente ciò pone l'insegnante in una posizione in qualche modo vulnerabile, che però è ampiamente ripagata dal fatto che una lezione rabberciata e confusa può essere riordinata o corretta on-line prima della lezione successiva e prima di avere fatto troppi danni. La tecnologia interattiva cambierà tutto.

Inserisco qui di seguito un breve apologo, scritto l'estate scorsa in occasione della presentazione in un NexT partecipans.

IL DONO DI GIEUS

Il professor Gieus non era soddisfatto della sua lezione di Martedì. Rientrando in ufficio, cercò di rivedere quello che era successo – nella sua lezione più o meno tradizionale aveva inserito una riflessione imprevista che lo aveva allontanato dagli appunti che si era preparato. Gli studenti più brillanti, per un attimo, avevano sollevato il capo per poi chinarlo di nuovo, dal momento che era chiaro che quello spunto si era perso nei sui tentativi maldestri di esprimerlo. Gli studenti più lenti erano invece chiaramente irritati dalla digressione. Verso la fine dei 120 minuti di lezione aveva toccato velocemente gli argomenti che si era appuntato e non aveva sviluppato, ed erano circa la metà, abbozzando l'ultimo mentre gli studenti stavano già raccogliendo libri e quaderni per andare alla lezione successiva.

"Chissà se qualcuno ci ha capito qualcosa?" si domandava, chiedendosi come avrebbe potuto recuperare la lezione il giovedì successivo. Arrivando in ufficio, scorse una giovane donna che lo aspettava e che non riconobbe, "probabilmente una matricola," pensò, invitandola ad entrare.

"Le ho portato un regalo," disse la donna, "un regalo che Le permetterà di sapere esattamente entro domani sera quello che i Suoi studenti hanno compreso della Sua lezione di oggi, se solo avranno modo di pensarci un attimo. L'unico intoppo è che Lei dovrà vivere con quella conoscenza!" "Che razza di regalo potrà essere mai?" "Benvenuto su Internet!" gli spiegò.

Entro il mercoledì sera il professor Gieus aveva ricevuto email da quasi tutti i suoi studenti. La maggior parte di loro iniziavano con un commento sulla lettura che, non senza esitazione, lui aveva assegnato il martedì quando si era accorto che mai e poi mai avrebbe sviluppato tutti gli argomenti che aveva previsto per quella lezione. Quasi tutti dicevano che avevano compreso gli esempi aggiuntivi del libro che si affiancavano a quelli che lui aveva fatto in classe, tuttavia alcuni studenti non erano sicuri dei passaggi nell'argomentazione della seconda parte della lezione, anche dopo essere ritornati alle illustrazioni e averle studiate attentamente. Non si sarebbe potuto fare una breve discussione giovedì?

Arrivarono anche nuovi messaggi. "Aprendo i file mercoledì a mezzanotte e vedendo che cosa avevano scritto altri studenti," scriveva uno di loro, "ho visto come si potevano mettere insieme un paio di commenti e uscirsene con un nuovo esempio che mi aiutasse a vedere il problema che avevo cercato di descrivere prima. Non c'è qualcun altro che ha delle idee a proposito?" Il professor Gieus era sbalordito – la studentessa che aveva inviato quel messaggio secondo lui era di serie B. Non è che non lavorasse a casa o facesse male i test, ma niente di speciale. Mai aveva alzato la mano in classe né mai aveva risposto a nessuna delle sue domande pseudo-retoriche. E una volta che lui aveva tentato di svolgere un piccolo lavoro di gruppo, lei se ne era stata zitta in un angolo mentre gli altri facevano una domanda dietro l'altra. E invece, qui, leggendo le difficoltà incontrate dagli altri studenti, lei aveva compreso esattamente ciò che le era servito per chiarirsi le idee. La studentessa era stata capace di leggere la realtà della classe molto meglio di quanto non avesse saputo fare lui.

Un paio di studenti di serie A erano intervenuti portando il loro contributo alla discussione. Uno aveva posto una domanda che il professor Gieus non aveva mai sentito prima. Il professore si trovò a rispondergli via Internet, decidendo poi di comunicare la risposta all'intera classe. Passò poi a riassumere la lezione che aveva cercato di fare e a sviluppare quei punti a cui aveva fatto cenno frettolosamente. Non vedeva ora che arrivasse la lezione di giovedì per riprendere esattamente da dove aveva smesso due giorni prima, sapendo con precisione a che punto si trovavano gli studenti e con gli studenti informati su ciò che sapevano i compagni.

Guardò l'orologio e vide che erano le due di notte. Aveva passato al computer più di tre ore.

"Che forza ci danno quelli che hanno il dono di farci vedere come ci vedono gli altri[1]." (da "To a Louise" di Robert Burns). Quando mio padre citava questo verso di Robert Burns, ho sempre pensato che stesse dicendo "the gift of Gieus", il dono di Gieus. Da qui il nome del protagonista di questo apologo, una storia simile a quella di Re Mida, che desidera qualcosa e poi ne deve subire le conseguenze. Internet indubbiamente ci fornisce nuove forme di feedback immediato e di risposta mirata. La rete offre davvero qualcosa di nuovo sia all'insegnamento che all'apprendimento.

Il riassunto della lezione

Dopo ogni lezione, o per lo meno dopo ogni settimana di lezione, si può proporre un riassunto. "Che cosa abbiamo fatto in classe?" E in aggiunta a questa domanda se ne potrebbe proporre un'altra altrettanto importante: "Che cosa avremmo potuto fare?" Tutto questo potrebbe richiedere molto tempo, dovendo includere sia materiale opzionale che anticipazioni su ciò che si affronterà successivamente nel corso. Se siamo capaci di presentare il sillabo in una disposizione veramente multi-dimensionale, allora come parte del riassunto possiamo spuntare i siti che abbiamo visitato, anche se qualche volta potremo decidere di ritornarci.

Si noti che questo tipo di riassunto è ben diverso da "inviare gli appunti delle lezioni", una procedura che sembrerebbe indicare che il professore già sapeva quali sarebbero stati i punti interessanti da sviluppare durante la lezioni e ne conosceva anche l'ordine. Se l'insegnante è disposto a prendere in considerazione qualsiasi domanda, ciò influirà inevitabilmente sulla sequenza degli argomenti sviluppati e sulla quantità di tempo dedicata ad ognuno. Ovviamente è auspicabile che l'insegnante abbia un'idea chiara degli argomenti da affrontare nella lezione successiva oppure entro due-tre lezioni. Spesso l'ordine di questi argomenti può essere cambiato, a seconda degli interessi del gruppo classe. La spontaneità dipende in grande misura dalla capacità ti rispondere alle domande o alle reazioni degli studenti. Un buon insegnante spontaneo non è necessariamente meno preparato di un collega che segue puntualmente gli appunti che ha preparato per la lezione senza lasciarsi minimamente influenzare dalle reazioni degli studenti. È invece indubbiamente più difficile essere sempre pronto ad affrontare una discussione sui più svariati argomenti. I particolari possono essere illustrati negli *afternotes* (appunti dopo la lezione).

Afternotes (appunti *dopo* la lezione)

Gli appunti stilati *dopo* la lezione non richiedono uno sforzo molto maggiore di quelli scritti anticipatamente e distribuiti su carta prima o subito dopo la lezione? Sì, ma la differenza è enorme. Questo stile di insegnamento (probabilmente) non fa per tutti gli insegnanti, ma, per quelli che lo scelgono, è immensamente più gratificante. Si potrebbe forse insegnare ai nostri studenti a essere spontanei in questo modo, suggerendo che loro preparino gli argomenti, o anche una serie di argomenti correlati, piuttosto che una lezione particolare. Se si sceglie di dare gli appunti *dopo* la lezione, lo stress di preparare la lezione viene in qualche modo rimandato. Non sarà più necessario soffocare le domande interessanti poste dagli studenti per essere in grado di "finire il programma". Io avevo l'abitudine di compensare le mie lezioni inadeguate corredandole di note scritte. Non sono sicuro che qualcuno le abbia mai lette, ma mi sembra invece che gli appunti *dopo* la lezione abbiano qualche chance in più di essere letti.

Gli appunti *dopo* la lezione possono essere particolarmente utili a quei docenti che preparano tutto in anticipo, ma si trovano a dover procedere in modo troppo affrettato per coprire tutti gli argomenti entro la fine dell'ora. La possibilità di mettere i lucidi degli appunti on-line offre una valida alternativa al farli scorrere velocemente nel finale della lezione, prima che suoni la campanella.

Articolazione e collocazione

L'ipertestualità avrà effetti anche sulle scuole medie superiori, in particolare su quelle materie che comportano il calcolo infinitesimale. I futuri insegnanti che hanno usato materiali di questo tipo nei corsi universitari saranno preparati a trasferire quella pedagogia nelle classi dove si troveranno ad insegnare. Per ogni corso ci saranno note integrative per insegnanti, che costituiranno la base della formazione in servizio. In qualche misura, questo potrà valere anche per corsi rivolti alle scuole elementari.

[1] "Oh wad some power the giftie gie us to see oursels as ithers see us" è una citazione da "To Louise", una poesia del poeta scozzese Robert Burns (1759-1796) (n.d.t.)

Fra dieci anni l'articolazione sarà alquanto automatizzata. Gli studenti che si iscrivono all'università saranno in grado di dimostrare le loro competenze e la loro esperienza nello stesso modo in cui gli studenti presentano dossier per intraprendere gli studi universitari. Non ci sarà molta differenza fra gli autodidatti, coloro che si sono formati a distanza e coloro che hanno seguito un corso di scuola media superiore o un corso biennale . Gli esami standardizzati, con scale multiple che indicheranno esattamente quanto il singolo studente ha appreso rispetto a come affrontare determinati problemi, permetteranno di classificare gli studenti con molta maggiore certezza e precisione di prima.

Ovviamente gli Advanced Placement Tests dovranno essere ricalibrati. È già evidente sin da ora che è troppo facile prendere 5 all'esame BC, come ammettono alcuni studenti che si trovano meno preparati dei loro compagni. I punteggi SAT delle fasce più alte non sono affidabili ormai da alcuni anni. Una taratura migliore dei punteggi della fasci alta permetterà alle università di collocare meglio gli studenti e di orientarli verso i livelli successivi in modo più coerente con i requisiti di cui sono in possesso.

Una riflessione finale sull'insegnamento nel 2010

Che ruolo potrà avere l'insegnamento nel 2010? Anche se gli ipertesti renderanno sempre più individualizzato l'apprendimento, ci saranno ancora occasioni per l'interazione di gruppo. Proprio perché noi apprendiamo con ritmi diversi e a diversi livelli di comprensione, varrà ancora la pena di apprendere insieme. Ci saranno ancora le lezioni. Ci saranno ancora insegnanti che si affideranno esclusivamente a testi su materiale cartaceo e altri che si sentiranno liberi di allontanarsene. Gli studenti avranno molte più opportunità per passare da un livello di apprendimento a un altro e di dimostrare i risultati raggiunti. Ne consegue che la valutazione si fonderà sempre di più sulle competenze e sarà meno competitiva, porrà l'accento su un profilo basato su certificazioni piuttosto che su votazioni espresse da una lettera dell'alfabeto. Insegnamento e apprendimento sono attività complesse, che devono essere trattate come tali. Gli insegnanti avranno ancora il loro bel da fare nel 2010.

Conclusione

Chissà se qualcuna di queste previsioni si avvererà nei prossimi dieci anni! Ci saranno altre tendenze fra i pedagogisti o richieste dall'esterno che porteranno a muoversi in direzioni totalmente diverse? Una cosa è certa: non dovremo aspettare molto per scoprirlo.

La laurea ad alto contenuto matematico

Herb Clemens
Università dello Utah

Introduzione

Scrivo questo articolo, sul curriculum universitario, dal punto di vista di un professore di vecchia data che insegna matematica a livello universitario, presso una grande e piuttosto isolata università statale. La nostra università accoglie diplomati di scuola superiore abbastanza volenterosi, non molto ben preparati, se non addirittura rozzi dal punto di vista matematico, e la nostra popolazione studentesca non è certamente un caso particolare. Perciò, fin dall'inizio, invito il lettore a non dare nulla per scontato, magari sulla base di altre esperienze.

In secondo luogo, ho intenzione di trattare solo del curriculum che riguarda l'insegnamento della geometria e, in misura minore dell'algebra, e del curriculum delle lauree tradizionali in matematica e di quelle ad indirizzo didattico, frequentate cioè studenti che si preparano a diventare insegnanti di scuola superiore.
Molto di ciò che vi è da dire deriva da quelli che considero essere due dati di fatto nella vita. Prima di tutto perfino molti studenti "ben preparati" in matematica, che giungono presso la mia università, ottengono risultati inferiori alle aspettative quando si tratta di intuizione spaziale, cosicché quasi tutta la matematica diventa più difficile di quanto dovrebbe essere. Così, proprio all'inizio del curriculum universitario, la geometria è costretta a includere degli strumenti per un corso di recupero di quel genere di abilità che alcuni sviluppano giocando con i cubetti, Lincon Logs, cucendo, costruendo modellini, ecc. In senso molto ampio, il ruolo nella matematica dell'intuizione spaziale è di preordinare e organizzare idee matematiche, mezze verità, prime supposizioni ed esperienze in una specie di tabella mentale a più dimensioni o in qualche tipo di vivaio mentale. Più precisamente, questa abilità consiste nella capacità di intuire le proprietà di oggetti tridimensionali a partire dalle loro proiezioni, da disegni o schizzi, da un insieme di caratteristiche specifiche o da qualche altro strumento numerico, come un'equazione. Per esempio la frazione 5/7 ha un'importante componente spaziale che, nel corso degli anni, filtra nel nostro inconscio facendoci riconoscere il simbolo in qualsiasi forma si presenti. Se non si ha esperienza di questo "filtrare" si è in difficoltà con $x/(x+2)$ o con
$\lim_{x\to\infty} x/\left(x+2\right)$ o con la regola de l'Hopital, ecc.

In secondo luogo, almeno presso la mia istituzione, non vi è alcun programma intellettuale comune, fra le lauree tradizionali in matematica e quelle ad indirizzo didattico, successivamente al calcolo infinitesimale ad una variabile. Sebbene vi siano delle eccezioni in entrambi i campi, molti studenti dell'indirizzo didattico raggiungono un livello meno elevato di conoscenze matematiche rispetto ad altri corsi tradizionali. Fra gli ultimi 30 laureati in

matematica ad indirizzo didattico presso la mia università, 3 hanno seguito i corsi di matematica avanzata richiesti per una laurea tradizionale, mentre i restanti 27 hanno avuto una media inferiore a 0.5 corsi avanzati per studente (ai laureati tradizionali è richiesto di completare 6 corsi semestrali avanzati).
In nessun campo questa disparità è maggiormente evidente che nell'analisi e nell'algebra astratta. Se da un lato è vero che la preparazione in queste aree è necessario che abbia una differente enfasi per i due gruppi, in realtà questi due gruppi vivono in mondi intellettuali distinti, con pochi collegamenti fra loro. In pratica ciò si traduce nel fatto di trovare solo futuri insegnanti in corsi di matematica della divisione superiore come Fondamenti di Geometria e Fondamenti di Algebra, e quasi nessun insegnante in corsi superiori del tipo Introduzione alla Teoria dei Numeri e Curve e Superfici nello Spazio Euclideo. E, almeno presso la mia istituzione, il requisito comune di Fondamenti di Analisi (che era soprannominato da alcuni "baby Rudin") è considerato dalla maggior parte dei futuri insegnanti di matematica di scuola secondaria come il "gulag" della loro carriera universitaria.
Perciò i miei suggerimenti in questo breve articolo saranno guidati dalle precedenti considerazioni che per me appartengono alla categoria del "triste ma vero".

La geometria nei primi due anni del corso di laurea

La conoscenza dei prerequisiti nella laurea in matematica è molto più semplice da accertare quando si tratta di abilità di calcolo piuttosto che di abilità spaziali. Gli studenti del primo anno con carenze in algebra sono selezionati nei corsi di "Algebra universitaria" prima che procedano oltre, ma non esiste una vera corrispondenza in un corso di "Geometria universitaria" per coloro che hanno carenze in geometria. La trigonometria è tuttora utilizzata come esame catenaccio di geometria presso alcune istituzioni. Ma alternative generalmente migliori, come il vecchio corso di Geometria Analitica, sembra siano completamente sparite o che i loro contenuti siano stati relegati in una parte terminale del corso di calcolo infinitesimale del primo anno - così avanti nel tempo, in realtà, che l'intuizione e le abilità spaziali evocate in quella sede sono "troppo poche e arrivano troppo tardi" per influenzare la capacità di comprendere appieno il calcolo infinitesimale stesso. Un qualche strumento di verifica dei prerequisiti spaziali sarebbe utile, per il fatto che aumenterebbe in modo significativo gli strumenti disponibili per l'insegnamento e l'apprendimento dell'analisi infinitesimale ad una variabile, l'efficienza con cui può essere insegnato, e la profondità del suo apprendimento.
Mi sia consentito fare un esempio di ciò che intendo dire. Il concetto di funzione (continua) è fondamentale per il calcolo infinitesimale ma non è il modo naturale in cui sorgono le relazioni quantitative. Esse ci giungono come *relazioni*, fra grandezze o posizioni, nelle quali non esiste solitamente nessuna variabile preferibile, grandezza causale o "indipendente". Molti, se non la maggioranza, comprendono questo tipo di relazione dapprima in un contesto spaziale nel quale nessuna delle variabili è privilegiata. Per esempio la traiettoria di un pallone o la forma di un arcobaleno sono fissati e concettualizzati nella nostra esperienza senza privilegiare una variabile (spostamento orizzontale, tempo, ecc.). La scelta della "variabile indipendente", o "coordinata", è una costruzione mentale artificiale, pur essendo un importante strumento per migliorare la nostra comprensione di ciò che in fondo è essenzialmente una relazione "sintetica" o "libera da coordinate" fra grandezze o posizioni. Questa realtà si riflette, per esempio, nel fatto che la maggior parte dei principali sviluppi del calcolo differenziale sono in realtà "derivazioni implicite", che io ritengo siano difficili da comprendere o da insegnare senza la predetta fondamentale consapevolezza che, ribadisco, è fondamentalmente di carattere geometrico.
Qualcuno potrebbe sostenere che la verifica dei requisiti minimi spaziali a livello universitario dovrebbe avere a che fare più con il curriculum di matematica della scuola secondaria che dell'università. In un "mondo matematico ideale" potrei essere d'accordo. Il mio "sogno impossibile" è di poter rallentare la spericolata "corsa al calcolo infinitesimale" così diffusa fra gli studenti dotati e/o quelli più volenterosi nel curriculum matematico di scuola secondaria. Si potrebbe in effetti incoraggiare l'impiego di più tempo e un maggiore approfondimento dedicato alla geometria presso la scuola superiore come alternativa al calcolo AP che spesso deve comunque essere ristudiato (o no) più in profondità (oppure no) a livello universitario. A livello di scuola secondaria, la tradizionale geometria Euclidea assiomatica è stata spesso sostituita da una geometria di tipo più "informale" o intuitivo, o dall'integrazione dei concetti geometrici in altri corsi di matematica. Questo può essere in parte spiegato dagli eccessi del passato - la religione delle "dimostrazioni delle due colonne" relativamente a fatti ovvii dal punto di vista geometrico del tipo "tutti gli angoli retti sono congruenti". Ma sta di fatto che la geometria ha bisogno dei suoi rituali formali come pure di favorire l'intuizione e la capacità di visualizzazione mentale. La materia prende vita solo quando le due cose procedono di pari passo. Per alcuni studenti questo processo richiede per svilupparsi molto più tempo di quanto ne sia normalmente concesso nella maggior parte delle scuole medie e secondarie.

Come l'algebra e l'analisi, anche la geometria ha bisogno dei suoi semplici, talvolta meccanici, rituali che precedono la vera comprensione. Sembra che siamo pronti a buttare via tutto ciò a causa degli eccessi e delle distorsioni del passato senza avere però qualche valida alternativa a portata di mano. Non penseremmo a eliminare l'esercizio sui sistemi di equazioni lineari, la fattorizzazione e la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado nell'algebra. In realtà io penso che il problema in algebra sia quello opposto - noi tralasciamo tutta la ricchezza degli aspetti numerici dai quali derivano questi rituali algebrici.
A livello secondario o universitario, non è così evidente quali siano gli strumenti di verifica e di recupero dei prerequisiti spaziali. Una possibilità potrebbe essere il ritorno della Geometria Analitica come partner spirituale "spaziale" dell'Algebra universitaria. Ma potrebbero esserci molte altre soluzioni, specialmente in questo tempo in cui la tecnologia offre così ampie possibilità. Si potrebbe persino pensare ad un corso di progettazione grafica con l'uso di un software based graphic design, non molto diverso da quello che potrebbe essere proposto in un Dipartimento di Arte, come strumento per recuperare l'educazione spaziale (geometrica)? Tale corso potrebbe essere l'inizio di un percorso di geometria computazionale negli ultimi anni di università.

La geometria negli ultimi anni del corso di laurea tradizionale in matematica

Allo stesso modo, presso la mia istituzione, la geometria ha spesso una collocazione di secondo piano rispetto all'analisi, la matematica applicata, la teoria della probabilità e la statistica, e persino rispetto all'algebra astratta. La geometria formale appare nel curriculum solo come corso di un semestre nella Topologia introduttiva e come corso di un semestre solitamente intitolato "Curve e Superfici nello spazio Euclideo tridimensionale." (Potrei aggiungere che, quando sono arrivato 25 anni fa, nessun corso, né di geometria differenziale elementare né di teoria elementare dei numeri, era stato proposto nei 10 anni precedenti - sono convinto che ci sia un certo numero di realtà in cui la medesima situazione si verifica anche oggi.) Questo corso, che include la nozione di curvatura e torsione di luoghi unidimensionali e le tre "forme fondamentali", il parallelismo e la geodetica sulle superfici, è, quando viene insegnato bene, un collegamento fondamentale fra la geometria Euclidea e la moderna geometria differenziale, la fisica, le equazioni differenziali e lo studio di funzioni . Ed è anche ben fornito di classici gioielli computazionali, come le equazioni implicite della geodetica su un toro.
Perciò vi è ampio spazio per poter suggerire una maggiore attenzione per la geometria e (in misura minore) per la topologia nella parte finale del curriculum e piena giustificazione di ciò sulla base degli sviluppi attuali della ricerca e delle applicazioni nei più vari campi(analisi, matematica applicata, probabilità e statistica, e persino algebra astratta) che sono i cosiddetti antagonisti della geometria in termini di tempo e attenzione. Titoli di testi recenti, quali *The Geometry of Physics - An Introduction* (La geometria della fisica - Un'introduzione) di Fraenkel e, a un livello considerevolmente più elementare, *Abstract Algebra, a Geometric Approach* (Algebra Astratta, un approccio geometrico) di Shifrin, suggeriscono alcune di queste tendenze.
Anche in questo caso, la mia tendenza sarebbe di privilegiare l'approfondimento rispetto all'abbondanza dei contenuti, i collegamenti con altri campi rispetto ad uno stretto sviluppo all'interno della disciplina. Come può un curriculum conciliare questi obiettivi apparentemente contraddittori? Io credo personalmente che i tre corsi

Curve e Superfici nello spazio Euclideo tridimensionale,
Analisi Complessa ad una Variabile,
Teoria Elementare dei Numeri,

qualora siano pensati e presentati in modo appropriato, siano le tre materie più belle e centrali nell'intero curriculum di matematica, sia per la laurea che per la specializzazione. Perciò io porrei alla base di una buona formazione di laurea in *geometria* i primi due di questi tre corsi. La successiva aggiunta sarebbe una buona introduzione al fondamentale concetto di gruppo, inteso non come uno dei molti strumenti di topologia algebrica, ma come il più profondo ma comunque accessibile strumento di collegamento fra geometria, analisi, algebra astratta e lineare, calcolo combinatorio ed equazioni differenziali. Un'esigenza complementare di attualità è un corso di metodi di calcolo computazionale.
Ancora sulla questione del "meglio" o "di più", mi sia concessa una domanda: Quanti laureati in matematica, al completamento del loro corso di studi, sono in grado di dimostrare il Teorema di Pitagora (o anche solo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado)? È mia esperienza personale che laureati ben preparati sono in grado di fare calcoli (come *Mathematica* oppure *Maple*) ma pochi valorosi sono in grado di spiegare chiaramente ciò che stanno calcolando o quale sia il senso dei calcoli.

Le lauree in matematica rispetto a quelle ad indirizzo didattico

Se la domanda "Quanti laureati in matematica, al completamento del loro corso di studi, sono in grado di dimostrare il Teorema di Pitagora (o anche solo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado)?" ha una risposta positiva per un particolare gruppo di laureati, questo è (e dovrebbe essere) il gruppo di laureati in matematica ad indirizzo didattico. Questo è uno dei cambiamenti positivi che l'evoluzione della preparazione in matematica, nelle lauree ad indirizzo didattico, ha prodotto presso molte istituzioni. Mi sembra però che, nella pratica, questa profonda comprensione sia prossima all'apogeo della traiettoria intellettuale percorsa dalla maggior parte dei laureati durante la loro esperienza universitaria in matematica. Una più raffinata comprensione del ruolo della misura o della metrica è completamente assente. Per esempio, il ruolo dell'analisi complessa nella soluzione dell'Equazione del Calore con semplici condizioni al contorno non è nemmeno sullo schermo del loro radar, dato che molti di loro non vanno mai oltre il livello della più rudimentale familiarità con i numeri complessi, per non parlare di analisi complessa. Queste condizioni di fondo lasciano ai futuri insegnanti una comprensione della geometria terribilmente impoverita. Troppo spesso il prodotto finale è un insegnante dotato di scarse risorse matematiche e pertanto alla mercede di un certo libro di testo o curriculum stabilito al livello distrettuale.
Questo problema non è limitato alla geometria ed è di difficile soluzione. Sono a conoscenza di un'unica Università che sostenga che il livello raggiunto in matematica dai laureati che andranno ad insegnare nelle scuole secondarie sia equivalente a quello delle altre lauree in matematica. E, devo proprio dirlo, dovrei vederlo per crederci. Per i dipartimenti di matematica, la domanda fondamentale che sorge da questa differenziazione è se alzare o no la soglia delle competenze matematiche richieste ai laureati ad indirizzo didattico, correndo il rischio di allontanare la clientela. Un'altra domanda è cosa significhi alzare il livello "più vicino" a quello delle lauree tradizionali in matematica. Se è sicuramente vero che i laureati in matematica di indirizzo tradizionale non sono in grado di dimostrare il Teorema di Pitagora, allora forse neppure la loro preparazione è così buona.

Possono questi due gruppi interagire con reciproco beneficio?

Uno degli indirizzi che sembra avere qualche speranza di successo a livello di Divisione Superiore consiste nel tenere *REUs* , *summer internships* e seminari universitari di ricerca, conferenze e tesi come parte essenziale del curriculum universitario. Queste attività mettono in rilievo il ruolo della *comunicazione* attiva della matematica sia per il suo insegnamento che per la comprensione. Il tutoraggio fra pari è un altro progetto di questo tipo. C'è forse un modo di formalizzare ciò? Le abilità comunicative in matematica sono oggi maggiormente valutate, non solo per i futuri insegnanti ma in senso più ampio anche nel mondo accademico ed industriale. Ma si possono portare validi argomenti, anche se ancora in parte sottovalutati, circa l'importanza della comunicazione intesa come strumento di apprendimento. La vecchia massima "Non l'avevo mai capito finché non l'ho insegnato" è più che un adagio o un caso sfortunato di preparazione inadeguata. L'atto di comunicare, e l'organizzazione mentale, l'ascolto critico, il conseguente aumento di attenzione, perfino la naturale paura che si produce, portano la comprensione ad un nuovo livello.
Un altra indicazione promettente è quella di innalzare le aspettative, a condizione che vengano forniti i mezzi necessari all'impegnativo compito di soddisfarle e che una persona influente sia sinceramente interessata al prodotto di questa attività. Uno dei punti più interessanti del famoso film *Stand and Deliver* (in italiano: *La Forza della volontà* N.d.T.) era il graduale passaggio del ruolo di "figura di riferimento" dall'insegnante ai compagni di classe. Non potremmo forse prevedere dei meccanismi per far nascere un trasferimento di questo genere nelle nostre classi? Sfortunatamente questi meccanismi richiedono sempre un grande impegno di lavoro e sono duri da sostenere con il passar del tempo. In una grande scuola come la mia, frequentata da studenti pendolari, appare piuttosto difficile mettere in atto un'esperienza di questo tipo, ed è probabilmente impossibile realizzarla su vasta scala. Ma non potrebbe essere introdotto almeno una minimo requisito comunicativo, nel quale l'obiettivo della comunicazione, e coloro che valutano la sua efficacia, siano altri studenti oppure colleghi?
Un tale requisito riporterebbe su basi relativamente simili, verso la fine della loro carriera universitaria, i laureati in matematica tradizionale e quelli ad indirizzo didattico. Presumibilmente i laureati ad indirizzo didattico dovrebbero essere, a quel punto, dei migliori comunicatori e avere un più profondo e flessibile possesso di un maggior numero di conoscenze matematiche elementari, dei teoremi e delle dimostrazioni che le sostengono. I

tradizionali laureati in matematica dovrebbero essere nel pieno possesso delle parti più avanzate della disciplina e potrebbero essere stimolati dalla sfida di comunicare alcune delle loro conoscenze a degli insegnanti.

La geometria negli ultimi anni del corso di laurea ad indirizzo didattico

Secondo me, il corso fondamentale di geometria, per i futuri insegnanti di scuola secondaria, è un serio corso di geometria bidimensionale, che si concentri su non banali risultanze della Geometria Euclidea, ma anche su tre o quattro fondamentali risultati della Geometria Sferica ed Iperbolica, in particolare, l'"excess angle theorem". Questo corso dovrebbe includere anche un'importante sezione dedicata ai gruppi di simmetria e, più in generale, il gruppo dei moti rigidi in una, due e tre dimensioni in uno spazio Euclideo. Per finire, la nozione di "induzione sulla dimensione" dovrebbe essere esplorata per mezzo di esercizi consistenti nel contare induttivamente le facce e i vertici in n-simplessi e n-cubi. In aggiunta a questo, e ai prescritti corsi di Fondamenti di Algebra e di Analisi, sarebbe l'ideale se un futuro insegnante di matematica di scuola secondaria potesse essere dotato di una completa comprensione dei "tre grandi" corsi sopracitati:

Curve e Superfici nello spazio Euclideo tridimensionale,
Teoria Elementare dei Numeri,
Analisi Complessa ad una Variabile

ma, almeno presso la nostra istituzione, questo è un po' di più di quello che il mercato possa reggere per quanto riguarda i requisiti prima del lavoro. Tuttavia un aspetto promettente dell'attuale dialogo nazionale sull'educazione degli insegnanti è la crescente consapevolezza che lo studio e lo sviluppo della matematica, lungo tutta la carriera, siano componenti necessarie del successo nell'insegnamento. Verrà finalmente il giorno in cui il genere di profonda comprensione di cui ho parlato sarà gradualmente raggiunto per mezzo del tempo concesso durante lo studio in servizio, gli anni sabbatici, ecc., e attraverso scambi fra pari ("peer") in occasione di presentazioni e seminari.

Anche in questo caso entrano in gioco i requisiti e le esperienze comunicative che ho citato riguardo ai laureati in matematica. Tali attività sono un paradigma dell'educazione permanente. Non solo includerebbero un nuovo strumento per avvicinare gli insegnanti ai laureati tradizionali in matematica, ma servirebbero anche come modello per future esperienze matematiche sul campo di lavoro; modelli con una maggiore profondità matematica rispetto a ciò che viene attualmente proposto per l'aggiornamento degli insegnanti in servizio.

L'Algebra negli ultimi anni del corso di laurea ad indirizzo didattico

Se "Curve e Superfici nello spazio Euclideo tridimensionale" è il corso di geometria di cui più si sente la mancanza nella preparazione all'insegnamento prima del servizio nella scuola secondaria, "Teoria Elementare dei Numeri" è, a parer mio, il corso di Algebra che troppi studenti non frequentano, laureandosi comunque. Teoria Elementare dei Numeri ha una sua anima molto più che un corso completo su gruppi, anelli e campi. Opprimere gli insegnanti di secondaria con un corso di uscita che consiste, in primo luogo, di un insieme di strumenti di futuro utilizzo non sembra essere la risposta giusta. E' cosa senza dubbio più sensata fare invece esperienza di alcuni argomenti di matematica fra i migliori di tutti i tempi, temi questi che stanno al cuore dell'algebra. Ma, anche in questo caso, è probabilmente un obiettivo più ragionevole rendere la matematica di questo corso e di un corso in gruppi, anelli e campi (cosa che risulta più sensata in unione alla teoria dei numeri che da sola) centrale rispetto allo studio in servizio e allo sviluppo della matematica durante la vita professionale di un insegnante di scuola secondaria.

Conclusioni.

I punti principali che ho inteso fissare in questo breve articolo sono i seguenti:

1. I tradizionali laureati in matematica necessitano di maggiori capacità di comunicare quello che sanno. Di fatto il valore degli esercizi di comunicazione (peer tutoring, seminari e conferenze, esperienze di ricerca) si estende all'apprendimento stesso e favorisce una più approfondita conoscenza e il desiderio di istruzione permanente.
2. Gli insegnanti di scuola secondaria hanno la necessità di un collegamento che consenta loro l'apprendimento matematico per tutta la durata della vita. Considerate le altre richieste matematiche e metodologiche, è probabilmente non realistico richiedere ad essi un supeiore livello di profondo studio e comprensione dell'algebra e della geometria, che idealmente dovrebbe essere al centro della loro vita professionale. Forse la principale sfida dell'attuale curriculum precedente il servizio è di instillare "il sentito bisogno" di proseguire la ricerca di questa comprensione e studio accurato.

Questo secondo punto è per me la questione più importante e impegnativa che dobbiamo affrontare rispetto alla cura e allo sviluppo di insegnanti di matematica di scuola secondaria. L'ingrediente essenziale necessario per il progresso dell'insegnamento della matematica, nelle scuole elementari, medie e secondarie, è lo sviluppo professionale sia matematico che pedagogico, durante tutta la vita lavorativa. Così come a livello universitario, diventiamo gradualmente morti ed inefficaci se non continuiamo a combinare l'insegnamento con lo studio e la ricerca, intesa in senso ampio, allo stesso modo gli insegnanti diventano morti ed inefficaci se non esiste un meccanismo per l'apprendimento della matematica durante tutta la vita e un approfondimento della visione pedagogica. "Se non lo utilizzi, lo perdi" è vero in questa situazione come in molte altre aree di attività umana.
E inoltre - un punto questo di cui noi matematici universitari raramente ci rendiamo conto, non parliamo di volerlo riconoscere - questo cambiamento nella cultura e nella professionalità degli insegnanti di matematica della scuola è anche nel nostro stesso interesse, in termini puramente egoistici. Siamo preoccupati per il calo delle immatricolazioni nei corsi di matematica pura e tuttavia non teniamo in considerazione un'ampia e abbondante fonte di potenziali studenti. Gli insegnanti di matematica, persino quelli con una modesta preparazione matematica e poche abilità, possono raggiungere, nel corso della loro vita, alti livelli di comprensione della matematica grazie a un incoraggiato interesse, a dei supporti e ad
un duro lavoro. Noi saremo gli insegnanti per questi studenti durante tutta la loro vita attiva, una volta che sia chiaro, e prima o poi lo sarà, che questa è la condizione *sine qua non* del miglioramento, e quando le conseguenze politiche di questa presa di coscienza si tradurranno in una combinazione di migliorate condizioni di lavoro e più alti livelli di professionalità

La matematica e le scienze matematiche nel 2010: che cosa dovrebbero sapere i laureati?

Wade Ellis, Jr.
West Valley College

Tipi ed usi della tecnologia nel curriculum e loro impatto sui programmi universitari

Ci sono quattro aspetti della tecnologia che vorrei discutere:

1. Software Computationale
2. Interconnettività via Internet
3. Software per presentazioni
4. Software di sostegno

1. Software Computationale

Gli studenti del ventunesimo secolo si abitueranno all'uso di diversi strumenti software sia per apprendere che per fare matematica. I pacchetti CAS standard come *Maple*, *Mathematica* e *Derive* sono stati integrati in molti corsi fino a diventare parte integrante dei primi due anni di matematica a livello universitario, diventando corsi fondamentali per la laurea in matematica. L'integrazione della tecnologia viene spesso vista come un miglioramento e un arricchimento del materiale di base. Le competenze informatiche grafiche, numeriche e simboliche della tecnologia non sono viste come una parte fondamentale del corso.

È possibile svolgere un corso fondato sul presupposto che tutti i concetti dovrebbero essere introdotti con l'uso di un CAS e che quei concetti che non possono essere esplorati appieno (a livello introduttivo di calcolo infinitesimale) con la tecnologia possano essere migliorati e arricchiti con attività carta e matita. Un corso di questo tipo potrebbe cominciare con l'esplorazione dei cambiamenti di un'equazione alle differenze finite o del punto di vista della formula di ricorrenza. Inoltre, studiando le situazioni in cui questi metodi falliscono, il concetto di derivata può essere introdotte ed esplorato. Una volta definita la derivata, si può poi passare dalle equazioni alle differenze finite alle equazioni differenziali. Dal momento che la maggior parte delle equazioni differenziali che si trovano nella realtà non hanno soluzioni in forma esatta ma possono essere studiate e risolte usando metodi numerici (discreti), questo approccio fornisce agli studenti una conoscenza concreta di modelli creati con approcci sia discreti che continui e ne mostra i rapporti reciproci. Un approccio di questo tipo comincia a soddisfare i bisogni sia dell'informatica che delle discipline ingegneristiche che cominciano a chiedere più matematica discreta nei corsi introduttivi di matematica. Allo stesso tempo, corsi di questo tipo sono interessanti e avvincenti per gli studenti e possono servire come metodo di reclutamento per le lauree in matematica.

Nel parlare di integrazione nei primi due anni di matematica universitaria, possiamo vedere che non è forse un concetto così importante come invece potremmo essere indotti a pensare sia negli attuali corsi del primo o del secondo anno.Il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale, ovviamente, resta ancora importante e dovrebbe essere dimostrato, ma la sua importanza può stare ora nel ruolo che gioca nel dimostrare l'esistenza di soluzioni a determinate equazioni differenziali. I problemi tradizionali del mondo reale, come area, volume, area della superficie di oggetti geometrici regolari che comportano somme di Riemann sarebbero notevolmente ridotti come già avveniva nei testi di calcolo infinitesimale di Granvill, Smith e Longley della prima metà del XX secolo). L'esistenza teorica di soluzioni è molto importante nel caso in cui si cerchi una soluzione che usi metodi numerici discreti.

Lo sviluppo di un corso basato sulla tecnologia potrebbe soddisfare le richieste di discipline affini. Inoltre, potrebbe ridurre i tempi necessari allo studente per padroneggiare i concetti di limite, derivata, integrale, in quanto di dedicherebbe meno tempo al calcolo di tali limiti, derivate, integrali indefiniti e definiti di diverse funzioni, in quanto il CAS fornirebbe i risultati in modo più rapido e accurato. Tuttavia restano alcune abilità fondamentali nello studio di limiti, derivate e integrali che si dovrebbero conoscere a memoria, per esempio, sen(x)/x per x che tende a 0, il limite delle derivate dei polinomi, la regola di derivazione di funzione composta e la regola del prodotto, la sostituzione e l'integrazione per parti.

L'impiego del CAS in alcune classi sperimentali ha ridotti di un terzo il tempo necessario per lo svolgimento dei programmi dei primi due semestri di calcolo infinitesimale. Questo potrebbe permettere di affrontare già nel primo anno le equazioni differenziali (in modo sostanziale e non solo simbolico o numerico come detto sopra). Nel secondo, gli studenti potrebbero affrontare i fondamenti di algebra lineare (utilizzando anche in questo caso materiale software CAS), il calcolo infinitesimale multivariato e il calcolo delle probabilità e la statistica al livello richiesto dalle scuole di ingegneria. Molte esperienze in questo senso sono state realizzate all'Accademia Militare degli Stati Uniti come parte del loro progetto *Sette in quattro.*

Alcuni potrebbero osservare che gli studenti non svilupperanno la capacità di manipolazione dei simboli come accadeva invece in passato nei primi due anni di università. Ciò è senz'altro vero, ma molte delle nostre discipline affini non hanno bisogno di quella capacità di manipolazione dei simboli, mentre alcune richiedono in misura molto maggiore competenze nell'uso del software. Inoltre, gran parte della bellezza e delle potenzialità di queste meravigliose esercitazioni di manipolazione dei simboli che si svolgono negli attuali corsi di calcolo infinitesimale non vengono apprezzate dalle matricole o dagli studenti del secondo anno. Forse le tecniche dell'integrazione dovrebbero restare come corso fondamentale per chi si laurea, sia perché potrebbe apprezzarle sia perché le esercitazioni e le abilità potrebbero tornare utili nel prosieguo degli studi matematici.

Personalmente, raccomando ai matematici di guardare con attenzione alla ristrutturazione e a un nuovo sviluppo delle attività che chiediamo agli studenti di svolgere nei primi due anni di università in modo da poter trarre il massimo vantaggio dal software attuale con il quale tutti quelli che avranno a che fare con le scienze matematiche nel corso della loro carriera dovranno senz'altro avere grande confidenza. E, ovviamente, dobbiamo essere attenti ai cambiamenti di facciata e di sostanza che tali corsi possono determinare in chi si laurea in matematica. Queste nuove attività e argomenti potrebbero garantire ai nostri laureati il possesso di quella maturità matematica che abbiamo sempre sognato, ma nello stesso tempo fornire loro competenze immediatamente spendibili sul mercato del lavoro.

2. Interconnettività via internet

Molti insegnanti interessati alle applicazioni della matematica e convinti del fatto che i loro studenti dovrebbero familiarizzare con esse sono anche perfettamente consapevoli di non conoscerle sufficientemente per poterle presentare ai propri studenti. Internet fornisce un metodo per lavorare a questo problema. Un modulo di *laboratorio di calcolo infinitesimale* (in assenza di un termine migliore) potrebbe essere attivato là dove gli studenti hanno la possibilità di scegliere di lavorare su un'applicazione nella loro area di laurea o in una disciplina che li interessa insieme a studenti di altre università avendo come tutore un insegnante di una delle università che partecipano al progetto. In questo modo, gli studenti di discipline diverse potrebbero vedere le applicazioni del calcolo infinitesimale nella loro area di interesse, mentre i matematici potrebbero concentrarsi soltanto su applicazioni di un singolo campo. I matematici come gruppo hanno strumenti per conoscere molte discipline, ma è difficile che qualche dipartimento di matematica abbia insegnanti versati in più di quattro o cinque. Internet permette di sfruttare queste risorse (sia accademiche che industriali), ampliando le competenze dei nostri dipartimenti in modo estremamente vantaggioso. I nostri studenti (compresi quelli che si laureano) verrebbero a conoscenza della collaborazione a distanza e i docenti entrerebbero in contatto con discipline diverse e, forse, anche con una matematica diversa.

Per quanto mi riguarda sono a favore dello sviluppo di corsi di laboratorio e di infrastrutture a livello nazionale per sostenere i corsi stessi.

3. Software per presentazioni

Il software per presentazioni come *PowerPoint* permette al corpo docente di presentare lezioni di matematica elaborate ed efficaci. Questo tipo di software permette di esplorare la teoria e le applicazioni della matematica proponendo in modo veloce e colorito una serie di slides. I docenti dovrebbero prestare attenzione per fare in modo che gli studenti non siano tanto impressionati dagli effetti dello strumento tecnologico, quanto dalla sua efficacia nel trasmettere i contenuti, che dovrebbero essere passati poi anche agli studenti per lo studio individuale.

Il mio consiglio è che agli insegnanti che intendono avvalersi di questo software vengano forniti i supporti logistici per poterlo fare in classe in modo efficace, cioè un proiettore fissato sul soffitto e un computer fisso (non su carrello), collegamento a Internet in classe e aggiornamento sull'uso del software. Gli studenti nelle classi avanzate dovrebbero essere incoraggiati a fare presentazioni con l'uso di questo software.

4. Software di sostegno

Il software di sostegno, come quello messo a disposizione dalla Academic Systems e dalla ALEKS Corporation ci può aiutare a far fronte agli eterni problemi del recupero degli studenti. Questi pacchetti libro/software forniscono alla matematica l'opportunità di assicurare allo studente buoni livelli di competenza nelle abilità fondamentali della matematica. In questo modo i docenti possono concentrarsi sul miglioramento della qualità dell'istruzione matematica dell'intero gruppo. ALEKS, per esempio, permette agli studenti di valutare le loro competenze matematiche direttamente da casa (anche prima dell'inizio delle lezioni) e poi di lavorare con il software di sostegno su quelle parti del programma di matematica dove incontrano difficoltà. In questo modo, gli studenti che hanno soltanto qualche lacuna potrebbero colmarla ancora prima dell'inizio dei corsi e risparmiare a sé e ai loro college tempo e attività di ripetizione. Gli studenti che con gli attuali test d'ingresso a penna e carta sono inevitabilmente destinati a ripetere almeno un corso potrebbero mettersi alla pari prima dell'inizio dell'anno e procedere poi in modo regolare il loro corso di studi.

Fra l'altro, nei corsi come statistica, che vengono spesso seguiti da studenti degli ultimi anni dopo che sono stati lontani dalla matematica per un po' di tempo, gli studenti potrebbero autovalutarsi su uno standard di abilità matematiche fissato dal docente, seguire un apposito corso di recupero per una settimana prima dell'inizio delle lezioni e seguire poi il corso istituzionale senza dover allo stesso tempo svolgere attività di recupero.

Consiglio di studiare questi pacchetti libro/software in modo da ridurre altre forme di attività di recupero.

Il percorsi che portano alla laurea

Ci sono molti percorsi che portano alla laurea. Uno particolarmente interessante per gli studenti universitari è quello che porta all'insegnamento nelle scuole superiori o all'università. Quando in un college incontriamo bravi studenti di matematica, dobbiamo affrettarci ad invitarli a laurearsi in matematica e a prendere in considerazione l'insegnamento. In molti casi siamo i primi insegnanti di matematica che loro hanno incontrato e che sanno un po' di matematica e per questo motivo sono visti come persone da emulare. Con questo non intendo minimamente affermare che gli insegnanti di matematica delle scuole superiori non sanno o non sanno insegnare la matematica. Voglio semplicemente prendere in considerazione il grande numero di studenti economicamente svantaggiati che, non per colpa loro, hanno avuto un'educazione matematica deficitaria da insegnanti che sono brave persone e hanno ottime certificazioni in scienze, storia o inglese, ma non hanno (e sanno di non avere) solide basi matematiche, ma, ciononostante, si trovano a dover insegnare matematica.

A mio avviso a livello di college si dovrebbero attivare e potenziare corsi volti a far capire agli studenti di cui sopra il valore della matematica. Questi corsi potrebbero essere sui fondamenti oppure sui modelli matematici e dovrebbero essere pensati come corsi che vogliono affascinare gli studenti a esplorare il mondo avvincente della matematica come vocazione e carriera.

Questioni di passaggio da facoltà biennali e quadriennali a specializzazioni ad alto contenuto matematico

Gli studenti dei corsi two-year spesso incontrano problemi di articolazione nel passare a corsi quadriennali. Talvolta il corso di provenienza è su base semestrale, mentre quello a cui si passa è trimestrale o viceversa. I docenti, a qualunque livello, trovano che la preparazione degli studenti nei loro corsi manchi di qualcosa. I docenti dei corsi quadriennali attribuiscono talvolta le difficoltà dei nuovi studenti ai loro studi precedenti presso qualche altra istituzione (per esempio un corso *two-year*). Tutto ciò è normale, ma costituisce comunque un problema per gli studenti che provengono da un corso a laurea breve e per i loro nuovi docenti. Capita tuttavia, per lo meno in California, che gli studenti che provengono da un corso a laurea breve facciano altrettanto bene o addirittura meglio di quelli che si sono iscritti a corsi quadriennali.

Pertanto, consiglio che i dati dei GPAs dei laureati in scienze matematiche presso istituzioni quadriennali vengano ogni anno compilati e inviati ai docenti. Queste relazioni dovrebbero essere inviate ai college a laurea breve i cui studenti intendono specializzarsi. Le relazioni dovrebbero essere usate come base per un continuo scambio di informazioni fra college con corsi two-year e college con corsi *four-year*.

I corsi che segue chi prende una laurea breve in matematica dovrebbero prevedere calcolo infinitesimale e algebra lineare. Questi corsi dovrebbero far comprendere allo studente l'importanza della teoria nelle applicazioni della matematica, la consapevolezza della necessità della dimostrazione nel fissare la teoria e la consapevolezza dell'utilità del software simbolico, grafico e numerico nell'elaborazione della teoria e nella risoluzione di problemi di applicazione. I corsi dovrebbero fornire agli studenti le basi per ulteriori studi in vista della laurea quadriennale. I requisiti minimi richiesti a chi prende una laurea breve includono anche altri corsi, ma quanto indicato dovrebbe costituire la base di partenza per chi ha terminato il biennio.

Un modulo sullo sviluppo storico della teoria matematica potrebbe essere introdotto per assicurarsi che gli studenti abbiano colto le interconnessioni della matematica con il mondo reale. Gli studenti che frequentano college universitari spesso impiegano molti anni a completare il loro corso e può capitare che non abbiano l'opportunità di vedere le interconnessioni fra i vari corsi seguiti. Gli studenti dovrebbero anche essere incoraggiati a iscriversi al Club Matematico e a partecipare sia al *Putnam Examination* che al *Modeling Contest*.

Per fare in modo che uno studente possa acquisire le competenze che i dipartimenti di matematica si aspettano da coloro che passano a corsi quadriennali di matematica, consiglierei di attivare un servizio di consulenza presso i college e di prevedere che questo servizio comprenda l'uso di dati *GPA articulation* provenienti dai college quadriennali.

I docenti di matematica dei corsi a laurea breve hanno spesso maggiori possibilità di accesso agli strumenti informatici dei loro omologhi su corsi quadriennali. In questi casi, può capitare che passando a un corso quadriennale gli studenti si trovino negato l'uso di calcolatori grafici, calcolatori grafici a manipolazione simbolica e computer a cui avevano accesso nel corso a laurea breve. Pertanto è importante che i docenti dei college biennali sappiano che, mentre la tecnologia dovrebbe essere integrata nello sviluppo della comprensione matematica, gli studenti dovrebbero esercitarsi molto anche nei calcoli con carta e matita. Il passaggio da una laurea breve a un corso quadriennale può essere facilitato assicurandosi che gli studenti abbiano già svolto i corsi di calcolo infinitesimale e di algebra lineare (corsi che possono essere enormemente arricchiti e approfonditi con l'uso della tecnologia, ma dove non tutti i docenti ne permettono l'uso).

La formazione didattica dei Futuri Insegnanti di Matematica della Scuola Secondaria: Vecchie Ipotesi, Nuove Sfide2

Joan Ferrini-Mundy, *Università Statale del Michigan*
Bradford Findell, *Consiglio Nazionale della Ricerca*

Noi rivolgiamo due domande: Quali conoscenze matematiche devono possedere i futuri insegnanti di scuola secondaria? In quale contesto essi devono apprendere queste conoscenze? Tenere in considerazione entrambe le questioni ha implicazioni con la revisione del programma di laurea in matematica.

Quali conoscenze matematiche devono possedere i futuri insegnanti di scuola secondaria?

Gli insegnanti devono conoscere la matematica che insegnano. Stabilire esattamente che cosa ciò significhi e determinare di quali altre conoscenze matematiche abbiano bisogno non è cosa facile. Tipicamente, due sono le prospettive che hanno influenzato i programmi progettati per la formazione degli insegnanti di scuola secondaria, ed entrambe hanno rilevanza per i dipartimenti di matematica:

1. I futuri insegnanti di scuola superiore dovrebbero studiare, fondamentalmente, tutto quello che studiano i *laureati in matematica* – poiché in questo modo risulteranno forniti di una migliore visione complessiva della disciplina e avranno chiare le direzioni verso cui la matematica si sta sviluppando, con una positiva influenza sul curriculum scolastico.
2. I futuri insegnanti di scuola superiore dovrebbero studiare *la didattica della matematica*: metodi di insegnamento della matematica, conoscenze pedagogiche in matematica, il curriculum in matematica fra i 9 e i 12 anni, ecc.

Noi sosteniamo in questo articolo che esiste un considerevole insieme di conoscenze, necessarie per un insegnamento efficace, che viene trascurato da questi due divergenti approcci al problema. E inoltre gran parte di queste conoscenze sono di carattere matematico e, pertanto, esse dovrebbero essere responsabilità dei dipartimenti di matematica. Poiché queste conoscenze sono specifiche dell'insegnamento della matematica stanno, in un certo senso, a metà strada fra la didattica della matematica e i contenuti della tradizionale laurea in matematica. Si tenga tuttavia presente che vi sono molte altre cose, oltre alla matematica e alla sua didattica, che gli insegnati di scuola secondaria devono conoscere a proposito degli studenti, dell'apprendimento, dell'insegnamento, del curriculum, del contesto educativo.

Lo sviluppo storico delle linee di indirizzo didattico emanate dalle diverse istituzioni[3].

Negli Stati Uniti, l'approccio dominante rispetto alla preparazione degli insegnanti di scuola secondaria è, in questi ultimi anni, di richiedere che portino a termine una laurea (o qualcosa di molto simile) in matematica. In

[2] Gli autori desiderano ringraziare Deborah Loewenberg Ball, Dick Stanley, Tom Rishel, Merle Heidemann e Dawn Berk per i loro commenti e l'assistenza prestata nell' elaborazione di questo articolo.
[3] Per maggiori dettagli su questo argomento si veda Gibb, Karnes, &Wren, 1970.

modo piuttosto interessante, un rapido passaggio in rassegna delle linee di indirizzo, riguardanti la preparazione degli insegnanti ed emanate in questo secolo, rivela un progressivo aumento della tendenza a richiedere una preparazione prossima a quella dei laureati a mano a mano che ciascuna di esse veniva diffusa. Per esempio, il rapporto del 1911, del sottocomitato Americano, facente parte della Commissione Internazionale sull'Insegnamento della Matematica, raccomandava la preparazione in numerosi campi di matematica pura, matematica applicata (per esempio: meccanica, astronomia, fisica), rilevamento, "un valido corso sull'insegnamento della matematica nella scuola secondaria", altri argomenti di didattica e "un corso di carattere enciclopedico che tratti criticamente il campo della matematica elementare da un punto di vista più elevato" (Commissione Internazionale per l'Insegnamento della Matematica, 1911, pp. 13-14). Non viene fatta nessuna richiesta esplicita di una laurea in matematica. Allo stesso modo, le raccomandazioni, emanate nel 1935, dalla Commissione su Formazione e Utilizzo degli Studenti Avanzati di Matematica, facente parte della Associazione Matematica Americana (Mathematical Association of America's Commission on the Training and Utilization of Advanced Students of Mathematics), richiedevano "un livello minimo di preparazione in matematica fino ad un limite di 6 ore di calcolo infinitesimale, geometria Euclidea, teoria delle equazioni e un corso di Storia della matematica" (Commission on the Training and Utilization of Advanced Students of Mathematics, 1935). I corsi che a quei tempi potevano essere più caratteristici di una laurea (calcolo avanzato, meccanica, geometria proiettiva, additional algebra) erano descritti come "una desiderabile preparazione aggiuntiva."

Nei rapporti di vari gruppi di lavoro, fra la fine degli anni '50 ed i primi anni '60, le aspettative nei confronti degli insegnanti di scuola secondaria cominciavano ad essere simili a quelle di una laurea, con la richiesta di 24 *semester hours* di corsi di matematica (Consiglio Nazionale degli Insegnanti di Matematica, National Council of Teachers of Mathematics [NCTM],1959), e 30 *semester hours* includendo anche algebra astratta (Associazione Americana per il Progresso delle Scienze, 1959). È stato il Comitato per i Programmi Universitari di Matematica (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (CUPM)) a raccomandare per primo che "i futuri insegnanti di matematica, oltre agli elementi di algebra e di geometria, completassero una laurea in matematica" (CUPM, 1961). Dieci anni più tardi, questa opinione era ancora fortemente sostenuta: "Riteniamo questione di grande importanza che un piano di studio per gli insegnanti, esclusi alcuni corsi particolarmente appropriati ai futuri insegnanti di scuola superiore, debba essere identico a quello offerto agli altri laureati in matematica" (CUPM, 1971, p.170).

Le linee di indirizzo del CUPM, nel 1983, non richiedevano esplicitamente una laurea in matematica, ma elencavano piuttosto 13 corsi, compresa una serie di 3 corsi di calcolo infinitesimale, come livello minimo di preparazione, con la richiesta di un ulteriore lavoro specifico per gli insegnanti di calcolo infinitesimale (CUPM, 1983). Vale la pena di osservare che 13 corsi corrispondono a *più* di quello che è richiesto per la laurea presso molte istituzioni. Nel 1991, il Comitato per l'Educazione Matematica degli Insegnanti (Committee on the Mathematical Education of Teachers (COMET)) presso l'Associazione Matematica Americana (Mathematical Association of America, MAA) ha assunto la responsabilità della preparazione degli insegnanti: "Queste raccomandazioni prevedono che coloro che si stanno preparando per l'insegnamento della matematica a livello dei 9 – 12 anni debbano completare un percorso corrispondente alla laurea in matematica, ma abbastanza diverso rispetto a quelli attualmente tenuti presso molte istituzioni" (Leitzel,1991, p.27). Queste raccomandazioni, invece di indicare dei corsi specifici, elencano degli standard qualitativi rispetto a sette aree di contenuto (per esempio, la geometria, le variazioni nel continuo, le strutture matematiche).

A partire dalle prime linee di indirizzo del CUPM, la maggior parte delle raccomandazioni dei principali gruppi del comitato nazionale, prodotte dalla comunità matematica, e la maggior parte di quelle provenienti dalla comunità educativa hanno raccomandato l'equivalente di una laurea in matematica, come elemento fondamentale per la preparazione degli insegnanti della scuola secondaria. Talvolta le linee di indirizzo sono di carattere generale e prevedono che tutto ciò che è considerato adatto per una laurea lo sia anche per i futuri insegnanti di matematica. Per esempio, le nuove linee di indirizzo del Consiglio Nazionale per l'Accreditamento dell'Educazione degli Insegnanti (National Council of Accreditation of Teacher Education (NCATE)), che entreranno in vigore il prossimo anno, si attendono che i candidati all'insegnamento debbano "conoscere il contenuto del loro campo (una laurea o, sostanzialmente, l'equivalente di una laurea)" (NCATE, 2000). Le linee di indirizzo più attuali, che vengono sviluppate per l'educazione matematica degli insegnanti (Consiglio della Conferenza delle Scienze Matematiche, progetto per l'Educazione Matematica degli Insegnanti - the Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS] Mathematical Education of Teachers project), sebbene riflettano alcune questioni generali di maggiore attualità a proposito della laurea, ribadiscono le medesime semplici argomentazioni, come risulta evidente dal seguente passo, estratto dal testo citato:

Il seguente profilo di corsi di matematica e complementari è un modo per fornire ai futuri insegnanti di scuola superiore le indispensabili conoscenze, soddisfacendo contemporaneamente le richieste di una tradizionale laurea in matematica.

Primo Anno: Calcolo infinitesimale, Introduzione alla Statistica, Scienze di appoggio (*Supporting Science)*

Secondo Anno Calcolo infinitesimale, Algebra Lineare, Introduzione all'Informatica

Terzo Anno Algebra Astratta, Geometria, Matematica Discreta, Statistica

Quarto Anno Introduzione all'Analisi Reale, Esame conclusivo (*Capstone*), Corsi di Didattica della Matematica

(CBMS; in preparazione)

Non vi è alcun dubbio che gli insegnanti debbano conoscere la matematica per insegnarla bene nelle scuole secondarie: la logica di ciò pare inattaccabile. Eppure, allo stesso tempo, le ricerche condotte non provano una convincente relazione fra la conoscenza della matematica degli insegnanti (spesso misurata dal numero di corsi di matematica seguiti presso l'università) e le capacità matematiche raggiunte dai loro studenti (vedi Begle, 1979; Monk, 1994). Forse questi insegnanti non apprendono i contenuti dei corsi, oppure essi li hanno appresi ma scoprono che non si collegano in nessun modo evidente con il loro lavoro in classe.

Ci sono almeno due problemi nel richiedere lo stesso tipo di preparazione per l'insegnamento della matematica come per la tradizionale laurea in matematica. Primo, gli insegnanti di scuola superiore si preparano per una pratica professionale che è una pratica completamente diversa dallo svolgere ricerca matematica. La domanda di conoscenze matematiche a cui si troveranno a fare fronte è differente. Ma non stiamo affermando che gli insegnanti debbano avere una minore preparazione matematica. In realtà sosteniamo che, con una tipica laurea in matematica, gli insegnanti possono avere *una insufficiente preparazione matematica che abbia le caratteristiche che a loro serviranno.* In secondo luogo, mantenendo i contenuti separati dalla pedagogia, i futuri insegnanti potrebbero non acquisire ciò che Shulman (1987, p. 8) definiva *conoscenza del contenuto pedagogico*: "una comprensione di come particolari argomenti, problemi e questioni siano organizzati, presentati e adattati ai diversi interessi ed abilità degli studenti, e così presentati per l'apprendimento".

La matematica del curriculum della scuola secondaria

Il contesto dell'attuale scuola secondaria è completamente diverso rispetto a quello di 20 anni fa. In primo luogo, oggi le scuole secondarie tengono in grande considerazione l'impegno a dare una formazione agli studenti perché siano preparati per un mondo in rapida evoluzione - e quindi *tutti* gli studenti devono essere messi in grado di proseguire eventualmente gli studi a livello superiore oppure di svolgere un lavoro che richiede conoscenze specifiche. Questo ha significato un progressivo allontanamento da indirizzi professionali o di carattere generale a favore della scelta di fornire una solida base di significative conoscenze matematiche a tutti gli studenti (vedi le linee di indirizzo del NCTM 2000 *Principi e Standard per la Matematica nella Scuola*). La gamma di opzioni che fa attualmente parte dei materiali curricolari della scuola superiore riflette questo spostamento di attenzione. Sebbene la sequenza algebra 1, geometria, algebra 2, precalcolo, calcolo, di cui molti di noi hanno fatto esperienza, sia ancora in vita e in buona salute, gli odierni materiali educativi puntano la loro attenzione anche sul trattamento dei dati e la statistica, la matematica discreta, geometria dinamica e sul trattamento preliminare di funzioni e modelli. Alcune serie di corsi sono pienamente integrate, con titoli del tipo "matematica 1, 2, 3, 4," oppure sono completamente organizzate con riferimento ad applicazioni della matematica e ai cosiddetti problemi di contesto (*contextual problems*). L'obiettivo, un tempo indiscusso, della scuola superiore del calcolo di livello avanzato *(advanced placement calculus*) ha lasciato il posto ad altre, altrettanto valide, possibilità, come *advanced placement statistics* , o ad elaborati corsi di carattere tecnico incentrati sulle tecnologie CAD-CAM, economia e finanza, o applicazioni della matematica al mondo del lavoro. Queste tendenze sono in contrasto con ciò che finora ha rappresentato la tradizionale laurea in matematica, con la sua storica attenzione concentrata sull'algebra astratta e l'analisi come obiettivi finali. Se si considera seriamente l'idea che essere preparati a padroneggiare la matematica della scuola secondaria sia cruciale per gli insegnanti, allora pare evidente che questi cambiamenti nella natura della matematica della scuola secondaria debbano essere seriamente presi in considerazione da parte di coloro che preparano i docenti.

Per quanto riguarda gli insegnanti di matematica della scuola secondaria, è molto ironico il fatto che, con l'eccezione di alcuni concetti che potrebbero essere richiamati in Calcolo infinitesimale, tutti e quattro gli anni del corso di laurea in matematica trasmettono contenuti che, apparentemente, non sono collegati agli argomenti del curriculum della scuola superiore. L'unico luogo in cui è molto probabile che i futuri insegnanti di scuola secondaria apprendano nozioni relative ad argomenti della scuola superiore, come la Legge dei Coseni, il Teorema delle Radici Razionali [di un polinomio, N.d.T.] , la dimostrazione del Primo Criterio di Congruenza dei triangoli (Side - Angle - Side congruence), la Legge di Annullamento del Prodotto oppure i Criteri di divisibilità , è proprio la scuola secondaria, quando loro stessi sono studenti. Più concretamente è poco probabile che il genere di integrazione fra idee matematiche e i collegamenti, che sono necessari per insegnare un programma coerente di scuola secondaria, risultino evidenti agli studenti sulla base del loro programma universitario. Consideriamo, per esempio, questo episodio accaduto a una studentessa, futura insegnante. Questa futura insegnante era stata una valente laureata in matematica presso una piccola università statale; aveva frequentato corsi di algebra astratta, geometria di primo livello e calcolo infinitesimale avanzato. Lei stava tenendo una lezione di Algebra 2 e spiegava la funzione valore assoluto. Mostrò agli studenti il simbolo, $f(x)=|x|$, e ne tracciò il grafico. Uno studente disse qualcosa del genere: "Quel grafico mi fa venire in mente gli angoli in geometria. Possiamo usare la funzione valore assoluto come un modo per scrivere una formula per qualsiasi angolo?". L'insegnante fu colta completamente di sorpresa dalla domanda. Questa avrebbe infatti richiesto all'insegnante di fare sul momento un insieme di valutazioni matematiche e di collegare, in modo non previsto, idee appartenenti a campi diversi.

Come professori che lavorano con futuri docenti di scuola superiore , siamo sicuri che i nostri studenti saranno in grado di rispondere alle seguenti classiche domande di studenti di scuola superiore, in un modo che sia allo stesso tempo profondo dal punto di vista matematico ma anche accessibile e convincente per un quindicenne?

- Perché un numero negativo per un numero negativo dà un numero positivo?
- Perché devo cambiare il verso di una disuguaglianza quando moltiplico entrambi i membri per un numero negativo?
- In ogni triangolo che ho provato su *Sketchpad* [*Sketchpad* è un programma didattico di grafica N.d.T.]la somma degli angoli è uguale a 180. Non ho bisogno di fare una dimostrazione, vero?
- Non sono convinto che 0,99999. . .= 1.
- Come faccio a sapere che le rette parallele non si incontrano mai?
- Come faccio a sapere che l'asintoto non incontrerà mai il grafico? Voglio dire, incontra il grafico vicino a 0.
- Io penso che 100 *sia* divisibile per 3 - la risposta è 33 e un terzo.
- Perché talvolta è corretto utilizzare il valore 22/7 al posto di p-greco?
- Penso che il numero 1 abbia tre diverse radici quadrate: 1, -1 e 0,99999999. Sono sicuro che 0,99999999 sia la radice quadrata di 1 perché quando moltiplico questo numero per se stesso con la calcolatrice mi viene 1,00000000.

La matematica per l'Insegnamento

Supponiamo di poter costruire un curriculum per insegnanti di scuola secondaria che, dal punto di vista dei contenuti matematici, sia in sintonia con l'attuale curriculum della scuola secondaria e le sue linee di cambiamento. Inoltre, supponiamo che esso abbia realmente offerto agli studenti una possibilità di vedere sia in quale più ampio contesto matematico siano inseriti gli argomenti del curriculum della scuola superiore sia di osservare i concetti elementari di matematica da un punto di vista più avanzato o di sviluppare "una profonda comprensione degli argomenti fondamentali di matematica" (Ma, 1999). Questo compito richiederebbe probabilmente di progettare alcuni corsi specifici per gli insegnanti, rompendo così la tradizione secondo la quale ciò che va bene per una laurea in matematica sia adatto anche per i futuri insegnanti. Entrambe le lauree richiedono un solido studio di seria matematica, ma vi possono essere delle buone ragioni perché il corpo dei contenuti matematici sia differenziato in alcuni aspetti.

Noi sospettiamo che vi sia un altro insieme di conoscenze matematiche, occorrenti agli insegnanti di scuola superiore, che è per lo più di carattere matematico e che, probabilmente, rientra più nell'ambito di attività del dipartimento di matematica che non in quello della scuola di educazione didattica. I ricercatori che si occupano di didattica della matematica e gli stessi educatori stanno facendo grandi sforzi per descrivere e discutere di queste conoscenze. Ball e Bass hanno studiato questo argomento nelle scuole elementari e lo definiscono "comprensione matematica utile del punto di vista pedagogico" (Ball & Bass, 2000). Zalman Usiskin (da una comunicazione personale) sostiene che la "matematica degli insegnanti" sia un ramo della matematica applicata, nel senso che (1) essa nasce all'interno della classe nello stesso modo in cui la ricerca sulle operazioni matematiche deriva da problemi pratici negli affari, e (2) comprende delle conoscenze matematiche specialistiche che possono non essere conosciute da matematici che appartengono ad altre aree di matematica pura o applicata. Oltre a possedere una profonda comprensione degli argomenti che vengono insegnati nelle scuole secondarie, gli insegnanti di matematica devono essere in grado, a questo livello, di fare appello e utilizzare altre conoscenze che sono di carattere matematico, come:

- individuare la logica del ragionamento di un'altra persona o il significato di una rappresentazione;
- decidere quale, fra i molti concetti matematici, è il più promettente e a che cosa dare maggiore importanza;
- creare e spiegare collegamenti fra concetti matematici;
- collocare un concetto in un più vasto contesto matematico;
- scegliere rappresentazioni vantaggiose dal punto di vista matematico;
- conservare le caratteristiche fondamentali di una idea matematica e semplificando altri aspetti al fine di permetterne la comprensione da parte degli studenti.

Questo genere di attività matematiche sono essenziali per l'insegnamento, e questo è dimostrabile. Esse nascono nel momento in cui gli insegnanti preparano le lezioni, progettano i compiti per i corsi e le valutazioni, interagendo direttamente con gli studenti sui contenuti delle disciplina, rispondendo alle loro domande, correggendo il loro lavoro. Se queste attività sono essenziali, allora i futuri insegnanti devono apprendere le necessarie abilità matematiche - idealmente, sosteniamo, per mezzo di materiale matematico che sia simile a quello proposto nelle classi di scuola superiore, sotto la guida di matematici presso i dipartimenti di matematica universitari.

Ci sono almeno tre modi per creare collegamenti fra la matematica universitaria e quella della scuola superiore:

Un approccio matematico. I futuri insegnanti dovrebbero studiare, da un punto di vista avanzato[4], la matematica della scuola superiore. L'approccio consiste nell'individuare e sfruttare argomenti del curriculum della scuola superiore che possano essere sviluppati ed elaborati in modo matematicamente sofisticato. (Vedi nel Box 1 un elenco dei principi che guidano questo approccio.) Un'alternativa è di individuare degli argomenti nel tipico curriculum universitario e cercare il modo di collegarli con le aree chiave del curriculum della scuola superiore - questa è l'idea che sta dietro ai corsi *capstone* o "corsi ombra" che i futuri insegnanti frequentano parallelamente a corsi quali algebra astratta. Sebbene questo genere di approcci possano rappresentare un miglioramento rispetto ad alcuni corsi di matematica che non hanno collegamenti con la matematica della scuola superiore, questo approccio corre il rischio di lasciare i futuri insegnanti privi di sufficienti contenuti pedagogici, di ciò che sta all'intersezione fra i contenuti e la pedagogia.

Un approccio integrativo. Integrare gli obiettivi dei contenuti della matematica con i corsi di pedagogia in modo che gli insegnanti siano in grado di vedere meglio i collegamenti ed in seguito di utilizzarli (Vedi, p. es., Cooney et alii, 1996).

Un approccio emergente. Analizzare la pratica dell'insegnamento e determinare su quali conoscenze matematiche gli insegnanti fanno affidamento nella loro attività. Quindi utilizzare, come temi per apprendere la matematica, reali "problemi" matematici relativi alla pratica dell'insegnamento, traendo vantaggio dagli spunti di carattere matematico che emergono nel momento in cui si lavora sui problemi.

---

[4] L'University of California di Berkeley insieme a l'University of Chicago School Mathematics Project (UCSMP) sono i principali partecipanti ad un finanziamento, concesso dalla Stuart Foundation di San Francisco, per creare e sperimentare un nuovo tipo di corso di matematica per il College descritto come "Matematica per la Scuola Superiore da un punto di vista avanzato" ("High School Mathematics from an Advanced Standpoint). Gli autori principali degli articoli sono Dick Stanley dell'Univertity of California di Berkeley, il Direttore del UCSMP Zalman Usiskin dell' l'University of Chicago, Anthony Peressini dell'University of Illinois ed Elena Marchisotto della California State University, Northridge. Sono attualmente in corso le prime sperimentazioni.

[4] Desideriamo rivolgere un riconoscimento al lavoro originale ed al pensiero di Deborah Ball e Hyman Bass nello sviluppare questa specifico argomento.

Noi pensiamo che tutti questi tipi di approccio meritino di essere portati avanti. Tuttavia l'approccio emergente è il più inusuale e richiede maggiori spiegazioni. Per comprendere questo approccio è utile caratterizzare l'approccio tradizionale come un fallimento nell'assistere gli insegnanti nell'operazione di trasferimento delle loro conoscenze matematiche nella pratica didattica. Piuttosto che costruire una risposta separata dall'insegnamento, questo approccio parte dal contesto della pratica dell'insegnamento. Noi cerchiamo di definire chiaramente le attività di interpretazione, risoluzione di problemi e di elaborazione di decisioni che coinvolgono effettivamente un insegnante, in modo di essere in grado di dedurre quale matematica sia realmente utilizzata. Il passo successivo sarebbe di progettare un curriculum incentrato su queste attività, quasi nello stesso modo in cui si può creare un curriculum di matematica per ingegneri o studiosi di scienze sociali prendendo in considerazione i problemi di matematica che essi devono risolvere.

Ricercatori di educazione matematica e esperti di formazione della professione docente (Cfr., p. es., Ball & Cohen, 1999; Schifter, Bastable, & Russell, 1999; Shulman, 1992; Stein, Smith, Henningson, & Silver, 2000; Barnett, Goldenstein, & Jackson, 1994) hanno iniziato ad esplorare questo approccio utilizzando videoregistrazioni dell'attività in classe, il lavoro svolto dallo studente, relazioni scritte e materiali tratti dal curriculum dello studente. L'idea di utilizzare la reale attività di insegnamento come punto di partenza per pensare la preparazione matematica degli insegnanti fu ulteriormente esplorata presso il Laboratorio di studio dei contenuti matematici della preparazione dell'insegnante (Theacher Preparation Mathematics Content Workshop) ospitato nel 1999 dal Consiglio per l'Educazione alle Scienze Matematiche (Mathematical Sciences Education Board) (Consiglio Nazionale della Ricerca,2000). Le idee stanno giusto iniziando a prendere forma nella comunità di formazione didattica della matematica. Gli sviluppi futuri richiederanno un lavoro concertato di concettualizzazione più completa dell'approccio emergente e di progettazione di esperienze concrete nelle quali i futuri insegnanti possano acquisire con profitto queste conoscenze matematiche.

Box 1. Principi per l'analisi estesa dei problemi (Stanley & Callahan, in preparazione)

I contenuti matematici che sono connessi all'analisi estesa dei problemi possono essere espressi come un'insieme di "principi" matematici. Essi includono:

1. Individuare i parametri per rappresentare le quantità significative all'interno di un problema. Tipicamente i parametri sostituiscono i valori numerici di alcune delle grandezze che sono utilizzate nell'impostazione iniziale del problema. Questa operazione implica attività più specifiche quali:
   a. individuare quali grandezze utilizzare come parametri;
   b. essere attenti ai modi per generalizzare i risultati ottenuti, e al tempo stesso ricercare significativi casi speciali;
   c. sostituire una variabile x, che ha un campo di variazione $0 < x < L$, con una variabile ad essa proporzionale p di campo $0 < p < L$.

2. Trasformare le espressioni per ottenere le loro forme più utili; anche questa operazione implica attività più specifiche quali:
   a. ripartire le diverse occorrenze della variabile indipendente;
   b. utilizzare determinati rapporti e fattori dimensionali.

3. Rappresentare, in modi diversi, le relazioni esistenti all'interno di una certa situazione, per ottenere diversi strumenti di comprensione. Per esempio diagrammi, grafici, tabelle e formule.

4. Cercare collegamenti con diversi generi di matematica. Per esempio:
   a. cercare l'interpretazione geometrica di risultati analitici e viceversa;
   b. curare i collegamenti fra la matematica del continuo e del discreto.

5. Fare anticipazioni, domande e fornire risposte alle domande che si può porre un lettore che sta cercando di capire le idee. Le procedure standard spesso evitano queste domande dal momento che non sono parte di una presentazione efficace ed elegante.

Vale la pena di mettere in evidenza che questo approccio, se da un lato presenta alcune nuove opportunità, non è però esente da potenziali intoppi. Un potenziale problema consiste nel fatto che la discussione fra attuali e futuri insegnanti potrebbe restare incentrata su argomenti di matematica scolastici e non riuscire così a muoversi verso la matematica di livello più elevato. Un altro aspetto è che la maggior parte della discussione potrebbe essere indirizzata su più generali questioni relative all'insegnamento e all'apprendimento. La nostra esperienza, nella presentazione di queste idee a una gran varietà di uditori, è tuttavia che, con un esempio opportunamente scelto, la discussione può risultare approfondita e feconda, conducendo spesso gli interlocutori in un territorio matematico inesplorato o implicito rispetto al curriculum tradizionale.

ConclusioniAlcune delle attuali sfide dell'odierna didattica della matematica nella scuola secondaria, associate a nuove scoperte provenienti da parte della ricerca educativa della matematica, suggeriscono che sia giunto il momento di allontanarsi dal poco dibattuto presupposto, che ha storicamente guidato l'educazione alla matematica in molti decenni passati: una laurea in matematica, o qualcosa che ne differisce solo marginalmente, costituisce la migliore preparazione matematica per i futuri insegnanti di scuola secondaria. Gli insegnanti devono comprendere profondamente la matematica. Essi devono capire le sue applicazioni pratiche e come le idee si integrano attraverso i diversi soggetti. Ed essere in grado di cogliere le possibili prospettive matematiche all'interno di affermazioni degli studenti o loro lavori scritti. E' possibile progettare nuove lauree in modo specifico per i futuri insegnanti di scuola secondaria, che uniscano i tre tipi di conoscenza matematica sopra descritti, in modo da rendere un proficuo servizio ai nostri insegnanti di scuola secondaria? Considerato che la metà degli studenti universitari di matematica, almeno presso alcune università dove si attua la ricerca , hanno intenzione di diventare insegnanti, tale sviluppo è garantito. Le raccomandazioni della bozza del documento relativo alla Educazione Matematica degli Insegnanti (CBMS, in fase di preparazione) sono tempestive nel riconoscere la necessità di diversificare le offerte formative nel curriculum universitario riservato ai futuri insegnanti secondari. Sempre più l'insieme delle offerte didattiche raccomandate differisce da ciò che è stata per lo meno la laurea in matematica. Noi dobbiamo preparare gli insegnanti a risolvere i vari tipi di problemi matematici che realmente nascono nell'attività di insegnamento. Questo modo di pensare non si è affermata per quanto riguarda gli insegnanti di matematica della scuola secondaria.

All'interno di quale contesto i futuri insegnanti dovrebbero giungere alla conoscenza della matematica

La responsabilità della preparazione, riguardo alle conoscenze matematiche, degli insegnanti della scuola secondaria è stata storicamente in carico dei dipartimenti di matematica - e così dovrebbe continuare ad essere, dal nostro punto di vista. Alcune questioni piuttosto importanti debbono, tuttavia, essere affrontate se si vuole che i dipartimenti forniscano un'efficace preparazione. All'interno della facoltà, chi è responsabile per la conoscenza dei contenuti matematici degli insegnanti di scuola secondaria? Quale esperienza devono avere i membri della facoltà e come la acquisiscono? E' necessario che essi lavorino nelle scuole, discutano con gli insegnanti della secondaria e si tengano aggiornati a proposito delle loro conoscenze di didattica della matematica? E, se il loro ambito principale di attività è la didattica della matematica, in che modo si mantengono aggiornati riguardo ai contenuti della materia?

L'ambiente del dipartimento Una limitata attività di ricerca è stata condotta a proposito dell'ambiente di apprendimento dello studente universitario in matematica che intende poi insegnare presso la scuola secondaria, sebbene siano disponibili molte informazioni di tipo aneddotico. Una lamentela frequente fra questi studenti è che la loro esperienza nei corsi di matematica, in particolare la natura della loro istruzione matematica, non risulta compatibile con ciò che apprendono nei corsi di didattica riguardo ai modi migliori per favorire l'apprendimento da parte degli studenti. Nei corsi didattici di pedagogia, nei quali essi possono apprendere l'importanza di coinvolgere attivamente i loro futuri studenti, scoprendo modi per rendere significativo un argomento e per collegarlo ad altri concetti, costruendo su ciò che gli studenti già conoscono e utilizzando affermazioni ben radicate che stimolano i chiarimenti, essi sviluppano determinate conoscenze ed immagini a proposito di cosa sia veramente l'insegnamento della matematica. In molti corsi di matematica di alto livello, tuttavia, l'istruzione impartita non include questi aspetti. Perciò, nonostante il fatto che questi laureati di alto livello siano spesso dei buoni studenti di matematica ed abbiano conseguito successi all'interno del sistema, essi sono spesso molto contrastati a proposito di ciò che potrebbe accadere nel momento in cui insegneranno, a causa delle differenze e delle dissonanze di cui fanno esperienza.

Un'altra questione concerne l'uso della tecnologia durante l'esperienza universitaria dei futuri insegnanti. L'NCTM (Consiglio Nazionale degli Insegnanti di Matematica) e gli standard statali raccomandano l'uso della tecnologia nelle scuole secondarie come supporto all'apprendimento della matematica. Perciò i futuri insegnanti devono fare esperienza, nel momento in cui sono studenti, dell'uso della tecnologia in ambienti matematici avanzati. Alcune istituzioni offrono "reform " di analisi infinitesimale o corsi di analisi infinitesimale ricchi dal punto di vista tecnologico a studenti di scienze naturali, o ad alcuni indirizzi di ingegneria e scienze, ma non agli studenti che si laureano in matematica, e quindi non ai futuri insegnanti di scuola superiore. In questo caso gli insegnanti, in qualità di studenti universitari di matematica, frequentano i corsi opzionali di calcolo infinitesimale più teorici e con meno applicazioni pratiche, senza fare così esperienza del ruolo della tecnologia, poterne vedere applicazioni e collegamenti.

Ci sono anche altri aspetti, riguardo all'ambiente di studio dello studente (al di fuori dell'aula), che sono problematici per gli studenti migliori che hanno manifestato il loro interesse riguardo all'insegnamento della matematica nella scuola secondaria. Durante le conversazioni con i loro consiglieri e guide , tali studenti riferiscono che talvolta i loro consiglieri matematici li scoraggiano dall'intraprendere la strada dell'insegnamento, suggerendo invece la ricerca di opportunità più vantaggiose e di prestigio. Ancor oggi, da qualche parte nel Paese, specialmente in alcune aree urbane, insegnanti senza nemmeno l'equivalente di *minor* in matematica insegnano la materia ad un consistente numero di studenti delle scuole medie e secondarie. Ne consegue che, senza una buona preparazione in matematica degli studenti della scuola superiore, la pressione affinché vengano proposti corsi di recupero a livello universitario e la mancanza di studenti di successo in matematica continueranno ad essere problemi con i quali si confrontano i gradi più alti di istruzione. Le facoltà universitarie di matematica dovrebbero essere ansiose di indirizzare verso l'insegnamento gli studenti buoni ed interessati.

Un secondo aspetto problematico, relativo all'ambiente dello studente, è legato alle attività di consulenza . Gli studenti che intendono diventare insegnanti devono soddisfare le richieste caratteristiche della loro laurea, e al tempo stesso richieste relative a gruppi di corsi ed esperienze pratiche nel campo dell'educazione professionale. Gli studenti degli indirizzi didattici hanno tipicamente dei piani di studio molto densi ed impegnativi. Seguire i corsi nella corretta sequenza, al momento opportuno nella loro carriera universitaria, è cruciale per mantenere il passo. Considerando il numero crescente di programmi di didattica per insegnanti collocati nel quinto anno di università, i programmi che si sviluppano invece su cinque anni, o i programmi di laurea che combinano diploma e master, il problema di decidere il momento in cui seguire i programmi e rispettare le scadenze per l'iscrizione ai corsi di didattica, il tirocinio, i vari esami di carattere statale e nazionale, diventa cruciale per la possibilità degli studenti di completare i loro programmi. Coloro che, presso i dipartimenti di matematica, consigliano gli studenti nelle loro scelte devono essere coscienti della complessità del loro compito, e dovrebbero lavorare a stretto contatto con i consiglieri presso i *College of education* affinché essi abbiano la massima padronanza riguardo alle aspettative complessive dei programmi.

Accreditamento

La preparazione dei futuri insegnanti è una preparazione di carattere professionale, e in quanto tale implica alcune caratteristiche che spesso non sono famigliari ai dipartimenti di matematica. Gli insegnanti delle scuole pubbliche statali devono possedere un'abilitazione; pertanto i programmi che riguardano la loro preparazione devono essere accreditati dallo Stato, da organizzazioni a carattere nazionale, o da entrambi. Generalmente i *College of education* hanno la responsabilità del mantenimento dei livelli necessari per l'accreditamento. Questo significa elaborare rapporti periodici di autovalutazione, indirizzare le richieste e gli standard delle agenzie di accreditamento, organizzare visite di revisori esterni, rispondere alle richieste di tali revisori. Le attività dei dipartimenti che si occupano dei contenuti delle diverse materie ricadono nel campo di azione di queste agenzie di accreditamento. E pertanto i dipartimenti della Facoltà di Matematica sono chiamati all'assistenza nella preparazione di rapporti di autovalutazione e all'incontro con i gruppi di accreditamento. Questo significa che qualcuno presso il dipartimento deve tenersi costantemente aggiornato sulle questioni che riguardano l'accreditamento, sui cambiamenti e le nuove tendenze che emergono.

L'esigenza di collaborazione

La mancanza di rispetto reciproco e collaborazione fra le facoltà presso i *college of art and sciences* e le *faculty in education* è da molto tempo un ostacolo ad una efficace formazione dei futuri insegnanti.[5] Sfortunatamente è piuttosto frequente per gli studenti universitari aver occasione di sentire la Facoltà di matematica criticare la *faculty in education* per la mancanza di alti standard qualitativi, per la scarsa comprensione della matematica o per il fatto di insegnare delle cose che mancano di concretezza. E, sul versante opposto, gli studenti sentono i loro professori di educazione lamentarsi per il basso livello di insegnamento del dipartimento di matematica o per la mancanza di attenzione, da parte della facoltà di matematica, rispetto alle questioni di attualità, quali il ruolo della tecnologia. Una grande varietà di programmi, conferenze ed iniziative, volte a favorire l'incontro fra amministratori e rappresentanti delle facoltà dei *college of art and sciences* con coloro che si occupano di educazione, sono state intraprese nel corso degli anni sebbene vi siano scarsi riscontri circa l'efficacia di queste iniziative. A livello di determinati dipartimenti di matematica alcune cose potrebbero essere di aiuto: impiegando membri della Facoltà la cui cultura professionale sia centrata sull'educazione matematica; organizzando incontri congiunti o aggiuntivi per la facoltà di didattica della matematica; includendo la *faculty in education* nelle revisioni programmatiche nei progetti di sviluppo; tenendo regolari incontri fra coloro che consigliano i futuri insegnanti di matematica della scuola secondaria e quelli che svolgono questo stesso compito presso la *faculty in education*; facendo in modo di ospitare insegnanti delle locali scuole superiori in qualità di "teachers in residence"[*] e promuovendo sforzi congiunti su progetti specifici riguardo alla ricerca, il curriculum o la formazione didattica dei futuri insegnanti. I presidi di facoltà e i professori ordinari possono fare in modo che ciò si verifichi, ma sarà necessario che essi facciamo degli sforzi particolari per tenere sotto controllo e scoraggiare le conversazioni molto negative che talvolta si verificano in questi casi.

Didattica della matematica

Il corpus della ricerca che riguarda l'insegnamento e l'apprendimento della matematica è consistente e in continuo sviluppo. La più recente *major syntesis* (Grouws, 1992) comprende un capitolo dedicato al pensiero matematico avanzato ed uno sull'educazione degli insegnanti - ambedue le aree hanno dei collegamenti con aspetti della laurea che contribuiscono alla formazione didattica dell'insegnante.

La ricerca riguardante l'educazione matematica al primo livello universitario è ricca nel documentare le difficoltà degli studenti, nell'evidenziare gli strumenti che possono supportare la comprensione profonda da parte dello studente e nel ritrarre le modalità in cui la tecnologia può essere utilizzata nel primo livello dell'arena universitaria per sostenere l'apprendimento dello studente (cfr., per esempio, Dubinsky, Schoenfeld, & Kaput, 1994; Kaput, Schoenfeld, & Dubinsky, 1996; Schoenfeld, Kaput, & Dubinsky, 1998). Questa letteratura potrà risultare utile a coloro che si occupano in generale del miglioramento dell'istruzione universitaria di primo livello, ed in particolare dell'educazione dei futuri insegnanti. In realtà, nella maggior parte dei programmi, i futuri insegnanti leggono ricerche a proposito di insegnamento e apprendimento della matematica nei loro programmi di educazione all'insegnamento .Forse queste letture potrebbero essere del buon materiale di base per la Facoltà di matematica che fornisce loro i contenuti della disciplina.

Generalmente la ricerca didattica ha uno scarso impatto diretto sulla pratica, sia a livello K-12 che in quelli superiori. L'impatto della ricerca tende ad essere indiretto. In aggiunta alle scoperte, possono essere utili sia le prospettive teoriche che metodologiche. Per esempio, l'"intervista clinica"[6] è una classica metodologia di ricerca

---

[5] Storicamente è avvenuto che, nelle arene universitarie, si sviluppasse più attivamente il confronto fra *liberal arts* vs. *professional education*: "Le Istituzioni collegiali [o a livello universitario] nutrirono gravi preoccupazioni circa la capacità delle *normal schools* di preparare adeguatamente gli insegnanti che lavoreranno nelle scuole superiori, e al tempo stesso le *normal schools* erano sicure che l'incapacità di fornire metodi pratici per l'insegnamento e la necessità di adattare l'oggetto della disciplina alla mente dello studente della scuola superiore rendessero inadeguata l'istruzione fornita dai College" (Pangburn, 1932, p. 52).

[*] Insegnanti che trascorrono un periodo di studio e di lavoro presso una università, (N. d. T.)

[6] Nell'intervista il soggetto viene posto di fronte ad un problema matematico, gli viene chiesto di risolverlo e di comunicare all'intervistatore, durante la risoluzione, che cosa sta pensando. L'intervistatore pone domande e fornisce stimoli, ma non guida lo studente verso la soluzione. L'unico scopo dell'intervistatore è di ricavare il modo di pensare dello studente, in modo tale che si possa costruire una "teoria" circa la comprensione dell'argomento in oggetto da parte dello studente. Solitamente le interviste cliniche vengono registrate, trascritte, codificate e divengono parte di un più ampio insieme di dati che possono fornire informazioni circa la comprensione di un determinato concetto in un gruppo di studenti.

utilizzata per ottenere una chiara visione della comprensione, da parte dello studente, di determinati concetti. Noi abbiamo adattato questa metodologia e l'abbiamo utilizzata in corsi di matematica per insegnanti, chiedendo a futuri insegnanti di fare interviste ad uno studente di scuola superiore su un argomento difficile.

Relazione con la laurea

Un'importante considerazione, che riguarda i dipartimenti di matematica, è il fatto che gli aspiranti insegnanti di scuola superiore costituiscano una frazione crescente e significativa dell'insieme dei laureati presso molti dipartimenti. Sebbene i dati a livello nazionale non siano attualmente disponibili, sembra realistico pensare, dalle relazioni provenienti da alcune università, che più della meta dei laureati in matematica a livello nazionale intendano poi insegnare nella scuola secondaria. Se così fosse allora i dipartimenti di matematica dovrebbero seriamente prendere in considerazione cosa sia necessario per preparare un insegnante dal punto di vista matematico. I dipartimenti universitari saranno in grado di riconoscere che "la matematica dell'insegnante" esiste effettivamente, è concettualmente difficile e deve essere offerta attraverso i dipartimenti di matematica? Questo non è un problema semplice e richiede concrete risorse intellettuali e finanziarie.

Conclusione

Al centro dell'attenzione dei dipartimenti riguardo all'attività di formazione didattica degli insegnanti dovrebbe esserci la natura stessa del corso e delle esperienze di apprendimento che sono offerte agli studenti. Le conversazioni informali a livello nazionale su questi argomenti stanno rapidamente sviluppando un concetto di "matematica per l'insegnamento", così come è stata descritta in precedenza. L'analisi di cosa ciò significhi a livello di scuola secondaria è stata sviluppata ad un grado inferiore rispetto al livello di scuola elementare, ma se i ricercatori inizieranno ad occuparsi di questo indirizzo di lavoro, ci saranno alla fine delle implicazioni, e anche delle nuove sfide, rispetto alla consuetudine che i futuri insegnanti seguano gli stessi corsi di matematica frequentati da tutti gli altri studenti. Questa è una grande sfida poiché le idee sono giovani e la ricerca sta appena prendendo forma. Poco si sa di cosa questo implichi nella pratica, per non parlare di come insegnare agli studenti a farlo. I problemi possono variare sensibilmente a seconda dell'argomento, e i metodi per aiutare i futuri insegnanti ad apprendere questo argomento sono molto incerti. Noi auspichiamo che questo articolo possa contribuire ad ampliare la comunità di matematici, esperti di didattica della matematica, e ricercatori di educazione matematica desiderosi di contribuire a questa importante linea di lavoro.

CUPM Discussion Papers about Mathematics and the Mathematical Sciences in 2010

References

American Association for the Advancement of Science (by Alfred B. Garrett). (1959) Recommendations for the preparation of high school teachers of science and mathematics—1959. *School Science and Mathematics, 59*, 281–89.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000) Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, (pp. 83–104). Westport, CT: Ablex.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999) Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3–32). San Francisco: Jossey Bass.

Barnett, C., Goldenstein, D., & Jackson, B. (1994) *Fractions, decimals, ratios, and percents: Hard to teach and hard to learn?* Portsmouth, NH: Heinemann.

Begle, E. G. (1979) *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of the empirical literature*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Commission on the Training and Utilization of Advanced Students in Mathematics. (1935) Report on the training of teachers of mathematics. *American Mathematical Monthly, 42*(5), 263–277.

Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, Panel on Teacher Training. (1961) *Recommendations for the training of teachers of mathematics*. Berkeley, CA: Author. Revised edition, 1966.

Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, Panel on Teacher Training. (1971) Recommendations on course content for the training of teachers of mathematics. In *A compendium of CUPM recommendations: Studies discussions and recommendations by the Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of the Mathematical Association of America*, (pp. 158-202). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, Panel on Teacher Training. (1983) *Recommendations on the mathematical preparation of teachers*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (in preparation). *Mathematical education of teachers*. Draft report available on-line: http://www.maa.org/cbms.

Cooney, T. J., Brown, S. I., Dossey, J. A., Schrage, G., & Whittman, E. Ch. (1996) *Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H., & Kaput, J. (1994) *Research in Collegiate Mathematics Education. I*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Gibb, E. G., Karnes, H. T., Wren, F. L. (1970) The education of teachers of mathematics. In P. S. Jones (Ed.), *A history of mathematics education in the United States and Canada* (32nd Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 301–350). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

International Commission on the Teaching of Mathematics. (1911) The training of teachers of elementary and secondary mathematics. Committee no. 5. United States Bureau of Education Bulletin 1911, no. 12. Washington, DC: Government Printing Office.

Kaput, J., Schoenfeld, A. H., & Dubinsky, E. (1996) *Research in Collegiate Mathematics Education. II*. Providence, RI: American Mathematical Society.
Leitzel, J. R. C. (Ed.). (1991) *A call for change: Recommendations for mathematical preparation of teachers of mathematics.* Washington, DC: The Mathematical Association of America, Committee on the Mathematical Education of Teachers.

Ma, L. (1999) *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Monk, D. H. (1994) Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review, 13*(2), 125–145.

National Council of Accreditation of Teacher Education. (2000, May 15) Groundbreaking teacher preparation standards to be used beginning next year. [Press release]. Washington, DC: National Council of Accreditation of Teacher Education. Available: http://www.ncate.org/2000/pressrelease.htm.

The Mathematical Education of Prospective Teachers of Secondary School Mathematics

National Council of Teachers of Mathematics, Secondary Curriculum Committee. (1959) The secondary mathematics curriculum. *Mathematics Teacher, 52*, 389–417.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991) *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000) *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council. (2000) *Knowing and learning mathematics for teaching: Proceedings of a workshop*. Washington, DC: National Academy Press.

Pangburn, J. (1932) *The evolution of the American teachers college*. New York: Bureau of Publications, Columbia University.

Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J. (with Yaffee, L., Lester, J. B., & Cohen, S.) (1999) *Developing mathematical ideas, number and operations part 2: Making meaning for operations casebook.* Parsippany, NJ: Dale Seymour.

Schoenfeld, A. H., Kaput, J., & Dubinsky, E. (1998) *Research in Collegiate Mathematics Education. III*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Shulman, J. (1992) *Case methods in teacher education*. New York: Teachers College Press.

Shulman, L. S. (1987) Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22.

Stanley, D., & Callahan, P. (in progress) Unpublished working papers. The In-Depth Secondary Mathematics Institute, Texas Education Agency and the Texas Statewide Systemic Initiative of the Charles A. Dana Center at the University of Texas at Austin.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningson, M. A., & Silver, E. A. (1999) *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Due problemi aperti del curricolo di matematica

Roger Howe
Yale University

Invece di tentare una discussione del curricolo in termini generali, vorrei piuttosto prendere in esame due problemi che mi sembrano particolarmente pressanti. Il primo è una questione abbastanza vasta che coinvolge tutto il curricolo di matematica e non solo a livello universitario: il ruolo del ragionamento e della dimostrazione. Il secondo è più specialistico: che cosa fare della geometria.

Ragionamento e dimostrazione

Nell'era delle potenti applicazioni e degli studenti dalla preparazione diversificata, la prima preoccupazione dei dipartimenti di matematica deve essere quella di proteggere il nucleo della cultura matematica: il valore e la validità del ragionamento rigoroso, delle definizioni precise e dell'argomentazione stringente. Queste preoccupazioni, tipiche della cultura matematica, sono tuttavia vitali per tutta la nostra società. Ecco alcune linee di azione per conseguire questi obiettivi.

1. Favorire l'esercitazione del pensiero logico continuo nella laurea in matematica

Favorire la capacità di ragionare in modo corretto e flessibile dovrebbe essere l'obiettivo di qualsiasi programma di matematica. Si tratta di un'abilità estremamente utile per un laureato, indipendentemente dalla professione che si troverà ad esercitare.

Tutti i corsi fondamentali dell'insegnamento superiore della matematica (algebra astratta di base e algebra ulteriore, analisi reale, analisi complessa, analisi in serie di funzioni, topologia/geometria) dovrebbero basarsi esclusivamente sulla dimostrazione. Bisognerebbe prestare attenzione a fare in modo che i laureandi in matematica si abituino sistematicamente all'argomentazione attenta, alla precisione delle definizioni e alla coerenza delle giustificazioni. Ciò si potrebbe ottenere istituendo una serie di "corsi-ponte" basati sull'introduzione alla dimostrazione e alla definizione. Molte università hanno potenziato corsi di questo genere. Dovrebbero essere studiati in modo da essere adatti in modo particolare a chi si specializza, presentando sia importanti contenuti matematici sia sviluppando le abilità di ragionamento. Più avanti propongo un corso di geometria articolato in due semestri. Il corso del primo semestre può appunto servire da "passerella".

Il ruolo del ragionamento nei corsi *transitional*, come algebra lineare e calcolo infinitesimale multivariabile, deve essere esaminato attentamente. Dare troppa enfasi allo sviluppo logico in questi corsi potrebbe significare renderli proibitivi a una grossa fetta della loro utenza potenziale (ed è proprio qui che paghiamo la scarsa preparazione logica della scuola superiore). D'altra parte, non dare sufficiente importanza alla struttura logica, non permetterà a chi si specializza in matematica o chi segue altri corsi ad alto contenuto matematico di afferrare i concetti fondamentali di queste materie di base. La situazione è forse più seria nell'algebra lineare, corso fondamentale del curricolo di matematica. L'algebra lineare è una materia di base sia per chi si specializza in matematica sia per una vasta gamma di discipline applicate. In un mondo ideale con moltissimo tempo a disposizione, dopo un'introduzione, si farebbe seguire un corso vero e proprio, più o meno come si ripassa con il massimo rigore il calcolo in un buon corso di analisi. Un corso supplementare di questo tipo non esiste e, se anche ci fosse, uno schema come quello presentato creerebbe problemi di articolazione con il calcolo multivariabile (nel senso di a più di tre dimensioni), che attinge pesantemente all'algebra lineare e perfino a quella multilineare. Se possibile, si dovrebbero offrire livelli diversi di algebra lineare, una a base prevalentemente numerica ed una a base logico-concettuale. Gli studenti dovrebbero essere consigliati bene su quale scegliere, a seconda delle loro intenzioni per il futuro.

2. *Operare per l'integrità matematica e logica dei corsi ordinari*

Con questo titolo si intende il fatto di predisporre corsi che rendano giustizia al nucleo matematico della materia, soddisfacendo contestualmente la clientela che chiede che il corso sia sufficientemente correlato alla loro esigenza di applicazioni. Questi corsi dovrebbero essere costruiti consultando docenti dei diversi campi di applicazione. Gli incontri dovrebbero mirare a individuare e soddisfare le principali necessità del campo di applicazione. I servizi offerti dovrebbero essere focalizzati quanto più è possibile all'interno del contesti dei diversi dipartimenti. Per esempio, se sia la domanda che le risorse sono sufficienti, il calcolo infinitesimale mirato a specifici campi di applicazione (p. es. il calcolo infinitesimale per biologi) è da preferirsi a un corso generico di calcolo infinitesimale. Il vantaggio principale non consiste nel fatto che la matematica coinvolta sarebbe sostanzialmente diversa, quanto nel legarla a contesti che sono particolarmente significativi per gli studenti. A sostegno di quanto affermato si potrebbero addurre anche altri validi esempi. Attualmente, molte interessantissime applicazioni del calcolo infinitesimale alla fisica non possono essere presentate in un corso generico di calcolo infinitesimale, in quanto la maggior parte degli studenti non possiede una adeguata formazione di base di fisica. Oltre a promuovere un'efficace revisione dei corsi ordinari alle esigenze delle aree di applicazione, le sessioni di consultazione possono essere occasioni per perorare la causa dei sostegni concettuali alla materia.

Il rigore e il ragionamento dovrebbero essere sempre presentati in modo da essere significativi per l'utenza. Quando idee profonde e ragionamento vengono tirati in ballo in un corso ordinario, dovrebbero essere presentati come "grandi idee". Un esempio è costituito dal nucleo teoretico del calcolo infinitesimale (l'esistenza di estremi, il teorema di Rolle, il teorema del valore medio [di Lagrange] e il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale). Oltre a discutere la necessità delle ipotesi, ci si può abbozzare il contesto storico, facendo osservare come lo sviluppo della geometria coordinata preparò la strada all'importantissima scoperta del teorema fondamentale, unendo due problemi di base che sembravano assolutamente separati. Un esempio che viene focalizzato un po' di più è la definizione di continuità. Va presentata come un trionfo dell'intelletto, come in realtà è stata. Un altro esempio è costituito dall'algebrizzazione in algebra lineare della nozione fortemente geometrica di dimensione. L'importanza dei risultati, il ruolo delle ipotesi, l'utilizzo come assiomi di teoremi profondi e altre considerazioni del genere dovrebbero ricevere l'attenzione che meritano. Si dovrebbero discutere gli aspetti più problematici e complicati delle dimostrazioni. In sede d'esame è legittimo porre domande su questi sviluppi logici piuttosto che soffermarsi sulle dimostrazioni o le applicazioni dei teoremi.

La CUPM può svolgere un prezioso servizio avviando lo studio dei principali corsi ordinari al fine di chiarire quali siano gli aspetti teoretici essenziali del corso e di raccomandare adeguati livelli di trattazione dei concetti più importanti. Sarebbero auspicabili anche suggerimenti di modalità diverse per trattare determinati argomenti a seconda del tipo di utenza. L'algebra lineare è la materia che probabilmente richiede le maggiori attenzioni.

3. *Introdurre il rigore del ragionamento e il problem-solving come caratteristiche del curricolo di studi umanistici*

Come le conquiste tecnologiche sono una parte vitale del retaggio della matematica al mondo in senso lato, lo è anche l'abitudine al ragionamento che serve a intuirle e a svilupparle. È fondamentale saper definire con estrema chiarezza ciò di cui si sta parlando, essere assolutamente espliciti nelle proprie ipotesi, specificare le condizioni di validità del proprio ragionamento ed argomentare nel modo più attento e preciso possibile. Né può essere considerato da meno saper distinguere fra un'affermazione e il suo opposto, essendo consapevoli del fatto che sostenere la proposizione antitetica equivale a cercare di dimostrare quella di partenza. Risulta essenziale saper distinguere fra impossibilità, possibilità e necessità (che sono quantificatori esistenziali ed universali). E anche saper operare distinzioni, analizzare caso per caso, distinguere le differenze sostanziali da quelle marginali, assicurarsi di aver preso in considerazione tutti i casi. Scomporre problemi complessi in algoritmi. Formulare ipotesi semplificanti ma anche mettere al vaglio i casi semplici o problemi che a prima vista sembrano analoghi. Queste operazioni possono essere estremamente preziose per molti di quelli che non si troveranno mai ad usare la matematica tecnica. E, a maggior ragione, proprio perché l'esercizio della logica un tempo previsto nei corsi di geometria euclidea della scuola media superiore sta diventando sempre meno una caratteristica della scuola americana, ci sono motivi più che validi perché a livello universitario si svolga un corso-base di "igiene mentale" del ragionamento. E con ciò non intendo un corso formale di logica, anche se il ragionamento logico sarebbe la caratteristica fondante del corso.

Penso piuttosto a un corso di "problemi quotidiani", con obiettivi analoghi a quelli dei corsi su "temi di attualità" che un tempo caratterizzavano il primo anno di corso della laurea in lettere. Un corso di questo tipo sarebbe pieno di problemi, della natura più diversa, alcuni spiccatamente matematici, altri meno, ma comunque focalizzati alla logica e al buon senso. La finalità non sarebbe tanto quella di affrontare un determinato sillabo di argomenti matematici, né tanto meno quella di fornire una scelta di curiosità e stranezze della matematica, quanto piuttosto quella di sfidare gli studenti a pensare e a ragionare, mettendoli di fronte a una serie di situazioni problematiche, alcune tratte dal "mondo reale" ed altre puramente formali; alcune che richiedono l'impiego di competenze tecniche, altre assolutamente accessibili a tutti. In questo modo i docenti avrebbero l'opportunità di fare sfoggio dei loro quesiti preferiti, nonché di apprenderne di nuovi. I problemi dovrebbero essere raccolti per gruppi per illustrarne le caratteristiche comuni, ma anche per far vedere come problemi di tipo diverso possano evocare principi comuni. In altre parole, il corso potrebbe servire sia ad evidenziare il "come" per alcune tipologie di problemi, ma anche come strumento per perseguire obiettivi intellettuali di più ampia portata. Mi auguro che un corso di questo tipo possa essere un contributo specifico dei dipartimenti di matematica ai curricoli di studi umanistici. Inoltre potrebbe risultare particolarmente utile a futuri insegnanti di scuola media superiore e potrebbe essere parte di un piano per l'inserimento di questi contenuti nei programmi della superiore. Ma il successo più sorprendente che questo corso potrebbe avere sarebbe quello di non essere più attivato poiché la maggior parte degli studenti del primo anno di corso all'università ne hanno già acquisito i contenuti e le competenze alla scuola media superiore.

4. Prestare molta attenzione alla formazione dei docenti e sostenerne il potenziamento

Per gli insegnanti di scuola media superiore il fatto di provare entusiasmo e di apprezzare il bisogno di un pensiero attento ed elevato dovrebbe essere altrettanto importante, e forse ancora più difficile da conseguire, che la conoscenza dettagliata di tutti gli aspetti della matematica di scuola media superiore. In realtà, un insegnante di scuola media superiore che non comprenda e non apprezzi la struttura logica degli argomenti del proprio programma di matematica è privo di una aspetto fondamentale, ancorché non riconosciuto ufficialmente, delle sue qualificazioni. Si dovrebbero attivare corsi mirati a fornire proprio queste competenze. Il tipo di corso caldeggiato sopra e la sequenza di elementi di geometria illustrata sotto potrebbero costituire un primo passo verso una soluzione.

5. Sostenere (attraverso il MAA) una rinnovata attenzione al ragionamento rigoroso nelle scuole medie superiori

Il progressivo accantonamento del tradizionale corso di geometria che prestava molta attenzione alla logica e al ragionamento, sta cancellando l'idea e l'esercizio del ragionamento rigoroso dai programmi della scuola media superiore. Il fatto che gli studenti della scuola media superiore possano perdere questa introduzione al ragionamento sistematico potrebbe costituire un grave fallimento delle istituzioni e, purtroppo, sembra si stia già verificando a svantaggio non solo della società in generale, ma anche dei dipartimenti di matematica, in quanto dei potenziali laureandi in matematica arrivano all'università senza la minima conoscenza della dimostrazione matematica e senza aver mai esercitato l'argomentazione logica a partire da premesse date o il rigore nel fornire definizioni.

I dipartimenti universitari di matematica, riuniti nel MAA, dovrebbero caldeggiare una maggiore attenzione al ragionamento rigoroso nelle scuole medie superiori. Tutti i corsi di matematica nelle scuole medie superiori dovrebbero essere visti come i luoghi del ragionamento e della dimostrazione. I programmi con cui si preparano gli insegnanti e l'aggiornamento continuo degli stessi dovrebbero sottolineare la necessità del pensiero logico e della deduzione in algebra, geometria (sia sintetica che analitica), del pre-calcolo e del calcolo nonché l'importanza dell'esercitarli. Il semplice fatto di evidenziare che alcune derivazioni non sono altro che argomenti deduttivi e l'esplicitarne le linee di ragionamento potrebbe già essere utile. Similmente, la breve sequenza di teoremi (descritti sopra nella sezione 2) che stanno alla base del calcolo infinitesimale dovrebbero ricevere la dovuta attenzione. Tutto ciò non dovrebbe costituire uno shock per studenti abituati a vedere e a trattare l'argomentazione logica fin dai corsi iniziali. Nel presentare questi momenti di rigore, non basta evidenziare semplicemente lo sviluppo logico. Gli studenti trarrebbero profitto anche dalla considerazione del motivo per cui tali sviluppi sono desiderabili, di che cosa conseguendo e del ruolo e della necessità degli assunti nei vari teoremi. Tuttavia, accanto a una maggiore attenzione al ragionamento rigoroso e alla deduzione logica nella matematica di tutte le scuole superiori, si dovrebbero attivare uno o più corsi in cui tutto ciò sia l'obiettivo primario. Accanto al corso tradizionale di geometria, si potrebbero individuare altri spazi per questo tipo di attività come un corso di problem-solving o un corso base di informatica. Almeno uno di questi corsi dovrebbe costituire un requisito essenziale per accedere all'università.

In questi sforzi di potenziare i programmi della scuola media superiore, la comunità matematica a livello universitario dovrebbe lavorare alla riforma completa del curricolo matematico delle elementari e della media in modo da fornire strumenti per il potenziamento del rigore del ragionamento nella media superiore. Occorre far sentire la voce dei matematici per controbilanciare le richieste insistenti di un insegnamento pratico, che tende a enfatizzare gli artefatti della matematica (come il calcolo infinitesimale negli anni '60 e la distribuzione normale e la grafica al computer oggi) a detrimento dei nuclei fondanti.

Geometria

La geometria oggi è chiaramente la palla al piede all'interno del curricolo universitario di matematica. In molte istituzioni non viene fatta una proposta sistematica, mentre in altre si offre soltanto un corso mirato specificamente agli insegnanti di scuola media superiore, proponendo una mescolanza di assiomi, risultanze curiose della geometria piana euclidea, indagini di concetti e risultanze delle geometrie non-euclidee (iperbolica ed ellittica) e/o geometria proiettiva piana e magari concetti base sulle funzioni isometriche.

Ma non dovrebbe essere così. La geometria è stata per secoli il cuore della matematica. Gli *Elementi* di Euclide sono stati per più di duemila anni al vertice del pensiero puro. La geometria ha giocato un ruolo fondamentale nella rivoluzione del XIX secolo che ha fissato la natura essenzialmente astratta della matematica.

La geometria è ancora una parte vitale della matematica. Come si dimostra nella teoria di Lie, nella **geometria algebrica**, nei sistemi dinamici, nella geometria di Riemann e in altre aree di ricerca, costituisce una parte essenziale della ricerca stessa. Continua ad essere un legame fondamentale fra la fisica e la matematica. La geometria, computerizzata nel CAD-CAM, funge da strumento per le maggiori applicazioni industriali della matematica.

Molti degli attuali ricercatori matematici ricordano il proprio corso di geometria alla scuola media superiore come un'esperienza formativa, il momento in cui scoprirono la potenza e l'eleganza della dimostrazione matematica. Proprio quei corsi sono sempre più a rischio. Aumentando il numero degli studenti che seguono un corso di geometria, la dimostrazione e il ragionamento ricevono sempre meno attenzione. E tutto ciò ha una ricaduta negativa non solo sulle competenze geometriche degli studenti che arrivano all'università: nelle scuole medie superiori c'è sempre meno spazio dedicato al ragionamento corretto. Non è soltanto l'intuizione geometrica, ma sono le capacità di base del pensiero logico e, in modo particolare, la dimostrazione matematica a non essere più favoriti nelle scuole medie superiori. E dal momento che la funzione principale di molti corsi universitari di geometria è proprio quella di fornire una formazione di base agli insegnanti dei corsi tradizionali della scuola media superiore, che stanno appunto scomparendo, è la sua stessa attuabilità a venire messa in discussione.

Sarebbe davvero una tragedia se la geometria fosse esclusa dai curricoli di matematica. Quale può allora essere concretamente il suo ruolo nei attuali curricoli?

Ecco una proposta che si basa su un progetto che da alcuni anni mi sforzo di realizzare con William Barker del Bowdoin College. Suggerisco un corso di geometria articolato su due semestri con obiettivi diversi in relazione alle varie offerte formative dei dipartimenti. Gli obiettivi principali comunque sono:

1) Sviluppare l'intuizione geometrica relativamente al mondo reale;
2) Fornire occasioni di esercitarsi nel ragionamento rigoroso;
3) Evidenziare il nesso fra gli obiettivi 1) e 2) e
4) Dimostrare i legami della geometria classica con tematiche più ampie e più attuali della matematica e della fisica.

A grandi linee, il primo corso punta a conseguire i primi tre obiettivi, mentre il secondo si concentra sul quarto. Tuttavia, già nel primo corso, si forniscono collegamenti significativi e motivazione all'algebra astratta, proponendo una serie di esempi di gruppi e mostrando come le trasformazioni possano essere usate per dimostrare teoremi dal contenuto geometrico assolutamente classico. D'altro canto, il secondo corso mantiene un punto di vista concreto pur introducendo tematiche decisamente più sofisticate.

L'articolazione dei corsi può essere mirata a porre rimedio al progressivo indebolimento del corso di geometria della scuola media superiore. Se si vuole, il primo semestre può fungere da "corso-ponte" con l'obiettivo specifico di introdurre ed esercitare il ragionamento e la dimostrazione per studenti che ne avessero bisogno. Con un taglio leggermente diverso (o no, a seconda dell'abilità e delle propensioni del docente nonché della tipologia della classe), potrebbe anche fungere da corso generale di studi umanistici per chi non si laurea in matematica. Il primo semestre presenta anche collegamenti con studi matematici più avanzati, in particolar modo con l'algebra astratta, e ovviamente è propedeutico al secondo semestre. In quest'ultimo si operano collegamenti fra la geometria e la matematica moderna superiore, specialmente i gruppi di Lie e la geometria differenziale, ma anche l'analisi complessa. L'algebra lineare viene utilizzata sistematicamente. Il corso si prefigge di fornire una ricca raccolta di esempi di gruppi e di dimostrare come la teoria dei gruppi presieda alla geometria, riassumendo lo spettacolare sviluppo della geometria nel XIX secolo alla luce della lettura operata da Felix Klein. Il corso assolve anche alla funzione di creare un collegamento fra la teoria dei gruppi e la geometria con la fisica, in modo particolare con la teoria della relatività, costituendo pertanto anche un'offerta formativa interessante per alcuni studenti di fisica nonché per i più ambiziosi laureandi in studi umanistici.

Sebbene il corso sia ambizioso, e ad alcuni potrebbe sembrarlo in misura eccessiva, possiede comunque un alto grado di flessibilità, a seconda della preparazione e delle inclinazioni degli studenti. Con studenti con una preparazione di base debole, ci si può soffermare maggiormente sui primi argomenti, mentre con studenti matematicamente più ambiziosi, si può procedere più velocemente. In realtà, il corso è già stato proposto con notevole successo a utenze molto diverse, comprese una classe di seri laureandi in matematica nonché altre classi di studenti non particolarmente inclini allo studio della matematica.

Primo corso

Ecco un programma omnicomprensivo (nel senso di eccessivo) per il primo semestre.

1) Ripasso della geometria di base. Ha lo scopo di rinsaldare l'intuizione e le conoscenze che lo studente ha della geometria piana e svolge la funzione di semplice (non formale, ma neppure ridotto) studio degli assiomi della geometria.
2) Studio delle isometrie piane. Questo introduce l'idea di trasformazione e usa la geometria di base per dimostrare la natura delle isometrie piane. I punti chiave di questa fase del corso sono due teoremi di struttura. Il primo descrive la natura di un'isometria e fornisce una semplice classificazione delle funzioni isometriche, basata su una fattorizzazione in un prodotto di una serie di riflessioni rispetto a una retta. Il secondo fornisce una visione complessiva di tutte le funzioni isometriche. Viene in parte introdotto anche il lessico della teoria dei gruppi, ma non ci si preoccupa ancora di studiare i gruppi in quanto tali.
3) Estensione alle similitudini del piano. In questa fase i contenuti più importanti sono che ogni similitudine è (unicamente) il prodotto di una dilatazione uniforme da un punto e una isometria e che ogni similitudine stretta (nel senso di non isometrica) possiede un punto fisso.
4) Applicazioni delle trasformazioni alla geometria. Esiste una gamma vastissima di interessanti risultati geometrici che possono essere dimostrati in modo elegante utilizzando trasformazioni, compresa una sorprendente serie di risultati collegati con il cerchio a nove punti. Le dimostrazioni trasformazionali forniscono spesso una visione più completa della dimostrazioni tradizionali sintetiche.
5) Estensione alle tre dimensioni. Ciò offre la possibilità di potenziare le capacità di visualizzazione spaziale. L'approccio trasformazionale enfatizza il parallelismo (non si tratta di un gioco di parole) con la teoria del piano. Anche in questa fase la fattorizzazione delle isometrie in prodotti di simmetrie è uno strumento fondamentale. Le tre dimensioni tornano a essere necessarie anche in seguito (nel secondo corso) come ambiente per un approccio proiettivo alla geometria non euclidea.
6) Figure simmetriche. L'approccio trasformazionale rende facile e naturale lo studio delle figure simmetriche nello spazio e nel piano. Si possono studiare le figure finite (poligoni e poliedri regolari), figure infinite ma discrete (motivi di fregi, di carte da parati e cristalli) e figure continue (linee, cerchi, eliche). Si può studiare la simmetria sottosa alle similitudini come pure alle isometrie, comprendendo anche le spirali. Ovviamente questo argomento offre una serie infinita di modelli presi dalla natura e dall'arte. Gli esempi diversificati di gruppi che si incontrano, unitamente all'uso estensivo delle idee che si rifanno alla teoria dei gruppi nello studio delle funzioni isometriche e delle similitudini, forniscono sia informazioni di base che motivazione per l'apprendimento della teoria dei gruppi nell'algebra astratta.
7) Volume, area e dimensioni. Si tratta di una breve introduzione alle idee fondamentali di misura e la relazione fra la dimensione e le proprietà di scala di misura sotto dilatazione. Permette di fare anticipazioni sulle idee di fondo del sistema dei numeri reali e della teoria della misura, ma offre anche uno sconfinamento nella geometria dei frattali. Il comportamento di quantità diverse *sotto scala* offre nuovamente validi collegamenti con il mondo naturale. Questo argomento è il più opzionale.

Il primo corso potrebbe essere proposto sia prima che dopo un corso in algebra lineare. Nel caso in cui venga proposto prima, come corso di collegamento, potrebbe permettere di approfondire il livello a cui affrontare poi il corso in algebra lineare, ma, in questo caso, dovrebbe probabilmente essere più mirato agli obiettivi di base. Se invece l'algebra lineare può essere assunta come prerequisito, potrebbe sembrare un po' artificioso per questo corso essere proposto in un'ottica così sintetica e in questo caso varrebbe quanto proposto sopra. L'introduzione di coordinate, che si propone qui per il secondo corso, potrebbe essere anticipata.

Secondo corso

Il primo corso, sebbene enfatizzi le trasformazioni, è fortemente orientato verso la geometria tradizionale. Il secondo corso ha un orientamento molto più moderno e, in una certa misura, ripropone gli sviluppi dal 1850 al 1905 (si spera con qualche miglioramento dovuto alla nostra prospettiva di oggi). In particolare, si prefigge di mostrare come le idee trasformazionali stabiliscano un collegamento diretto fra la geometria eucliedea e la specificità della teoria della relatività, evidenziando come questo collegamento passi proprio attraverso la geometria non euclidea (iperbolica ed ellittica). Pertanto, riunisce strettamente tutte le geometrie piane collegando la geometria e la simmetria alla fisica, aspetto fondamentale per tutta la fisica teoretica del XX secolo. Inoltre funge da introduzione alle idee fondamentali dei gruppi di Lie e ad alcuni dei loro impieghi. Il corso fa un uso intensivo dell'algebra lineare, con numerosi calcoli pratici, e può servire a rinforzare le competenze dello studente in algebra lineare. Verso la fine del corso vengono operati collegamenti importanti con l'analisi complessa. Il corso presenta anche collegamenti significativi con la topologia a poche dimensioni, passando per le superfici e le varietà iperboliche di Riemann e potrebbe essere modificato per enfatizzare questi aspetti.

Ecco un profilo degli argomenti del secondo corso.

1) Crerare un sistema di coordinate sul piano euclideo. Si introducono il tradizionale sistema delle coordinate cartesiane (o, più precisamente, sistemi, dal momento che presta attenzione ai dati necessari a specificare un sistema di coordinate). Successivamente prende in considerazione come le funzioni isometriche producano trasformazioni delle coordinate. Le traslazioni vengono collegate alle somme vettoriali e le isometrie che determinano le coordinate dell'origine vengono espresse in termini di matrici. Poi si prende in esame la trasformazione generale rappresentata da una matrice e viene introdotta l'idea di geometria affine come geometria di linee rette e di parallelismi.
2) Geometria affine di sezioni coniche. Viene studiato il comportamento delle sezioni coniche sottoposte a trasformazioni affini. La risultante più importante è la riduzione a forma standard per mezzo di funzioni isometriche. Come corollario, si vede come tutte le ellissi e similarmente le iperboli sono equivalenti in modo affine. Si studiano le conseguenze, ovvero che tutte le sezioni coniche sono egualmente simmetriche in quanto oggetti affini, nonché la misura di una distanza naturale su una retta, un cerchio e un'iperbole dal punto di vista della simmetria. In questo modo si fornisce un nuovo contesto ad alcuni argomenti classici del calcolo infinitesimale a una variabile: la funzione logaritmica e le analogie fra le funzioni circolari ed iperboliche.
3) Geometrie proiettive e non euclidee. Si fornisce l'interpretazione proiettiva della geometria piana euclidea, utilizzandola per estendere la geometria euclidea a quella proiettiva. Lo stesso schema viene impiegato per fare una panoramica delle geometrie metriche non euclidee, ovvero si prende in esame la "gerarchia reale di Klein" dei sottogruppi del gruppo di matrici reali 3 X 3. La gerarchia di Klein rappresenta una delle massime sintesi della geometria del XIX secolo, come viene espresso nell'affermazione di Cayley per cui "la geometria proiettiva è tutta la geometria". Infine, questa immagine viene utilizzata per descrivere la geometria euclidea come un caso limite o una degenerazione della geometria iperbolica o di quella ellittica, e come caso che separa le due.
4) Relatività ristretta come geometria di spazio-tempo. Il tema principale qui è costituito dall'interpretazione dei fenomeni cinematici in quanto riflessione della geometria spazio-tempo. La discussione richiede tutta la portata dell'interpretazione di Klein della geometria come studio delle invarianti di un gruppo di simmetria ed utilizza anche in modo essenziale la relazione fra i sistemi di coordinate e i cambiamenti di coordinate alle trasformazioni simmetriche. Gli spunti offerti dall'argomento precedente permettono di individuare un'analogia fra la transizione dallo spazio-tempo galileo-newtoniano allo spazio-tempo di Einstein nonché il passaggio dalla geometria euclidea a quella iperbolica o di Lobachevsky. La presentazione della geometria iperbolica come "deformazione" della geometria euclidea permette di vedere la relatività di Einstein come deformazione della relatività galileo-newoniana.
5) La geometria euclidea e i numeri complessi. Ci si sofferma sull'identità essenziale dei gruppi (che mantengono l'orientamento) di somiglianze nel piano euclideo e il gruppo affine della retta complessa, per poi ampliare in modo da ottenere una "gerarchia di Klein complessa" di sottogruppi di matrici complesse 2 X 2.

Questa offre un parallelo, pur essendo incompatibile, con la molto più nota gerarchia reale di Klein della parte 3. La geometria euclidea viene interpretata in termini di geometria proiettiva complessa unidimensionale (geometria conforme ad aka o geometria inversiva) piuttosto che geometria proiettiva reale bidimensionale. La relazione fra le due gerarchie può essere vista alla luce delle figure di base della geometria euclidea, la linea e la circonferenza. Nella gerarchia reale di Klein, la linea retta è l'oggetto fondamentale, mentre la circonferenza perde la sua identità e viene assorbita nella classe più ampia delle sezioni coniche. D'altra parte, nella gerarchia complessa di Klein, è la circonferenza ad essere fondamentale e le linee rette compaiono semplicemente come circonferenze che passano per un punto all'infinito.

L'esistenza di entrambe le gerarchie è forse la formulazione più profonda della ricchezza della geometria piana. Le due gerarchie corrispondono anche ai due modelli più comuni di geometria iperbolica: il punto di vista reale porta al modello di Beltrami Klein, e il punto di vista complesso porta al modello di Poincarè. In questa situazione, l'analogo delle riflessioni è l'operazione di "trasformazione in una circonferenza". La discussione può essere ricollegata alla geometria classica prendendo in considerazione alcune delle più belle applicazioni di trasformazione della geometria classica, compreso il teorema di Feuerbach e il parteggiato di Poncelet per triangoli e quadrilateri.

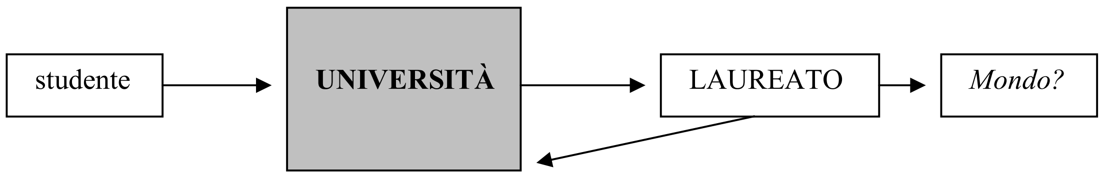
Una sequenza come quella descritta sopra possiede un alto grado di flessibilità nonché tutte le potenzialità per poter essere utile ai futuri insegnanti di scuola media superiore e a chi intende laurearsi in matematica. Entrambi i corsi posseggono un alto livello di flessibilità sia all'inizio che alla fine e possono essere resi più semplici o più sofisticati, pur conservando lo stesso nucleo centrale. Questi corsi dovrebbero interessare anche molti studenti che sono attratti dagli aspetti filosofici o dalle "grandi idee" della matematica e in particolare i laureandi in fisica.

L'*accountability* in Matematica: *Elevare gli obiettivi!*

Sandra Z. Keith
St. Cloud State University

Che cosa ci porterà il prossimo decennio in matematica rispetto alla valutazione del processo o, con il termine inglese che va per la maggiore, "accountability"? Nel trattare quest'argomento, non faremo previsioni su esiti futuri, ma punteremo la nostra attenzione al processo per mezzo del quale potremo compiere miglioramenti, nei prossimi dieci anni, in termini di obiettivi, analisi del processo e visione generale di esso.

Questo grafico potrebbe rappresentare la visione dell'università che avevamo fino a ieri:



Lo studente era il prodotto finale della "scatola nera" universitaria ed emergeva come variabile indipendente nel "mondo reale" (o come spesso ci si augurava, ritornava a lavorare nell'università stessa). Tuttavia, il "mondo reale" inteso come qualche cosa che semplicemente sta "là fuori" non è un concetto molto attuale. In una visione più accurata dell'attuale quadro educativo, l'università è posta dentro al mondo ed è un organismo permeabile che consente e richiede scambi di input/output da/verso il mondo:

I fattori che hanno modificato il quadro di riferimento

Dal settore pubblico

- L'amorosa relazione fra settore pubblico e educazione superiore si sta sfilacciando. Una parte sempre maggiore delle pubbliche istituzioni non sono più, in realtà, pubbliche: anche le istituzioni statali aumentano le tasse scolastiche e fanno affidamento su finanziamenti raccolti da fondazioni, proprio come le istituzioni private. (Il governatore del Minnesota, che in gioventù ha abbandonato il proprio Community College, ha affermato che "Se sei abbastanza bravo da andare al college, hai anche i mezzi per pagartelo", argomento questo, detto per inciso, con il quale sembra che egli abbia conquistato il voto degli studenti e vinto così le elezioni.)
- Nel momento stesso in cui il settore pubblico riduce i finanziamenti pretende ***di più*** dalle istituzioni scolastiche e ciò che si attende è un livello qualitativo più elevato. Il datore di lavoro è meno interessato a che uno studente abbia conseguito un livello "A" in un certo corso oppure che il programma del corso

comprendesse un certo argomento, quanto piuttosto che lo studente abbia raggiunto le capacità di analisi richieste dal lavoro, sia in grado di spiegare ciò che sta avvenendo, da un punto di vista tecnico, in meno di una pagina, sia capace di cogliere gli aspetti essenziali, di comprendere e produrre relazioni, di lavorare in una squadra, sia aggiornato dal punto di vista tecnologico. In altre parole, ci si attendono da parte dello studente quelle abilità che sono indici di conoscenza, flessibilità e potenzialità (profondità, larghezza e altezza!). E ci si attende che gli argomenti dei corsi siano in grado di produrre questo genere di qualità.

- N. B.:le industrie sono alla ricerca di studenti che abbiano compreso il processo di feedback nel "*controllo di qualità*" (si legga: assessment), attualmente insegnato presso alcuni dipartimenti di Statistica e di Informatica.

- Nel momento in cui il settore pubblico riduce i finanziamenti e aumenta le proprie aspettative, esso si attende anche che una ***percentuale ancora maggiore*** di studenti , diciamo l'80%, acceda all'istruzione superiore. Questo avviene in un momento in cui la gran massa di studenti della scuola superiore in America sono notoriamente poco preparati e la competizione per l'ammissione presso le istituzioni scolastiche e il collocamento lavorativo si svolgono a livello internazionale.

Dai programmi educativi delle scuole statali (che comprendono il 60% della popolazione studentesca nell'ambito dell'educazione superiore) apprendiamo che:

- Dato che i sistemi scolastici pubblici, elementari e secondari, sono tenuti a valutare l'apprendimento dello studente in modo *trasparente* e a renderne ragione all'utenza anche le istituzioni universitarie, a loro volta, dovrebbero fare la stessa cosa. I corsi per diventare insegnanti di scuola secondaria sono offerti *all'interno* di tradizionali corsi di laurea e sono già oggetto di valutazione, sulla base di standard statali e federali, utilizzando criteri che però si riferiscono più a futuri insegnanti che a laureati in quanto tali.
- Per quanto riguarda gli obiettivi di apprendimento, le organizzazioni che si occupano della formazione degli insegnanti hanno fatto nel passato riferimento alle organizzazioni federali delle diverse discipline. Tuttavia, se tali organizzazioni non sono all'altezza delle aspettative di miglioramento e di scambio reciproco che provengono dal mondo dell'insegnamento, le istituzioni per la formazione degli insegnanti possono progettare propri percorsi formativi al fine di colmare le deficienze rispetto agli indicatori di qualità: per esempio istituendo un proprio specifico corso in un certo campo ed eliminandone invece un altro.
- Sebbene l'insegnamento e la didattica siano spesso considerati un'arte, ci si aspetta sempre di più che la distribuzione delle risorse finanziarie avvenga sulla base di risultati concreti. Ciò renderà inseparabili i metodi di valutazione del processo dalla pratica dell'insegnamento.
- Considerazioni di equità sono sempre più in primo piano fra i temi che preoccupano le scuole, a causa della presenza in questi contesti di studenti appartenenti a minoranze e provenienti dall'estero che pongono delle sfide organizzative per quanto attiene al loro alloggio, orientamento e istruzione.

E dagli studenti:

- In molti casi, a causa della necessità di integrare nelle loro vite la scuola ed il lavoro, gli studenti cambiano scuola con sempre maggiore facilità. Questa problematica ha favorito l'affermarsi del concetto di educazione intesa come "televersity", con apprendimento a lunga distanza e lezioni virtuali - cosa che non è stata ancora ben compresa per quanto riguarda il suo impatto sull'educazione ed il curriculum.
- Infine gli studenti chiedono di avere l'opportunità di trovare impieghi remunerativi in campi tecnologici che spesso travalicano le tradizionali barriere dipartimentali. Al tempo stesso il mercato del lavoro è imprevedibile e fortemente condizionato dalla tecnologia. Di conseguenza gli studenti hanno cominciato a valutare criticamente i programmi universitari non solo in base alla loro qualità ma per la flessibilità, la spendibilità e la capacità di proiettarli nel mondo del lavoro.

Gli strumenti di valutazione del processo offrono ai dipartimenti la migliore opportunità di reagire, in modo appropriato, a queste esigenze e pressioni.

Accountability: necessità di efficienza e responsabilizzazione

La valutazione del processo avviene sia che noi ne siamo coscienti o meno: al limite nella forma di una diceria a proposito di un tale professore o di un graduale drenaggio di studenti dalla facoltà. La sfida è allora alla nostra capacità di costruire piani di studio in maniera tale da consentirci il controllo del contesto di valutazione (assessment, N.d.T.). E una cosa è assolutamente evidente: l'accountability non è qualcosa che è rivolto solo agli altri. Un professore mi ha recentemente riferito i risultati di un'indagine svolta presso il suo college:quando ai membri della facoltà fu chiesto di attribuire diversi livelli di importanza a una serie di questioni relative al college e a loro stessi, personalmente, le maggiori differenziazioni furono espresse a proposito del tema della valutazione dei processi. Questa venne considerata della massima importanza per quanto riguarda l'università e invece il corpo docente non ne individuò nessun possibile uso in riferimento alle singole persone. La valutazione del processo tuttavia è un *contesto,* una *struttura* al cui interno le attività educative fioriscono, e l'accountability si realizza a livello dello studente, insegnante, dipartimento, amministrazione, organizzazioni nazionali di accreditamento e persino organizzazioni quali la MAA.

Il rapidissimo elenco precedente riassume alcune delle pressioni che in generale vengono esercitate su di un'università, ma non ne abbiamo ancora discusso l'impatto sui dipartimenti di ***matematica***. A proposito della matematica le preoccupazioni raddoppiano. Non è necessario dirlo, non è più accettabile per il pubblico che il 20-60% della popolazione scolastica ritenga la matematica incomprensibile: una specie di scogliera che solo i più tenaci sono in grado di conquistare, un filtro invece che una pompa. Il ruolo dei dipartimenti di matematica è cambiato: mentre il numero degli studenti nel corso di laurea tradizionale si riduce, un numero crescente di studenti vorrebbe semplicemente sopravvivere ai corsi obbligatori oppure a generiche richieste di sviluppo. E non sono più sufficienti, per valutare la qualità del nostro lavoro,.esami di ammissione con graduatorie e soglie minime. La preparazione didattica degli insegnanti di matematica non è mai stata maggiormente sotto gli occhi di tutti, e la "mancanza di preparazione" viene rimpallata fra lo studente (che odia la matematica) e il docente (che odia la matematica). Gli studenti spesso sono disperati e mal preparati, e al tempo stesso insofferenti rispetto alle richieste di un curriculum che è rimasto essenzialmente inalterato per mezzo secolo.

Da dove veniamo?

Le questioni riguardanti la valutazione del processo vennero alla ribalta nella comunità educativa sul finire degli anni '80. Gli addetti alla valutazione e altri esperti di educazione potevano constatare che un'università che operava seguendo le classiche griglie di valutazione di quei tempi (cfr.. sotto) non lavorava in effetti al massimo delle sue potenzialità.

	Studente	**Insegnante**	**Dipartimento**
Lo studente valuta		Schede di valutazione dell'insegnante	
L'insegnante valuta	Verifiche, compiti a casa	Comitati	
Il dipartimento valuta	Dati	Comitati / Dati (ricerche, riconoscimenti,ecc.)	Comitati / Dati

Seguendo questa tendenza, la MAA nel 1990 è entrata sul terreno della valutazione del processo con un sottocomitato del CUPM. Nel 1995 questo comitato di valutazione ha pubblicato su *FOCUS* il documento, prodotto da James Leitzel, *Assessment of Student Learning for Improving the Undergraduate Major in Mathematics* [3] *(Valutazione dell'apprendimento dello studente al fine di migliorare la laurea di primo livello in matematica)*. Questo documento fornisce dei suggerimenti che incoraggiano i dipartimenti ad iniziare a creare un ambiente favorevole alla valutazione del processo fissando degli obiettivi ed utilizzando una varietà di strumenti di valutazione, che comprendono indagini, rapporti di valutazione, portfolio, saggi, corsi di sostegno, presentazioni orali e il dialogo con gli studenti. La valutazione viene descritta come "ciclo" continuo:

- vengono fissati gli obiettivi dell'insegnamento e dell'apprendimento che vengono comunicati ai docenti e agli studenti
- i problemi che sorgono vengono raccolti e sintetizzati e
- le informazioni così ottenute vengono rese pubbliche ed utilizzate per fissare nuovi obiettivi.

Strategie per il futuro

Il documento del MAA del 1995[3] è lodevole per aver messo in movimento l'establishment della matematica verso nuovi modelli di pensiero, per aver modificato il punto di vista riguardo alla valutazione del processo, diffuso nelle "trincee" dei dipartimenti di matematica, generalmente apatico se non decisamente contrario ad essa spingendolo verso un certo grado di apprezzamento. Nonostante ciò il nostro attuale compito - e questo per rispettare la natura ricorsiva del processo stesso di valutazione - deve essere quello di elaborare questo documento considerando quegli aspetti che si sono rivelati essere non sufficientemente chiari nella loro applicazione pratica.

Il documento offre, come esemplificazioni, obiettivi per i programmi di matematica come i seguenti:

- formulare valutazioni di tipo matematico,
- comprendere la natura della matematica,
- elaborare modelli matematici (problemi, progetti),
- comunicare (oralmente e per scritto),
- sviluppare la capacità di utilizzare le risorse (lavori di gruppo, presentazioni),
- potenzialità personali e
- requisiti di contenuto specifico che possono includere la comprensione della tecnologia.

Occorre a questo punto fermarsi per un chiarimento: negli ambienti educativi è possibile udire i termini "***obiettivi ed abilità"*** può essere utile aver presente che gli ***obiettivi*** sono di carattere cognitivo (riguardano la comprensione, in contrasto al saper fare) mentre le ***abilità*** sono maggiormente legate al comportamento e all'azione ("scrivi un saggio di confronto fra..."). Sfortunatamente il problema per gran parte di noi è che gli obiettivi che ci siamo finora prefissi non sono in realtà dei veri obiettivi e neppure delle abilità da acquisire, quanto semplicemente ***specifici argomenti*** della matematica. Si consideri, per esempio, l'obiettivo che riguarda la "Natura della Matematica":

> **Natura della Matematica**: Gli studenti dovrebbero raggiungere la comprensione dell'ampiezza delle scienze matematiche e dei loro profondi principi connettivi; una soddisfacente conoscenza di una disciplina che faccia un uso significativo della matematica; la comprensione dell'interazione fra applicazioni pratiche, soluzione dei problemi e teoria; la comprensione dell'importanza dei collegamenti fra le diverse aree della matematica e con altre discipline; la consapevolezza della natura astratta della teoria matematica e la capacità di scrivere dimostrazioni; la conoscenza dei contesti storici e contemporanei in cui la matematica viene praticata, la comprensione della fondamentale dicotomia della matematica fra l'essere oggetto di studio e strumento applicativo; e una visione critica a proposito delle intrinseche limitazioni della disciplina:

Naturalmente, si dice, insegniamo "la comprensione"! *Naturalmente*, noi desideriamo che gli studenti comprendano la natura della matematica! E quando vediamo il lessico della didattica della matematica cercare di definire questi obiettivi, alcuni di noi tendono a essere poco chiari oppure hanno la sensazione di essere fatti apposta per cimentarsi in giochi di parole retorici.

Recentemente al mio dipartimento è stata consegnata, da parte di un componente dell'area didattica, una griglia da completare nella quale dovevamo valutare undici corsi di matematica che erano in comune con la laurea in didattica della matematica. Dovevamo porre una "**X**" nella colonna che rappresentava un certo corso nel caso in cui esso soddisfacesse all'obiettivo didattico descritto in tale riga. Le righe iniziavano con la descrizione di obiettivi di contenuto (per esempio, "Comprendere i diversi processi di un ragionamento concreto ed astratto", così come lo strambo "Comprendere l'Incertezza"). Ma dopo alcune pagine gli obiettivi si spostavano dai contenuti specifici verso il campo affettivo. Una parte della griglia che si riferisce ai "Processi Matematici" è riprodotta qui di seguito.

Questa griglia didattica ha spinto il mio dipartimento ad una riflessione sulla sua attività in modo più chiaro di quanto fosse stato in grado di fare nei dieci anni precedenti. (E, per inciso, se prima non si era soliti raccogliere ed organizzare il lavoro prodotto dagli studenti, adesso abbiamo cominciato a farlo! Si faccia affidamento alla didattica della matematica per costringerci a darci da fare!) Ma nel momento in cui ho provato ad utilizzare la griglia, a proposito del corso Matematica 478, mi sono ritrovata a prendere contemporaneamente in considerazione tutte e sei le categorie, poiché risultava per me difficile immaginare un corso che soddisfacesse ad uno solo di questi obiettivi escludendo gli altri. (Ciò divenne una questione delicata in un confronto all'interno del dipartimento quando sembrò che un corso a più variabili desse luogo a un maggior numero di **X**, nella sotto-categoria "geometria", rispetto al corso stesso di geometria che, così affermò il titolare della cattedra, non aveva a che fare con la "misurazione" - il potere del corso presumibilmente stava nel numero di **X** che otteneva!)

	Matematica 223	Matematica 478	etc.
G. Processi matematici **1.Ragionamento matematico**			
a.) Esaminare modelli, astrarre ed analizzare basandosi su esami, produrre delle convincenti argomentazioni matematiche		**X**	

b.) Costruire una struttura di domande ed ipotesi, formulando contro esempi, elaborando e valutando le argomentazioni		**X**	
c.) Utilizzare l'intuizione e strumenti di indagine informali, e prove formali		**X**	
2. Comunicazione			
a.) Esprimere idee matematiche oralmente, graficamente e per scritto		**X**	
b.) Utilizzare le potenzialità del linguaggio matematico, delle notazioni e del simbolismo		**X**	
c.) Tradurre le idee matematiche in linguaggio matematico, notazioni e simboli		**X**	

Seppure mi paia che il sistema della griglia indichi che vi sia stato un serio tentativo di trasformare un **obiettivo** in una serie di più maneggevoli **abilità** cognitive, manca ancora un ingrediente fondamentale. Ed è assente anche nel modulo di follow-up della didattica della matematica (i legislatori, in realtà). Su di esso dovevamo materializzare le nostre **X** rispondendo alle seguenti domande:

(1) Quali corsi soddisfano lo specifico requisito (il ragionamento matematico)?
(2) Quali attività vengono poste in atto per conseguire l'obiettivo?
(3) Come valutiamo che l'obiettivo sia stato effettivamente raggiunto?

Matematici, vedete qual è il problema? In realtà non esiste alcun ambito comune fra i punti (2) e (3)! Fra le altre cose, ciò che non viene chiesto è *come e dove possiamo stabilire il gradiente di apprendimento*! Dobbiamo definire uno standard, applicarlo, e poi valutarlo, senza porre nessun riguardo al compito primario dell'insegnante che consiste nel fare in modo di sviluppare miglioramenti nei propri studenti.

Ritornando agli obiettivi fissati dal MAA ci sono altre domande che potremmo porre: per esempio, come verificheremo che lo studente abbia conseguito "*una comprensione dell'ampiezza delle scienze matematiche e dei loro profondi principi connettivi*"? E se veramente non è possibile verificare questo obiettivo, è allora davvero un obiettivo?

Più e più volte negli ambienti della didattica, il dibattito sembra vertere su ciò che noi desideriamo fare, quello che vogliamo offrire allo studente o semplicemente porre nel suo piatto. Forse siamo arrivati al punto di raccogliere semplicemente un sacco di "reperti" per dimostrare ciò che lo studente ha fatto, e per giustificare ciò in un qualche genere di linguaggio. Ma questo non significa definire in termini concreti *come gli studenti imparano* oppure *in che modo migliorano* o persino *che uso farà lo studente della sua conoscenza*. Durante il suo primo anno di insegnamento presso il College Alverno, una consulente che si occupa di valutazione, facendo visita alla mia scuola, riferì questa esperienza: stava esprimendo, ad un collega di insegnamento, la sua soddisfazione nel proporre un certo racconto agli studenti - la classe lo apprezzava in modo particolare, ed era molto disponibile. Fu colta di sorpresa quando la sua amica le domandò "sì, ma *che cosa ci fanno gli studenti con questo?*". In tutto il nostro gran pianificare ed architettare, dobbiamo spostare l'attenzione verso le questioni pratiche e cognitive sollevate da queste domande.

Come possiamo farlo? Un esempio, per favore!

Si prenda in considerazione un altro obiettivo descritto nel documento del MAA:

> **Capacità di comunicazione e capacità di utilizzare le risorse**: Gli studenti dovrebbero essere in grado di leggere, scrivere, ascoltare e parlare il linguaggio della matematica; leggere e comprendere materiali di carattere tecnico; contribuire in modo efficace al lavoro del gruppo; comunicare chiaramente i concetti matematici in modo appropriato rispetto ai progressivi obiettivi di apprendimento; svolgere attività di ricerca personale e essere capaci di presentare, sia per scritto sia oralmente, vari argomenti; localizzare, analizzare, sintetizzare e valutare le informazioni; creare e documentare algoritmi; pensare in modo creativo ad un livello proporzionato agli obiettivi della carriera scolastica; fare un uso efficace della biblioteca scolastica. Gli studenti dovrebbero possedere abilità nella scrittura matematica descrittiva, avere l'abitudine a porre domande ed essere consapevoli delle questioni etiche riguardanti la matematica.

In realtà, io stessa non ho raggiunto l'obiettivo. Sebbene potrei lasciar loro intendere , con un po' di ipocrisia, di averlo conseguito, non riesco proprio a credere che i miei studenti *comprendano materiali di carattere tecnico, comunichino chiaramente i concetti matematici in modo appropriato rispetto ai progressivi obiettivi di apprendimento*. Si supponga, d'altro canto, di poter innalzare gli obiettivi definendo la struttura del nostro lavoro in modo più olistico, per ciò che riguarda l'apprendimento e la sua utilità:

- **Chi raccomanda di svolgere relazioni scritte ed in quali corsi? Chi sono gli studenti?**

La maggior parte dei nostri studenti lascerà il college per entrare nel modo del lavoro o per frequentare l'università, e qui gli studenti di matematica avranno la necessità di spiegare chiaramente ad altre persone argomenti di matematica astratta e altro materiale tecnico. La stesura di lavori scritti è sempre più raccomandata fin dai primi corsi di matematica da parte degli esperti di didattica, dai matematici e dal legislatore.

- **Perché agli studenti sono necessarie abilità/competenze?**

Ci si attende che gli studenti entrino nel mondo del lavoro dotati della capacità di scrivere delle spiegazioni chiare, presentare un loro lavoro nell'ambito di una conferenza, o magari rispondere a specifiche domande riguardo alla loro ricerca in una presentazione o durante un'intervista. Gli studenti dovrebbero essere in grado di leggere agevolmente dei libri tecnici, utilizzare in modo appropriato le risorse di una biblioteca, ed essere famigliari, nella dimostrazione di un argomento, con i vantaggi della tecnologia (incluso il web). Sul lavoro, per esempio, gli impiegati devono scrivere rapporti per descrivere e valutare il lavoro di una squadra, progettare curricoli e produrre materiali esplicativi, o magari illustrare i vantaggi di un certo progetto matematico ad un'organizzazione che intende finanziarlo, o il nuovo curriculum per il genitore di uno studente.

- **Quali sono i punti delicati?**

Gli studenti spesso incontrano le maggiori difficoltà nello scrivere un convincente testo argomentativo su un argomento preso da un giornale (diciamo, circa le abilità fondamentali della produzione scritta), sebbene questa modalità di indagine sia esattamente quello che ci si dovrebbe attendere da futuri insegnanti, o lavoratori nell'industria e nell'università. Difficoltà potrebbero sorgere a proposito del pensiero critico, della capacità di persuasione, della comprensione dei sentimenti dell'uditorio, o anche dell'organizzazione di un'argomentazione di carattere matematico. Spesso gli studenti presuppongono che l'uditorio sia famigliare all'argomento trattato, o assumono una posizione rigida nella discussione di un tema controverso, oppure sono restii a ricercare tutte le informazioni necessarie per sostenere un'opinione. Devono essere illustrati, in modo chiaro, i problemi di documentazione e di plagio, particolarmente a quei gruppi che lavorano su progetti che riguardano i computer, il web, etc.

- **Esistono organizzazioni in grado di fornire assistenza?**

Test sulla produzione scritta di contenuto matematico, sia per l'insegnante sia per gli studenti, sono disponibili presso la MAA. I dipartimenti di Lingua Inglese frequentemente mettono a disposizione strumenti di aiuto alla scrittura presso appositi centri. I docenti dei Dipartimenti di Inglese sono spesso desiderosi di fornire assistenza ad un docente per apprendere il modo di valutare il lavoro prodotto dagli studenti.

- **Quale esperienza hanno gli studenti/i docenti a proposito dell'obiettivo?**

La lamentela, da parte di alcuni docenti, che questi lavori scritti richiedano troppo tempo è controbilanciato dall'utilità di questi lavori nel fornire prova dei miglioramenti dello studente. I docenti stranieri che si trovano a insegnare a produrre lavori scritti dovrebbero essere incoraggiati dal fatto che esse stanno comunque *insegnando* matematica, usano semplicemente la *scrittura* per farlo. E questo significa che loro devono sapere in quale caso l'argomentazione orale o scritta risulta essere chiara e convincente.

- **Qual è il vantaggio nell'apprendimento?**

Il linguaggio è lo strumento con il quale pensiamo, e una buona forma scritta è il segno ed il prodotto di un pensiero corretto. È nella scrittura che noi chiariamo e rendiamo esplicito quello che sappiamo e pensiamo ed il modo in cui siamo arrivati a pensarlo e capirlo. Per mezzo della scrittura noi trasmettiamo la conoscenza, e se non siamo in grado di esprimere noi stessi con parole e scritti, creiamo dei dubbi circa le nostre effettive conoscenze.

Il lavoro di revisione è un aspetto importante nell'apprendimento della scrittura. Se da un lato ci si aspetta un continuo lavoro di revisione da parte degli studenti di un corso di Inglese, è molto più probabile che un insegnante di matematica restituisca un compito corretto con un voto e un certo numero di segni a matita blu, che però gli studenti non leggeranno. Scrivere utilizzando le revisioni crea una buona occasione per documentare i progressi nella produzione scritta.

- **Come si può documentare l'apprendimento?**

Nel momento in cui le diverse stesure vengono raccolte in un portfolio, esse diventano una parte significativa della documentazione del ciclo di valutazione. Degli esempi, corretti e valutati (eccellente, sufficiente, scarso), possono venire allegati per illustrare gli standard di valutazione.

- **Gli studenti stessi apprendono buone pratiche di valutazione?**

Gli studenti devono imparare a comprendere l'importanza della loro responsabilizzazione nel processo di apprendimento. Condividere il risultato del proprio lavoro con il resto della classe, presentare dei colloqui, sostenere una tesi/argomentazione (defending a poster session) e le esperienze capstone tutto questo crea delle esperienze in cui lo studente è protagonista, che sono utili per aiutare lo studente a trovare una "voce" personale.

Questa lista certamente non è esaustiva. Ciò nonostante, se noi potessimo ripensare agli obiettivi dei nostri dipartimenti sotto questa ottica, tenendo conto dei profili dello studente, dello scopo, delle difficoltà, dei benefici, delle esperienze degli altri, dei metodi, e di come possa essere misurato il gradiente di apprendimento, fra le altre cose - potremmo aver compiuto il primo fondamentale passo nel rendere "reali" gli obiettivi sia nella mente degli insegnanti che degli studenti.

Tieni sotto controllo i dati!

Il documento del MAA del 1995 non prende realmente in considerazione un aspetto centrale della valutazione del processo: un programma di valutazione funziona al meglio se consiste nella combinazione dinamica di una coppia di processi. La valutazione sommativa riguarda la raccolta dei dati e la loro interpretazione dopo che il corso o un modulo del programma si è concluso (quanti studenti hai assegnato ad un corso, quanti ne sono passati?) mentre la valutazione formativa riguarda l'analisi dei progressi compiuti e la possibilità di apportare delle variazioni durante il processo, utilizzando le informazioni sommative raccolte. Troppo spesso la valutazione sembra funzionare solo ad un livello oppure ad un altro. Per esempio, un modulo di valutazione dei docenti può fornire il risultato che il "punteggio medio" su tutte e venti le domande riguardanti un docente è di 4,3 su un massimo di 5 punti. Questa è un'informazione priva di significato. D'altra parte, un docente che sottoponga una dozzina di classi a tecniche di valutazione di propria creazione ([1]), del tipo: "Che cosa hai imparato oggi?", "Qual è stato finora il tuo argomento preferito?", non avrà nessun riconoscimento amministrativo per questo tipo di valutazione.

Un problema fondamentale è che, nel momento in cui la valutazione del processo suggerisce l'adozione di metodi formativi e sensibili al contesto richiede, allo stesso tempo, misurazioni comparative o universali. Dopo tutto, l'efficienza dei nostri piani di studio dipende in buona parte dalla nostra capacità di metterci a confronto utilizzando dati raccolti presso altre istituzioni. *Quanti laureati in matematica produce il sistema universitario dello Stato dell'Illinois? Fra essi, quante sono le donne? Quanti laureati in matematica prendono una seconda laurea, di primo o secondo livello, e in quale campo?*

La disponibilità di dati di confronto fra le diverse istituzioni, a livello regionale e nazionale, è sorprendentemente limitata se si considerano le opportunità offerte dall'attuale tecnologia informatica. Attualmente l'attività di valutazione a livello statale viene svolta spesso da organizzazioni di certificazione sostenute dalle istituzioni che utilizzano i loro servizi. Queste organizzazioni tendono a fornire, su ampi cicli (10 anni), una diagnosi del tipo sì/no – passi/non passi. Sarebbe estremamente utile se queste organizzazioni lavorassero con un continuo feedback e fossero in grado di offrire dati di comparazione con altre scuole. Il web offre possibilità di scambio e di collegamento a livelli prima impensabili. Se gruppi di istituzioni hanno successo noi possiamo concentrare su di esse la nostra attenzione o, al contrario, evitare i loro errori. Se alcuni dipartimenti ricevono aiuto finanziario per questa specifica attività di valutazione o altro, noi lo dobbiamo sapere. Ci sono validi argomenti per considerare le organizzazioni di accreditamento quali incaricati dell'elaborazione dei dati e dell'attività di collegamento; queste idee dovrebbero essere oggetto di negoziazione.

Il punto è che i dipartimenti che funzionano come scatole nere non sopravvivranno. Come risulta dal grafico all'inizio di questo articolo, i dipartimenti di matematica sono parte del mondo esterno. E ciò che noi facciamo deve essere condiviso con gli studenti e con altri docenti cosicché essi possano collaborare con noi. In questo modo gli amministratori possono sapere *chi siamo* dal *modo in cui lavoriamo*, e sapranno come sostenere le nostre necessità nei confronti delle pubbliche istituzioni.

In realtà, noi potremmo persino cominciare a dar credito all'idea che i risultati sommativi non debbano essere interpretati alla lettera, ma in modo più articolato. *Perché gli studenti che hanno frequentato il corso di Matematica 101 ottengono dei risultati inferiori rispetto a quelli che non lo hanno seguito?* Forse perché gli studenti testati, che non avevano seguito il corso di recupero, facevano parte del Honors program. Occorre dire qualcosa a proposito della "strana" valutazione[1] che prende in considerazione i dati non come risposta finale ma come fonte di ispirazione per cercare i motivi **per i quali** il risultato si è verificato.

Si apra al pubblico!

Il punto 3 nel processo di valutazione delineato dal MAA descrive la necessità di rendere pubblico il processo e questo è quanto abbiamo discusso sopra. Ma notoriamente i dipartimenti di matematica sono stati finora delle istituzioni private. Se si svolge un gruppo di lavoro sul Calcolo infinitesimale, i risultati della discussione vengono resi pubblici? Gli altri dipartimenti vengono contattati a proposito dei risultati del collocamento nel mondo del lavoro o degli attuali successi e problemi del corso di Calcolo infinitesimale? Cosa ne pensano del curriculum gli altri dipartimenti? E come possiamo operare senza queste informazioni? Se vogliamo essere nelle condizioni di operare dei cambiamenti formativi, dobbiamo per lo meno rendere pubbliche le nostre scoperte.

Dove stiamo andando? Una parabola sulla valutazione.

Nei suggerimenti precedenti - (1) alzare gli obiettivi, (2) tenere sotto controllo i dati, (3) rendere pubblici i risultati - noi stiamo semplicemente alzando i livelli di riferimento per il ciclo di valutazione presentato all'inizio di questo articolo. Abbiamo cercato di indicare alcuni punti problematici per i dipartimenti. Fornire la prova che la valutazione del processo offra le *soluzioni* ai problemi piuttosto che essere una spesa aggiuntiva di sforzi, tempo e risorse, è una sfida evidente. Ma facciamo un viaggio ideale nell'Università di Chissadove e come il fantasma che appare a un futuro Scrooge (personaggio del racconto *Christmas Carol (Cantico di Natale)* di C. Dickens, N.d.T.), visitiamo l'università nell'anno 2010.

1.)Presso l'Università nel 2000, il rettore ha ridotto il personale presso il dipartimento di matematica - i soldi andranno al dipartimento di aeronautica (che ha legami commerciali con l'aeroporto locale). Dopotutto, Matematica ha cominciato a insegnare developmental courses di livello inferiore, la qualcosa minaccia la buona reputazione del College. Il dipartimento di matematica ha sofferto molto per questi tagli, dal momento che i corsi di livello più alto non possono più essere giustificati in considerazione del basso livello di iscrizioni. Il Preside ha presentato dati riguardanti i pensionamenti ed il sovraffollamento delle classi, ma il Rettore è fermo sulle sue posizioni.

Nel 2010 il corpo docente tiene regolarmente gruppi di studio che si incontrano con le discipline afferenti, e l'aria è saturata dal passaggio di informazioni fra queste discipline in termini di collocamento, consulenza, prestazioni. Le Scienze hanno sostenuto l'attività del Dipartimento di Matematica, e hanno espresso la loro comune opinione in un rapporto riguardante la potenziale perdita di studenti anche da parte loro, sulla base di dati condivisi. Quando vengono intervistati, gli studenti risultano essere delusi dal fatto che l'università non sia stata sincera circa la pubblicizzata promessa che le classi fossero poco numerose. Una pagina web, monitorata dalla facoltà, che riporta costantemente le opinioni degli studenti, rivela che gli studenti di matematica sono insoddisfatti per la carenza di corsi di alto livello - le loro opinioni sono giunte all'attenzione del giornale scolastico, in un articolo "Può questa Laurea durare ancora?". Il Rettore decide che è possibile aumentare il personale con un altro membro della Facoltà.

2.)Presso l'Università, nel 2000, i membri del comitato d valutazione della qualità del servizio sono preoccupati per un giovane membro della facoltà, il professor X. La sua attività di ricerca è promettente ma il suo

[1] Termine utilizzato da Philip Keith in [2]

insegnamento rivela un punteggio inferiore alla media alla domanda "Come valuti il tuo insegnante?" Il comitato ha motivo di credere che l'insegnante svolga un buon lavoro considerando gli scambi di opinioni nei corridoi e il fatto che le sue ore di ufficio sono piuttosto frequentate. Essi desidererebbero che il professor X diventasse un vigoroso e produttivo membro del dipartimento, così come si aspettano. Ma sono indecisi su cosa fare e, nella loro confusione, concludono nel loro rapporto, che il professor X svolge un'eccellente attività di ricerca ma dovrebbe dedicarsi ad ottenere delle valutazioni più alte nel prossimo periodo di valutazione.

Nell'anno 2010, il comitato ha suggerito, con il dovuto anticipo, che le valutazioni degli studenti vengano utilizzate congiuntamente ad altri materiali del fascicolo di un insegnante. Con la disponibilità di esperti nei confronti del nuovo docente, il professor X ha analizzato la sua attività di insegnamento con un gran numero di strumenti. Rapporti dei colleghi mostrano eccellenti abilità nelle lezioni/dimostrazioni e nello stimolare le classi, e i risultati di brevi questionari settimanali di feedback rivolti agli studenti, inclusi nel fascicolo, rivelano che essi ritengono di avere acquisito una maggiore comprensione delle successioni ,di aver la sensazione di essere migliorati nella risoluzione dei problemi e di aver più fiducia in sé stessi, mentre i solidi di rotazione rimangono problematici. Il professor X ha un tasso di abbandoni un po' alto, e i dati sui risultati dei test insieme a modelli di test corretti (livello alto, medio, basso) e gli stessi commenti scritti dal professor X indicano che, rispetto agli standard del dipartimento al momento disponibili, lui sta probabilmente valutando il lavoro degli studenti in modo un po' severo. Il professore sottopone al comitato un rapporto nel quale dichiara che nel futuro utilizzerà altri metodi per valutare l'apprendimento, per esempio progetti, come quello che ha ideato in collaborazione con un docente di Scienze dell'Ambiente. Il comitato riferisce che si sente incoraggiato dalla prontezza con cui questo membro della facoltà è stato capace di "adattarsi" al dipartimento. Grazie al suo impegno e con un'azione costante di consulenza, essi ritengono che sarà in grado di risolvere i suoi problemi relativi al modulo di valutazione.

3.)Presso l'Università nell'anno 2000, a una studentessa nigeriana, con difficoltà di apprendimento riconosciute dall'ateneo, mancano solo 0,01 punti per essere ammessa al corso di laurea in Computer Scienze. Da un alto ha conseguito un livello "B" nel Calcolo infinitesimale a più Variabili (in parte a causa dell'intenso impegno dedicato ai lavori di gruppo di elaborazione del software), dall'altro ha ripetuto il corso di Calcolo infinitesimale I (a spese del contribuente) per migliorare il suo voto. Con suo grande dispiacere, il voto sarà per la seconda volta un livello "C" - una valutazione complessiva, basata su quattro esami, alla quale mancano 3 punti per arrivare al livello "B" che desidera. La studentessa è rammaricata in particolare perché le è stato negato il tempo supplementare, a cui ha diritto nei test, nel momento in cui la persona incaricata della sorveglianza è andata a mangiare. A questo punto deve decidere se abbandonare il College o ripetere Calcolo infinitesimale II.

Nell'anno 2010, il membro della facoltà è consapevole, sulla base degli obiettivi dipartimentali, che i test da soli non sono considerati prova sufficiente dell'apprendimento, ma è stato così impegnato...! Decide ora, parlando con la studentessa e visionando il fascicolo del suo lavoro (che contiene, sfortunatamente, perlopiù test), che ci sono alcune abilità fondamentali rispetto alle quali la studentessa ha mostrato di avere delle carenze. Le consegnerà un test, da svolgere a casa, con problemi difficili basati su tali carenze e rifarà la valutazione sulla base di questo test. Al tempo stesso la studentessa viene messa in guardia circa il differente rendimento nei test e nei progetti, e viene informata che lo Studente Counseling Center potrebbe essere utile per migliorare le sue abilità di studio. In aggiunta, i consulenti didattici sono a disposizione non solo per fornire assistenza sull'argomento specifico, ma anche per dare consigli su come affrontare un esame, etc. Si raccomanda alla studentessa di diventare tutor volontaria nella speranza che, spiegando ad altri la matematica, lei stessa possa divenire una migliore comunicatrice - inoltre, potrebbe acquisire il senso del suo valore nel mondo e avere in eredità un migliore senso della "comunità" nel momento in cui lei stessa ripassa il Calcolo infinitesimale.

I casi studiati all'Università di Chissadove nell'anno 2000 sono solo troppo vicini all'esperienza dell'autrice - speriamo che anche le previsioni siano realistiche. Ma questi esempi illustrano come la valutazione possa costituire una triangolazione a livello di dipartimento, di docenti e di studenti, che considerati insieme costituiscono un positivo ambiente di valutazione. Ambiente che elimina parte della privacy con cui ai dipartimenti e ai docenti era consentito operare - questo richiede che i rapporti di valutazione siano resi pubblici, continuativi o oggetto di feedback - ma la contropartita è che in un tale ambiente ognuno si senta coinvolto nell'analisi dei cambiamenti, e sia fiducioso che non vi siano segreti o sorprese da rivelare. Quindi il miglioramento preventivo sostituisce le critiche tardive, e i problemi vengono trasformati in questioni da affrontare. La valutazione diventa una parte naturale dell'apprendimento e quest'ultimo una parte naturale della valutazione.

Quelle che abbiamo descritto nei casi precedenti sono tecniche di valutazione tratte da *Assessment Practices in Undergraduate Mathematics*, di Gold, Keith e Marion, 1999[2]. Questo libro, pieno di esempi pratici riguardo alla valutazione, mette in guardia sul fatto che non esistono dei metodi universali, "pronti all'uso", e che le migliori tecniche di valutazione sono in continua evoluzione; ma ciononostante fornisce sufficienti dettagli per informare circa le tecniche descritte nella seguente tabella.

	Studente	**Insegnante**	**Dipartimento**
Lo studente valuta	Tecniche di valutazione della classe[1], indagini generali, riassunti di lavori a casa, progetti, lavori scritti, autobiografie, portfolio, diari di lavoro, autovalutazione dei test, obiettivi individuati dagli studenti e rapporti	Moduli per la valutazione dell'insegnante, rapide analisi (per esempio: piegate in due un foglio e scrivete gli aspetti positivi e negativi del vostro apprendimento), lavori scritti, diari di lavoro	Pagine Web, newsletter, questionari di uscita, indagini sul corpo studentesco, dati relativi alle iscrizioni, gruppi di studio, analisi di carattere generale
L'insegnante valuta	Test, lavori a casa, lavori scritti con relative revisioni, CATS, indagini generali, progetti tecnologici, board work, domande di gruppo, ecc.	Cartelle di documentazione, confronti, gruppi di studio, comitati, rapporti di analisi fra pari, attività di consulenza	Comitati, gruppi di studio, resoconti di dati, rapporti di analisi rispetto a discipline collegate, insegnamento in collaborazione, dibattiti
Il dipartimento valuta	Collocamento nel mondo del lavoro, dati, esami di carattere generale, capstone course, advising, mentoring, counseling, tutoring, obiettivi appropriati, newsletter, opuscoli di accoglienza	Dati, comitati, chiari obiettivi ed aspettative, mentoring, counseling, informazioni condivise, e le tradizionali attività (ricerca, riconoscimenti, ecc.)	Dati, comitati, gruppi di studio, resoconti di dati, rapporti di analisi rispetto a discipline collegate, rapporti esterni, comparazione con altre istituzioni, organizzazione dei dati a livello nazionale, letteratura da altre organizzazioni

Chi ha la responsabilità della valutazione?

Gli studenti: Gli studenti non sono stati generalmente educati a concettualizzare le strategie di valutazione. Tutto sommato però si rendono conto se hanno imparato qualcosa, ed è chiaro che non vogliono buttare via il loro tempo e denaro. Quando sono in grado di capire che stanno imparando qualcosa, sono generalmente soddisfatti di ciò. Con l'attuale tendenza, presso molti College, a concentrare l'attenzione sulla preparazione dell'insegnante, sorge la necessità che **gli studenti stessi apprendano, all'interno delle loro classi, delle pratiche corrette di valutazione**. Perciò i dipartimenti devono esser in grado non solo di fornire un esempio di accountability, ma devono anche insegnare agli studenti, come obiettivo curricolare, a fare uso della valutazione. È incoraggiante pensare che quando verrà il giorno in cui gli studenti raggiungeranno la famigliarità con gli strumenti di valutazione, essi saranno in grado di fornire una ancor più efficace documentazione del loro apprendimento. D'altro canto, gli studenti che hanno avuto esperienza di modelli di valutazione del tipo "top-down", che valutano perlopiù il lavoro dell'insegnante, possono uscire da tale situazione parecchio danneggiati, trovando difetti in tutte le caratteristiche dell'insegnante, attendendo esplicite indicazioni di fronte ad ogni decisione da prendere, ed essendo generalmente incapaci di prendere l'iniziativa e di provare interesse personale nella ricerca e nella sperimentazione.

I docenti: I docenti potrebbero ritenere che – considerando che operiamo in un'arena mondiale in cui il modello sono lezioni seguite da test – non abbiamo niente da imparare da metodi sperimentali di valutazione che richiedono un grande impiego di tempo. Ironicamente molti degli insegnanti che si oppongono alle misure di carattere formativo in realtà poi assegnano quei lavori/progetti/presentazioni che costituirebbero delle valide pratiche di valutazione se fossero corredati dalle spiegazioni e dalle interpretazioni su come questi lavori potrebbero migliorare l'apprendimento. In matematica sembra esserci uno stacco fra il fare la cosa giusta ed essere in grado di spiegare *perché* quella è la cosa giusta. Di sicuro, il fatto di essere molto precisi nell'illustrazione di un insieme di meditate strategie di valutazione può essere la migliore documentazione dell'efficacia dell'insegnamento e la migliore difesa quando le cose vanno male. C'è una cosa da dire: la Facoltà che con passione sottoscrive metodi di valutazione tipo CATS[1], farebbe meglio a considerare i metodi di valutazione in un più ampio quadro di ricerca sull'attività nelle classi, creando delle raccolte di dati a partire da tali metodi. Nell'università si è attualmente sviluppato interesse, a livello di ricerca, a proposito della valutazione delle classi ma questo genere di idee non si è ancora diffuso in modo generalizzato nella comunità matematica.

I dipartimenti: Sappiamo che l'efficacia dell'insegnamento non può essere separata dall'apprendimento degli studenti. Ma in che modo misuriamo questo apprendimento? Deve essere giudicato dalla "performance" dello studente nei compiti a casa e nei test? Sono forse i test la parola definitiva a proposito dell'apprendimento? Esiste un'ampia letteratura che esplora questo tema; per esempio "i teorici dell'apprendimento" spesso distinguono fra "performance" e comprensione. CATS, i portfolio, i progetti, i compiti scritti, i lavori di gruppo di problem solving sono tutte contemporaneamente modalità alternative di misurare e studiare come gli studenti imparano. Ma questi metodi alternativi per misurare l'apprendimento hanno il riconoscimento del *vostro* dipartimento o istituzione scolastica? E inoltre, come sta resistendo il "fortino" del dipartimento, nel quale state lavorando, all'assalto rappresentato dalle nuove aspettative e responsabilità?

Il successo del docente e dello studente dipendono in modo decisivo dal fatto che il dipartimento fissi degli obiettivi didattici appropriati, espliciti le sue aspettative nei confronti degli insegnanti, metta a disposizione attività di consulenza, indirizzi in modo opportuno gli studenti, faccia affidamento su di un curriculum che sia adatto alle esigenze e alle capacità degli studenti, fornisca il necessario supporto sia ai docenti che agli studenti, documenti le proprie attività e valuti i risultati del suo programma di valutazione. Dal momento che i dipartimenti generalmente non ritengono necessaria l'attività di valutazione, possiamo suggerire alcune tecniche affinché ciò risulti gestibile e non provochi confusione:

- Si parta in modo semplice, utilizzando le informazioni che già sono a disposizione. Si passino in rassegna i dati relativi alle iscrizioni , o la media dei cinque anni precedenti; dicendo chiaramente che si tratta di materiale di valutazione e rendendolo pubblico.
- Si inizi a cercare delle notizie positive a cui si vuole fare riferimento, per esempio i punteggi ottenuti da laureati che hanno conseguito la GRE (Graduate Record Examination, N.d.T.): Nell'anno successivo, si preveda un aggiornamento delle analisi utilizzando dati più accurati. Quello che conta è la continuità dell'interresse e l'utilità del processo.
- Il processo di valutazione potrebbe consistere in un progetto su scala ridotta svolto da un nuovo membro della facoltà o da uno studente laureato. O potrebbe riguardare un problema o una questione importante all'interno di un'unità di corso – compiti scritti, uso del computer, etc.
- I dati relativi all'apprendimento dello studente sono le monete d'oro del regno. Occorre tenere traccia delle valutazioni ottenute nelle diversi sequenze dei corsi e schede relative a significative esperienze capstone.
- Il referente principale del processo di valutazione a livello di dipartimento è il dipartimento stesso, e la valutazione dovrebbe dare la sicurezza che i programmi ottengano i risultati che si prefiggono.

Gli amministratori: A causa della mancanza di consenso e di chiarezza riguardo alla valutazione del processo circa la sue caratteristiche maggiormente formative, risulta difficile per i docenti avere fiducia in questi metodi, e i metodi tradizionali, quali le verifiche per l'apprendimento degli studenti, possono diventare un freno: chi utilizza le Classroom Assessment Techniques non dovrebbe avere bisogno di porre alla classe la domanda "*Le lezioni sono state bene organizzate?*". Un clima favorevole per quanto riguarda la valutazione richiede la disponibilità alla cooperazione da parte degli amministratori. Se da un lato i docenti devono affrontare il problema dell'assessment con la medesima serietà con cui si dedicano alla loro *attività di ricerca*, gli amministratori devono, da parte loro, concedere ai docenti lo stesso grado di libertà e rispetto che le attribuiscono *sostenendo* la ricerca.

Come abbiamo spiegato, gli amministratori spesso hanno la tendenza a considerare la valutazione del processo unicamente in termini sommativi: cioè come dati relativi ai risultati dei test, collocamento dei laureati nel mondo del lavoro e negli studi successivi, guadagni e riconoscimenti ottenuti. Questo equivoco accentua il ruolo dei dati sommativi che fanno riferimento alle votazioni e sminuisce il valore dei dati formativi in quanto prova dell'efficacia e dei miglioramenti dei programmi. Così come le statistiche possono fare di noi dei "maledetti bugiardi", allo stesso modo le valutazioni di carattere sommativo possono risultare pericolose e possono condizionare negativamente un'istituzione se mettono in evidenza gli aspetti sbagliati o vengono percepite come delle imposizioni di legge. Troppo pochi amministratori colgono le opportunità che questi metodi forniscono per l'interazione fra i docenti per lo sviluppo dei programmi. La conservazione su computer dei dati consente di seguire il percorso degli studenti per mezzo delle valutazioni, delle analisi compiute e dei risultati via via ottenuti nelle singole discipline. Proviamo ad immaginare: i dati del dipartimento di Calcolo infinitesimale pubblicati su una pagina web – il rettore prende nota delle cifre da riportare nel suo rapporto bisettimanale al consiglio accademico, e poi riferisce alla Camera di Commercio quello che succede all'università.

Conclusione

È chiaro che la valutazione del processo ha creato un'atmosfera particolare attorno all'università e la prossima decade ci consentirà di scoprire in quali direzioni abbia trasformato i programmi di matematica. Piuttosto che restare bloccati dalle frustranti riflessioni a proposito della valutazione, noi dobbiamo concentrare la nostra attenzione sull'uso che possiamo fare del processo di valutazione compatibilmente con la nostra limitata disponibilità in termini di tempo e di risorse. Finora non ci è stato chiesto di fare cose inutili. Tuttavia, se i dipartimenti non imparano a autovalutarsi a scadenze regolari, diventeremo facili bersagli di dati non attendibili, essendoci arroccati in difesa nella nostra metà campo. Se la nostra impressione è che la valutazione del processo sia poco importante, saranno sicuramente le leggi e le agenzie di controllo a prendere decisioni basate su analisi e test imposti dall'alto. Nei prossimi dieci anni potremo trovarci costretti a competere con sistemi educativi alternativi, apprendimento a distanza ed università virtuali. Con le direttive che provengono dalle protettive strutture del MAA, ritengo che i college saranno liberi di svolgere sperimentazione in maniera illuminata. Se non lo faremo, ci ritroveremo a lavorare in mezzo alle difficoltà delle tempeste economiche e politiche rispetto alle quali siamo divenuti vulnerabili.

---

[1] "CATS," vale a dire "Classroom Assessment Techniques" come intesa da Angelo e Cross nel libro Angelo, T.A. and Cross, K. P. *Classroom Assessment Techniques: A Hand book for College Teachers,* 2ª Ed. Josses-Bass, San Francisco, 1993.
[2] Gold, Keith, Marion, eds., *Assessment Pratices in Undergraduate Mathematics*, MAA Notes, 1999
[3] Leitzel, et al, "Assessment Of Student Learning for Improving the Undergraduate Major in Mathematics", elaborato dal Sottocomitato per l'Assessment, CUPM (presidente Bernard Madison), *FOCUS*, 1995.

La Laurea in Matematica al Principio del Nuovo Secolo

Joseph Malkevitch
York College (CUNY)

Introduzione

A fronte di uno scenario di impressionanti progressi compiuti dalle scienze matematiche negli ultimi 40 anni, parecchi segnali preoccupano i membri della comunità matematica che si occupano della didattica della matematica:

- i recenti cali nel numero di studenti che si iscrivono, presso i dipartimenti di matematica, a corsi avanzati
- la preoccupazione che gli studenti interessati alla matematica scelgano di non frequentare i College piccoli (o se ne allontanino) a causa di una laurea che risulterebbe solo parzialmente sfruttabile
- gli scontri tra fazioni, molto pubblicizzati, su come si debba insegnare la matematica dalla scuola elementare alla media superiore
- la crescente carenza di laureati in matematica che desiderino insegnare nelle scuole superiori (specie nelle grandi aree urbane)
- il numero relativamente basso di studenti, educati in America, che conclude un dottorato in matematica
- la preoccupazione che studenti con un serio interesse verso la matematica scelgano di laurearsi in Informatica poiché ritengono che, in questo modo, il loro interesse per la matematica possa essere soddisfatto e che un'esperienza di informatica possa portare ad una carriera più soddisfacente dal punto di vista economico
- le crescenti preoccupazioni per il ridotto numero di studenti di sesso femminile, o appartenenti a minoranze, che si laureano o completano un dottorato in matematica
- una sempre più scarsa conoscenza, da parte della gente comune, dell'importanza della matematica e delle sue applicazioni.

Ciò che segue sono alcune riflessioni personali su come gli individui e la comunità matematica nel suo complesso possano produrre dei positivi cambiamenti rispetto a tali questioni.

Forse il tema di maggiore preoccupazione per la comunità matematica è il generale inaridimento dei laureati di primo livello che frequentano i Dipartimenti di Scienze Matematiche. Questo inaridimento prende le forme di un calo del numero degli studenti che completano la laurea, di un minor numero di studenti realmente capaci (e di studenti con abilità matematiche ben sviluppate) che scelgono di laurearsi in matematica, della cancellazione di corsi avanzati, a causa dell'insufficiente numero di iscrizioni, e della necessità di offrire un numero ridotto di corsi avanzati, a causa della ridotta richiesta.

Appaiono esserci tre cause principali per questo fenomeno:

1. Gli studenti interessati alle scienze matematiche pensano di poter conseguire i loro obiettivi con una laurea legata all'ambiente dei computer piuttosto che attraverso una tradizionale laurea in matematica.
2. Le Università Statali sono state ridotte alla fame, per carenza di fondi, da rappresentanti politici che ritengono che il taglio delle spese destinate all'istruzione superiore pubblica sia una conveniente posizione politica.
3. Gli studenti nel momento in cui si iscrivono ai nostri College non sono consapevoli delle vaste opportunità di carriera aperte per coloro che si laureano in scienze matematiche.

Alcuni di questi fenomeni non sono sotto il diretto controllo dei membri della comunità matematica. Ciò nonostante mi pare che sia possibile fare molto di più per stimolare l'interesse riguardo ai corsi di studio in scienze matematiche e accrescere la capacità di questi corsi di soddisfare le richieste di un'utenza che sta cambiando. Se non altro sembra essere improduttiva la pubblicazione degli animati dibattiti che si svolgono all'interno della comunità matematica.

Fra le attività autodistruttive possiamo includere:

1. Continue maldicenze circa i pro e i contro della riforma del Calcolo infinitisimale e del ruolo della matematica del discreto nel curriculum delle scienze matematiche.
2. Dibattiti pubblici molto animati riguardanti i curricoli di matematica pre College
3. Nuovi capitoli nella guerra fra matematica pura e applicata, comprendenti litigiosi dibattiti su "problemi aperti" "problemi a più soluzioni (*open ended)"* e "costruzione di modelli matematici".

La ragione per cui queste attività sono molto pericolose è che, per un pubblico a priori non ben disposto nei confronti della matematica, questi scontri pubblici confondono i genitori circa il modo di rapportarsi con gli insegnanti che si occupano dell'educazione matematica dei loro figli e li incoraggiano a contrastare irragionevolmente qualsiasi modifica dei curricoli di matematica, anche quando queste modifiche sono per il meglio. Questi scontri creano dubbi negli studenti universitari di matematica che quindi potrebbero "scappare" verso informatica, economia o qualche altra laurea.

Uno sguardo prospettico sul passato

Che cosa è realmente cambiato per l'educazione superiore dal 1960 a oggi?

Chiaramente il cambiamento più significativo è stato l'aumento del numero degli studenti che frequentano il College. Gli Americani sono davvero diventati così bravi che tutti questi studenti possono beneficiare degli stessi vantaggi che un'opportunità formativa di livello superiore riservava (de facto) a un'elite educata nel 1960? I College sono cambiati per venire incontro alle sfide di un'utenza che è cambiata? Un secondo cambiamento sostanziale è la diminuzione dei posti di lavoro disponibili per gli studenti che dispongono unicamente di un diploma di scuola superiore. Mentre nel 1960 esistevano numerose opportunità di lavoro per centralinisti, addetti alla reception, segretari di basso livello e lavori nell'industria pesante, oggi il numero di posti di lavoro disponibili per chi ha solo un'educazione a livello di scuola superiore sono diminuiti in modo drammatico. Inoltre molti datori di lavoro, con a disposizione impieghi che, in linea di principio, richiederebbero solo il diploma di scuola superiore, preferiscono scegliere i laureati, qualora se ne presenti la possibilità.

Le nuove tecnologie hanno portato alla scomparsa di molti posti di lavoro che precedentemente richiedevano solo un diploma di scuola superiore. Nello scorso anno, per esempio, le compagnie telefoniche hanno posto in servizio nuovi software di riconoscimento vocale che automatizzano il processo di ricerca di un numero telefonico. Solo alcuni casi complessi vengono indirizzati all'attenzione del personale.

Professioni che tradizionalmente richiedevano solo un diploma di scuola superiore, come il poliziotto o il pompiere, richiedono ora alcune conoscenze a livello di College. Gli addetti alla vendita dei biglietti per i concerti e i mezzi di trasporto (bigliettai) stanno rapidamente diventando superati dai tempi, a causa dello sviluppo dei sistemi automatici di pagamento nei trasporti e di quelli che utilizzano Internet per prenotare biglietti di film, concerti e spettacoli. Nel mio solito supermercato una recente ristrutturazione a trasformato un certo numero di casse, che erano servite da personale, in sistemi automatici nei quali il cliente svolge da solo le operazioni di fatturazione e pagamento. Le stazioni di rifornimento self-service hanno drasticamente ridotto il numero degli addetti. Gli sportelli Bancomat hanno ridotto il numero dei cassieri nelle banche. Probabilmente questo genere di cambiamenti aumenterà ancora il suo ritmo di crescita e continuerà ad erodere la disponibilità di posti di lavoro per persone che dispongono solo del diploma di scuola superiore.

In sintesi, per poter avere un tenore di vita a livello di classe media, nell'America di oggi, è necessaria un'educazione a livello di College. La società ha in effetti chiesto alla comunità educativa di fornire un'educazione a livello di College a gruppi sempre più ampi di studenti. Invece di educare studenti che appartenevano ad una fascia alta del 20%, rispetto a una curva "generale" di abilità, oggi si chiede ai College di estendere questa fascia fino a comprendere forse il 60% degli studenti. Mentre le scuole più famose (per es., Ivy League. MIT) possono procurarsi con facilità ottimi studenti, i Community College[i] e i College quadriennali hanno espanso i loro corpi studenteschi e, spesso, tenendo in scarsa considerazione il fatto che questi studenti non erano più parte di “un’elite”. Troppo spesso la risposta dei College nei confronti degli studenti più deboli consiste nello svolgimento di attività di recupero piuttosto che aiutarli a trovare il modo di trarre vantaggio dei talenti di cui dispongono. Un'altra complicazione è che, dopo un periodo relativamente lungo in cui i livelli di immigrazione non sono stati molto alti, l'America sta di nuovo sperimentando una vasta ondata di immigrazione. Molti nuovi immigranti sono alla ricerca di un’istruzione di livello superiore per poter vivere il "sogno americano". Tuttavia, per gli immigranti che hanno superato gli anni della fanciullezza e per i quali la prima lingua non è l'inglese, i problemi di lettura e scrittura della lingua inglese costituiscono un ostacolo all'ottenimento dei migliori risultati nell'educazione superiore.

Mentre l'America, negli ultimi 30 anni, diventava un paese più ricco, la forbice fra ricchi e poveri si è allargata. Questo ha significato che un maggior numero di individui della classe media è stata in grado di mandare i propri figli nei college privati; le università pubbliche si sono trovate nella necessità di fornire i loro servizi a persone economicamente meno avvantaggiate e a studenti, nuovi immigranti o figli di nuovi immigranti. In molti stati i politici hanno deciso di tagliare i bilanci delle università che sono frequentate da questi gruppi politicamente meno influenti.

Una conseguenza di questi cambiamenti è che gli insegnanti di matematica possono osservare una crescente diversità fra i livelli di capacità dei loro studenti. Questa situazione nuova ci richiederà di adottare metodi di insegnamento che consentano comunque a tutti questi studenti di conseguire la migliore esperienza possibile di conoscenze matematiche.

Matematica e Informatica

A partire dalla metà degli anni Settanta i college e le università hanno iniziato ad offrire lauree in Informatica e gli istituti post-secondari a proporre lauree in informatica al di fuori dei dipartimenti di matematica, nei quali i corsi erano tenuti da professori con laurea in informatica (e, all'inizio, in matematica e ingegneria elettrica). Per una serie di ragioni i corsi di laurea in informatica, che inizialmente erano ospitati presso i dipartimenti di matematica, si sono separati e hanno formato propri dipartimenti. (In alcuni casi queste separazioni avvennero per il modo in cui erano trattati i professori i cui interessi in informatica non erano collegati direttamente alla matematica).

Molti fra i leader della comunità matematica erano stati educati prima che emergessero le scienze informatiche, sia come laurea sia come area di specializzazione. Prima che nascesse l'informatica non esisteva nemmeno una sezione fra le offerte di impiego nei giornali dedicata ai matematici. Coloro che prendevano un post-diploma in matematica e consideravano questa meta come punto terminale dei loro studi, non potevano cercare un impiego fra gli annunci di lavoro nella sezione matematica e trovarvi delle offerte. Eppure era vero che per i laureati in matematica vi era spesso richiesta da parte del mercato del lavoro. Le categorie di azienda che ricercavano i laureati in matematica comprendevano società di ingegneria, industrie della difesa, banche e compagnie di assicurazione. Tuttavia il mondo è molto cambiato in 40 anni! Durante la prima ondata di domanda di specialisti in computer, sia nel mondo accademico che in quello industriale e degli affari, gli informatici erano lautamente pagati per le loro capacità. Sebbene vi siano stati brevi periodi di calo della domanda nel settore informatico, le opportunità di lavoro in questo campo attualmente sono molto alte e prevedibilmente lo resteranno per un certo tempo.

L'informatica è diventata una materia molto vasta. Per molte parti dell'informatica non sono richiesti alti livelli di capacità o padronanza matematiche. Questo significa che gli studenti dotati di elevate capacità matematiche hanno delle possibilità di scelta fra le lauree in matematica e informatica. Tuttavia i dipartimenti di matematica troppo spesso non richiamano l'attenzione degli studenti sul fatto che si possono laureare in matematica con l'obiettivo di svolgere poi una carriera professionale in campo informatico. Questo in parte perché, storicamente, le facoltà di matematica presso i college hanno troppo spesso concentrato il loro interesse principalmente sugli studenti che prevedono di conseguire i titoli accademici di livello più alto, in particolare il dottorato.Penso che una buona fonte aggiuntiva di studenti sia quella degli studenti con elevate capacità matematiche interessati in informatica, sebbene tali studenti non puntino, nel breve periodo, a livelli di laurea avanzati. È indispensabile che vengano scovati gli studenti che si vogliono laureare in matematica e sia fornito loro supporto ad ampio raggio, indipendentemente dal fatto che intendano o abbiano le capacità di conseguire lauree di livello più elevato.

Tenere informati i nostri studenti

Sia la matematica che l'informatica sono argomenti molto vasti che si intersecano in molte aree. È opinione diffusa che vi siano molte opportunità di lavoro per specialisti di Informatica. Impieghi legati alla creazione, alla amministrazione di pagine web non richiedono però grandi abilità matematiche. È chiaramente possibile che sia un laureato in matematica che uno in informatica possano svolgere questo genere di lavoro, sebbene possa succedere che sia per l'uno che per l'altro tale impiego non sia interessante indipendentemente dalla paga o dalla sicurezza del posto.

Per contro il compito di progettare e creare un data base o sviluppare il software di supporto ad un progetto sul genoma umano potrebbero essere svolti ugualmente bene da un laureato in matematica o informatica. Il punto importante è che i laureati in matematica, in molti casi, avrebbero almeno la stessa attrattività di altri a condizione che siano dotati di alcune abilità nel settore informatico. Eppure presso molti college ancora si fa poco per informare gli studenti che non solo la matematica può essere per loro un'alternativa rispetto alla laurea in informatica, ma per molti di loro potrebbe essere un'alternativa migliore.

Perché i dipartimenti di matematica non mettono queste informazioni a disposizione dei loro studenti? In alcuni casi i due dipartimenti sono gli stessi per cui non vedono la differenza. In altri casi ignorano i fatti e le conseguenze della loro inazione.

Principi di matematica

Lo sviluppo dei calcolatori digitali ha avuto un effetto molto rilevante sui contenuti della matematica. Se da un lato Calcolo infinitisimale continua ad essere uno strumento fondamentale per le applicazioni e conduce a molti risultati teorici, sono emersi negli ultimi 40 anni vasti settori della matematica, che non coinvolgono direttamente il Calcolo infinitisimale. Queste aree non sono importanti solo per l'informatica ma hanno prodotto anche una miriade di applicazioni in campi che vanno dalla biologia al settore degli affari. Attualmente gli studenti che si laureano in matematica, in una delle Scienze o in Ingegneria, iniziano i loro studi con il corso di Calcolo infinitisimale e spesso continuano con Calcolo infinitisimale per altri 2 o 3 semestri prima di affrontare altre parti della matematica quali algebra lineare, calcolo combinatorio, teoria delle probabilità, la matematica discreta, etc. Considerando la crescente differenziazione degli studenti per obiettivi e capacità personali, questo fatto risulta essere particolarmente sfavorevole poiché non consente agli studenti di vedere tutti i campi della matematica che potrebbero essere per loro interessanti o per i quali avrebbero talento. Questa situazione potrebbe essere riequilibrata facendo svolgere agli studenti del primo anno un corso di Principi di Matematica invece del corso di Calcolo infinitisimale.

I dati suggeriscono che se si inizia con il primo semestre del corso di Calcolo infinitisimale si assiste poi ad una rapida diminuzione del numero di studenti che si iscrivono al corso successivo della sequenza. Non è chiaro se un corso di Principi di Matematica otterrebbe un diverso livello di logoramento ma, anche se il logoramento restasse altrettanto alto, gli studenti uscirebbero da un semestre, o da un anno, di Principi di Matematica con un corredo di strumenti e idee matematiche molto più ricco di quello attuale.

Adottare, come corso iniziale in matematica, un corso di Principi di Matematica comporta un sacco di problemi, principalmente quelli legati al coordinamento per gli studenti che desiderano laurearsi in chimica, fisica o ingegneria. Non ritengo che queste sfide siano insuperabili; le lauree in Scienze e Ingegneria trarrebbero anch'esse beneficio dal fatto che gli studenti entrino in contatto con idee del tipo calcolo delle probabilità, algebra lineare, algebra astratta e calcolo combinatorio molto prima, durante il loro percorso di studio della matematica, di quanto in effetti avviene oggi.

Corsi di discipline collegate

I dipartimenti di Informatica che si sono separati dai dipartimenti di Matematica hanno rapidamente scoperto che il corso di Calcolo infinitisimale era meno importante per le lauree in Informatica di quanto lo fosse per quelle in Matematica. Videro chiaramente che l'algebra lineare (che si può seguire con limitate basi di Calcolo infinitisimale), la teoria della probabilità e l'argomento emergente Matematica del Discreto soddisfacevano gli interessi dei loro studenti meglio del tradizionale Calcolo infinitisimale. I dipartimenti di matematica risposero creando corsi "di servizio" di matematica discreta rivolti a quegli studenti che desideravano laurearsi in informatica, ma spesso vietavano agli studenti di iscriversi a tali corsi per ottenere crediti scolastici per la laurea in matematica. I matematici che utilizzavano Calcolo infinitisimale nel loro lavoro divennero talvolta prudenti circa la possibilità di permettere agli studenti che si laureavano in matematica di seguire un percorso di studio che non includesse almeno tre semestri di Calcolo infinitisimale, equazioni differenziali, calcolo avanzato/analisi reale. Recentemente alcuni dipartimenti di informatica, avendo constatato che i dipartimenti di matematica non rispondono alle loro necessità circa gli argomenti trattati nei corsi di matematica del discreto svolti presso i dipartimenti di matematica, si stanno movendo nella direzione di svolgere direttamente tali corsi presso i propri dipartimenti.

Purtroppo, è una storia vecchia quella che vede i dipartimenti di matematica oggetto della richiesta di insegnare corsi complementari "applicativi" (per esempio matematica finanziaria, metodi matematici per l'ingegneria, programmazione lineare, statistica, informatica e ricerca operativa, etc.) che sono stati svolti senza che vi fossero delle effettive interazioni con i dipartimenti interessati dallo svolgimento di tali corsi. Quando l'argomento insegnato dai dipartimenti di matematica si stacca per la tangente in modo eccessivo rispetto alle loro necessità, sono questi stessi dipartimenti che insegnano proprie versioni di tali corsi ai loro studenti. Questo percorso è stato seguito in un ampio spettro di situazioni (per esempio teoria del gioco, (insegnata inizialmente dai dipartimenti di matematica, attualmente sempre più diffusa presso i dipartimenti di economia, finanza o scienze politiche), ricerca operativa (ora spesso insegnata presso i dipartimenti di finanza ed economia), etc.). Questo comportamento è molto vicino al suicidio. Quello che dovremmo fare sarebbe lavorare a stretto contatto con i dipartimenti che necessitano di corsi con un significativo contenuto matematico facendo in modo che questi corsi siano tenuti da persone del dipartimento di matematica. Un'altra possibilità è che questi corsi facciano parete del dipartimento di matematica ma venga richiesto allo specifico dipartimento (finanza, economia, etc.) di avere uno dei membri del corpo docente per svolgere il corso. Questo non solo ci consentirebbe di avere un maggior numero di corsi da insegnare ma potrebbe anche invogliare gli studenti ad intraprendere altri corsi di matematica o anche a laurearsi in matematica.

Corsi "di servizio"

Molti dipartimenti (per esempio psicologia ed economia e finanza), che non hanno necessità di molta matematica per i loro studenti, hanno cominciato a richiedere che determinati corsi, facenti parte del loro corso di laurea, vengano seguiti presso i dipartimenti di matematica. Invece di permettere ai loro studenti una possibilità di scelta all'interno di un quadro generale di requisiti educativi in matematica, questi dipartimenti richiedono una scelta specifica di un corso di matematica fra quelli disponibili, come parte di un generale requisito educativo. Esempi di tali corsi sono i corsi di statistica richiesti spesso agli studenti di scienze sociali e delle scuole per infermieri e i corsi di matematica finitaria richiesti per le lauree in contabilità e finanza. Alcuni dipartimenti offrono una maggiore scelta ma non una scelta completa. Per esempio, un dipartimento di economia o di geologia potrebbe permettere ai propri studenti di scegliere statistica o calcolo infinitisimale. Nel contesto qui in discussione, la matematica discreta è un corso "di servizio" per i corsi di laurea in informatica in cui viene richiesto, sebbene la matematica discreta raramente possa essere utilizzata per soddisfare un requisito educativo generale di un corso. Un altro problema dei corsi "di servizio" è che talvolta vengono utilizzati da altri dipartimenti che desiderano fare selezione fra i loro studenti. Per esempio, in alcuni casi discipline come Tecnologie per la Medicina hanno richiesto ai loro studenti di sostenere l'esame di Calcolo infinitisimale sebbene essi avessero solo marginalmente necessità dei contenuti di tale corso.

I dipartimenti di matematica spesso non dedicano a questi corsi l'attenzione che richiederebbero. Non solo non esiste nessuna valida ragione per cui uno studente di economia che frequenta un corso di matematica finitaria non possa diventare un ambasciatore della matematica ma questi stessi studenti, qualora avessero un'esperienza positiva in tali corsi, potrebbero tornare per frequentarne altri (anche corsi avanzati) o decidere di passare al corso di laurea in matematica.

Coinvolgimento con i nostri colleghi di altri dipartimenti

È essenziale aumentare la consultazione con membri di altri dipartimenti riguardo ad esempi di uso della matematica che dovrebbero essere coperti da corsi obbligatori per tali lauree, che non appartengono al settore della matematica, in modo tale che questi dipartimenti siano soddisfatti dei corsi che vengono svolti per i loro allievi e si sentano più coinvolti. La situazione ideale sarebbe che ogni dipartimento di matematica avesse un club di matematica che inviti relatori da altri dipartimenti per svolgere dibattiti su come essi utilizzano la matematica nel loro lavoro. Così facendo si amplierebbero gli orizzonti degli studenti e al tempo stesso si costruirebbero quei ponti così necessari verso gli altri dipartimenti.

Prerequisiti

La matematica, per sua stessa natura, rende molto facile la tentazione di organizzare il suo sviluppo in modo molto gerarchico. Tuttavia, in questi giorni di iscrizioni in calo e diminuzione del numero dei laureati, questa non è certo la nostra scelta migliore. Per esempio, piuttosto che fissare prerequisiti di calcolo infinitisimale per corsi come algebra lineare, teoria dei grafi, calcolo combinatorio o geometria, come strumento per "garantire" la maturità matematica, dovremmo invece consentire, agli studenti che sono interessati, di seguire tali corsi avanzati e cercare, per quanto è possibile, di rendere tali corsi autonomi e indipendenti da prerequisiti. Sarebbe possibile, in molti casi, invogliare un certo numero di studenti a intraprendere i nostri corsi e il prezzo da pagare è solo la presentazione di alcune parti degli argomenti che lo studente potrebbe comunque non aver visto anche se un altro corso fosse stato indicato come prerequisito.

Corsi di matematica per materie umanistiche (*General Education*)

Sebbene storicamente i dipartimenti di matematica abbiano dedicato scarsa attenzione ai corsi che non erano corsi "di servizio" per gli studenti di scienze, informatica ed ingegneria, dovrebbero invece farlo ora. La stessa cosa è vera nei confronti degli studenti di materie umanistiche che frequentano corsi per soddisfare a requisiti generali di matematica. Primo, alcuni studenti di materie umanistiche (LA)[i] potrebbero decidere i cambiare corso di laurea per essere coinvolti con la matematica più direttamente. Per esempio potrebbero decidere di indirizzare un interesse per l'insegnamento verso l'insegnamento della matematica nelle scuole medie superiori o inferiori. Secondo, gli studenti di LA diventeranno un giorno genitori e il loro atteggiamento verso la matematica, la vastità delle loro conoscenze circa le applicazioni della matematica condizioneranno i valori e gli atteggiamenti verso la matematica che essi trasmetteranno ai loro figli. Terzo, alcuni studenti di LA diventeranno leader politici, imprenditori e decision maker del futuro. L'assegnazione dei fondi per la ricerca matematica, l'educazione matematica, etc. dipenderà dalla sensibilità di queste persone rispetto all'importanza ed al valore della matematica. I corsi che "spengono" gli studenti di LA rendono uno scarso servizio alla comunità matematica.

Storicamente molti corsi per studenti di LA sono stati progettati per rimediare al fatto che gli studenti giungono al College privi della "padronanza" delle abilità tradizionalmente insegnate nella scuola superiore. Questi corsi non vengono pubblicizzati bene. Se agli studenti mancano tali abilità, al momento del loro arrivo hanno già, di solito, scelto come futuri corsi di studio quelli che non implicano un esteso utilizzo della matematica. Oltre a ciò, cercare ancora una volta di sviluppare la padronanza di quelle abilità, rispetto alle quali gli studenti sono stati in precedenza già più volte stimolati con scarso successo, non ha molte possibilità di riuscita all'ultimo momento. In effetti gli studenti che frequentano questo tipo di corso spesso sono felici di qualsiasi voto gli consenta di passare l'esame e non cercano comprendere realmente quello che non hanno capito in precedenza. Al contrario, tali corsi rafforzano gli atteggiamenti negativi. Molto recentemente vi è stato un grande dibattito, all'interno della comunità matematica, a proposito di quella che viene definita alfabetizzazione quantitativa. Talvolta questo argomento è stato utilizzato per suggerire che i laureati del College debbano avere un bagaglio "minimo" di abilità nel momento in cui lasciano il College. Considerando che l'alfabetizzazione quantitativa implica l'insegnamento dell'algebra tecnica e di abilità trigonometriche che gli studenti dovrebbero aver appreso nella scuola superiore e per le quali non hanno invece sviluppato alcuna padronanza, non pare saggio richiedere agli studenti di padroneggiare tali abilità se non nel caso in cui abbiano scelto dei corsi di laurea che le richiedano specificamente. Sicuramente nei College agli studenti deve essere presentata la matematica, indipendentemente dal loro corso di laurea; tuttavia, questi corsi dovrebbero essere adattati meglio alle esigenze dello studente rispetto a quello che è avvenuto nel passato.

È importante svolgere corsi di matematica, per studenti di LA, che facciano menzione e/o dimostrino l'importanza della matematica rispetto allo sviluppo delle nuove tecnologie (per esempio la ricerca sul genoma, le comunicazioni senza filo) cosi come il ruolo di sostegno che la matematica svolge rispetto alle altre scienze. Tali corsi sono in contrapposizione rispetto a quelli pensati per costruire le abilità di cui gli studenti sono carenti nel momento in cui vengono ammessi al College. Non esiste alcun motivo perché gli studenti che frequentano i prescritti corsi di matematica presso il College non possano uscire da tali corsi come ambasciatori della matematica piuttosto che matematica-fobici!

È assolutamente necessario che noi si faccia riferimento, in tutte le nostre lezioni, alle recenti modalità di utilizzo della matematica nello sviluppo delle nuove tecnologie. Le nuove tecnologie non sono un dono alla società solo della fisica e dell'ingegneria ma anche, e allo stesso modo, della matematica. E inoltre, nei casi in cui è possibile, non dobbiamo mancare di mostrare chiaramente come le cose che stanno studiando nei loro corsi siano di ausilio per queste moderne tecnologie emergenti. Per esempio, se insegniamo algebra lineare, dovremmo ricordare loro il suo ruolo nella programmazione lineare, nell'ingegneria strutturale e così via. Se un membro della facoltà pensa veramente di non avere il tempo, durante le lezioni, per parlare delle applicazioni pratiche perché c'è tanta teoria ancora da fare, non si potrebbe assegnare un lavoro scritto, che riguardi l'intero curricolo, per stimolare gli studenti ad apprendere notizie sulle applicazioni dell'algebra lineare e produrre quindi un breve scritto su ciò che hanno imparato? Questi argomenti di studio dovrebbero essere assegnati durante ognuno dei corsi che teniamo! Ecco alcuni esempi:

Teoria dei numeri : quando parliamo di congruenza aritmetica, dedichiamo un po' di tempo per mostrare agli studenti come sistemi di verifica dell'errore, basati sull'aritmetica modulare, siano utilizzati nei codici a barre, i numeri ISBN, etc.

Geometria: Mostrare come piani finiti possano essere utilizzati per costruire codici di correzione dell'errore, come concetti riguardanti la convessità si palesino nella visione artificiale dei computer e nella robotica, etc.

Algebra astratta: Mostrare come nell'arte, nell'architettura e nell'ingegneria possano sorgere questioni riguardanti la simmetria; come i codici basati sugli anelli dei polinomi siano utilizzati in una gran varietà di applicazioni, etc.

Approcci tematici alla matematica

Storicamente la matematica è stata insegnata illustrando gli strumenti matematici e, se lo studente era fortunato, applicazioni al di fuori della matematica in cui questi strumenti potevano operare. Questo approccio alla disciplina tende ad enfatizzare il ruolo privilegiato che la manipolazione dei simboli gioca in matematica. Se da un lato questo approccio è sicuramente necessario e va assicurato ai corsi di laurea (e, in misura minore, alle discipline afferenti), non è l'unica alternativa per gli studenti dei corsi di LA e dei corsi, a vari livelli, rivolti agli insegnanti. Un approccio alternativo consiste nel considerare la matematica come uno strumento in grado di fornire una visione su una varietà di "temi" e mostrare come si possa conseguire questa visione. Qui di seguito vi è una lista di tecniche che i matematici hanno storicamente enfatizzato ed un insieme di contenuti alternativi basati su temi che considero essere utili in tutti i corsi di matematica, anche se guidata essenzialmente da considerazioni di carattere tecnico.

Tecniche:

0. Aritmetica; 1. Geometria; 2. Algebra; 3. Trigonometria; 4. Calcolo infinitisimale (ad una variabile e a più v.); 5. Equazioni Differenziali; 6. Algebra Lineare (Matrici); 7. Algebra Moderna; 8. Calcolo delle Probabilità e Statistica; 9. Variabili Reali; 10. Variabili Complesse; 11. Teoria dei Grafi; 12. Teoria dei Codici; 13. Teoria dei Nodi; 14. Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali

(E altro ancora!)

Temi:

1. Ottimizzazione; 2. Crescita e Variazione; 3. Informazione; 4. Imparzialità e Equità; 5. Rischio; 6. Forma e Spazio; 7.Disegno e Simmetria; 8. Ordine e Disordine; 9. Ricostruzione (partendo da informazioni parziali); 10. Conflitto e Cooperazione; 11. Comportamento non intuitivo

Un vantaggio dell'approccio per temi all'insegnamento della matematica è il modo molto naturale con cui emerge il collegamento alla trattazione delle applicazioni pratiche.

Geometria

Sebbene il pubblico identifichi strettamente la matematica con la manipolazione dei simboli, queste stesse persone probabilmente non sono consapevoli che i migliori manipolatori di simboli non sono dei matematici umani ma dei programmi per computer tipo *Maple* e *Mathematica*. Questo fatto dovrebbe servire a stimolare l'attenzione dei matematici. I computer si sono rilevati molto meno efficaci riguardo ai meccanismi della geometria rispetto a quelli dell'algebra. Non che le applicazioni geometriche dell'informatica *(morphing* e *computer graphics*) non stiano trasformando in molti modi la società, ma è anche vero che non si può dare un'immagine ad un computer e chiedere di stampare una descrizione di ciò che "vede". Questo suggerisce che, nel campo della geometria, esiste un gran lavoro da svolgere e che ancora deve essere pensato. Dal momento che la geometria ha il vantaggio di essere di facile approccio (rispetto al Calcolo infinitisimale e all'Algebra) e ha una lista di applicazioni in continua espansione (visione artificiale, robotica, tecnologie della comunicazione, etc.), merita maggiore attenzione a tutti i livelli di ciò che insegniamo nei nostri corsi di matematica.

Insegnamento nella scuola primaria

Molti stati hanno abolito la pratica di consentire agli studenti che intendono diventare insegnanti di scuola primaria di laurearsi in "pedagogia". Gli stati ora spesso insistono per una laurea in una specifica materia e,come parte del percorso di studio, per i corsi richiesti per la "certificazione di stato". Nel passato i futuri insegnanti frequentavano corsi di matematica, come parte del percorso di laurea, presso il dipartimento di pedagogia. Alla luce dei cambiamenti in atto, ai dipartimenti di matematica viene richiesto di organizzare appositi corsi richiesti da lauree in altre discipline per completare il curricolo.

È strettamente necessario che in tali situazioni i matematici adottino un lungimirante approccio al curricolo. Storicamente i programmi della scuola primaria si sono concentrati sul mnemonico trattamento dell'aritmetica e nel campo della geometria sul semplice riconoscimento di un certo numero di forme. Ma perché i futuri insegnanti di scuola primaria non dovrebbero prendere in considerazione argomenti quali i ricoprimenti (*tilings*), i poliedri, la costruzione di una striscia di Moebius, immagini simmetriche su una striscia e nel piano, etc., anche se questi argomenti non sono tradizionali? Non potrebbero gli studenti della classe quarta imparare a giocare a *Sprouts* insieme a Nintendo?

Lo scorso anno mio figlio, che frequenta le terza, è arrivato a casa con i "minuti di matematica". Si tratta di problemi sistematici che implicano addizioni e moltiplicazioni e sono più numerose di quante ne possa fare "super matman"in un minuto. Lo scopo è mettersi alla prova per verificare quanti problemi si è in grado di svolgere in un minuto. Mi domando questa attività quale insegnamento dia ai giovani circa il valore, l'importanza e la natura del lavoro matematico. Mio figlio mi racconta che deve svolgere questi minuti di matematica sia a scuola sia a casa. Non si potrebbe forse impiegare il tempo dedicato ai minuti di matematica svolgendo qualche altro argomento? Questo è possibile solo se i corsi che proponiamo ai futuri insegnanti di scuola primaria pongono le basi per qualcosa che vada oltre i "minuti di matematica". Dovremmo fare tutto il possibile per trasformare i futuri insegnanti in ambasciatori della matematica. In particolare, questi insegnanti dovrebbero essere particolarmente ferrati sul ruolo che la matematica gioca nello sviluppo di tante moderne comodità.

Insegnamento nella scuola secondaria

Le scuole secondarie americane, specialmente quelle nelle grandi aree urbane, si stanno avvicinando ad una situazione di crisi rispetto alla capacità di ricoprire gli incarichi di insegnamento. Sebbene una delle principali ragioni di ciò sia il basso livello dei salari e di considerazione sociale di cui godono gli insegnanti nella società americana, ci sono, nonostante ciò, delle azioni che la comunità matematica può intraprendere per cercare di migliorare la situazione. Primo, quelli di noi che svolgono attività di insegnamento possono diventare un modello prendendo sul serio l'insegnamento e comunicando la soddisfazione personale che dà loro la professione. Secondo, possiamo attirare l'attenzione dei nostri studenti sulle crescenti opportunità che offre l'insegnamento nella scuola secondaria. Il nostro modo di insegnare fa la differenza e il nostro esempio può portare ad una situazione nella quale i futuri studenti della scuola superiore avranno una squadra di insegnanti ben preparati ed appassionati del loro lavoro. Terzo, non dobbiamo considerare gli studenti universitari che intendono poi insegnare nelle scuole superiori come "naviglio leggero". Al pari degli studenti che puntano al dottorato in matematica o ad una carriera nelle scienze attuariali, questi studenti hanno delle specifiche esigenze. Dobbiamo mirare ad aiutarli, nel miglior modo che possiamo, a conseguire i loro obiettivi. Certamente il nostro obiettivo nei confronti di questi insegnanti di scuola secondaria è fare di loro degli ambasciatori della matematica. Quarto, sebbene ampiezza e profondità della preparazione siano importanti per tutte le lauree in matematica, sembra particolarmente importante che quelli che hanno in mente di insegnare nella scuola secondaria incontrino, nei loro studi, la gamma più ampia possibile di idee di tipo matematico in modo che siano in grado mettere i loro studenti al corrente di tutte le possibili implicazioni della matematica moderna. In particolare è particolarmente importante che questi futuri insegnanti abbiano nel loro bagaglio conoscenze relative alle molte applicazioni della matematica nella società moderna e nelle moderne tecnologie.

Conclusione

Viviamo un'epoca nella quale, presso i College e le Università, un certo numero di discipline accademiche (e gli esempi comprendono la filosofia e gli studi classici) sono state marginalizzate. Credo che, se la comunità matematica non intraprenderà azioni appropriate, anche la matematica potrebbe finire ai margini. Questo sarebbe un triste avvenimento per la matematica e per l'America. Credo che le decisioni che saranno prese dalla nostra comunità nei prossimi anni decideranno l'esito di degli sviluppi futuri. Dobbiamo agire saggiamente.

Riferimenti

Campbell, P. and L. Grinstein (eds.), *Mathematics Education in Secondary Schools and Two-Year Colleges: A Sourcebook,* Garland Publishing, New York, 1988.

Gavosto, E., and S. Krantz, W. McCallum (eds.), *Contemporary Issues in Mathematics Education*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Volume 36, Cambridge U. Press, New York, 1999.

Malkevitch, J., Discrete mathematics and public perceptions of mathematics, in J. Rosenstein et al., (eds.), *Discrete Mathematics in the Schools,* Volume 36, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, American Mathematical Society, Providence, 1997.

——, Mathematics' image problem, (unpublished manuscript, available from the author).

Meyer, W., (ed.), *Principles and Practice of Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1997.

Steen, L., (ed.), *Heeding the Call for Change*, MAA, Washington, 1992.

Uchitelle, L., Making sense of a stubborn education gap, *New York Times*, Week in Review, July 23, 2000, p. 1,3.

Ringraziamenti

Ho tratto vantaggio dalle osservazioni di molte persone che fanno parte di CUPM, in particolar modo Susanna Epp, che mi ha dato molte e utili indicazioni a carattere editoriale riguardanti una precedente stesura di queste note.

La matematica nel mondo del lavoro nel 2010

Patrick Dale McCray
Pharmacia Corporation

Che cosa dovrebbe fare uno studente universitario che sia interessato alla matematica ma sia anche interessato ad una carriera al di fuori dell'ambito dell'insegnamento? Il mio consiglio ai giovani è sempre stato questo: Scegliete ciò che più vi piace fare. Questo è evidente non solo

- per gli studenti universitari di matematica che incontro come corsisti estivi, *coop students* o presso il convegno annuale della sezione dell'Illinois della Associazione Matematica Americana (ISMAA), ma anche
- per gli studenti iscritti a lauree ad alto contenuto matematico, nel caso siano (innamorati?) interessati alle
- scienze biologiche (come microbiologia, ecologia, educazione alla salute, medicina),
- scienze fisiche (come astronomia, chimica, fisica), oppure
- il mondo degli affari (come scienze bancarie, informatica, analisi dei dati, ingegneria, finanza, assicurazioni, e molte altre).

Questo saggio ha lo scopo di stimolare i professori universitari che insegnano matematica a prendere decisioni sul curricolo del piano di studi in matematica a vantaggio di quei giovani che cercano di prendere una decisione su che cosa intendono fare nella vita e per i quali la matematica è un fondamentale fattore di successo. Saranno discusse le seguenti sei (6) domande dal punto di vista di un uomo d'affari con trent'anni di carriera alle spalle, concentrandosi sulle questioni di carattere matematico che vi sono implicate.

- Che cosa significa essere preparati per una carriera professionale nel mondo degli affari?
- Quali abilità di tipo non matematico ci si addente?
- Quali abilità matematiche ci si attende?
- Qual è l'importanza di dimostrare i teoremi?
- Quali opportunità di carriera ci si può attendere?
- Quali sono le implicazioni rispetto al curricolo?

Prima di trattare queste sei questioni, qualche notizia sulla mia formazione e sulla carriera professionale possono essere utili per orientare il lettore sul mio punto di vista e per dare credibilità al materiale che propongo. Il punto di vista di ciò che segue è: Che cosa contribuisce ad una carriera di successo nel mondo degli affari. Le raccomandazioni ed i consigli che propongo per il curricolo di matematica hanno lo scopo di contribuire a rendere interessanti gli studenti, nella veste di personale in cerca di occupazione, rispetto ai potenziali datori di lavoro nel mondo degli affari.

Dati autobiografici

Mentre completavo i miei studi universitari presso l'Illinois Institute of Technology di Chicago, avevo un impiego come assistente di Matematica presso il North Park College, sempre a Chicago. Per cercare di far quadrare il bilancio, intrapresi l'attività che era destinata a diventare la mia principale vocazione lavorando presso il Centro di Calcolo infinitisimale dell'Università dell'Illinois, Circolo di Chicago, con un impiego part-time come programmatore scientifico, dove mi occupavo dello sviluppo di software matematico. Dopo aver concluso il corso di dottorato all' I.I.T, ho ottenuto un impiego alla G.D.Searle & Co, presso il dipartimento amministrativo e di gestione dati. Da allora sono sempre stato un dipendente della Searle e dei suoi eredi commerciali.

Alla G.D.Searle & Co, la mia carriera è cominciata con un apprendistato che comportava applicazioni commerciali e scrittura di programmi in COBOL-IDS (un'estensione del COBOL per una rete di trattamento di dati, un precursore di SQL). I miei primi dieci anni alla Searle sono stati dedicati principalmente a fornire supporto a biologi, chimici, medici e statistici. La seconda decade ha portato grandi cambiamenti nella clientela e nell'azienda nel suo complesso. La famiglia Searle chiamò Don Rumsfeldt, ex Segretario alla Difesa degli U.S.A., all'incarico di Presidente per guidare l'azienda nella trasformazione da impresa a conduzione famigliare in Società per Azioni. La filosofia di un sistema informatico centralizzato di gestione venne sostituita da un modello decentralizzato. Questa fase si concluse con l'acquisizione della Searle da parte della Monsanto. In questo periodo il mio obiettivo principale si spostò dal supporto al software statistico verso il software di sistema IBM, e poi di nuovo sulla statistica. Negli ultimi quindici anni, gli scienziati e le loro ricerche sono stati al centro della mia attenzione. Inizialmente ho occupato varie posizioni all'interno del dipartimento di statistica, scrivendo programmi utilizzati direttamente dagli statistici o progettando sistemi applicativi destinati ad essere utilizzati da dipartimenti ad essi collegati. Circa a metà di questo quindicennio la gestione dell'intero programma scientifico del dipartimento di Ricerca e Sviluppo della Searle è stata centralizzata presso il dipartimento informatico di Ricerca e Sviluppo, presso il quale mi trovo ancora.

Durante la mia carriera mi sono reso conto che, mantenermi attivo matematicamente, mi ha aiutato nelle quotidiane attività lavorative. Circa tre anni dopo che Searle mi aveva assunto, mi associai all'American Mathematical Society. A quei tempi pensavo: hai insegnato per tre anni e per altri tre hai fatto il programmatore. Chi sei, un professore o un programmatore? Stabilii che ero un matematico a cui era capitato di avere un lavoro in un dipartimento di informatica. Più di recente ho aggiunto "presso un'industria farmaceutica". Prima di arrivare alla Searle, mi ero associato alla MAA, al termine del corso di Master, e all'Association for Computer Machinery all'epoca del mio impiego presso la Università dell'Illinois.

L'idea di restare attivo dal punto di vista matematico, e come realizzarla, ha preso forma in modo graduale. Non era molto diverso dal procedere per ripetuti tentativi. Più ero pronto dal punto matematico, migliori erano le mie prestazioni sul lavoro. Ho cominciato con vaste letture matematiche, serie e ricreative, e con la soluzione dei problemi proposti nella rivista *Monthly*. Il passo successivo fu la partecipazione al convegno annuale della Sezione dell'Illinois della MAA.

Grazie a John Schumaker, ho iniziato ad essere coinvolto, nel servizio e nella dirigenza, nelle attività operative della sezione dell'Illinois, dapprima nella sezione Soci e Pubbliche Relazioni, poi come redattore di *Greater Than Zero (Maggiore di Zero),* il bollettino del ISMAA, e culminando il mio servizio presso l'ISMAA come membro del Comitato direttivo in qualità di Presidente della Sezione. Grazie a Len Gillman, ho iniziato a frequentare convegni a carattere nazionale, il primo dei quali a Toronto, nel 1976. Stavo seduto in mezzo al pubblico alle spalle di Coxeter, mentre diceva a bassa voce che avrebbe preferito che ciò che era stato presentato come dimostrazione della Congettura dei Quattro Colori non fosse stato fatto da un computer; Coxeter stesso mi ha poi portato al convegno di gennaio del 1977, a Sant Louis. Da quel giorno ho sempre partecipato agli incontri.

Ho potuto verificare che la combinazione fra l'essere esposto al meglio,sia nella parola parlata che stampata, con le opportunità del servizio svolto, ha prodotto un effetto altamente stimolante, soddisfacente e che induce al miglioramento. A livello federale, ho partecipato e presieduto al AMS Short Course Committee, e al comitato del MAA sui Matematici fuori dall'Accademia. Sono stato membro del Consiglio per le Risorse Umane del MAA e ho prestato servizio in qualità di Governor at large nel MAA Board of Governorscome rappresentante dei matematici nel commercio nell'industria e nel governo (BIG mathematicians). Attualmente sono impegnato con il MAA Short Course Committee. Mi è stato inoltre chiesto di partecipare a molti progetti del Dipartimento dell'Educazione degli Stati Uniti, del MSEB a alla revisione degli obiettivi educativi dello stato dell'Illinois

Oltre ad aver sviluppato una passione per certi argomenti della matematica per il fatto di essere rimasto in contatto con le tendenze della ricerca matematica, ho constatato che il lavoro svolto presso i comitati e all'interno dei progetti ha ricevuto l'attenzione dovuta. Sono stato portato a prendere seriamente in considerazione la comunicazione e l'uso della matematica in ambienti non accademici. Per me il curricolo matematico è molto importante per una serie di ragioni. Primo, le persone che incontro sul lavoro sono il prodotto, o i beneficiari, del curricolo universitario di matematica. In secondo luogo quello che accadrà in futuro sarà determinato, in gran parte, dai contenuti del curricolo universitario di oggi. Terzo, le più tipiche applicazioni della matematica risultano essere di natura essenzialmente elementare e richiedono solo la matematica di livello undergraduate. Quarto, il curricolo universitario stimola lo sviluppo di vari modi di pensare in termini matematici. Le modalità di pensiero matematico, o abiti mentali, che sono estremamente efficaci in contesti pratici includono la capacità di riconoscere forme e simmetrie, utilizzare procedimenti induttivi e ricorsivi, ragionare, in modo logico, su sistemi astratti quali i sistemi di simboli algebrici.

1. La preparazione per una carriera negli affari

Di che cosa va alla ricerca un datore di lavoro quando prende in considerazione una persona come aspirante ad un impiego? Chiaramente le prime cose di cui si tiene conto sono la lettera di presentazione del candidato, il curriculum vitae ed il colloquio diretto. Quale genere di informazioni cerca il datore di lavoro? Come valuta, durante il colloquio e nei primi sei mesi di lavoro, ciò che il candidato ha studiato? Il datore di lavoro è alla ricerca di conoscenze e della capacità di metterle in pratica. Tuttavia, nella maggior parte dei casi il datore di lavoro sta semplicemente cercando di rispondere alla domanda: Sarebbe (davvero) una buona idea che questa persona inizi a lavorare per noi lunedì prossimo? Dopo che una persona ha svolto, per un certo periodo, un determinato compito la domanda diventa: è ancora una buona idea continuare a lavorare con questa persona per migliorare le sue prestazioni?

Quando esamino un curriculum vitae per decidere se convocare un candidato per un colloquio, la prima cosa che faccio è valutare l'educazione scolastica ricevuta e le esperienze significative. Il mio consiglio agli studenti della scuola superiore: scegliete il vostro College o Università tenendo in considerazione l'immagine che la scuola ha presso i vostri potenziali datori di lavoro.

Poi prendo in considerazione il percorso lavorativo, con particolare attenzione ai livelli di efficienza e di responsabilità che sono stati raggiunti dal candidato. In aggiunta considero il tipo di ambienti di lavoro di cui la persona ha fatto esperienza ed il modo in cui si possono collegare alla posizione di lavoro in cui il candidato troverà impiego, nel caso sia assunto. Un elemento favorevole sarebbe una precedente esperienza di impiego molto simile al tipo di lavoro che il candidato dovrebbe svolgere subito dopo essere stato assunto. Il mio consiglio ai futuri candidati: Quando sei uno studente fai delle esperienze di lavoro nello stesso settore nel quale pensi di cercare impiego una volta conclusi gli studi. I lavori svolti durante gli anni della scuola superiore, prima o durante il College, come lavori part-time, internati estivi o coop programs, rendono un candidato molto più interessante. È più semplice stabilire se una persona sia adatta ad uno specifico ambiente di lavoro se ha già avuto occasione di venire in contatto con situazioni simili.

Infine prendo in considerazione l'elenco delle abilità quali la dimestichezza con i linguaggi di programmazione, gli ambienti informatici, i word processor, le lingue straniere, e importanti conoscenze economiche che sono direttamente o indirettamente collegate alle abilità che il candidato dovrà mettere in campo se verrà assunto. Sia che io abbia assegnato un internato estivo sia nel caso stia cercando una persona per una posizione a tempo indeterminato, i candidati che non mostrano la potenzialità di essere produttivi nel giro di due settimane dall'assunzione non vengono nemmeno presi in considerazione per un colloquio. Viene preso in considerazione il modo in cui il candidato ha costruito il suo bagaglio di abilità frequentando corsi o facendo esperienze di lavoro. Un fattore preso in considerazione è poi la quantità di tempo che il candidato ha dedicato allo sviluppo della proprie abilità. Si considera inoltre l'effettiva possibilità che le capacità attuali del candidato si possano trasferire in altri ambiti o che possa acquisire le necessarie nuove abilità rapidamente, senza impiegare molto tempo. Il consiglio per il candidato è duplice. Primo, esponiti consapevolmente a nuove e diverse situazioni, in parte allo scopo di acquisire abilità che possano interessare i potenziali datori di lavoro. Secondo, cerca di conseguire una reale e pratica esperienza sul campo nel tuo settore di interesse. Per esempio, se un candidato vuole diventare un esperto attuariale o di statistica, un'esperienza sul campo nell'area dell'analisi dei dati sarebbe utile.

2. Le abilità di tipo non matematico

Le abilità interpersonali sono parte essenziale, in qualsiasi carriera, per un successo continuativo ed una soddisfacente esperienza, sia nel caso di un percorso al di fuori dell'accademia, nel mondo "reale", sia nel caso di una carriera accademica. Le abilità relazionali, in aggiunta allo studio, possono essere sviluppate per mezzo degli stimoli ricevuti sul posto di lavoro e sviluppando la capacità di apprendere dall'esperienza, sia quella personale che quella di altre persone

Comunicare in modo chiaro è una delle abilità più importanti per le persone che lavorano nel mondo degli affari. Un' abilità chiave è quella di ascolto, cioè possedere una buona capacità di comprendere le comunicazioni verbali. Per esempio, nel caso più tipico, ciò che il datore di lavoro si aspetta viene comunicato alle singole persone verbalmente. Quando la necessità di chiarezza è l'elemento essenziale, le comunicazioni scritte vengono sempre presentate ai dipendenti nel corso di una riunione nella quale è possibile rivolgere domande alla persona che svolge la presentazione. Anche se il relatore non è in grado di rispondere ad una specifica domanda, questo processo consente ad altre persone di fornire ulteriori informazioni che possono chiarire qualsiasi precedente dubbio o carenza della comunicazione iniziale.

Oltre ad avere buone capacità di ascolto, le persone devono essere in grado di comunicare efficacemente agli altri le proprie idee e punti di vista. Senza concrete abilità comunicative, una persona non è in grado di comunicare ad altri riguardo al gruppo di lavoro, o ai propri superiori i risultati che sono stati conseguiti o ciò che è necessario fare. Un consiglio che mi trovo ripetutamente a dare è di ricordare alle persone che, quando presentano un'idea ad altri, devono tenere presente chi sono i destinatari del loro messaggio. Una volta che il relatore ha ben chiaro quali siano i suoi interlocutori, i particolari della presentazione trovano poi la loro naturale collocazione.

Il fatto che una persona abbia buone capacità decisionali spesso determina quali opportunità abbia di autonomia e di esercitare un controllo personale sui propri compiti e progetti. Nelle situazioni lavorative più complesse, spesso avviene che non vi sia un'unica decisione ottimale. È assolutamente fondamentale la capacità di porre in atto un'approfondita valutazione delle varie possibilità, nelle quali le diverse alternative siano differenziate sulla base di criteri nettamente distinti.

Praticamente tutte le attività importanti nel mondo del lavoro vengono svolte in un contesto di squadra. Sono essenziali le abilità nel lavoro di squadra quali la fiducia in se stessi e nelle proprie capacità e una profonda comprensione delle dinamiche psicologiche del lavoro di gruppo. Spesso le squadre sono formate da persone ciascuna delle quali proviene da uno specifico settore lavorativo e che sono quindi destinate a svolgere il ruolo di esperti nel loro specifico campo. Tipicamente una squadra includerà una sola persona con una formazione matematica di livello avanzato. Un matematico è abbastanza! Questa persona deve essere in grado di svolgere efficacemente il proprio compito in un contesto multidisciplinare con altri che non hanno una formazione matematica dello stesso livello.

In aggiunta alle abilità interpersonali appena esaminate, i singoli avranno la necessità di fare frequentemente ricorso ad altre abilità, durante la loro carriera professionale, quali le capacità di leadership, la flessibilità e la capacità di reagire in modo appropriato nelle situazioni incerte, di stress e di cambiamento. Sembra che ci sia sempre qualcosa di nuovo da imparare, o almeno da migliorare. Per esempio, sono rimasto sorpreso nello scoprire, durante l'ultimo anno, quanto possa essere utile apprendere, migliorare e adottare tecniche di gestione del tempo. Imparare a gestire diverse scadenze progettuali che si sovrappongono e sono fra loro in competizione è utile per ampliare il proprio campo di azione e avere molte più opportunità di essere coinvolti in attività e progetti diversificati e interessanti, con la possibilità di portarli a compimento in modo soddisfacente. Il costante miglioramento personale e la sintonia con le novità nel proprio campo professionale sono le basi per una soddisfacente carriera nell'industria.

3. Le abilità di tipo matematico

A proposito di ciò che gli studenti possono fare per prepararsi ad una carriera nel mondo degli affari, quello che viene subito in mente è il fatto di seguire determinati corsi per imparare specifiche "realtà" matematiche, quali quelle proposte durante i corsi riguardo alle equazioni differenziali, la statistica e così via, oppure acquisire esperienza in una certa area applicativa, diciamo per esempio seguendo corsi di contabilità, biologia, chimica o trattamento dei dati. Tuttavia il modo di pensare tipico della matematica, la sua forma mentis sono di utilità ben più vasta, al di fuori del mondo accademico, rispetto alla conoscenza di qualsiasi specifica "realtà" matematica (algoritmo, formula o teoria) che può essere appresa durante lo svolgimento dei corsi. Quanto segue è una descrizione delle diverse modalità, in cui le persone sviluppano il loro pensiero in modo matematico, che sono, al di fuori del mondo accademico, di particolare valore per i datori di lavoro nel mondo della finanza, dell'industria e del governo.

È sempre possibile adottare un punto di vista matematico nella soluzione di un certo problema pratico. Questo è vero anche se il contributo si limita all'enumerazione in modo semplice, completo ed organizzato in modo logico di tutte le possibili alternative. Specifiche tecniche matematiche di risoluzione dei problemi, per esempio quelle descritte in *How to Solve It (Come risolverlo)* da George Pólya, forniscono un eccellente esempio, ad un datore di lavoro, dei potenziali benefici e dell'efficacia di un approccio di tipo matematico nella soluzione di problemi del mondo reale.

All'inizio di quest'anno ero impegnato a guidare un giovane impiegato le cui abilità nella soluzione dei problemi erano terribilmente inadeguate. Mi è alla fine venuto in mente che questa persona avrebbe potuto trarre beneficio assimilando le informazioni da *How to Solve It.* Per prepararmi a dare informazioni sul libro a questo impiegato, ho consultato il sito www Amazon.Com per ottenere tutte le informazioni di cui l'impiegato poteva aver bisogno per ordinare una copia del libro. Mentre facevo questo, mi sono imbattuto nel seguente splendido esempio riguardo alla percezione di un datore di lavoro, non appartenente al mondo accademico, a proposito dei benefici delle abilità generali (matematiche) di soluzione dei problemi. Sono rimasto piacevolmente sorpreso nello scoprire la seguente considerazione anonima, datata 7 luglio 1996, da parte di un lettore di *How to Solve It*: "La Microsoft, per esempio, era solita dare questo libro a tutti i suoi nuovi programmatori, e potrebbe farlo ancora oggi." Dopo che l'impiegato ebbe ordinato una copia del libro, cominciato a studiarlo e a utilizzare sul lavoro le abilità di soluzione dei problemi che aveva appena appreso, fu per me molto gratificante osservare un generale miglioramento delle sue prestazioni.

Una persona che sia in grado di riconoscere modelli, di generalizzare e di astrarre, sarà anche capace di lavorare a livello di sistemi. La capacità di migliorare, modificare, adattare e ampliare un sistema commerciale riceve un grande aiuto dall'abilità di individuare modelli, di riconoscerne le caratteristiche, di comprendere la loro essenza, significato ed importanza.

Essere in grado di generalizzare è, forse, un altro modo di essere capaci di immaginazione. Troppo spesso vengono trascurate le occasioni di introdurre miglioramenti con importanti ed estese ramificazioni. Sfortunatamente questo accade anche quando gli individui coinvolti hanno famigliarità con i necessari punti di vista, idee o fatti concreti.

La capacità di astrazione, rispetto ad una particolare situazione, è la guida rispetto alla direzione da prendere e al punto in cui focalizzare l'attenzione. Essere capaci di riconoscere le caratteristiche comuni di diversi oggetti in quanto aspetti dello stesso ente consente lo sviluppo di soluzioni di problemi a livello di sistema, quali lo sviluppo di sistemi software. Come esempio di oggetto abbastanza astratto, si consideri un sistematico elenco di attività fra loro coordinate. In questo caso non esiste nessun oggetto fisico nel senso comune del termine. Ciò che costituisce "l'oggetto" è la percezione umana: un insieme di idee.

Oltre alla generalizzazione e all'astrazione, la dimestichezza con i concetti di isomorfismo e omomorfismo fornisce ulteriori esempi di abilità nel riconoscere patterns modelli. Per esempio, essere in grado di percepire una soggiacente struttura algebrica, analitica, geometrica o topologica o vedere due situazioni differenti essere in realtà la stessa cosa oppure essere una inclusa nell'altra, consente ad una persona di distinguere rapidamente ciò che è essenziale e ciò che non lo è.

La comprensione delle relazioni fra i diversi modelli di una situazione e la situazione reale stessa è un elemento critico quando occorre risolvere dei problemi collaborando con altre persone. Oltre a dare risposte a domande formulate in termini matematici, per un matematico è ben più importante fornire ai propri clienti una visione assolutamente realistica di quello che sta veramente accadendo in una data situazione.

Mettere in pratica le tue conoscenze fa la differenza in questo caso. Il punto cruciale è l'applicazione di concetti o modi di pensare matematici in contesti diversi da quelli in cui la matematica è stata appresa. Questa è un'abilità fondamentale per un matematico che lavora nel mondo degli affari, dell'industria o del governo.

Per esempio, quello che risulta evidente molto frequentemente, quando si applicano i concetti del Calcolo infinitisimale e le equazioni differenziali a specifiche situazioni scientifiche, è la necessità di distinguere fra il contenuto e l'apparenza del simbolismo algebrico applicato. In ciascun campo della ricerca scientifica, sono stati storicamente utilizzati simboli specifici per rappresentare le diverse grandezze fisiche. In fisica la derivata può essere indicata con un "punto" invece di utilizzare la notazione di Leibniz *dy/dx*. In biologia acronimi quali VOL, CONC, Vmax vengono usati in luogo della tradizionale notazione matematica *x, y, z*.

Ciò che è interessante è che le formule sembrano più lunghe e complesse quando vengono espresse utilizzando i simboli della tradizionale notazione di una disciplina scientifica, per esempio la biologia. Il biologo non può capire che cosa voglia dire un matematico utilizzando il formalismo "matematico" invece di quello "biologico". Tuttavia il biologo spesso non sarà in grado di manipolare le formule espresse in forma "biologica" (troppo complessa). Anche il matematico potrebbe essere distratto dal simbolismo "biologico", risultandogli molto più agevole semplificare la notazione per mettere in evidenza le soggiacenti relazioni matematiche fra le diverse grandezze coinvolte. Nonostante ciò, dopo che il matematico ha individuato la chiave, la soluzione ottenuta dovrà essere espressa in forma "biologica" per risultare comprensibile allo scienziato.

Si faccia attenzione a non buttare via il bambino assieme all'acqua sporca. Il che vuol dire si mantengano all'interno del curriculum gli argomenti tradizionali. L'algebra è la chiave di tutto, con la sua attenzione ai simboli e alla loro manipolazione. L'analisi è un sostegno nello sviluppare un corretto ragionamento sulle approssimazioni, cosa che è fondamentale nel mondo degli affari, dove dati precisi sono rari. L'elenco di argomenti fornito nella sezione sulle implicazioni curricolari, può apparire come una derivazione del curricolo universitario di matematica di trenta o quaranta anni fa, ma in realtà, le necessità della scienza e dell'ingegneria, in aggiunta alla capacità di lavorare in modo obiettivo e produttivo con scienziati ed ingegneri, le rendono sempre attuali. Tuttavia, considerati i limiti di tempo nel curricolo universitario, è ovvio che debbano essere fatte delle scelte.

4. Dimostrare teoremi

Uno dei prerequisiti per molti corsi universitari di matematica di livello elevato è la "sofisticatezza matematica". Questo prerequisito entra in gioco anche nel curricolo universitario di matematica. La sofisticatezza matematica può essere considerata come un certo tipo di esperienza, precisamente l'esperienza di sviluppare una profonda, fondamentale comprensione di situazioni matematiche. Per un datore di lavoro nel mondo degli affari questo consiste nel prendere atto della potenza, utilità ed efficacia del ragionamento di tipo matematico. Il beneficio per un dipendente di acquisire, possedere e mantenere le abilità di ragionamento matematico consiste nell'essere meglio preparato a partecipare e a contribuire a progetti più ampi, complessi ed interessanti in modo più creativo e soddisfacente.

I datori di lavoro hanno seriamente bisogno di persone che ragionino bene. I datori di lavoro hanno la necessità di persone che siano in grado di utilizzare con precisione complesse informazioni (in forma scritta). I datori di lavoro hanno bisogno di gente che sia capace di imparare da sola. I datori di lavoro hanno bisogno di persone che sappiano creare e che possano seguire ragionamenti complessi, astratti ed ampi. I datori di lavoro necessitano di persone che sappiano essere persuasive

Uscir fuori con una proposta di soluzione di un complesso problema nel mondo degli affari, accompagnato da una convincente spiegazione relativa alla sua adozione, è un lavoro intellettuale molto simile al dimostrare un teorema. La necessità maggiore riguarda persone che non solo sappiano immaginare appropriate soluzioni di tipo tecnico, ma che siano anche in grado di fornire ad altri convincenti spiegazioni, cioè che sappiano anche *dimostrare* ad altri che ciò che essi sostengono è giusto. Per essere sicuri, è essenziale la conoscenza di ciò che è noto al prevedibile uditorio. Nonostante ciò è vitale anche la conoscenza del modo di strutturare gli argomenti adatti in maniera convincente ed efficace.

Scrivere una dimostrazione implica una combinazione di capacità logica di analisi, sintesi creativa e di perseveranza, abbinate alla abilità di "riconoscere una dimostrazione quando ne vedi una". La stessa cosa vale per la lettura, o nella "effettiva" comprensione di una argomentazione presentata come dimostrazione. Per esempio uno dei più comuni insuccessi, che spesso minano la riuscita di un progetto economico ampio e complesso, consiste nel non aver prodotto un approccio generale, globale che copra tutti i possibili scenari ed opzioni. Questo difetto viene spesso descritto come "mancanza di pianificazione", ma è il prodotto diretto del fatto di non aver identificato ed analizzato in modo logico tutte le possibilità di una certa situazione. È spesso meglio affrontare dei rischi dei quali si è coscienti che correre il rischio di trascurare ciò che non abbiamo considerato.

5. Opportunità di carriera

Quali sono le prospettive per una carriera nel mondo degli affari nella prossima decade? Per una persona che intenda condurre ricerca matematica pura ci sono poche possibilità al di fuori dei circoli accademici, ora e nel prevedibile futuro. D'altro canto, per una persona che abbia una solida formazione matematica, a cui piaccia risolvere problemi e si diverta ad usare le realtà o i modelli di pensiero matematici e che inoltre abbia dei forti interessi al di fuori della matematica, le prospettive sono eccellenti. Un fattore importante in questo caso è tuttavia l'ipotesi di una crescita costante e di una espansione dell'economia mondiale. Quello che al momento non è chiaro è la natura e la direzione in cui si muoverà tale crescita.

L'espressione "l'era dell'informazione" può apparire trita ma descrive da dove veniamo, dove ci troviamo ora e dove stiamo andando. Questo significa che le opportunità di lavorare con generi di informazione astratta ed in forma elettronica saranno sempre più diffuse all'interno del mondo degli affari. L'analisi dei dati, l'elaborazione di software e le questioni di carattere scientifico che coinvolgono la società, quali i problemi ambientali, la crisi della biodiversità, la stessa sopravvivenza del genere umano e molto altro porranno al sistema educativo una sempre maggiore richiesta di laureati che siano in grado di lavorare in modo efficace con informazioni di tipo quantitativo.

6. Implicazioni curricolari

Il curricolo universitario di matematica dovrebbe fornire allo studente l'opportunità di applicare la matematica alle situazioni del mondo reale. I programmi di cooperazione e gli stage permettono di acquisire una significativa esperienza nel campo lavorativo quando c'è ancora tempo per compiere scelte potenzialmente efficaci nel percorso formativo, prima della laurea. Un'altra possibilità sono i corsi basati su un progetto o sulla creazione di modelli. Per esempio, Robert Fraga, che ha fatto parte del Comitato dei Governatori del MAA, ha dato avvio ad un Programma di Consulenza del MAA per Laureati di primo livello a Marquette, nel Wisconsin. Sarebbe anche utile una programmazione del curricolo che possa facilitare la collocazione dello studente nel mondo del lavoro.

Sono attualmente in corso dei tentativi, quali l'uso della scrittura nel lavoro in classe di matematica, l'apprendimento cooperativo e l'impiego del lavoro di gruppo, che dovrebbero essere continuati ed ampliati. Sarebbe poi auspicabile un maggiore incoraggiamento agli studenti a partecipare a competizioni, specie in squadre, sia predisposte specificamente dai college e dalle università che sponsorizzate da altre organizzazioni, quali i concorsi svolti dal MAA in occasione delle riunioni di sezione, e un aiuto a sviluppare abilità di tipo non matematico che sono richieste da un impiego nel mondo degli affari.

È necessario indirizzare i bisogni e i gruppi di sostenitori della matematica tradizionale. Non dovrebbero essere realizzati quei cambiamenti del curricolo che precludono allo studente l'acquisizione di specifiche conoscenze matematiche utili alle necessità dell'università, dell'ingegneria o delle scienze. In particolare argomenti/soggetti/corsi che non dovrebbero essere "gettati via come l'acqua sporca assieme al bambino" comprendono:

Calcolo infinitisimale: determinare e dimostrare risultati dei limiti (la regola di derivazione di una funzione di funzione, la Regola di De L'Hôpital)
Calcolo delle Probabilità ed altri modelli puramente matematici
Analisi dei dati, inferenza statistica e verifica di ipotesi
Variabili complesse
Trasformate wavelet, analisi armonica
Algebra lineare e astratta
Fondamenti di matematica (insiemi, numeri, operazioni)
Geometria (differenziale, proiettiva, non-euclidee)
Computer graphics

Oltre a questi contenuti specifici vi è la questione del rigore e della profondità. Il curricolo dovrebbe prevedere lo studio, in profondità e con un lato grado di rigore, di almeno un'area particolarmente stimolante della matematica. È unicamente con un tale tipo di studio che gli studenti saranno in grado di sviluppare le alte potenzialità di ragionamento di tipo matematico che sono richieste per il successo nel mondo degli affari.

Le abilità matematiche di analisi e di sintesi, la matematica come modo di pensare o di affrontare la soluzione dei problemi sono sviluppate nel modo migliore studiando in profondità un determinato argomento della matematica. Non sembra avere importanza quale specifico argomento matematico venga studiato quanto piuttosto che esso sia stimolante e che lo sforzo richiesto dall'esplorazione dell'argomento sia ampio, intenso e completo.

È assolutamente necessario offrire agli studenti, all'interno di tutto il curricolo, l'opportunità di sviluppare la più penetrante, costitutiva e profonda comprensione di dimostrazioni matematiche, per quanto sia loro possibile. I corsi che sono pensati specificamente per comunicare il metodo assiomatico così come i corsi di livello elevato nei quali le dimostrazioni giocano un ruolo essenziale dovrebbero fare parte di qualsiasi curricolo matematico, oggi come nel 2010.

Panoramica sulla laurea in matematica

David A. Sanchez
Texas A & M University

Sono passati i giorni in cui laurearsi in matematica significava essere destinati ad insegnare nelle scuole elementari e secondarie oppure proseguire con una laurea di livello più alto. Oggi la laurea in matematica di primo livello offre agli studenti vaste opportunità di accesso ad una ampia varietà di campi professionali. L'industria informatica, le società finanziarie e d'investimento, le istituzioni attuariali e di analisi del rischio, i laboratori e le agenzie di ricerca, privati e statali, tutti sono giunti a riconoscere il valore di una persona preparata nel pensiero analitico, nella soluzione dei problemi, nell'elaborazione di previsioni, nell'analisi di dati ed elaborazione di modelli. Per queste stesse ragioni, la laurea di primo livello (*minor*) in matematica sta acquistando importanza come complemento alle lauree in ingegneria, scienze, economia e amministrazione aziendale.

Considerato quanto detto sopra, cosa implica questo rispetto al curricolo? Presso molti college ed università, specialmente le maggiori, la laurea in matematica viene pressappoco suddivisa in tre indirizzi o opzioni: *Matematica Pura*; *Matematica Applicata*, magari con sotto-indirizzi quali la matematica applicata classica, ricerca operativa, *computing*, finanza calcoli attuariali o riguardanti la biologia; e *Matematica ad indirizzo didattico*, rivolta ai futuri insegnanti di scuola superiore. Presso i dipartimenti più piccoli può esserci un unico indirizzo, *Matematica*, comprendente un percorso curricolare comune e varie opzioni corrispondenti a tutti o ad alcuni degli indirizzi precedenti. *Statistica* può essere un'altra possibilità a seconda che esista o meno un dipartimento di statistica distinto.

Non c'è niente di intrinsecamente sbagliato riguardo alla struttura descritta sopra; essa ha reso un valido servizio alla disciplina. Tuttavia è essenziale che i confini fra gli indirizzi siano permeabili, così da consentire allo studente la massima flessibilità nello sperimentare ed eventualmente cambiare indirizzo. Uno studente di matematica pura potrebbe essere affascinato dai sistemi dinamici e quindi scegliere alcuni corsi sulle equazioni differenziali o il calcolo computazionale. Uno studente di matematica applicata potrebbe scoprire la crittografia e desiderare di scegliere corsi di algebra o teoria dei numeri. Qualsiasi arricchimento possano acquisire i futuri insegnanti, sicuramente accrescerà il loro bagaglio di esperienze e competenze.

Presso molte università esiste, fra gli altri, un percorso particolare detto *Honors*, riservato agli studenti che abbiano mostrato eccezionali risultati e requisiti accademici. Presso i dipartimenti di matematica questo percorso non dovrebbe essere considerato come la quintessenza della Matematica Pura, ma dovrebbe essere visto come un'opportunità di offrire, in ogni ambito della disciplina, corsi più ricchi rivolti agli studenti più brillanti. Questo è un bene per il morale del dipartimento dal momento che offre, ai docenti che si occupano di aree a contenuto maggiormente applicativo, la meravigliosa opportunità di svolgere un corso di livello avanzato in una classe di studenti fortemente motivati. Inoltre bisogna ricordare che gli studenti che frequentano i corsi *Honors* saranno molto ricercati da parte dei futuri datori di lavoro e potrebbero decidere di ritardare o di non accedere a corsi universitari di livello più alto. Perciò quanto maggiore è la loro preparazione tanto meglio è.

Oltre ad essere flessibile, il curricolo della laurea in matematica deve essere dinamico, deve riflettere le attuali tendenze della disciplina, delle tecniche educative, delle opportunità di carriera e della formazione universitaria. Ciò deve essere una delle principali responsabilità dell'intero dipartimento e deve essere tenuto nella stessa considerazione, rispetto al processo di pianificazione, quanto la distribuzione delle risorse economiche ed umane all'interno del dipartimento. È opportuno delegare la responsabilità ad un vice-rettore o ad un comitato di studio universitario, ma essi devono assicurare che la i membri della facoltà siano informati delle decisioni prese e dei piani per il futuro. I requisiti per la laurea, i curricoli degli ultimi anni di corso, l'uso delle tecniche didattiche ed il libri di testo dovrebbero essere rivisti come minimo ogni tre anni. Le basi per questa analisi dovrebbero includere i dati relativi alle iscrizioni ai corsi, il confronto con i requisiti richiesti per la laurea presso corrispondenti istituzioni scolastiche (che si possono acquisire facilmente tramite Internet), informazioni su lauree e post-lauree e gli interessi di ricerca del corpo docente complementari rispetto ad un possibile credito che porti delle esperienze di ricerca per i laureati di primo livello.

I passi avanti della matematica, abbinati a quelli compiuti nel calcolo scientifico, stanno avendo una considerevole influenza in altri ambiti scientifici, nelle scienze sociali e nell'ingegneria. La laurea in matematica deve riflettere questa tendenza e si può raggiungere questo obiettivo attraverso la collaborazione interdisciplinare partendo da qualcosa di semplice come un corso svolto da una squadra di docenti o un seminario universitario di ricerca, per arrivare a una sequenza di corsi, al di fuori del dipartimento, opzionali e ammissibili, fino ad una laurea completamente sviluppata in collaborazione. La matematica è ancora la regina e la serva della scienza, perciò la laurea in matematica deve riflettere il suo dominio in continua espansione e i docenti devono essere i suoi ambasciatori.

Preparazione dei docenti

La prevista e grave carenza, a tutti i livelli scolastici, di insegnanti preparati in matematica, gli obiettivi sempre più elevati relativi ad *assessment* e valutazione imposti dalle organizzazioni statali e la percepibile scarsa preparazione in matematica delle matricole dei college, tutto conduce al fatto che la preparazione degli insegnanti debba essere una delle più alte priorità di *tutte* le istituzioni di istruzione superiore ed in particolare di quelle che ricevono un sostegno dello Stato. I docenti devono confrontarsi con il fatto che, seppure gli studenti che scelgono di diventare insegnanti non sono così matematicamente capaci quanto i loro colleghi che si iscrivono ad altri indirizzi di laurea, saranno poi questi ad insegnare la matematica alle future matricole. Il compito di prepararli per il loro lavoro nelle classi è una sfida ancora più grande di quella posta dall'insegnamento nei corsi Honors di livello avanzato e non può essere lasciato nelle mani dei *college of education* o di docenti associati.

Tutti i dipartimenti, ed in modo particolare quelli a livello più alto, dovrebbero fare uno sforzo maggiore per dare maggiore visibilità all'indirizzo *Didattico* all'interno dei loro percorsi formativi. Molti studenti che si iscrivono al corso di laurea in matematica hanno un sincero interesse nell'insegnamento e dovrebbero trovare, all'interno del dipartimento, un'atmosfera incoraggiante e che li sostenga. La carenza, di cui si è detto sopra, dovrebbe essere affrontata con delle azioni positive, certamente non trascurata.

I confronti internazionali indicano che gli studenti americani che frequentano la classe quarta sono alla pari, dal punto di vista della matematica, con quelli dei paesi europei ed asiatici. All'ottavo anno di istruzione essi sono rimasti indietro rispetto ai primi e quando giungono al dodicesimo anno si trovano ormai verso il fondo della classifica. I dipartimenti di matematica possono pure protestare ed inveire contro le agenzie statali per l'educazione e l'accreditamento, le organizzazioni federali per l'insegnamento e il Dipartimento dell'Istruzione, a proposito di standard, curricoli e certificazioni. Tuttavia la maggior parte dei docenti in qualità di agenti di cambiamento hanno *half-lives* molto breve e le loro energie potrebbero essere meglio spese assicurando che i futuri docenti da loro formati abbiano la preparazione migliore possibile ed una forte comprensione concettuale della matematica. Auspicabilmente questi insegnanti diventeranno i leader della riforma lavorando all'interno del sistema educativo attraverso workshop di matematica e di leadership, diventando così insegnati formatori e rappresentando così il migliore esempio di conoscenza dei contenuti disciplinari e metodi pedagogici. La loro istruzione universitaria sarà la pietra angolare di questa opera.

Insegnanti elementari

Nella sequenza di corsi che i futuri insegnanti di scuola elementare affrontano presso il college o l'università, c'è di solito un pacchetto di due o tre corsi intitolati all'incirca *Matematica per Insegnanti di Scuola Elementare (MEST)*. I prerequisiti per tali corsi sono in genere un corso di algebra a livello di College, magari un corso semestrale di calcolo infinitisimale e talvolta un corso elementare di statistica. Molto spesso questi prerequisiti sono stati conseguiti durante un corso biennale presso un College e i corsi MEST vengono tenuti presso un College of Education (College ad indirizzo didattico). Se vengono svolti presso un dipartimento di matematica i docenti saranno degli associati o assistenti, che generalmente sono delle persone dotate e volenterose, non ben ricompensate per un attività che i docenti spesso considerano al livello di scavar sale in miniera.

In alcuni dipartimenti universitari di matematica possono esserci docenti ordinari che,solitamente, hanno una laurea in didattica della matematica e che supervisionano la preparazione degli insegnanti. Talvolta le loro battaglie per salire nella scala gerarchica sono colossali, principalmente poiché la loro attività di ricerca è considerata, da parte dei docenti che occupano cariche più elevate, molto al di sotto del livello qualitativo atteso per un dipartimento di "ricerca". Vengono accettati principalmente per il fatto di svolgere un lavoro che nessun altro membro della facoltà vorrebbe fare. Questo deve cambiare.

I docenti assegnati ad un corso MEST, una specie di pena da scontare nell'Isola del Diavolo, saranno messi in guardia, da parte dei colleghi, che questo sarà il peggior corso in cui abbiano mai insegnato, che gli studenti sono terribili ed odiano la matematica e che il libro di testo è una specie di vasto supermarket, prodotto da più autori, contenente progetti motivazionali, giochi ed esempi. Purtroppo vi sono germi di verità in queste affermazioni ed è probabilmente vero che la maggioranza degli studenti inutilmente spera di non dover mai insegnare matematica. Molti studenti credono che sia compito del loro professore insegnargli come si insegna la matematica, mentre invece l'obiettivo principale del corso è di insegnargli le strutture ed i contenuti della disciplina. Questo può essere causa di seri problemi per professori abituati ad insegnare la normale matematica e influenza sfavorevolmente le valutazioni dello studente sui corsi.

La realtà è che questi studenti insegneranno matematica elementare, sebbene alcuni potrebbero magari finire ad insegnare algebra al primo anno. Inoltre essi hanno frequentato alcuni corsi di pedagogia, nei quali l'attenzione è focalizzata sulla didattica e la gestione del gruppo classe mentre il lavoro svolto a livello formale in matematica è minimo. Di conseguenza enfatizzare il rigore formale è una battaglia persa ma enfatizzare la comprensione concettuale attraverso le lezioni, le discussioni, i progetti di ricerca può dare buoni risultati. Gli insegnanti devono sviluppare la capacità di rispondere in modo creativo alla domanda posta sempre e dappertutto "Professore, perché non possiamo fare in questo modo?"

Questo documento non intende mostrare come si insegna in un corso MEST, ma solo suggerire che i dipartimenti di matematica dovrebbero considerare questi corsi come parte della loro missione tanto quanto gli altri corsi di laurea. I corsi ed i loro contenuti dovrebbero avere lo stesso livello di attenzione e vi dovrebbe essere la consapevolezza di quali siano gli standard richiesti a livello statale e federale. Il docente ordinario che insegna per la prima volta in corsi MEST deve essere pronto ad accettare frustrazioni piuttosto frequenti; un parziale antidoto consiste nel ricordare a sé stessi che qualcuno degli studenti potrebbe diventare l'insegnante dei propri figli o nipoti. A questi professori sarà opportunamente suggerito di incontrare frequentemente, anche ogni settimana, altri docenti del corso e docenti con una maggiore esperienza per esaminare le migliori strategie di insegnamento a proposito di determinati argomenti: l'approccio del tipo teorema-dimostrazione può essere lasciato fuori dalla porta.

Insegnanti di scuola secondaria

Vi sono due gruppi di studenti in questa categoria: i normali laureati in matematica che scelgono l'opzione dell'*insegnamento* e, in alcuni stati, studenti con una laurea di altro tipo che conseguono un'abilitazione all'insegnamento della matematica nella scuola secondaria in aggiunta alla loro specialità. Questa certificazione viene loro conferita solitamente sulla base dell'esito di test forniti a livello statale. Tutti gli studenti dovranno aver frequentato i consueti corsi introduttivi di calcolo infinitisimale ed algebra lineare: è nei corsi di livello superiore che il loro curricolo potrà differenziarsi da quello dei corsi regolari. Tutti gli studenti frequenteranno alcuni corsi presso il *College of Education*.

Un esame dell'attuale scenario nazionale della matematica nella scuola secondaria rende assolutamente evidente una cosa: gran parte di questi studenti insegneranno Calcolo infinitisimale nella scuola superiore. Questo è in gran parte il risultato della spinta a non considerare più Advanced Placement (AP) Calculus come un corso destinato a studenti ben preparati e con obiettivi elevati con lo scopo di ottenere i crediti scolastici per il College, ma piuttosto a vederlo come l'etichetta di una scuola esemplare, con incentivi finanziari e altri bonus per incoraggiare l'istituzione di corsi AP. Ciò significa che molte scuole e distretti scolastici saranno incalzati dalla necessità di reperire insegnanti qualificati ad insegnare Calcolo infinitisimale, molto meno a comprenderlo veramente, se non dal punto di vista delle pure formule. Se la pressione sarà troppo elevata qualsiasi essere vivente e che abbia fatto un po' di Calcolo infinitisimale potrà andar bene.

Il confronto internazionale indica che gli studenti americani del dodicesimo anno di scuola sono molto più deboli in geometria dei loro colleghi in altri paesi occidentali o asiatici. Questo non sorprende dato che la geometria è stata compressa nel curricolo della scuola americana. La trigonometria condivide la stessa sorte. Alcuni sistemi scolastici stanno creando corsi del tipo *PreAP Algebra* per l'ottava classe e questa tendenza a spingere l'algebra verso l'ottavo anno di scuola deriva in parte dall'idea che ciò consentirà agli studenti di frequentare il corso di Calcolo infinitisimale durante l'undicesimo anno di scuola! Se i dipartimenti di matematica di College e Università non seguiranno con attenzione queste tendenze, lasciandole nelle mani dell'*Admissions Office*, essi non saranno in grado di trovare una spiegazione o colmare le lacune che riscontreranno nella preparazione matematica delle matricole.

Prima degli anni Sessanta uno studente accedeva alla prima classe di Calcolo infinitisimale dopo aver frequentato due anni completi di algebra, un anno di geometria, un anno di trigonometria e precalcolo *e anche* un semestre di geometria analitica. Di conseguenza era molto ampia la borsa degli attrezzi di tecniche e strutture matematiche al quale applicare il Calcolo infinitisimale. Oggi quel bagaglio si è ridotto alle dimensioni di un portamonete, agganciato con un fermaglio ad un calcolatore grafico, e questa è la realtà con cui si confronteranno i nostri futuri insegnanti di scuola secondaria quando assumeranno le loro responsabilità di insegnamento. Saranno loro a preparare le matricole universitarie del domani.

I discorsi precedenti coinvolgono chiaramente l'offerta di corsi di matematica di livello superiore che vengono proposti ai futuri insegnanti di scuola secondaria. Nel passato era solitamente loro richiesto di frequentare Calcolo avanzato ed Algebra, talvolta un semestre di ciascuno di essi piuttosto che due, e di completare il resto del loro piano di studi con corsi prescritti solo per i futuri insegnanti. Esempi potrebbero essere Storia della Matematica, Elementi di Geometria e magari Teoria Elementare dei Numeri; la ragione non dichiarata della necessità di questi corsi era che i futuri insegnanti non potevano competere con i normali studenti nei corsi ordinari e un'idea molto antiquata secondo cui essi avevano bisogno di questo tipo di corsi per l'attività di insegnamento. Presso alcune scuole vengono invece impartiti dei corsi meno rigorosi di Calcolo avanzato e di Algebra, poiché i futuri insegnanti sono anche peggiori, rispetto ai normali laureati, nel cercare di dimostrare i teoremi. La domanda che resta senza risposta è "È necessario che un insegnante di scuola superiore, per fare un buon lavoro in classe, sia in grado di fare una dimostrazione formale di qualsiasi cosa?"

La comprensione dei concetti e al capacità di collegare, durante le attività in classe, questi concetti ad altri nel campo della matematica e del mondo fisico dovrebbero essere i fondamenti del curricolo del futuro insegnante di matematica. Non fornisco nessun elenco di corsi; i dipartimenti dovrebbero studiare la loro offerta di corsi e gli interessi dei loro professori a sviluppare il curricolo. Sarebbe proficuo invitare valenti docenti di scuola superiore, quali i vincitori di Riconoscimenti Presidenziali *(Presidential Award),* per confrontarsi con i membri della facoltà e per fornire aiuto nella elaborazione del curricolo sulla base delle loro esperienze personali. Ma essi devono essere trattati alla pari, non come inferiori. Modelli Matematici è un corso eccellente per conseguire gli obiettivi e fornire le opportunità di apprendimento cooperativo, considerato un importante componente dell'odierna esperienza educativa. Esso sta acquistando importanza nel curricolo della scuola superiore e sia i College sia le Università potrebbero avere una grande influenza fornendo la loro consulenza.

Si tenga presente che, nel momento in cui l'insegnante si affaccia per la prima volta alla porta di una classe di scuola superiore, sarà probabilmente la prima volta che incontra di nuovo tali argomenti dai tempi dei suoi giorni di scuola superiore. Di conseguenza un corso fondamentale (*capstone*) particolarmente significativo nel piano di studio del futuro insegnante di scuola superiore potrebbe essere un corso che crei collegamenti fra i corsi di scuola superiore in algebra, geometria, pre-calcolo e calcolo con la matematica affrontata dagli studenti nella parte finale del loro curricolo presso il College o l'Università. Questo obiettivo potrebbe essere raggiunto prendendo in considerazione la sequenza di requisiti standard richiesti per questi corsi, a livello statale o federale, separandoli uno dall'altro, per poi mettere in collegamento gli elementi dei concetti matematici che stanno alla loro base. Questo fornirebbe eccellenti opportunità di confronto e per presentazioni, progetti di collaborazione e apprendimento basato sulla ricerca, così come un introduzione ad alcune delle tecnologie del computer e dell'informazione disponibili per sostenere e migliorare la pratica all'interno della classe. Ma il suo obiettivo principale deve essere quello di creare un collegamento concettuale fra ciò che viene appreso e quello che verrà insegnato. Per far bene questo saranno necessari pensiero e didattica creativi da parte dei professori che svolgeranno tali corsi, ma questo avrà, per i futuri insegnanti di scuola secondaria, ampi benefici.

Il curricolo – Un documento di pianificazione

La precedente discussione indica come il curricolo universitario, e in particolare le parti terminali e quelle dedicate alla formazione dei docenti, debba diventare oggetto di continuo ed ampio confronto fra i professori. Potrebbe essere la principale occupazione di un comitato di studio universitario o del vicerettore, ma le modifiche o le revisioni proposte dovranno essere ampiamente pubblicizzate. Per esempio, se non si è soddisfatti di un certo libro di testo, si dovrebbe chiedere, prima che un comitato di selezione formuli la sua scelta, l'opinione di tutti i professori che lo hanno utilizzato. Se vengono raccomandati cambiamenti dei requisiti di laurea o nella scelta dei corsi opzionali, queste decisioni saranno oggetto di confronto a livello dipartimentale. È sorprendente come molti professori abbiano un'idea molto vaga della struttura del corso di laurea, per poi lamentarsi quando il loro corso prediletto viene cancellato a causa della frequenza insufficiente.

Presso molti dipartimenti di matematica gli unici ordini del giorno che garantiscono un'alta partecipazione di docenti alle riunioni sono salari, prospettive di impiego, cariche accademiche o promozioni. Negli istituti universitari di ricerca le modifiche del curricolo o degli esami di ammissione possono anche attirare una certa folla. Il curricolo universitario di primo livello (*undergraduate*) è lasciato a "quelli che si occupano di quelle faccende" o ai "tipi del MAA"(Mathematical Association of America); questa è una preoccupante fuga di fronte alle responsabilità. Quel che è peggio è che certi "ricercatori di alto livello" potrebbero non degnarsi mai di insegnare in un corso universitario di primo livello, seppure la loro presenza a queste lezioni potrebbe effettivamente fare aumentare il numero dei laureati e sicuramente migliorare la loro esperienza di apprendimento. Gli studenti brillanti sono in grado di riconoscere l'alta qualità.

Si è molto ampliato il mercato del lavoro per i laureati in matematica, riflettendo i cambiamenti e la crescita della tecnologia, in particolare la tecnologia informatica. Le opportunità di studio a livello universitario non sono più limitate solo alla matematica pura ed applicata, a causa dello sviluppo di una gran varietà di studi interdisciplinari nei quali la matematica gioca un ruolo chiave. L'insegnamento della matematica nella scuola elementare e secondaria si sta costantemente evolvendo con sempre maggior uso delle nuove tecnologie.

Tutto ciò significa che il curricolo universitario di primo livello (*undergraduate*) è diventato parte del processo di pianificazione dipartimentale, prima d'ora largamente dedicata a questioni di impiego e bilancio. Il curricolo di matematica previsto per le matricole dei nostri giorni potrebbe non andare più bene fra quattro anni. Sarà necessario aggiungere corsi opzionali o complementari ed alcuni altri dovranno invece essere eliminati. Dovranno essere sviluppati nuovi corsi e programmi interdisciplinari. Tutto ciò richiede una pianificazione, tenendo in considerazione i punti di forza e di debolezza del dipartimento, i suoi progetti futuri, i dati relativi alle iscrizioni e alle lauree, il panorama della scuola elementare e secondaria, le opportunità di studio e di impiego dei laureati.

Questo processo di pianificazione potrà sicuramente influenzare il programma di assunzioni del corpo docente e perciò richiederà una ferma azione di controllo da parte del preside del dipartimento e forse del rettore stesso del College. Presso i maggiori istituti universitari di ricerca le priorità nei criteri di assunzione sono spesso imposte da ben sostenuti gruppi di ricerca desiderosi di aggiungere un'altra stella alla loro galassia. Questo è il modo ben conosciuto per salire nella scala dei valori all'interno del dipartimento. Ma potrebbe entrare in conflitto con il progetto di curricolo universitario che prevede una nuova assunzione, con una differente specializzazione di ricerca, in vista di un nuovo programma oppure per colmare una lacuna in uno dei percorsi già attivi. Questo è ora una questione di gioco duro, ma il campo da gioco sarebbe meno sconnesso se ogni membro della facoltà considerasse la formazione degli universitari una responsabilità intellettuale così come la propria ambito di ricerca.

Un'altra attività che richiede la guida della pianificazione curricolare è l'acquisizione della tecnologia informatica e del software destinato ad essere utilizzato nel piano di studi universitario. La pianificazione finanziaria è un criterio ovvio ma ciò che deve essere studiato è il suo uso rispetto all'attività in classe. Questa scelta non può essere lasciata alla metodologia del laissez faire che ha funzionato piuttosto bene quando vi era solo un corso ed un libro di testo. Uno scenario del tipo – "Faccio un grande uso di MAPLE (NdT:pacchetto di calcolo analitico) nel mio corso ODE (NdT: Ordinary Differential Equations)", "Io non lo uso affatto" – rappresenta una situazione sfavorevole per gli studenti. Devono esistere delle linee guida consolidate, e possibilmente curricoli e moduli, facilmente adottabili da parte dei professori, che evidenzino il potere del calcolo automatico e della grafica computerizzata nel conseguimento di una profonda visione matematica oppure nella ricerca delle soluzioni, o di loro valori approssimati, in problemi molto complessi.

Il dominio della regina e serva della scienza si sta costantemente e dinamicamente espandendo e nel percorrerlo i suoi ambasciatori, i professori, hanno bisogno di carte geografiche. La pianificazione del curricolo universitario è una di esse.

Questioni di Equità – Un diverso punto di vista

Questa sezione non si interessa della situazione delle donne rispetto alla laurea in matematica, situazione che sta decisamente migliorando considerato che presso molti College ed Università oltre il 50% dei laureati sono di sesso femminile. La situazione preoccupante riguarda il numero relativamente basso di lauree che sono state conferite a membri delle comunità Afroamericana, Ispanica e degli Indiani d'America durante lo scorso decennio , che è stato considerato l'era della *affermative action.* I numeri che si riferiscono ad essi non sono, anno dopo anno, praticamente cambiati e questi numeri negli istituti universitari di ricerca sono quasi costanti e di fatto trascurabili. Ma questo genere di cattedre rappresenta l'elite del potere, i leader in questo campo, e quindi i leader ed i modelli all'interno della loro comunità.

Restringendo il campo di discussione alla matematica ed alla laurea, che cosa può essere fatto? L'onorata strategia dei tempi della *affermative action* consisteva nel reclutare degli studenti *qualificati* appartenenti ad una minoranza, fornire loro assistenza economica e se possibile degli speciali programmi di tutoraggio per poi congratularci con noi stessi per il buon lavoro svolto. Ma il lavoro più difficile è quello di reclutare degli studenti appartenenti ad una minoranza che siano competitivamente qualificati e quindi in grado di salire ai più alti gradi della gerarchia universitaria.

Questi studenti, appartenenti ad una minoranza, molto brillanti e dotati dal punto di vista matematico sono rari all'interno delle loro comunità così come lo sono gli studenti dotati che appartengono ai gruppi maggioritari. Ma quello che manca loro, al contrario degli studenti dei gruppi maggioritari, è la fiducia in sé stessi e la volontà di assumere i rischi necessari per aver successo. Vi sono un gran numero di fattori socio economici e di fondo che entrano in gioco in questi casi, ma la loro discussione va oltre gli scopi di questo articolo.

Ciò che è necessario, quando uno di questi studenti appartenete ad una minoranza e competitivamente qualificato accede al dipartimento, è la guida necessaria a costruire quella eccezionale fiducia in se stessi, caratteristica di tutti i matematici di talento; e si tratta di una guida con caratteristiche molto specifiche. Non sarà probabilmente svolta da un membro della facoltà appartenente alla stessa minoranza, sebbene sia una scommessa sicura che questo tipo di guida sia svolta da un insegnante di matematica di scuola superiore o un consulente che abbia riconosciuto le capacità dello studente e lo abbia probabilmente incoraggiato ad andare al College.

La guida presso la facoltà potrà svolgere questo compito in vari modi: scrivendo una annotazione di congratulazioni a margine di un esame dall'esito particolarmente buono, convocando lo studente e lodandolo per una ingegnosa soluzione di un problema complesso, discutendo della possibilità di svolgere un'esperienza estiva di ricerca presso un laboratorio nazionale o un'altra scuola (gli studenti appartenenti a minoranze sono molto restii ad abbandonare il suolo natio e questo richiederà una certa opera di convincimento), incoraggiando lo studente ad iscriversi ad un corso avanzato o un seminario di ricerca e infine discutendo della possibilità di studiare presso scuole più adatte alle capacità ed agli interessi dello studente. Ciò che conta è l'attenzione individuale, la cura nell'educazione dello studente.

La guida fornita non è necessario che sia una relazione di tipo amichevole; essa deve riflettere la professionalità e la consulenza che un membro della facoltà riserva ad un potenziale futuro professore. Tutte le strategie citate in precedenza, e molte altre, sono volte a costruire quella fiducia di cui hanno bisogno gli studenti appartenenti ad una minoranza nel momento in cui accedono ad una facoltà universitaria. Qui essi si renderanno conto che, sebbene i loro colleghi che appartengono a gruppi maggioritari possano avere dei diplomi di scuole elitarie, essi sono in grado di competere con i migliori. Nell'università qualche altro membro della facoltà si farà carico del compito di guida, magari il *Ph. D advisor*, ma la maggior parte del lavoro sarà già stato fatto. Congratulazioni!

La matematica e le scienze matematiche nel 2010: il "come" di ciò che i laureati dovrebbero sapere

Kathleen G. Snook
Accademia militare degli Stati Uniti

Introduzione

Ricordo che un professore, facendo visita al mio dipartimento, una volta disse: "La conoscenza è il residuo che rimane dopo aver dimenticato tutti i fatti"[i]. Quell'affermazione mi torna spesso in mente quando penso all'insegnamento e all'apprendimento. Mi immagino un contenitore di vetro o un vaso riempito di una sostanza liquida costituita da molti ingredienti diversi le cui proprietà individuali si sono perdute mescolando oppure si sono sciolte nel liquido. Questo recipiente riempito rappresenta forse le informazioni nella mente dello studente verso la fine del semestre, integrate e coerenti. Dopo l'estate o prima della ripresa di un altro semestre, il liquido sembra essere evaporato lasciando un residuo sulle pareti interne del vaso. In quanto educatori dobbiamo preoccuparci del contenuto e della qualità del "residuo che rimane". Se rimane il residuo giusto, quando gli studenti avranno nuovamente bisogno delle conoscenze, dovranno semplicemente aggiungere liquido e agitare, ricreando la miscela originaria.

Gli educatori matematici e i loro curricoli hanno un influsso sulle due componenti critiche del "residuo" che rimane dopo un'esperienza intensiva di matematica universitaria: il contenuto e la qualità delle conoscenze. Questo articolo esamina la qualità del "residuo". È importante osservare che impiego il temine *qualità* nella sua accezione più vasta ("ciò che rende qualcosa ciò che è") e non nell'accezione più limitata di "grado di eccellenza" o di "misura della bontà", sebbene non si possa trascurare questa seconda accezione. Mentre altri autori del presente volume si riferiranno al contenuto del "residuo" in modo specifico, il "che cosa", il suo contenuto e la sua qualità sono necessariamente accoppati. Il contenuto determina in gran parte la qualità delle conoscenze – da qui il titolo dell'articolo. Prima ancora di prendere in esame il "come" della conoscenza di una laurea ad alto contenuto matematico, il presente articolo fornisce materiali per una discussione in termini generali sulla conoscenza e sui processi di apprendimento.

Conoscenze di base e processo di apprendimento

In termini generali, esistono due tipi di conoscenza: concettuale e procedurale. In passato queste due conoscenze erano viste da molti come due entità separate, dando spesso luogo a una dicotomia fra comprensione e abilità. Nell'educazione matematica, si svilupparono discussioni pedagogiche su quale delle due dovesse avere la prominenza, le abilità matematiche vere e proprie o la comprensione dei concetti matematici. Hiebert e Lefevre [1] sostengono che la distinzione fra conoscenza concettuale e procedurale, sebbene sia utile quando si pensa all'apprendimento della matematica, non fornisca comunque uno schema di classificazione per ogni tipo di conoscenza. In alcuni casi la conoscenza passa attraverso una combinazione di qualità intellettive e procedurali, mentre esiste anche una conoscenza che non si avvale né delle une né delle altre. In ogni caso, la distinzione non fornisce uno schema utile ad investigare le strutture della comprensione e dell'apprendimento dello studente.

Con conoscenza procedurale di un particolare concetto si intende la conoscenza che una persona possiede di quel concetto in rapporto a relazioni lineari con altre conoscenze. Con conoscenza concettuale di un particolare concetto si intende invece la conoscenza che una persona possiede di un concetto in quanto ricco di relazioni [1]. Queste relazioni sono di natura complessa e possono essere viste come se costituissero una rete. Per esempio, consideriamo il concetto di derivata. Prese individualmente, le regole di differenziazione possono essere considerate come una conoscenza procedurale. Data una funzione polinomica, applica le regole di derivazione di potenza, somma e multiplo costante per determinare la funzione derivata. Con un diagramma lineare si potrebbe rappresentare questa procedura un passaggio dopo l'altro. Il concetto di differenziazione in sé, tuttavia, possiede molte relazioni, comprese quelle con ognuna delle diverse regole di differenziazione. Il concetto di differenziazione si collega anche ai concetti di funzione ed integrazione. In aggiunta, ci sono diverse interpretazioni della derivata che portano a ulteriori relazioni con molti altri concetti. Se si volesse rappresentare visivamente tutte le relazioni coinvolte nel concetto di differenziazione, il risultato sarebbe una rete non lineare molto complessa. Nell'esaminare la qualità del residuo, vogliamo che contenga sia le relazioni concettuali lineari che quelle non lineari.

La conoscenza concettuale e quella procedurale sono legate in modo critico e reciprocamente benefico. La capacità di svolgere procedure senza comprendere i concetti e le connessioni generali è molto limitante, come pure lo è la capacità di visualizzare un concetto o un'idea senza i processi richiesti per risolvere un problema o fornire dei risultati [1], [2]. Le relazioni necessarie per sviluppare strutture di conoscenza procedurali e concettuali si deve in qualche modo formare attraverso le attività di insegnamento e apprendimento. Propongo che gli educatori matematici adottino una prospettiva costruttivista nell'insegnamento e nell'apprendimento per favorire le formazione di queste relazioni.

Il costruttivismo è stata la principale linea guida filosofica nei cambiamenti pedagogici all'interno dei programmi di matematica dell'ultimo decennio. Si dice che il costruttivismo sia una teoria del sapere piuttosto che una teoria della conoscenza. Si possono ritrovare le redici delle idee costruttiviste nell'ambito della ricerca generale della psicologia cognitiva nella seconda metà del XX secolo e, in modo particolare, nei lavori di Piaget. Piaget riteneva che azione e conoscenza fossero inestricabilmente collegate [3]. I costruttivisti in genere concordano su fatto che chi apprende costruisca tutta la propria conoscenza e che le strutture cognitive sono in continuo sviluppo. Inoltre, i costruttivisti credono che sia un'attività mirata ad uno scopo a indurre le trasformazioni delle strutture esistenti e che chi apprende subisca pressioni ad adattarsi da parte dell'ambiente [4]. Nel momento in cui un educatore riconosce la prospettiva costruttivista come posizione cognitiva, ne consegue il "costruttivismo metodologico". "Una volta adottata una prospettiva costruttivista, la vita quotidiana della classe muta profondamente e significativamente sia per l'insegnante che per gli studenti" [5, p.314]. Non c'è tuttavia bisogno di comprendere gli aspetti cognitivi più profondi del costruttivismo per insegnare in modo che si direbbe senz'altro costruttivista. Molti insegnanti sono costruttivisti naturali, guidati da un fiuto istintivo verso ciò che è più proficuo per i loro studenti, ovvero lezioni più interattive e coinvolgenti.

Attraverso la lente costruttivista possiamo vedere che la qualità del residuo coincide con la qualità delle strutture cognitive che il singolo si è costruito. L'uomo possiede una capacità fortemente sviluppata di organizzare le conoscenze e continuerà a sviluppare e trasformare le strutture cognitive attraverso attività mirate. Pertanto, se vediamo queste strutture cognitive come conoscenza, possiamo dedurre che sono il risultato di quell'attività mirata che chiamiamo apprendimento. L'apprendimento si può definire come cambiamento di disposizione o capacità, che persiste nel tempo e deriva dall'esperienza. Questa definizione ci offre tre importanti linee-guida. Nell'apprendimento si deve verificare un cambiamento: un cambiamento delle strutture cognitive. Il cambiamento deve essere persistente, ovvero deve diventare parte del residuo. Il cambiamento deriva dall'esperienza: l'esperienza di aver partecipato a qualcosa. Che cos'è questo "qualcosa"? è qui che entra in gioco l'insegnamento. Se ci si avvale della definizione dell'apprendimento data sopra, l'insegnamento può essere definito come l'organizzazione delle esperienze.

Il punto sulle lauree in matematica

I laureati in matematica del XXI secolo devono possedere abilità molto più vaste dei loro predecessori. Devono essere pronti a risolvere problemi e a proporre modelli matematici in un mondo in rapido cambiamento.

Devono dimostrarsi esperti nell'impiego delle tecnologie e saper attingere in modo creativo agli aspetti più svariati delle scienze matematiche. Devono trovarsi a proprio agio lavorando in altre discipline e in equipe. Se si dedicano a studi mirati in campi troppo specialistici, senza la capacità di essere flessibili, finiranno per essere lasciati indietro [6, p. 41]. Eppure, allo stesso tempo, questi laureati devono possedere competenze, sia cognitive che procedurali, nei concetti specificatamente matematici in modo da fungere da esperti matematici in caso di necessità.

Che tipi di esperienze devono creare i docenti universitari per preparare questi futuri laureati? In che modo i dipartimenti possono sostenere cambiamenti curricolari e pedagogici per migliorare le esperienze degli studenti universitari? Come può la comunità matematica aiutare i dipartimenti nel loro sforzo per migliorare queste esperienze? Questo articolo vuole focalizzare l'attenzione su come le attività svolte in aula possano influenzare e sostenere le esperienze di chi intende laurearsi in matematica, senza tuttavia dimenticare di offrire spunti di riflessione ai dipartimenti e alla comunità matematica.

L'ambiente classe

Gli studenti universitari del XXI secolo hanno vissuto la loro adolescenza in un mondo che si è fatto piccolo per le conquiste tecnologiche e che, tuttavia, è più complesso che mai. Giocano con computer e videogames, non più con i giochi da tavola. Non hanno mai conosciuto un mondo senza cellulari, pagers, PC o Internet. Scrivono relazioni e fanno ricerche utilizzando esclusivamente fonti elettroniche. Questi studenti leggono e selezionano le informazioni direttamente dallo schermo del computer. Si trovano a loro agio elaborando informazioni in forma elettronica, senza aver bisogno di stampare copie su carta. Usano computer e calcolatrici per fare matematica simbolicamente, graficamente e numericamente. In questo mondo la didattica della matematica deve cambiare rispetto alla pratica attuale oppure gli studenti perderanno interesse. Nel 1966 un comitato consultivo della National Science Foundation dichiarò: "Troppi studenti lasciano i corsi SME&T perché li trovano poco motivanti e piacevoli [6]." I corsi di matematica devono modificarsi per motivare l'apprendimento dello studente del XXI secolo. Anche le riviste non specialistiche si interessano all'educazione matematica. *Newsweek* ha recentemente pubblicato un articolo dove si parlava del professor Edwardf Berger del Williams College, noto perché riesce a rendere avvincenti perfino le sue lezioni di calcolo infinitisimale alle 9 del mattino. Mentre a livello nazionale solo 1% del laureati si specializzano in matematica, al Williams college i laureati in matematica sono circa 9% [7]. Gli insegnanti devono organizzare esperienze che siano avvincenti e stimolanti perché gli studenti possano apprendere.

L'insegnamento in una prospettiva costruttivista è caratterizzato da un apprendimento attivo e da una didattica centrata sullo studente. L'apprendimento attivo è un processo che si concentra sullo sviluppo del pensiero analitico e critico dello studente e in cui gli studenti stessi sono collaboratori attivi del loro apprendimento. Per didattica centrata sullo studente si intende un approccio didattico molto ampio che prevede la sostituzione della lezione frontale con l'apprendimento attivo, il far sentire gli studenti responsabili del proprio apprendimento, l'impiego di strategie di personalizzate secondo i ritmi di apprendimento di ogni singolo studente e il cooperative learning organizzato anche per gruppi di apprendimento [8]. In generale, un approccio costruttivista sposta il fuoco delle attività della classe dall'insegnante allo studente. In un caso estremo, è soltanto l'insegnante a parlare o a fare lezione, mentre in un altro l'insegnate potrebbe addirittura non essere presente, con gli studenti che lavorano indipendentemente sui materiali del corso. A me sembra che nessuno dei due casi estremi utilizzati in modo esclusivo possa portare qualche vantaggio per lo studente. Una prospettiva costruttivista permette agli insegnanti di muoversi lungo un continuum di approcci all'interno di questi estremi, usando diverse tecniche all'interno della classe. Fra le strategie didattiche che influenzano il movimento lungo questo continuum troviamo il porre domande, la discussione, il problem solving applicato, l'integrazione di tecnologie, indagini e scoperte, rappresentazioni multiple della matematica, l'assegnazione di relazioni scritte, la varietà degli strumenti di verifica, small section sizes, e gruppi di apprendimento cooperativo o collaborativi. La bottom line del value costruttivista di qualsiasi strategia sta nel fatto che gli studenti siano coinvolti nelle esperienze di apprendimento. I docenti scelgono le tecniche più appropriate al loro gruppo di studenti, alle risorse, alle dimensioni del gruppo, agli obiettivi del corso, nonché alle proprie esigenze personali [9].

Un esempio di un recente cambiamento nell'insegnamento della matematica a livello universitario è l'importanza sempre più crescente data ai modelli matematici. Il lavorare per modelli matematici comprende la formulazione di ipotesi, la costruzione di un modello, la risoluzione del modello, la verifica delle conclusioni e la comunicazione dei risultati. Queste attività favoriscono la comprensione da parte dello studente della matematica e delle sue applicazioni [10]. Il presentare scenari reali e problemi che interessano gli studenti li motiva ad apprendere la matematica per poter risolvere i problemi. Gli studenti sono velocemente coinvolti nel progetto e cercano di individuare gli strumenti matematici necessari per realizzarlo. Questo processo “per modelli” consiste nel creare una replica delle situazioni future del mondo reale in cui i nostri laureati si troveranno a vivere. Molti settori diversi richiedono laureati per risolvere problemi sviluppando ed analizzando modelli matematici per poi comunicarne le soluzioni fornendo all’utente le analisi espresse in forma comprensibile. Un approccio all’apprendimento della matematica tramite modelli già nei primi anni del corso universitario può motivare gli studenti a prendere in considerazione la specializzazione in matematica.

Nel predisporre le esperienze i docenti devono individuare la matematica che veramente conta. Il “che cosa” e il “come” insegniamo devono corrispondere a ciò che è veramente importante e al modo in cui lo è. Torniamo all’immagine del residuo. La conoscenza procedurale e concettuale che rimane è il risultato di ciò che è appreso e di come viene appreso. Pertanto, il “che cosa” e il “come” insegniamo devono trovare un corrispondente anche in ciò e nel modo in cui verifichiamo. La verifica in classe assolve a diversi scopi nel processo di apprendimento e dovrebbe fornire un feedback a diversi livelli. Innanzitutto la verifica fornisce un feedback allo studente. Ma fornisce anche un feedback sia all’insegnante che al programma stesso. Infine la verifica può essere usata come valutazione per attribuire un valore al lavoro. In ogni caso, tutti gli strumenti di verifica dovrebbero concentrarsi sulla matematica che veramente conta e richiedere dimostrazioni di conoscenze procedurali e concettuali che riflettano in che modo si è fatta esperienza della matematica. Per matematica che veramente conta si intende quella di importanza critica rispetto agli obiettivi del corso. Il modo in cui si è fatta esperienza della matematica detterà le modalità di svolgimento della verifica. Per esempio, non si potrà dedurre molto sulle conoscenze nel caso in cui le attività in classe si siano soffermate su approcci puramente teorici o procedurali, mentre invece la verifica richiede la costruzione di modelli o il problem solving, o viceversa.

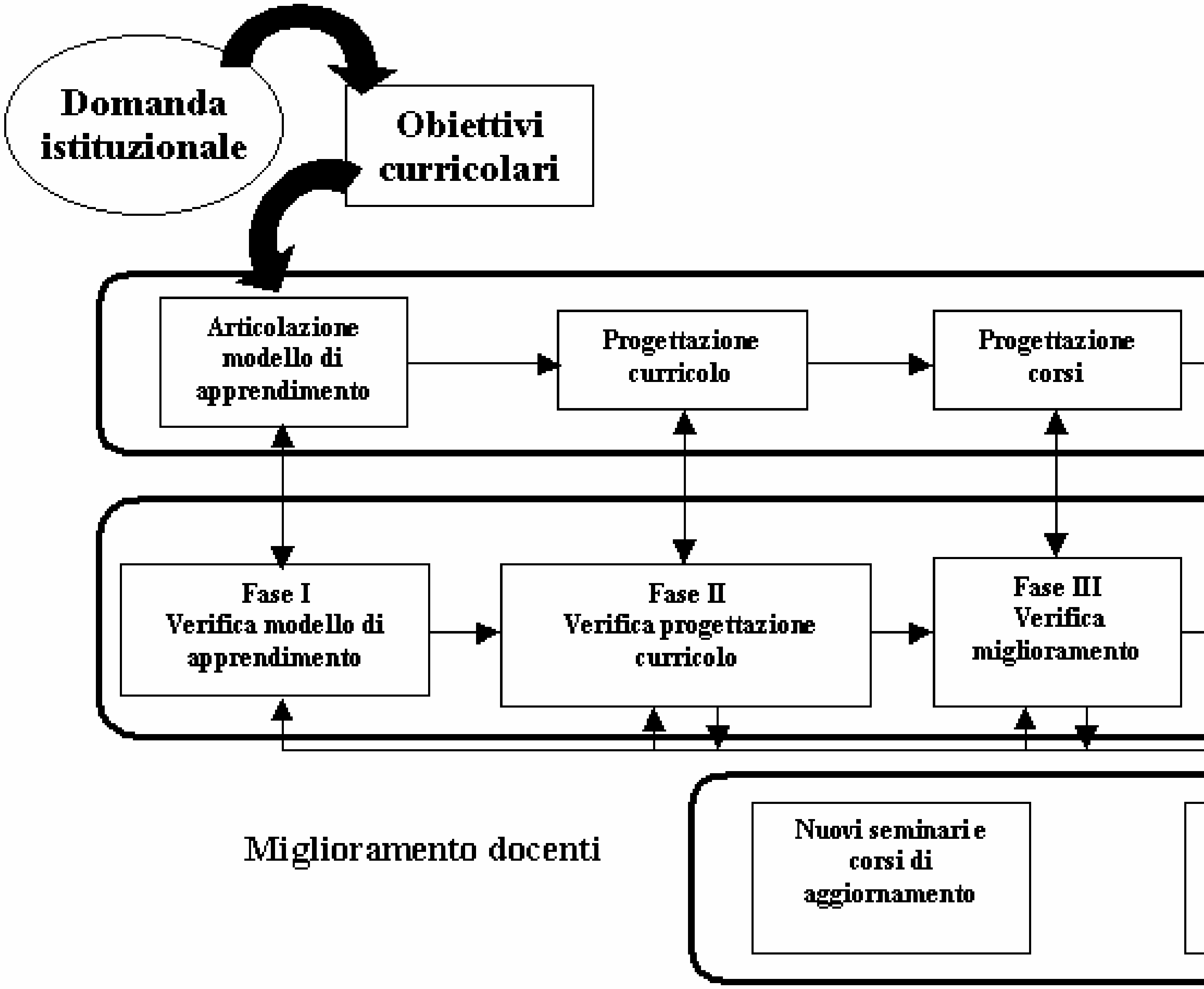
Se si vuole programmare la verifica in modo che permetta di trarre conclusioni sulle conoscenze degli studenti, occorre operare con strumenti diversi. Questi possono comprendere quiz, esami, progetti di applicazione anche interdisciplinare, attività di problem solving, composizioni, diari e problemi. E tutti questi strumenti dovrebbero presentare richieste che prendano spunto sia dalla conoscenza concettuale che da quella procedurale. Le tipologie di esercizi dovrebbero comprendere completamenti, domande a risposta breve, calcoli, analisi di grafici, analisi numeriche, spiegazioni e creazione di modelli. Gli strumenti di verifica si dovrebbero esercitare sia in classe che fuori e dovrebbero includere in modo appropriato anche la tecnologia. Per poter accertare nel modo più preciso la comprensione dello studente, ogni prova di verifica dovrebbe comprendere presentazioni e tipologie di problemi diversi [11].

Anche i nostri programmi dovrebbero essere sottoposti a verifica. Questo tipo di accertamento può riguardare un solo corso o anche tutto il curricolo universitario. Come detto prima, anche la verifica svolta in classe ci dà un feedback sui programmi e pertanto può rientrare in un piano di verifica curricolare. Il sottoporre a verifica i nostri programmi a diversi livelli permette al dipartimento o all’istituto di determinare se i propri programmi danno luogo a quel famoso “residuo”, adeguato agli obiettivi in uscita.

Il sostegno a istituti e dipartimenti

La verifica dei programmi a livello di istituto o dipartimento è fondamentale per poter migliorare l’educazione matematica a livello universitario. È proprio a livello di programmi che gli istituti devono determinare quale “residuo” debba restare dopo i quattro anni di esperienze integrate di un corso di laurea in matematica. Sottoponendo a verifica i programmi, si ottiene un feedback rispetto agli obiettivi finali dell’istituto o del dipartimento. Pertanto, prima ancora di passare alla verifica dei programmi, occorre che l’istituto o il dipartimento individuino i propri obiettivi in uscita. Lo scopo primario di questo documento CUPM è quello di dare supporto ai dipartimenti perché possano programmare i corsi di matematica che chi si laurea in matematica deve seguire. Istituti e dipartimenti possono avvalersi di questo volume per definire i loro obiettivi conciliandoli con le finalità delle proprie istituzioni. Una volta definiti gli obiettivi, il dipartimento può progettare una verifica dei propri programmi per individuare come i programmi attuali soddisfino quegli obiettivi.

La verifica del processo è molto più difficile della verifica dei risultati di una parte di un corso effettuata dal docente. I dati su cui fondare la verifica dei programmi possono provenire dalle verifiche svolte in classe (e dunque anche dalle votazioni), ma possono comprendere anche indagini, interviste, osservazioni svolte in classe, il feedback che viene da altre discipline/dipartimenti e il feedback del mondo del lavoro, dopo la laurea. Raccolti i dati per questa verifica, i dipartimenti li analizzano rispetto agli obiettivi in uscita. Gli istituti e i dipartimenti che riconoscono la necessità di miglioramenti devono apportare modifiche attraverso iniziative curricolari e di sviluppo del personale docente – iniziative che riguardano il "che cosa" e il "come". Lo scopo principale della verifica del processo a livello universitario è quello di valutare i programmi per vedere si gli obiettivi dichiarati favoriscano veramente l'apprendimento. Inoltre, la verifica del processo fornisce informazioni sia per misurare gli esiti accademici sia per andare incontro alle richieste di agenzie esterne come trustees o associazioni accademiche. Il diagramma che segue rappresenta un esempio di verifica del processo e di modello di progettazione curricolare [12].



I dipartimenti e le istituzioni che si avvalgono di un sistematico contributo dei docenti nel processo di sviluppo degli obiettivi, di verifica, di sviluppo del curricolo e del personale docente non potranno non rendere più produttivi ed efficaci i loro programmi. Purtroppo molte istituzioni non incentivano il personale docente che impiega energie e tempo in questo tipo di attività. I dipartimenti e le istituzioni che sono interessate al cambiamento devono incentivare i docenti che si impegnano a fare di insegnamento e apprendimento una priorità, inoltre devono impiegare questi docenti come leader dei cambiamenti all'interno dei dipartimenti. In questa recensione sull'insegnamento universitario, il comitato consultivo della National Science Foundation dichiara [6, p.46]:

> Spesso, le discussioni su questi argomenti ci fanno rendere conto del fatto che abbiamo assolutamente bisogno di inculcare una cultura delle istituzioni che porti l'apprendimento a una posizione importante almeno tanto quanto quella di una nuovo scoperta. Apportare miglioramenti in questo campo, fra le altre cose, faciliterebbe lo sviluppo di programmi di ricerca all'interno delle strutture accademiche esistenti per studiare l'apprendimento efficace, fornendoci così preziose conoscenze che possono essere impiegate per fare, a ragion veduta, scelte sensate in merito a nuovi curricoli o metodologie didattiche. La mancanza di adeguate forme di incentivazione per i miglioramenti apportati al sistema educativo è vista da molti come un problema fondamentale che rende sempre più rara l'assunzione di responsabilità rispetto all'apprendimento degli studenti, lasciandone tutto il peso all'impegno volontaristico del singolo docente.

I dipartimenti veramente interessati allo sviluppo di un curricolo adeguato a chi prenderà una laurea in matematica nel 2010 devono impegnarsi in iniziative di verifica e miglioramento che invoglino ed incentivino i docenti a fare dell'insegnamento e dell'apprendimento una priorità. Volumi come questo, il finanziamento di progetti curricolari e la ricerca didattica per la matematica universitaria sono strumenti essenziali per la formazione delle istituzioni in merito ad iniziative per migliorare la preparazione dei docenti e l'efficacia dei programmi.

Il sostegno dall'esterno

Organizzazioni professionali, editori ed agenzie finanziarie devono sostenere le istituzioni nei loro sforzi per migliorare i programmi universitari. *Shaping the Future: New Expectations for Undergraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology* propone alla Fondazione Nazionale delle Scienze una serie di consigli mirati all'azione per migliorare l'educazione universitaria, ma fa appello anche a "agenzie federali professionalmente orientate, al mondo dell'industria e del commercio, a istituzioni accademiche e ai loro amministratori, ad organizzazioni professionali, ad organizzazioni private, ai governi degli stati, alle amministrazioni locali e a chiunque altro si occupi di formazione universitaria" [6, p. i]. La National Science Foundation ha fornito somme ragguardevoli per sostenere progetti innovativi volti a migliorare la formazione universitaria, ma questo intervento vuole ribadire l'assoluta necessità di un livello ancora maggiore di impegno e finanziamento.

La MAA è sempre stata all'avanguardia nel fornire guida e sostegno alla comunità matematica sia attraverso l'opera di commissioni quali la Commissione per i programmi universitari di matematica sia con la documentazione del lavoro delle commissioni pubblicata nella serie MAA Notes. Sono di particolare rilevanza per i nostri intenti *Reshaping College Mathematics* [13], *Heeding the Call For Change* [14], *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning* [15], *Models That Work* [16] e *Confronting the Core Curriculum* [17]. Questi volumi forniscono moltissime informazioni e un'attenta analisi del curricolo e dell'insegnamento universitario di matematica.

In questi ultimi tempi la MAA ha riconosciuto l'importanza del condurre una ricerca sull'educazione matematica universitaria annunciando l'istituzione dall'Associazione per la Ricerca nell'Educazione Matematica Universitaria (ARUME) come Gruppo Speciale di Interesse della MAA (SIGMAA). Sono in corso diverse altre azioni per sostenere la crescita del campo di Ricerca nell'Educazione Universitaria Matematica (RUME). La Società Americana di Matematica (AMS) si è unita alla MAA per formare una commissione che punti alla ricerca nell'educazione matematica universitaria ed hanno pubblicato vari volumi contenenti diverse ricerche. Gli incontri professionali di matematici comprendono sessioni in cui relazionare su ricerche in questo campo e le riviste specialistiche cominciano a pubblicare relazioni di ricerche nell'ambito dell'educazione matematica universitaria. Si sta affermando una ricerca che tenta di rispondere alla domanda relativa agli effetti delle decisioni curricolari e pedagogiche sulla comprensione e sulle attitudini alla matematica degli studenti universitari.

Conclusione

Nei loro sforzi per migliorare i programmi per i corsi di laurea in matematica, le istituzioni devono continuamente tenere presenti i contenuti e la qualità del "residuo" che rimane: le conoscenze che un laureato si porta con sé terminato il programma. Da un punto di vista pedagogico ciò comporta avere come obiettivo lo studente e il suo apprendimento. Da un punto di vista culturale, insegnamento e apprendimento devono diventare una priorità. A livello di classe, i docenti devono inventare sfide motivanti per i nostri studenti del XXI secolo. Le iniziative curricolari dei dipartimenti e quelle mirate all'aggiornamento dei docenti sono di importanza fondamentale e sono la condizione necessaria per il buon esito dei programmi. Queste iniziative devono essere incoraggiate e incentivate dalle istituzioni. Le agenzie nazionali e le associazioni professionali devono impegnarsi a favorire questi miglioramenti.

Bibliografia

1. J. Hiebert e P.Lefevre, Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis, *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (J.Hiebert, ED.), Lawrence Erlbaum Associates, Hillside (New Jersey), 1986, 1-27.
2. D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht (Olanda), 1991.
3. J. Piaget, *Psychology and Epistemology*, Grossman Publishers, New York, 1971.
4. N. Noddings, Constructivism in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education (JRME)*. Monografia N.4, *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*, 1990, 7-18.
5. M.L. Connell, Technology in constructivist mathematics classroom, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, Vol. 17*, N.4, 1998, 311-338.
6. Shaping the Future: *New Expectations for Undergraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology*, National Science Foundation, Washington (District of Columbia), 1996.
7. D. McGinn, A difficult formula: Math = fun, *Newsweek*, 5 giugno 2000.
8. R.M. Felder e R. Brent, Navigating the bumpy road to student-centered instruction, *College Teaching*, *Vol.4,* N.2, 1996, 43-47.
9. K.G. Snook, A continuum of choice: Instructional techniques in undergraduate mathemetics, *Proceedings of the Interdisciplinary Workshop on Core Mathematics: Considering Change in the First Two Years of Undergraduate Mathematics* (a cura di D. Arney e D. Small) Westpoint, New York, 1999.
10. D.C. Arnay, Educatine for the future: Mathematics for understanding the new sciences, *Primis, Vol.8,* N.3, 1998, 240-252.
11. K.G. Snook, *An Investigation of First year Calculus Students' Understanding of the Derivative,* Tesi di laurea non pubblicata, Boston University, 1997.
12. *Educating Army Leaders for the Twenty-First Century,* United States Military Academy Academic Board, 1998.
13. *Reshaping College Mathematics: A Project of the Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (*a cura di L.A Steen), MAA Notes numero 13, Mathematical Association of America, Washington (District of Columbia), 1989.
14. *Heeding the Call For Change: Suggestions for Curricolar Action (*a cura di L.A Steen), MAA Notes, numero 22, Mathematical Association of America, Washington (District of Columbia), 1992.
15. *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and results (*a cura di J. Kaput e E. Dubinski), MAA Notes, numero 33, Mathematical Association of America, Washington (District of Columbia), 1994.
16. *Models That Work: case Studies in Effective Undergraduate Mathematics Programs (*a cura di A. Tucker), MAA Notes, numero 38, Mathematical Association of America, Washington (District of Columbia), 1995.
17. *Confronting the Core Curriculum: Considering Change in the Undergraduate Mathematics Major (*a cura di J.A. Dossey), MAA Notes, numero 45, Mathematical Association of America, Washington (District of Columbia), 1998.

Insegnamento e apprendimento in Internet

Gilbert Strang
Massachussets Institute of Technology

Questo intervento non deriva tanto da una riflessione teorica quanto da esperienza personale, maturata – pur continuando ancora – nei corsi di algebra lineare al Massachussets Institute of Technology (MIT). Avrete modo di vedere come in questi ultimi tempi abbia finito per rinchiudermi in una sorta di scatola (anche se una nuova, peraltro). Di conseguenza non so esattamente che cosa fare durante le lezioni di algebra lineare il prossimo autunno. Il fatto di dover scrivere questo intervento nell'estate del 2000 non mi offre una grande opportunità di riflettere in modo approfondito su questo problema ormai incombente. So solo che comporta l'uso di Internet, in particolare di filmati, in combinazione con lezioni frontali e con l'assegnazione di compiti. Sono convinto che ben presto anche il lettore in qualche modo incontrerà gli stessi problemi.

Nonostante quanto ho affermato nella prima frase, ritengo che ci sia una "filosofia" sottesa al mio insegnamento della matematica. Molti miei studenti studiano ingegneria o scienze e sono interessati soprattutto alle applicazioni, il che sembra essere particolarmente congeniale al mio approccio. A me piace moltissimo mostrare loro degli esempi e trovare così un collegamento con i loro interessi, cercando di convincerli che la matematica ha un'utilità immediata e in sé. È anche vero che impiego termini come "bello" e "stupendo" per richiamare la loro attenzione a idee particolarmente brillanti. Ma la bellezza è viva e non è mai congelata.

L'unico teorema che cito direttamente è il teorema fondamentale dell'algebra lineare. Non vorrei rivelare ad altri insegnanti quanto siano rari i casi in cui completo una dimostrazione durante le mie lezioni. Un esempio può essere comunque molto più memorabile. Due esempi, poi, sono assolutamente convincenti! (la mia dimostrazione preferita rimane quella che ho trovato in un libro di Ring Lardner: "Silenzio!" disse. Ma ricorro ad essa in classe soltanto quando sono disperato.)

Ma passiamo senza indugi ad avvenimenti recenti che presentano nuovi problemi.

1. Le mie lezioni di algebra lineare e le mie sessioni di ripasso dello scorso autunno sono state riprese in diretta. Si possono trovare alla pagina web `web.mit.edu/18.06/www`, e si possono vedere con il software Real Player (gratuito). La compressione rende i miei movimenti un po` a sbalzo, ma la lavagna è sorprendentemente chiara. In questo modo tutti gli studenti possono accedere alle lezioni quando vogliono (non solo MWF alle 13.00).

2. Indipendentemente dalla registrazione video, con David Jerison e Haynes Miller ho aderito alla proposta di una nuova fonte di finanziamento all'interno del MIT (grazie a una donazione della Microsoft). La nostra proposta era quella di introdurre "nuovi collegamenti di comunicazione" nel calcolo infinitisimale (Jerison) e nelle equazioni differenziali (Miller) e in algebra lineare (Strang). L'accoglienza è stata positiva, ma alla fine la proposta non ha ricevuto finanziamenti per il prossimo anno. Mi auguro che alcune idee possano risultare interessanti ai lettori di questo articolo.

Quelle idee sono rischiose e soggette a veloci cambiamenti. Una seconda proposta, legata in modo molto più diretto alla struttura delle lezioni e alle *recitations* (ripetizioni delle lezioni da parte degli alunni), ha ricevuto finanziamenti per la progettazione da un altro fondo. Haynes e David stanno studiando nuove possibilità per le lezioni di calcolo infinitisimale. Il sito di Eric Mazur `mazur-www.harvard.edu/education/educationmenu. html` si è rivelato una sorgente di informazioni. mi è stato esplicitamente richiesto che questo articolo si concentri sulla mia parte della proposta originaria che consisteva nel creare un' "enciclopedia online" di inserti brevi e specifici di matematica universitaria, cosa ben diversa da lezioni complete, anche se comporterà comunque la presenza di una cinepresa.

Nota a dimostrazione: ho recentemente visto un dispositivo che riprende mentre si scrive alla lavagna, senza il bisogno di un cameraman (trasmette solo quanto si scrive e non che parla). Abbinato all'audio, questo può rivelarsi utile nell'insegnamento della matematica in tempo reale.

Algebra lineare e videotapes

Innanzitutto vorrei parlare dei filmati in 18.06. L'anno scorso, quando Giancarlo Rota morì improvvisamente, espressi alla classe il mio rimpianto per il fatto che non possedevamo alcuna registrazione delle sue lezioni. Erano stare eccezionali sotto ogni punto di vista. La conversazione in classe si spostò poi su argomenti più tradizionali, ma alcuni studenti successivamente mi inviarono delle email. Mi suggerivano di contattare il Center for Advanced Engineering Studies. Scoprii che il centro si era impegnato in un progetto di registrazione su larga scala di lezioni di fisica (con Walter Lewin). Alla fine ci rendemmo conto che, con un piccolo costo aggiuntivo, il cameraman poteva restare in classe e filmare le lezioni 18.06.

I nastri originali furono digitalizzati e compressi (e salvati) da David Mycue nei ritagli di tempo fra le sue lezioni di ingegneria svolte in contemporanea con l'università di Singapore. Tutto ciò era un aspetto del MIT che non conoscevo affatto.

Volli insistere su una sola cosa: che le lezioni potessero essere liberamente accessibili a chiunque. Il problema adesso è la congestione modulare sulla rete (che dipende dal modem di chi accede al sito). Non avevo idea di quale uso si potesse fare di filmati: mi sembrava semplicemente giusto tentare. E non ho ancora la minima idea! Sono graditi i suggerimenti di chiunque legga questo articolo. io mi limito a citare due sviluppi all'interno del MIT, ma mi auguro che ce ne possano essere altri all'esterno.

1. Durante il semestre delle registrazione, fui costretto a perdere alcune lezioni. I filmati erano stati fatti in anticipo senza che una classe fosse presente. Chiesi ai miei studenti se avrebbero preferito avere un insegnante supplente, ma loro, senza alcuna esitazione, scelsero i filmati. Mi risulta che siano andati regolarmente a lezione, seguendo con attenzione.

Vi renderete subito conto delle conseguenze di qual fatto. La prima è che posso assentarmi sempre di più – lasciandomi alle spalle una sorta di ombra. La seconda (parlando più seriamente) è che gli studenti possono assentarsi sempre di più. Ritornerò fra un attimo a questa nuova libertà, da un lato auspicabile e dall'altro allarmante.

2. Il Lincoln Laboratory del MIT venne a sapere dei filmati e decise di offrire un corso di algebra lineare questa estate. Gli studenti volontari sono adulti, scienziati e ingegneri, che guardano due filmati ogni giovedì pomeriggio. Il mio migliore assistente, Peter Clifford, è presente per rispondere a domande. Io ho partecipato tre volte alle attività del gruppo per porre domande sulle loro reazioni. Sinceramente pensavo che osservare i filmanti con la classe sarebbe stata un'esperienze estremamente imbarazzante, ma non lo è stato. Stanno guardando il formato non compresso, che non è molto diverso da una lezione dal vivo. I volontari del Lincoln Lab seguono il corso con interesse e i loro commenti sono positivi.

Mi rendo ora conto in modo più chiaro e pressante che gli studenti potranno avere un'alternativa alla frequenza regolare delle lezioni il prossimo autunno – o forse i filmati potrebbero costituire un supplemento o un complemento al corso piuttosto che un'alternativa. la domanda che mi pongo ora è che cosa fare in classe quando gli studenti possono seguire le lezioni quando meglio credono. Potrei variare gli esempi, cosa che certamente farò. Ma non posso cambiare la matematica...

18.06 si divide in dieci o più sessioni di *recitations*, di un'ora alla settimana, per affrontare problemi incontrati nello svolgimento del lavoro a casa e domande a cui non si è data risposta. Le ore di lezione potrebbero ora essere più interattive (fermi restando i limiti imposti delle classi numerose). Io sono decisamente a favore di un apprendimento attivo e sono abituato a porre domande mentre spiego. Ma non aspetto sempre le risposte! Gli studenti sono un po' titubanti ad alzarsi in mezzo a un gruppo di persone che non conoscono, ma io sto imparando a usare correttamente flash cards e votazioni per alzata di mano.

Di norma non si potrà presumere che gli studenti abbiano già visto le lezioni. Intendo assegnare determinate lezioni come lavoro a casa (rischiando di favorire l'abitudine a saltare le lezioni)? La nuova situazione non offre maggiori libertà quando si considerano cambiamenti e incertezze. Ogni innovazione implica nuove regole. Senz'altro gli studenti hanno imparato a gestirsi quelle vecchie. E dopo tanto tempo quelle regolo sono in genere accettate come giuste. Qualsiasi cambiamento comporta che in qualche modo o da qualche parte venga richiesto uno sforzo maggiore. e questo non è mai bene accetto.

Nel nostro caso ne potrebbe risultare una lezione più attiva. Non ho alcun mezzo per costringere gli studenti a frequentare e non ne voglio nessuno. Cerco già di fare in modo che la lezione sia più produttiva per la classe di un'ora trascorsa a leggere un libro di testo (scritto da me, sfortunatamente!). Già ero in competizione con me stesso, e, adesso, ancora di più! Proprio là, dove in passato io potevo mettere a fuoco i punti più importanti usando il mezzo della parola per enfatizzarli meglio, mi ritrovo i video delle mie lezioni, a qualsiasi ora della giornata.

Una lezione dal vivo tre volte la settimana è preferibile a un videotape che si può guardare in qualsiasi momento, sette giorni la settimana? Alla lunga, non lo so davvero. Ma forse, per il momento, l'inerzia (o forse l'assenza di qualcosa di meglio da fare) farà fluire la maggior parte degli studenti verso le aule di lezione.

Ma c'è un'altra domanda. Le videocassette potranno incidere sull'insegnamento dell'algebra a livello nazionale? Il libro di testo rimane un punto fermo. Mi auguro che gli insegnanti vedano nella disponibilità di lezioni sulla rete un supplemento ai loro corsi. E questa è davvero la domanda chiave che ritornerà finché insegneremo: come trasformare Internet in un assistente?

Riassumendo: ho accettato di fare questo passo verso la videoregistrazione delle lezioni ritenendo che potesse essere soltanto utile – senza sapere come, ma certo che andiamo comunque verso le lezioni su Internet. E saranno in forme diverse, provenendo da fonti diverse. Se risultasse effettivamente utile aggiungere appunti delle lezioni, risposte a domande frequenti o ulteriori esempi (il tutto chiaramente su lucidi), cercherò di farlo. Innanzitutto spero di imparare come utilizzare questi filmati. Sarei estremamente grato a tutti i lettori di questo articolo che volessero inviarmi riflessioni e suggerimenti via email (gs@math.mit.edu).

La proposta interna del MIT

La seconda parte di questo intervento descrive alcuni aspetti della proposta avanzata da Haynes Miller, David Jerison e da me nel dicembre 1999. Ci offrimmo di creare nuove possibilità online per gli studenti, senza cambiamenti radicali nel sistema esistente delle lezioni. Non eravamo disposti a distruggere qualcosa che funziona bene (pur non essendo perfetto). Le nuove idee avevano senz'altro bisogno di essere testate e tarate, dunque un bel po' di lavoro.

Il nostro obiettivo principale è quello di rendere più attiva e positiva l'esperienza di studenti del primo e del secondo anno. In ogni società, su scala nazionale, universitaria o famigliare, c'è un'incredibile energia creativa. Molte volte però rimane potenziale e non è mai liberata. Trasformare quel potenziale energetico in energia cinetica è l'obiettivo dell'insegnante (e di qualunque leader, ovunque si trovi).

Uno degli strumenti che proponiamo è Internet. Sappiamo che le sperimentazioni di molti dipartimenti di matematica si muovono in questa direzione. Indubbiamente i risultati sono diversificati – e lo stesso vale anche per noi. Riproduco qui di seguito una mia sintesi di due idee dalla proposta elaborata da noi tre.

A. Vogliamo creare un'enciclopedia online che sia di aiuto per i nostri corsi base di matematica. I materiali potranno rivolgersi non esclusivamente alle matricole, ma a tutti gli studenti che hanno accesso a Internet.

Il vantaggio delle presentazioni in videocassetta e su supporti multimediali rispetto ai libri di testo sta nel fatto che la dimensione aggiuntiva del tempo può permettere di rendere concetti matematici complessi (ma anche semplici!) in modo più efficace. Un vantaggio non trascurabile rispetto alle lezioni frontali sta nel fatto che le informazioni possono essere trasmesse in pacchetti nel momento in cui servono. Quel momento potrebbe essere quando lo studente si blocca in un lavoro a casa, ma potrebbe anche essere quando, il mese o l'anno dopo, una determinata informazione è nuovamente richiesta.

B. Vogliamo creare delle *chat rooms* in cui gli studenti potranno discutere idee e problemi. potranno manipolare gli strumenti grafici che intendiamo sviluppare e anche divertirsi, lavorando insieme. Vogliamo che gli studenti del MIT apprezzino gli elementi attivi e cooperativi della matematica. La matematica dipende dalla comunicazione.

Le *chat rooms* potrebbero diventare una nuova caratteristica della didattica del MIT. Gli studenti formano già gruppi di studio per risolvere problemi e per ripassare per gli esami. Non intendiamo perdere il valore di questi gruppi interattivi nel passaggio verso lo sfruttamento delle potenzialità offerte dall'informatica nello studio individualizzato. Le *chat rooms* online permettono agli studenti di interagire anche se non possono essere fisicamente presenti o se non partecipano a un gruppo compatibile. Un gruppo può utilizzare simultaneamente strumenti di grafica e di calcolo infinitisimale, per avanzare nella ricerca più di quanto non possa il singolo. I testi delle *chat rooms* torneranno utili nella monitorizzazione dell'intero processo e nel capire dove si bloccano gli studenti.

Come la maggior parte delle università, anche il MIT si affida alle lezioni di docenti esperti. Non sarebbe saggio stravolgere questo impianto a partire da domani perché il contributo di quei docenti (e la loro dedizione) è troppo prezioso. Ma, se consideriamo il tutto dal punto di vista degli studenti, scorgiamo nuove modalità di comunicazione individuale con loro – e anche nuove modalità di comunicazione fra gli studenti.

Sono i cambiamenti nell'esperienza dello studente, resi possibili dalla rivoluzione dei nessi comunicativi docente-studente e studente-studente, a motivare la proposta. Il primo progetto è il più diretto: un modo diretto per gli studenti di accedere (online) ai concetti essenziali di ogni corso. Il secondo è il più innovativo: un modo per gli studenti di parlarsi. Vogliamo che lavorino insieme, poiché -sorprendentemente- ciò favorisce l'apprendimento individuale. Pertanto la nostra presentazione si concentra su questi elementi:

- Accesso online diretto a un aiuto veloce per le idee fondamentali di ogni corso e le loro applicazioni (con molti esempi).
- Interazione studente-studente su problemi relativi al lavoro a casa come pure su concetti fondamentali. Il momento magico della comprensione di solito si verifica all'esterno dell'aula.

Vorrei ritornare dalla proposta a questa relazione per il MAA per alcuni commenti. Innanzitutto vorrei ribadire che al momento dell'attuazione queste idee subirebbero senz'altro delle modifiche. Potrei aggiungere alcuni particolari alle descrizioni fornite sopra, ma quei cambiamenti stanno già sopravvenendo. C'era poi un passaggio chiave della nostra proposta che non è ancora emerso in questo articolo: l'idea di moduli sulle equazioni differenziali in cui i biologi, i fisici e gli ingegneri sono spesso interessati ad esempi totalmente diversi.

Qui di seguito si trovano le elaborazioni delle idee A. e B. (enciclopedia online e *chat room* sul lavoro a casa) tratte dalla proposta originale.

A. Accesso online diretto a un aiuto veloce

Gli studenti hanno bisogno di una fonte diretta veloce per le informazioni sulle idee-chiave. questo significa definizioni, esempi e applicazioni e anche teoremi. Siamo convinti che il web offra un nuovo legame comunicativo fra i docenti e gli studenti che sta a noi stabilire e sviluppare. Il nostro progetto è quello di presentare in rete determinati argomenti e forniamo qui di seguito dieci esempi tratti dal calcolo infinitisimale:

Derivate seconde: massimo, minimo, punti di flessione
Concetto di limite
Regola di derivazione di funzione composta
Funzione esponenziale

Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale
Integrazione per parti
Lunghezza di una curva
Coordinate polari
Serie di Taylor
Moltiplicatori di Lagrange

Per ogni argomento forniremo un feedback immediato. In realtà creeremo un'enciclopedia online. Questo è il formato che in realtà gli studenti trovano più utile: il formato "consultazione" piuttosto del formato "esposizione". Entrambi sono necessari e i libri di testo ne forniscono già uno. Noi intendiamo creare l'altro.
Ogni argomento verrà presentato separatamente, ma ovviamente ci saranno collegamenti. Tuttavia ci soffermeremo sui concetti singoli, facendoci guidare dalla nostra esperienza di insegnanti. Ogni presentazione dovrà avere quattro ingredienti:

1. Una descrizione videoregistrata del concetto e del suo contesto;
2. Lucidi che seguono il video per ricapitolare i concetti-chiave;
3. Grafica durante il video in diretta;
4. Esercizi ed esempi: alcuni già risolti, ma altri no.

Lo spettatore-studente può passare velocemente e facilmente da una fase all'altra e ritornare indietro. Alcuni preferiranno vedere prima gli esempi, altri la sintesi. Queste avranno sia suoni che immagini, non solo per evidenziare ciò che è importante, ma anche per mantenere un contatto umano che permette di trasmettere il segnale all'ascoltatore.

B. Interazione online studente-studente

L'apprendimento delle studente avviene spesso per scatti improvvisi – in genere mentre sta lavorando su un problema assegnato. Questi sono momenti cruciali fuori dall'aula e noi possiamo fornire un aiuto in più. Sono momenti su cui ci dobbiamo concentrare proprio perché gli studenti si stanno concentrando. Forniremo agli studenti dei video clip, ma siamo anche convinti che la loro comunicazione con altri studenti sia una fonte potente di apprendimento. forniremo anche strumenti di grafica e di calcolo infinitisimale che sono una parte integrante del programma. Nei capoversi che seguono si illustrano tre tipi di supporto online: i filmati, gli strumenti grafici e la *chat rooms* per studenti.

1. Filmati. I vantaggi rispetto al libro di testo stanno nel fatto che un video, con la dimensione aggiuntiva del tempo, può trasmettere concetti matematici complessi (ma anche semplici!) in modo più efficace. Il vantaggio più significativo rispetto alla lezione frontale è costituito dal fatto che le informazioni possono essere trasmesse per pacchetti nel momento in cui servono. I problemi assegnati come lavoro a casa in alcuni casi saranno esplicitamente collegati ai video clip. Un'animazione efficace darà anche più vita alle nostre lezioni.

2. Strumenti grafici. Questi permettono di rendere visibile un concetto di base, ma allo stesso tempo insegnano metodologie di scoperta. nell'applicare il metodo newtoniano, gli studenti di calcolo infinitisimale possono scoprire tassi di convergenza, orbite periodiche e soprattutto bacini di attrazione. Variando i coefficienti di una funzione quadratica a due variabili, vedranno i punti di sella, i massimi e i minimi. Gli strumenti grafici saranno usati in modo diffuso nella classi tecnologicamente attrezzate del futuro.

3. *Chat rooms*. Gli studenti formano già dei gruppi di studio per risolvere problemi assegnati. Ma questo vale solo per alcuni studenti: va bene, ma non comprende tutti. Le *chat rooms* online permettono agli studenti di interagire anche se non sono fisicamente presenti o se non partecipano a un gruppo compatibile. Un gruppo può utilizzare simultaneamente strumenti di grafica e di calcolo infinitisimale, per avanzare nella ricerca più di quanto non possa il singolo.

I testi delle *chat rooms* verrebbero registrati. ciò permetterebbe di vedere dove gli studenti si sono bloccati. Per utilizzare gli script ancora meglio, proponiamo di richiedere agli studenti di citare le loro fonti di aiuto, senza alcuna penalizzazione per aver accettato l'aiuto.Ciò permetterà di rintracciare eventuali abusi, come copiature in blocco dello svolgimento del lavoro a casa, ma (soprattutto) di ricostruire interazioni efficaci.

Le *chat rooms* dovrebbero riscaldarsi in prossimità degli esami. Gli studenti potranno accedere all'aiuto a qualsiasi ora della notte. E, specialmente al tempo degli esami, anche il personale docente vi potrebbe partecipare. In alcuni casi la *chat room* si potrebbe trasformare in una *recitation* online. Le trascrizioni di queste interazioni pre-esame saranno particolarmente utili nella programmazione di nuovi corsi. Gli assistenti potrebbero presentare dei clip e discutere l'interazione con i titolari.

Un problema interessante è come gli studenti comunicheranno fra loro nelle *chat rooms* se la tastiera è l'unica connessione. I matematici di solito usano una versione informale del linguaggio di scrittura TeX di Donald Knuth's, dove \int_a^B f(x)dx significa integrale definito di $f(x)$. Ci potrebbere essere un linguaggio migliore per le conversazioni matematiche online. E al momento le tastiere sono inadeguate a trasmettere immagini. L'Holy Grail (Sacro Graal) è l'equivalente funzionale della lavagna – che sosterrebbe in qualsiasi luogo l'apprendimento a distanza.

Si potrebbe affermare che stiamo proponendo di incoraggiare l'apprendimento *last minute*. Gli studenti, però, apprendono quando sono recettivi e non prima. qualsiasi meccanismo che faciliti l'apprendimento deve essere preso in considerazione. Potremmo includere anche problemi che sviluppano in modo particolare le abilità di lettura e di ascolto, in quanto il libro di testo e il docente sono ancora centrali rispetto al corso. e per alcune esercitazioni potremmo rendere le char rooms inaccessibili.

Inoltre useremo la tecnologia per facilitare l'apprendimento dopo l'ultimo minuto, in forma di post-test. molti studenti non riprendono il loro lavoro a casa per vedere che cosa non abbia funzionato. E, ancora peggio, molti di loro non utilizzano i loro vecchi test per il ripasso. Gli insegnanti sono colpevoli di favorire questo comportamento, precipitandosi sull'argomento successivo. Quella che sarebbe un'occasione fondamentale di apprendimento va spesso perduta. Nessun insegnante esperto si aspetta che tutti apprendano un argomento al primo impatto. Intendiamo favorire lo sviluppo dell'abitudine di riprendere gli argomenti per apprendere e potenziare l'apprendimento.

Possiamo insegnare meglio ai nostri studenti se forniamo loro le informazioni quando ne hanno bisogno e quando sono pronti a riceverle. Gli studenti possono lavorare in modo cooperativo sia online che durante le *recitations.* Trovando online anche i loro amici, gli studenti troveranno più facile usare questi strumenti, fare progressi nella risoluzione di problemi e divertirsi mentre lo fanno – senza tutte quelle timidezze che caratterizzano la lezione in aula.

Il nostro obiettivo principale è quello di coinvolgere maggiormente i nostri studenti, utilizzare al meglio il loro tempo, fornire loro un insegnamento meno meccanico, incoraggiarli a manipolare la grafica nei loro esperimenti matematici e offrire un accesso facilitato alle informazioni di base nel momento in cui queste servono. Speriamo, e ci aspettiamo, che si verifichino cambiamenti nello stile e nella sostanza.

Così si conclude la sezione di questo articolo tratta dalla nostra proposta comune. Devo infinitamente ringraziare Haynes Miller e David Jerison. Nel corso di moltissimi anni, troppi per essere calcolati, io ho appreso da un esercito di studenti. A dire il vero, non ho mai fatto riflessioni troppo attente o approfondite sulla teoria dell'educazione: è stato più spesso il mio istinto a farmi muovere all'interno della classe, la ricerca di ciò che gli studenti possano comprendere ed apprezzare. E leggo ad alta voce (tranquillamente) tutto quello che scrivo, in modo che quello stesso istinto sia tenuto anche lì sotto controllo.

L'arrivo di Internet ha aperto incredibili nuove possibilità.
Appena in tempo.

Primi passi: il ruolo del corso universitario biennale nella preparazione alla laurea in matematica

Susan S. Wood, presidente di
American Mathematical Association of Two-Year Colleges

Il corso universitario biennale è l'istituzione scelta oggi da molti studenti che si iscrivono all'educazione post-secondaria. Mentre alcuni studenti scelgono la laurea breve in vista di un'immissione immediata nel mondo del lavoro, altri pensano già a una specializzazione e prendono un *Associate's Degree*[i] per passare poi a un college quadriennale o a un'università per completare gli studi atti a conseguire un *Bachelor's Degree*[i]. Fra questi studenti ci sono anche gli specializzandi in matematica che portano a termine il biennio di formazione in un *community college*[i]. Lo scopo di questo intervento è quello di descrivere il ruolo dei college biennali nella formazione degli specialisti in matematica. Le raccomandazioni del *Committee on the Undregraduate Program in Mathematics* devono tener conto di chi intende specializzarsi in matematica avendo iniziato il suo corso di studi accademico presso un college biennale e, conseguentemente, prendere in esame anche il curricolo di matematica dei college biennali.

Il college biennale

Le iscrizioni nei più di 1100 college biennali del nostro paese sono aumentate da 3.9 milioni (Autunno 1975, conteggio presenze) a 5.5 milioni (Autunno 1998, conteggio presenze). Queste iscrizioni si sono stabilizzate attorno ai 5.5 milioni per quasi tutto il corso degli anni '90 e si prevede aumenteranno nel prossimo decennio. Ai college biennali si iscrivono quasi la metà (44%) degli studenti universitari degli Stati Uniti, e il 46% delle matricole. Il 49% di tutti gli studenti universitari che si dichiarano membri di minoranze razziali o etniche frequentano i *community colleges*. Nella popolazione studentesca dei college biennali si trovano differenze significative con:

- 46% di tutti gli studenti afro-americani nell'educazione superiore;
- 55% di tutti gli studenti ispanici dell'educazione superiore;

- 46% di tutti gli studenti asiatici o da isole del Pacifico nell'educazione superiore;
- 55% di tutti gli studenti nati in America nell'educazione superiore.

Effettivamente, "le iscrizioni al *community college* riflettono la ricca diversità della nazione", come dice l'American Association of Community Collleges.

Gli studenti scelgono il college biennale per diversi motivi. Per alcuni i fattori chiave sono la vicinanza, i costi contenuti e la politica di libero accesso. I *community colleges* si trovano nelle comunità dove gli studenti vivono e lavorano ed offrono una formazione post-secondaria di alta qualità con tasse scolastiche annuali che in media si aggirano attorno a $ 1518. Altri studenti sono attratti dalle dimensioni contenute dei gruppi classe, dall'attenzione particolare rivolta all'insegnamento e all'apprendimento e dalla maggiore possibilità di confrontarsi con i docenti. Ci sono comunque studenti che hanno bisogno del lavoro preliminare che viene proposto nei corsi di preparazione e che traggono profitto dalla vasta gamma di servizi di sostegno allo studente che vengono offerti dai college biennali. Capita pure che studenti che hanno si dono già laureati in altre università, magari anche con un dottorato, decidano di fare un "trasferimento inverso", iscrivendosi a un *community college* per conseguire le competenze necessaria ad una svolta nella loro carriera.

I dati di un'indagine condotta dalla *Conference Board of the Mathematical Sciences* (CBMS) rivelano che nell'autunno del 1995 erano iscritti ai corsi universitari di matematica offerti dai college biennali circa 1.384.000 studenti contro i circa 1.469.000 studenti che seguivano tali corsi in facoltà quadriennali. Mentre il numero totale di iscrizioni ai corsi di matematica a livello universitario fra il 1990 e il 1995 è rimasto costante, la diminuzione di iscrizioni ai college quadriennali e alle università è stata compensata da un uguale incremento delle iscrizioni ai college biennali. L'indagine CBMS dell'autunno 1995 dichiara che "entro la fine del secolo, le iscrizioni ai corsi di matematica nei college biennali saranno pari o supereranno le iscrizioni in college quadriennali o università". L'indagine CBMS condotta nell'anno 2000 dovrebbe fornire i dati necessari a confermare questa previsione sulle iscrizioni.

In molti college biennali i docenti associati insegnano più o meno metà dei contenuti dei corsi di matematica offerti dal dipartimento. Per quanto le esperienze diverse dei docenti associati possano essere valide, questi insegnanti dovrebbero poter fare loro finalità e obiettivi del college biennale ed essere integrati nella vita del dipartimento. I docenti associati dovrebbero partecipare regolarmente ai confronti su insegnamento e apprendimento, adozioni di libri di testo e attività di sviluppo professionale. Proprio come i titolari di nuova nomina traggono vantaggio dall'attività di mentori svolta dai colleghi più esperti, anche i docenti associati (e a loro volta i loro studenti) possono beneficiare dall'essere affidati a docenti titolari a tempo pieno di indubbia esperienza.

Il curriculum

L'American Mathematical Association of Two-Year Colleges (AMATYC) nella sua pubblicazione del 1995, *CROSSROADS IN MATHEMATICS: Standards for Introductory College Mathematics Before Calculus*, ha fissato un modello e degli standard per il college biennale di matematica. Nei suoi documenti *Standards* del 1989, il National Council of teachers of Mathematics (NCTM) raccomandava cambiamenti nell'insegnamento della matematica a scuola. Raccomandazioni per il curriculum del college sono state proposte anche da pubblicazioni della Mathematical Association of America (MAA) fra le quali *A Curriculum in Flux* e *Reshaping College Mathematics*. Le relazioni del National Research Council che propongono cambiamenti nella formazione matematica comprendono *Everybody Counts* e *Moving Beyond Myths*. Facendo riferimento a queste relazioni e pubblicazioni, come pure al movimento per la riforma del calcolo infinitisimale, gli Standard AMATYC fissano standard relativamente a contenuti, pedagogia e sviluppo intellettivo come segue:

- **Standard per lo sviluppo intellettivo:** si riferiscono ai modelli di ragionamento che si auspica lo studente faccia propri e pertanto rappresentano anche obiettivi in uscita.
- **Standard per i contenuti:** forniscono linee guida per l'individuazione dei contenuti da insegnare a livello introduttivo.
- **Standard pedagogici:** raccomandano l'impiego di strategie didattiche che favoriscono l'attività e l'interazione dello studente e una conoscenza centrata sullo studente.

Chi si specializza in matematica può seguire molti corsi diversi offerti dai college biennali che vanno dai corsi di sviluppo (o preparazione) a corsi di pre-calcolo, introduzione al calcolo, calcolo multivariato, algebra lineare, equazioni differenziali, matematica discreta e statistica. Gli studenti che hanno bisogno di corsi proparatori di matematica prima di iscriversi a corsi-passerella verso facoltà quadriennali studiano “i Fondamenti”, un nucleo comune che va incontro ai bisogni individuali dello studente, fornisce accessi a livelli differenziati e una base matematica spendibile in molte carriere diverse e infine mette lo studente in grado di affrontare serenamente la matematica a livelli superiori. I contenuti su cui si focalizza l’attenzione nel corso di Fondamenti sono il concetto di numero, il simbolismo e l'algebra, la geometria e la misurazione, le funzioni, argomenti di matematica discreta, probabilità e statistica e la dimostrazione deduttiva. *CROSSROADS* offre una guida particolare agli studenti che scelgono programmi intensivi di matematica nel college biennale. Gli insegnanti devono richiedere prestazioni di qualità a coloro si specializzano in matematica e diventeranno i matematici, gli scienziati, gli ingegneri e gli economisti del domani. Questi studenti devono impegnarsi in un lavoro sostenuto in corsi stimolanti che offrano una ricca varietà di esperienze matematiche. Molti studenti dei college biennali hanno bisogno di un corso di pre-calcolo prima di passare al calcolo. Come viene indicato in *CROSSROADS,* il contenuto di un corso di pre-calcolo infinitisimale dovrebbe ruotare attorno alla comprensione del concetto di funzione: lineare, elevamento a potenza, polinomiale, razionale, algebrica, esponenziale, logaritmica, trigonometrica e trigonometrica inversa. Sono importanti anche elementi di matematica discreta che portano alla modellazione e alla risoluzione di problemi. L’impiego di dati reali, abbinato allo studio di modelli probabilistici e inferenza statistica, dovrebbe far parte dei corsi di statistica offerti nei college biennali. Gli studenti dei college biennali interessati a programmi intensivi di matematica si baseranno sui materiali del corso di pre-calcolo con una sequenza di calcolo infinitisimale comprendente studio di limiti, differenziazione, integrazione, algebra lineare, calcolo multivariato ed equazioni differenziali. Nei college biennali è abbastanza comune l’attenzione all’uso della tecnologia nella didattica – i *community colleges* contribuiscono così a ridurre lo scollamento digitale fornendo competenze informatiche a un notevole numero di studenti.

Gli autori del rapporto del National Research Council *Transforming Undergraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology* articolano una visione dei corsi universitari di matematica e discipline scientifiche che fornisca “diverse opportunità per tutti gli studenti universitari di studiare materie scientifiche, matematica, ingegneria e tecnologia [SME&T], così come vengono praticate da scienziati ed ingegneri, al più presto durante la loro carriera universitaria”. In particolare, la Vision 2 dichiara che:

> SME&T diventerebbe parte integrante del curricolo di tutti gli studenti universitari attraverso corsi introduttivi obbligatori che coinvolgono gli studenti in SME&T e nei collegamenti con la societè e le condizioni di vita. (p.25)

In accordo con *Crossroads* della AMATYC, i docenti vengono invitati a programmare corsi introduttivi per andare incontro ai bisogni di una diversa popolazione scolastica attraverso corsi stimolanti da un punto di vista intellettivo. Sia nei contenuti che nell’approccio alla disciplina, i corsi introduttivi dovrebbero incoraggiare molti studenti a continuare i loro studi di SME&T, che dovrebbero agire da “pompa’ piuttosto che da “filtro”. Direttamente connesso con il principio dell’accesso libero dei collegi biennali è il progettare corsi rivolti a un particolare gruppo di studenti che mostrano differenze di bagaglio culturale, esperienze, interessi, aspirazioni e stili di apprendimento. Le esperienze matematiche degli studenti nei corsi di livello introduttivo sono fondamentali e determinanti per la scelta della carriera.

Nei college biennali vengono offerte anche possibilità di ricerca, pure raccomandate dal rapporto Transforming. Sebbene la ricerca disciplinare da parte dei docenti non rientri in genere nella missione della maggior parte dei college biennali, capita che alcuni singoli docenti di matematica siano coinvolti nella ricerca come parte del loro normale sviluppo professionale. In alcuni college biennali è pertanto possibile che lo studente sia coinvolto nella ricerca guidata in matematica o in un’area afferente alla matematica.

I college biennali sono il luogo privilegiato per iniziare una carriera orientata all’insegnamento, il che è fondamentale per la formazione di buoni insegnanti universitari. Un articolo della rubrica “The Landscape” del numero di novembre/dicembre 1998 di *Change* riporta i risultati di un’indagine sul personale docente dei college biennali e quadriennali condotta dalla Canergie Foundation for the Advancement of Teaching. I risultati dell’indagine riportano la gloriosa tradizione dei college biennali nel focalizzarsi sull’insegnamento e si suggerisce che il personale docente dei *community colleges* sarebbe ideale per realizzare un ambiente che sostiene “innovazione, riflessione e conversazione su insegnamento e apprendimento in tutti i college quadriennali e nelle università”. I *community colleges* – “la prima istituzione didattica della nazione” – possono guidare il corpo docenti universitario nell’individuazione e nella realizzazione delle migliori pratiche didattiche.

Questioni di reclutamento

I college biennali, con la loro significativa popolazione minoritaria, sono la fonte primaria per il reclutamento e la preparazione di una diversa forza lavoro di matematici, scienziati e ingegneri del futuro. Opportunità finanziate con borse di studio come quelle accessibili attraverso il National Science Foundation’s Alliance for Minority Participation Program stanno a dimostrare una collaborazione riuscita fra college biennali e quadriennali per aumentare il numero di studenti minoritari coinvolti in discipline come scienze, ingegneria e matematica. L’AMATYC ha adottato nel suo piano strategico per 2000-2005 l’obiettivo di promuovere ambienti classe, dipartimento e campus che favoriscano i membri di gruppi non rappresentati a riuscire e a proseguire lo studio della matematica. Questo obiettivo sarà potenziato attraverso strategie che pervadono le attività dell’organizzazione: attraverso comitati, opportunità di sviluppo professionale e quant’altro. È essenziale che tutte le persone che sono coinvolte nella matematica a livello post-secondario incoraggino e si prendano cura di ***tutti*** gli studenti nello studio della matematica, specialmente quelli che appartengono a gruppi minoritari e sono considerati a rischio.

La formazione dei docenti

Molti futuri maestri e insegnanti di scuola media inferiore e superiore si iscrivono a un college biennale per poi passare a un college di *education* in un’istituzione quadriennale per conseguire la specializzazione e le certificazioni richieste. È proprio durante i due anni presso il college biennale che questi futuri insegnanti seguono corsi in matematica e scienze a livello introduttivo che sono fondamentali per la loro formazione professionale in quanto le conoscenze e le competenze che sapranno trasmettere ai loro alunni dipenderanno dalla qualità di questi corsi. I futuri insegnanti di matematica nelle scuole superiori che iniziano la loro formazione post-secondaria nei college biennali si formeranno le basi delle loro competenze matematiche proprio durante questo biennio universitario. I docenti universitari di matematica dovrebbero da un lato rifarsi ai modelli pedagogici a cui gli studenti ricorreranno poi quando si troveranno ad insegnare e dall’altro tenere presenti le raccomandazioni della recente pubblicazione del NTCM *Principles and Standards for School Mathematics*.

I collegamenti con i colleges of education sono difficili. Il personale docente dei college biennali di matematica dovrebbero associarsi con le istituzioni a cui forniscono studenti a tutto vantaggio di quegli stessi studenti che saranno poi insegnanti. Queste partnership dovrebbero coinvolgere anche docenti di arte e di **scienza**, come pure i docenti dei *colleges of education* e dovrebbero avere come obiettivo primario quello di fornire ai futuri insegnanti programmi di qualità nei college biennali nonché un passaggio agevole alle istituzioni quadriennali. In particolare, i college biennali possono offrire agli studenti le prime opportunità di esperienze sul campo come programmi di tirocinio all’insegnamento con osservazione guidata in classe nelle scuole del distretto, individuando anche insegnanti esperti in funzione di mentori, collegamenti con peer nelle istituzioni quadriennali e istituendo dei club per futuri insegnanti.

Il rapporto *Investing in Tomorrow’s Teachers: The Integral Role of Two-Year Colleges in the Science and Mathematics Preparation of FutureTeachers* della National Science Foundation presenta un modello e alcuni consigli per il coinvolgimento dei college biennali come partner effettivi nel dibattito sulla formazione degli insegnanti. La relazione si auspica l’intervento dei college biennali nei seguenti ambiti: reclutamento di futuri insegnanti, potenziamento dei corsi universitari di SME&T, tirocinio in vista dell’insegnamento, attività di formazione in servizio, collegamenti fra i college biennali e le istituzioni quadriennali, e contatti con il mondo del commercio e dell’industria, le organizzazioni professionali e altre associazioni. Nel numero di primavera 1998 di *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations* vengono fornite informazioni dettagliate su undici collegi biennali riconosciuti dal National Science Foundation nel 1998 per le loro attività esemplari nella formazione degli insegnanti. In aggiunta, progetti sponsorizzati dal National Science Foundation come Collaboratives for Excellence in Teacher Preparation hanno messo in contatto i *community colleges* con i loro partner quadriennali riuscendo a motivare studenti per la scelta della specializzazione di insegnamento di matematica o discipline scientifiche (si veda il sito web dell'NSF www.nsf.gov riguardo alla descrizione dei progetti di collaborazione). Grazie alla facilità di accesso sul territorio in quelle comunità (urbane e rurali) dove c'è un maggiore bisogno di insegnanti e del loro intervento sulla qualità dell'insegnamento, i college biennali si trovano in una condizione privilegiata per il reclutamento e la formazione dei futuri insegnanti di matematica. Le istituzioni quadriennali devono riconoscere, e agire conseguentemente, il ruolo importante svolto dai collegi biennali nella formazione dei futuri insegnanti, particolarmente all'interno delle minoranze.

L'apprendimento a distanza

La matematica non fa eccezione alla sempre maggiore diffusione di corsi per apprendimento a distanza. Molte università e college, compresi quelli biennali, si stanno rivolgendo all'apprendimento a distanza per vari motivi, fra i quali la sfida ad andare sempre più incontro ai bisogni della nuova popolazione studentesca e la sempre presente preoccupazione istituzionale di efficienza fiscale. In una relazione del National Center for Education Statistics che riporta dati del 1997-98 si dice che:

- 48% delle istituzioni post-secondarie che offrono corsi con apprendimento a distanza sono collegi biennali;
- 43% dei circa 1.66 milioni di studenti iscritti a corsi con apprendimento a distanza si trovano in college biennali e 30.830 sono iscritti presso questi college biennali a corsi universitari che permettono di acquisire crediti per la specializzazione in matematica (compresa anche statistica);
- 860 diversi corsi universitari con apprendimento a distanza che permettono di acquisire crediti per la specializzazione in matematica (compresa anche statistica) sono stati offerti dai college biennali pubblici contro i 600 offerti da istituzioni pubbliche quadriennali.

Tutte le discipline sono state virtualmente toccate dal fenomeno dell'apprendimento a distanza, ma non si è ancora compreso appieno quale possa essere l'impatto sulle specializzazioni in matematica. Gli studenti hanno molte possibilità di scelta su dove e come intraprendere un corso di studi port-secondario in matematica: la sopravvivenza di istituzioni e dipartimenti può dipendere dall'abilità di insegnare nelle classi virtuali del futuro, secondo scadenze diverse da quelle tradizionali. Con il diffondersi di corsi di calcolo infinitisimale ed altro secondo le modalità dell'apprendimento a distanza, diventa fondamentale che si mantenga un livello qualitativo alto per assicurare la creazione di ambienti di apprendimento efficaci per tutti gli studenti di matematica.

I "passaggi" da un'istituzione all'altra

La questione dei "passaggi" da un'istituzione all'altra è particolarmente importante nei college biennali. L'interfaccia fra la scuola media superiore e il college come pure quella fra istituzioni biennali e quadriennali non possono essere trascurate. Un seminario sui passaggi convocato nel febbraio 2000 dal Mathematical Sciences Education Board ha coinvolto organizzazioni professionali e altre rappresentanze in una discussione centrata attorno a tre principi chiave: allineamento delle aspettative fra le varie istituzioni e delle modalità di verifica, trasparenza delle aspettative (e della verifica) e collaborazione fra e all'interno delle istituzioni. Le raccomandazioni per ulteriori interventi riguardavano le aree del curricolo, della valutazione e della linea politica da seguire, includendo la possibile attuazione di un set di aspettative comuni per le classi 11-14 di matematica nonché la raccolta di informazioni in merito ai test di ingresso e al loro uso.

Gli studenti dei college biennali che si trasferiscono a istituzioni quadriennali possono scegliere fra molte alternative, ognuna con le proprie richieste per la specializzazione in matematica. È veramente difficile che il curricolo del college biennale possa far fronte alle richieste delle numerose istituzioni in cui ci si può trasferire, le quali, peraltro, non concordano fra di loro su quello che dovrebbe essere il curricolo ideale per gli studenti che si sono iscritti da loro fin dal primo anno. Molti stati, regioni o istituti di educazione superiore locali hanno elaborato accordi di "passaggio" che riguardano gli studenti che si trasferiscono. Tali accordi permettono agli studenti di effettuare il passaggio come *junior*[i] a tutti gli effetti a condizione che presso il college biennale abbiano conseguito un *Associate in Arts Degree* o un *Associate in Science Degree* [i] coerente con la specializzazione che intendono conseguire. Per quanto questi accordi sembrino utili a tutti gli effetti, la loro diffusione incontra ancora difficoltà. I corsi che beneficiano di accordi di passaggio sono solitamente corsi di *general education* e non necessariamente preparano gli studenti o corrispondono ai prerequisiti degli ultimi due anni di una determinata specializzazione. Un'efficace politica di passaggio favorirà il conseguimento della laurea quadriennale da parte dello studente. Gli studenti che invece non abbiano conseguito una laurea biennale e decidano di passare ad un istituzione quadriennale al punto in cui sono potranno trovare il passaggio un po' più problematico, in quanto non tutti i corsi che hanno completato nel college biennale saranno necessariamente accettati come credito in vista del conseguimento di una laurea quadriennale. analogamente, potrebbe essere chiesto allo studente di frequentare corsi del primo o del secondo anno della facoltà quadriennale come studente "fuori corso" se quei corsi non hanno corrispettivi o non vengono svolti nel college biennale di provenienza.

Una questione collegata al "passaggio" è quella dell'impiego delle tecnologie da parte di studenti e docenti nei corsi di matematica. Sebbene i college biennali siano spesso all'avanguardia nell'uso delle tecnologie nei corsi di matematica, la tecnologia a cui si ricorre è comunque diversa da quella utilizzata nelle istituzioni quadriennali (per esempio, calcolatori grafici invece di software per computer). Una particolare attenzione alla tecnologia come strumento di apprendimento, e non come fine in sé, contribuirà a ridurre al minimo le difficoltà incontrate dagli studenti che si trasferiscono da un'istituzione all'altra e devono adeguarsi a strumenti tecnologici diversi.

Con la revisione da parte dei college quadriennali dei corsi esistenti e la programmazione di nuovi, i college biennali potrebbero non essere in grado di adeguarsi tempestivamente in modo da non svantaggiare i propri studenti. Per esempio, i college quadriennali che offrono approcci interdisciplinari di formazione generale per i propri studenti potrebbero riscontrare che gli studenti provenienti dai college biennali hanno seguito corsi disciplinari separati che non corrispondono ai corsi interdisciplinari.

Mentre i dati di alcuni college quadriennali mostrano che gli studenti provenienti da college biennali ottengono risultati uguali o migliori di quelli dei propri studenti, la percezione che hanno molti docenti dei college quadriennali è molte volte diversa. Una ricerca attenta e ben pubblicizzata che si basi su dati precisi delle prestazioni degli studenti trasferiti da college biennali in contrapposizione agli iscritti originari dei college quadriennali aiuterebbe ad allineare la percezione alla realtà.

Un ingrediente che contribuisce ad un agevole programma di "passaggio" di uno studente di un college biennale è la forte collaborazione fra il college biennale e quello quadriennale. I migliori programmi di "passaggio" spesso riflettono relazioni di lavoro positive e professionali fra i docenti delle varie istituzioni che promuovono la comprensione e favoriscono lo sviluppo di politiche che non sono da ostacolo al progresso degli studenti. L'obiettivo di passaggi *soft* da scuola media superiore ➔ college biennale ➔ college quadriennale o università, oppure scuola media superiore ➔ istituzione quadriennale, oppure scuola media superiore ➔ college biennale (per gli studenti che terminano qui) richiede molta più attenzione. Le nuove raccomandazioni CUPM dovrebbero puntare allo sviluppo e al potenziamento di un'efficace politica di "passaggi" che faciliti il trasferimento di specializzandi in matematica dal college biennale a istituzioni quadriennali. Si dovrebbero prendere in considerazione nuovi approcci, come focalizzare l'attenzione sugli esiti e sulle competenze nelle discipline che gli studenti possono ottenere in vari pacchetti formativi.

Sintesi

Il presidente Bill Clinton ha detto: "I *community colleges* sono il meglio dell'America". Il college biennale fornisce un accesso senza pari alla formazione post-secondaria di alta qualità all'interno delle comunità dove gli studenti vivono e lavorano. Chi si specializza in matematica iniziando la sua carriera universitaria nei college biennali riceve una formazione matematica di base da docenti dediti all'insegnamento, in piccole classi, con accesso a tecnologie e servizi di sostegno. Il potenziale di reclutamento futuro di specializzandi in matematica proveniente dalla popolazione studentesca dei diversi college biennali non dovrebbe essere sottovalutato. Il documento *Crossroads* della AMATYC illustra il curricolo di corsi di matematica universitaria introduttiva prima del calcolo infinitisimale. Nei college biennali si dovrebbero tenere in debita considerazione gli studenti che intendono insegnare matematica nella scuola secondaria in modo da permettere che ricevano contenuti validi trasmessi usando tecniche pedagogiche efficaci e tecnologia aggiornata. Le partnership con le istituzioni quadriennali sono importanti non solo per un passaggio agevole dei futuri insegnanti di scuola elementare, media e media superiore, ma per tutti gli studenti che si avvalgono della possibilità di trasferimenti. È necessaria una maggiore attenzione alla collaborazione fra le scuole superiori, i college biennali e le istituzioni quadriennali al fine di facilitare ulteriormente i passaggi da un ordine a un altro. Il personale docente dei college biennali deve diventare parte attiva nell'importante discussione e nella successiva formulazione di raccomandazioni per i programmi universitari di matematica.

Materiale consultato

- Sito web dell'American Association of Community Colleges: www.aacc.nche.edu/allaboutcc/snapshot.htm;
- American Mathematical Association of Two-Year Colleges, *CROSSROADS IN MATHEMATICS: Standards for Introductory College Mathematics Before Calculu,* Memphis (Tennessee), 1995;
- American Mathematical Association of Two-Year Colleges, *Strategic Plan for AMATYC 2000-2005: Goals and Objectives,* Memphis (Tennessee), 1999;
- "Casting New Light on Old Notions: A Changong Understanding of Community College Faculty". The Landscape, rivista *Change,* numero di novembre/dicembre 1998, in Tomorrow's Porfessor Listserv, Stanford University Learning Laboratory, http://sll.stanford.edu;
- Davis, T.M. (a cura di), *A Curriculum in Flux: Mathematics at Two-year Colleges,* Mathematical Association of America, Washington DC, 1989;
- Loftsgaarden, Don O., Rung, Donald C. e Watkins, Ann E., *Statistical Abstract of Undergraduate Programs in the Mathematical Sciences in the United States: Fall 1995 CBSM Survey,* Mathematical Association of America, Washington DC, 1997;
- National Center for Education Statistics, *Distance Education at Postsecondary Education Institutions: 1997-98*, NCES 2000-013, Washington DC, 2000;
- National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston (Virginia), 1989;
- National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston (Virginia), 2000;
- National Research Council, *Everybody Counts*, National Academy Press, Washington DC, 1989;
- National Research Council, *Transforming Undergraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology*, National Academy Press, Washington DC, 1999;
- National Science Foundation, *Investing in Tomorrow's Teachers: The Integral Role of Two-Year Colleges in the Science and Mathematics Preparation of FutureTeachers*, NSF 99-49, Arlinton (Virginia), 1999;
- National Science Foundation, *Shaping the Future: New Expectations for Undegraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology*, NSF 96-139, Arlinton (Virginia), 1996;
- Steen, L. A. (a cura di), *Reshaping College Mathematics,* Mathematical Association of America, Washington DC, 1989;
- Virginia Mathematics and Science Coalition, National Alliance of state Science and Mathematics Coalitions, *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations,* 1998.