

Matematica 5

Dipartimento di Matematica



ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [2015-16]



Indice

I	Integrazione	1
1	Integrazione definita	2
1.1	Il problema delle aree	2
1.2	Definizione di integrale	2
1.3	Proprietà dell'integrale definito	6
2	Integrazione indefinita	9
2.1	Generalità	9
2.2	Metodi di Integrazione indefinita	11
2.3	Integrazione immediata	11
2.4	Integrazione per parti	12
2.5	Integrazione per sostituzione	13
2.6	Integrazione per scomposizione	13
2.7	Integrazione delle funzioni razionali fratte	14
2.8	Esercizi	17
3	Applicazioni del calcolo integrale	21
3.1	Calcolo di aree	21
3.2	Lunghezza di un arco di curva	22
3.3	Volume di un solido di rotazione	24
4	Esercizi proposti	26
4.1	Esercizi sul calcolo degli integrali indefiniti	26
4.2	Altri esercizi	27
4.3	Esercizi sul calcolo degli integrali definiti	28
4.4	Esercizi proposti su aree di superfici, lunghezze di archi di curva e volumi di solidi di rotazione	28
5	Integrazione impropria	29
5.1	Generalità	29
5.2	Criteri di integrabilità	32
5.3	Esercizi riassuntivi	34
II	Serie	35
6	Successioni numeriche reali	36
6.1	Generalità	36
6.2	Successioni monotone	37
6.3	Criteri di convergenza	38

6.4	Successioni di funzioni	41
6.5	Convergenza uniforme per successioni di funzioni	42
7	Serie numeriche reali	44
7.1	Generalità	44
7.2	Criterio di convergenza di Cauchy	47
7.3	Serie a termini non negativi	48
7.4	Serie a termini di segno alterno	53
7.5	Proprietà e operazioni sulle serie numeriche	55
7.6	Esercizi riassuntivi	57
8	Serie di funzioni	58
8.1	Generalità	58
8.2	Convergenza uniforme	60
8.3	Convergenza totale	61
9	Serie di potenze	62
9.1	Generalità	62
9.2	Sviluppo in serie di potenze.	63
9.3	Sviluppi notevoli in serie di Taylor	67
9.4	Teoremi di continuità, derivazione e integrazione per serie	70
10	Serie di Fourier	72
10.1	Generalità	72
10.2	Sviluppabilità in serie di Fourier	73
10.3	Serie trigonometriche notevoli	75
10.4	Esercizi riassuntivi	78
III	Equazioni differenziali	79
11	Funzioni di due variabili	80
11.1	Generalità	80
11.2	Derivate parziali	83
11.3	Derivate direzionali	85
11.4	Teorema del differenziale totale	86
12	Generalità sulle equazioni differenziali	89
12.1	Definizioni	89
13	Equazioni del primo ordine	90
13.1	Definizioni	90
13.2	Equazioni a variabili separabili o separate	91
13.3	Equazioni del tipo $y' = f(ax+by)$	92
13.4	Equazioni omogenee	92
13.5	Equazioni lineari	93
13.6	Equazioni di Bernoulli	95
13.7	Equazioni esatte	95
13.8	Equazioni di forma particolare	95

14 Equazioni del secondo ordine	96
14.1 Generalità	96
14.2 Equazioni del tipo $y''=f(x)$	97
14.3 Equazioni del tipo $y''=f(x,y')$	97
14.4 Equazioni lineari a coefficienti costanti	98
14.4.1 Equazioni lineari omogenee	98
14.4.2 Equazioni lineari non omogenee	100
15 Esercizi	103
15.1 Esercizi generali	103
15.2 Esercizi sulle equazioni del primo ordine	104
15.3 Problemi sulle equazioni del primo ordine	105
15.4 Esercizi sulle equazioni del secondo ordine	106
15.5 Problemi sulle equazioni del secondo ordine	107
 IV Contributi	 108

Parte I

Integrazione

Capitolo 1

Integrazione definita

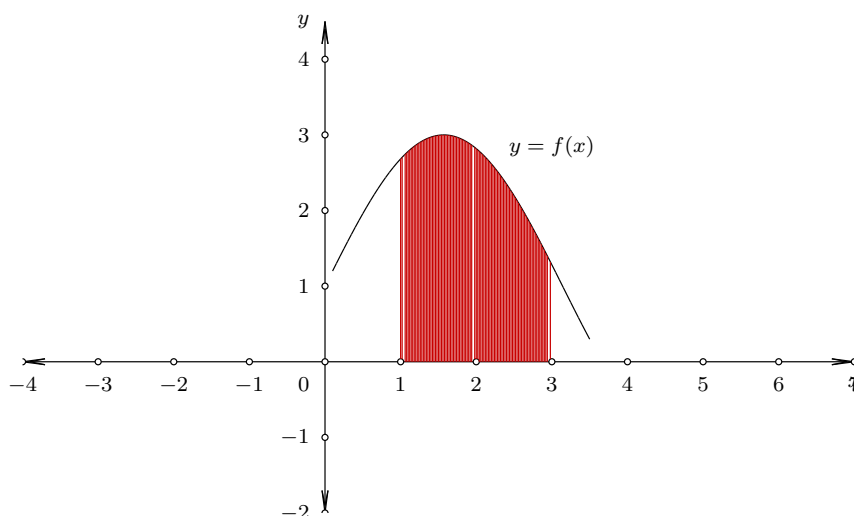
1.1 Il problema delle aree

Il problema che, storicamente, portò per primo al calcolo dell'integrale definito fu quello di calcolare l'area delle superfici piane dal contorno mistilineo. In geometria elementare si riesce a calcolare l'area di un qualsiasi poligono grazie alla teoria dell'equivalenza e dell'equiscomponibilità, ma già quando si passa a definire l'area del cerchio si incontra una certa difficoltà, perchè il cerchio non è equiscomponibile con alcun poligono. Per definire l'area del cerchio, in geometria elementare, si costruiscono i poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti al cerchio; dette s_n e S_n rispettivamente l'area del poligono inscritto e quella del poligono circoscritto, si dimostra che all'aumentare di n le due aree tendono all'area del cerchio. Quanto detto per il cerchio potrà essere generalizzato a superfici piane dal contorno mistilineo.

1.2 Definizione di integrale

Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e supponiamo inizialmente $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Ci proponiamo di calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse x , dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ e dalla curva di equazione $y = f(x)$, detta trapezoide.



A tal fine operiamo una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in un numero finito n di parti uguali di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$ e in ciascun intervallo $I_k = [x_{k-1}; x_k]$ consideriamo il valore minimo m_k ed il valore massimo M_k che la funzione sicuramente assume per il teorema di Weierstrass. Siano s_n ed S_n le somme inferiori e superiori così definite:

$$s_n = \sum_{k=1}^n m_k h = m_1 h + m_2 h + \cdots + m_n h$$

e

$$S_n = \sum_{k=1}^n M_k h = M_1 h + M_2 h + \cdots + M_n h$$

che rappresentano l'area del plurirettangolo inscritto nel trapezoide e l'area del plurirettangolo circoscritto ad esso. Le somme integrali inferiore e superiore si possono, quindi, considerare approssimazioni per difetto e per eccesso della misura dell'area del trapezoide e tali approssimazioni migliorano al crescere del numero n degli intervalli in cui è stato suddiviso $[a, b]$. Si vengono così a costituire due successioni $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.2.1. *Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ le due successioni $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono convergenti e convergono verso lo stesso numero che rappresenta la misura dell'area A del trapezoide:*

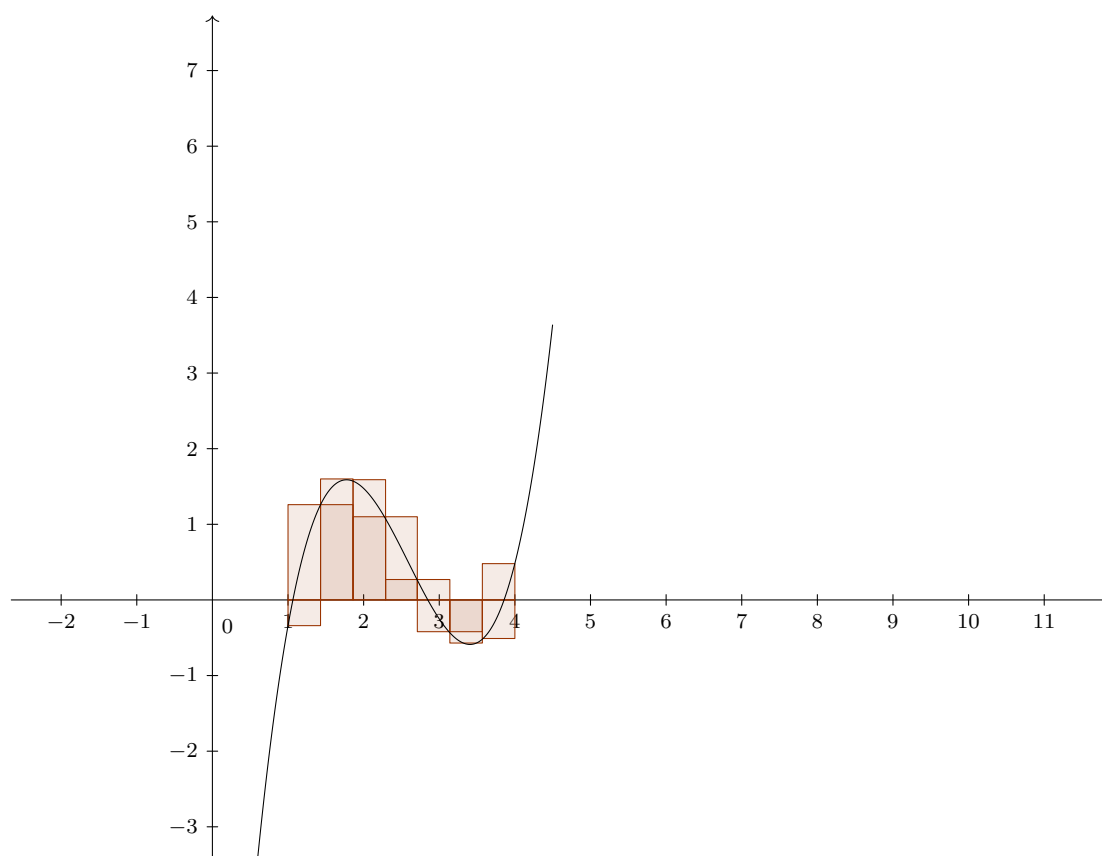
$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Definizione 1.2.1. Si chiama *integrale definito* della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ il valore comune di tali limiti e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x) dx.$$

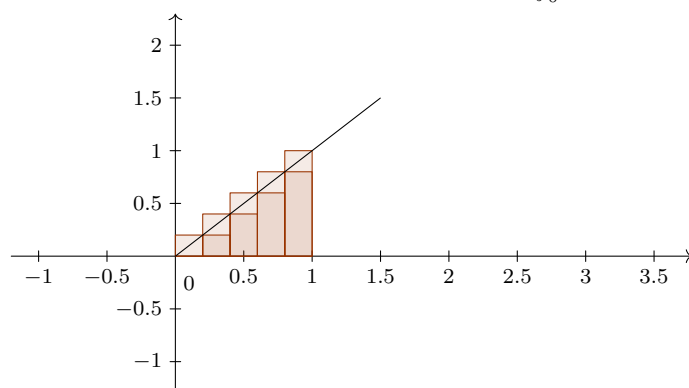
La funzione $f(x)$ si dice *funzione integranda*, la variabile x è detta *variabile di integrazione* e i valori a e b si dicono **estremi di integrazione**.

Le considerazioni fin qui svolte possono essere applicate anche ad una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ ma senza la condizione restrittiva prima posta relativa alla sua positività. La definizione di integrale definito si può usare anche in questa situazione più generale, ma, naturalmente, ad esso non corrisponde più il valore dell'area del trapezoide e quindi viene meno il suo significato geometrico.



Esempio 1.2.1. Calcoliamo

$$\int_0^1 x \, dx$$



Anzitutto suddividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n intervallini di ampiezza $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ i cui estremi saranno

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1$$

Data la crescenza della funzione $f(x) = x$ le somme integrali inferiori e superiori saranno rispettivamente:

$$s_n = m_1 h + m_2 h + \dots + m_n h = 0 \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \frac{1}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} (0 + 1 + \dots + (n-1))$$

$$S_n = M_1 h + M_2 h + \dots + M_n h = \frac{1}{n} \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \frac{1}{n} + \dots + 1 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n)$$

Ricordando la formula di Gauss per la somma dei primi n numeri naturali si può concludere

$$s_n = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$S_n = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Calcolando i limiti di tali successioni per $n \rightarrow +\infty$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

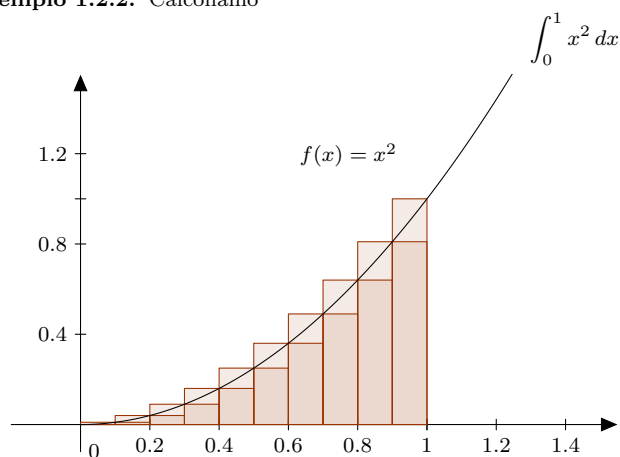
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

I limiti delle successioni delle somme integrali inferiori e superiori, quindi, coincidono e il loro valore comune è l'integrale cercato, cioè:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

L'interpretazione del risultato ottenuto è abbastanza semplice: l'area sottesa dal grafico della funzione di equazione $y = x$ nell'intervallo $[0; 1]$ è quella di un triangolo rettangolo isoscele di base e altezza uguali a 1 e, perciò, misura $\frac{1}{2}$.

Esempio 1.2.2. Calcoliamo



Anzitutto suddividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n intervallini di ampiezza $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ i cui estremi saranno

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1$$

Data la crescenza della funzione $f(x) = x^2$ le somme integrali inferiori e superiori saranno rispettivamente:

$$s_n = m_1 h + m_2 h + \dots + m_n h = 0 \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \frac{1}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} (0 + 1 + \dots + (n-1))$$

$$S_n = M_1 h + M_2 h + \dots + M_n h = \frac{1}{n} \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \frac{1}{n} + \dots + 1 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n)$$

Ricordando la formula di Gauss per la somma dei primi n numeri naturali si può concludere

$$s_n = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$S_n = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Calcolando i limiti di tali successioni per $n \rightarrow +\infty$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

I limiti delle successioni delle somme integrali inferiori e superiori, quindi, coincidono e il loro valore comune è l'integrale cercato, cioè:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

L'interpretazione del risultato ottenuto è abbastanza semplice: l'area sottesa dal grafico della funzione di equazione $y = x$ nell'intervallo $[0; 1]$ è quella di un triangolo rettangolo isoscele di base e altezza uguali a 1 e, perciò, misura $\frac{1}{2}$.

1.3 Proprietà dell'integrale definito

Dalla definizione di integrale definito per una funzione continua discendono alcune importanti proprietà.

Teorema 1.3.1.

$$\int_a^a (f(x)) dx = 0$$

Teorema 1.3.2.

$$\int_a^b (f(x)) dx = - \int_b^a (f(x)) dx$$

Teorema 1.3.3. *L'operatore di integrazione definita è **lineare**, cioè:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b (f(x)) dx + \int_a^b (g(x)) dx \quad (1.1)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b (f(x)) dx \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Teorema 1.3.4. *Data f continua nell'intervallo I , $\forall a, b, c \in I$ vale l'uguaglianza:*

$$\int_a^b (f(x)) dx = \int_a^b (f(x)) dx + \int_b^c (f(x)) dx$$

Teorema 1.3.5 (della media). *Data f continua nell'intervallo $[a, b]$, è sempre possibile determinare un punto c di $[a, b]$ per il quale vale l'uguaglianza:*

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che, fissata una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ in n intervalli parziali, dette s_n e S_n le somme integrali inferiori e superiori, vale la relazione:

$$s_n \leq \int_a^b (f(x)) dx \leq S_n,$$

se consideriamo $n = 1$, indicando con m il minimo di f in $[a, b]$ e con M il suo massimo, ottengo:

$$m(b - a) \leq \int_a^b (f(x)) dx \leq M(b - a)$$

ossia

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b (f(x)) dx \leq M$$

E allora esiste un numero h , compreso tra m e M , tale che

$$h = \frac{1}{b - a} \int_a^b (f(x)) dx$$

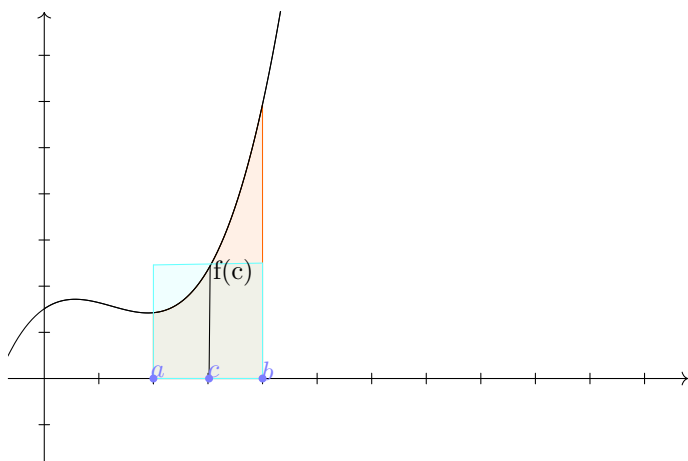
ed essendo f continua in $[a, b]$ esiste sempre un punto c di $[a, b]$ in cui risulta $f(c) = h$, da cui segue che

$$f(c) = h = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) dx)$$

e pertanto

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

□



Definizione 1.3.1. Data la funzione f continua nell'intervallo $[a, b]$, la funzione

$$F(x) = \int_a^x (f(t) dt) \quad \forall x \in [a, b]$$

si dice *funzione integrale* della f in $[a, b]$:

ove abbiamo indicato con t la variabile d'integrazione, affinché non vada confusa con l'estremo superiore x d'integrazione.

Teorema 1.3.6 (fondamentale del calcolo integrale o di Torricelli-Barrow). *Se f è continua in $[a, b]$, allora la sua funzione integrale F è derivabile in ogni punto di $[a, b]$ e si ha:*

$$F'(x) = f(x)$$

Dimostrazione. Calcoliamo $F'(x)$ in base alla definizione:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} (f(x) dx) - \int_a^x (f(x) dx) \right)$$

Per il teorema 1.3.3:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx$$

per il teorema della media si ottiene

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h f(c) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c),$$

essendo c un conveniente punto di $[x, x+h]$.

Ora se, tenendo fisso x , facciamo tendere h a zero il valore di c compreso tra x e $x+h$ tende a x ed essendo f continua risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

e perciò si può concludere:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

□

Per la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

risulta quindi $F'(x) = f(x)$.

Definizione 1.3.2. Tutte le funzioni la cui derivata coincide con $f(x)$ vengono dette *primitive* di $f(x)$.

Corollario al teorema di Torricelli:

Teorema 1.3.7 (formula fondamentale del calcolo integrale). *Detta $\varphi(x)$ una qualsiasi primitiva di $f(x)$ si ha:*

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Dimostrazione. Essendo $F(x)$ e $\varphi(x)$ primitive di una stessa funzione $f(x)$, avremo che $F'(x) - \varphi'(x) = 0$ e quindi esse differiscono per una costante k (corollario del Teorema di Lagrange sulle funzioni derivabili) cioè

$$F(x) = \varphi(x) + k$$

Essendo

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx = 0 = \varphi(a) + k$$

si ricava $k = -\varphi(a)$, e quindi $F(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$. Si può concludere, in particolare, per $x = b$:

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

□

Osservazione. La differenza $\varphi(b) - \varphi(a)$ viene convenzionalmente indicata con la scrittura $[\varphi(x)]_a^b$ e pertanto scriveremo

$$\int_a^b f(x) dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Osservazione. Grazie alla formula fondamentale del calcolo integrale riusciamo a calcolare l'integrale definito senza ricorrere al limite delle somme integrali; il problema viene ricondotto al calcolo di primitive che sarà oggetto dell'integrazione indefinita.

Esercizio 1.3.1. Calcoliamo nuovamente $\int_0^1 x dx$, questa volta usando la formula fondamentale del calcolo integrale.

Una possibile primitiva di $f(x) = x$ è $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, infatti $\varphi'(x) = x$ e quindi:

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 1.3.2. Dopo aver verificato che $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$ è una primitiva della funzione $y = x + 1$ calcolare il valore dell'integrale definito $\int_1^5 (x + 1) dx$

[16]

Capitolo 2

Integrazione indefinita

2.1 Generalità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo sull'asse reale e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale definita su I .

Definizione 2.1.1. Diciamo che una funzione $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una *primitiva* di f in I se

- F è derivabile
- $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Diciamo inoltre che se una funzione ammette primitiva, essa è *integrabile* in I .

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza della primitiva:

Teorema 2.1.1. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$, allora f ammette primitiva su $[a, b]$.

Nel seguito daremo per scontata l'esistenza della primitiva, supponendo che tutte le funzioni considerate siano continue su un opportuno intervallo. Ovviamente, se una funzione ammette una primitiva su $[a, b]$, allora ne ammette infinite: vale infatti il seguente

Teorema 2.1.2. Sia $f(x)$ definita su $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua primitiva su $[a, b]$. Allora tutte e sole le primitive di $f(x)$ su $[a, b]$ sono le funzioni $\varphi(x) = F(x) + c$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante additiva arbitraria.

Dimostrazione. Evidentemente $\varphi(x) = F(x) + c$ è primitiva per $f(x)$ in quanto $\varphi'(x) = F'(x) = f(x)$. Viceversa, se $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ sono due primitive per $f(x)$ su $[a, b]$, si ha che $F_1'(x) = f(x)$ e $F_2'(x) = f(x)$: allora $F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, pertanto per il II corollario al teorema di Lagrange, le due funzioni differiscono per una costante, si ha cioè $F_1(x) = F_2(x) + c$. $\square$

Per esempio, data la funzione $f(x) = \cos x$ definita su $I = \mathbb{R}$, allora una qualunque funzione della forma $F(x) = \sin x + c$ (dove c è una costante pensata come fissata) è anch'essa una primitiva per $f(x)$ in I , in quanto $F(x)$ è derivabile su I e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.1.2. Se $F(x)$ è una primitiva per $f(x)$ sull'intervallo I , allora con la scrittura

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

si indica l'insieme di tutte le primitive di f , essendo c una costante additiva arbitraria, detta *costante d'integrazione*, che penseremo variare nell'insieme dei numeri reali: $c \in \mathbb{R}$.

Gli integrali indefiniti godono delle proprietà enunciate nel seguente teorema, ovvia conseguenza delle analoghe proprietà delle derivate:

Teorema 2.1.3. Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue, $k \in \mathbb{R}$. Allora:

- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

In virtù di tali proprietà si dice che l'operazione di integrazione indefinita (come peraltro quella di derivazione) è lineare.

Osservazione. Dalle considerazioni fin qua esposte si potrebbe pensare che le operazioni di integrazione e di derivazione siano l'una l'inversa dell'altra. Tale affermazione va tuttavia presa con una certa cautela: infatti, data una funzione $f(x)$ derivabile, è sempre possibile associare ad essa la sua derivata $f'(x)$ in modo univoco mentre la totalità delle primitive di $f(x)$, supponendo che tali primitive esistano, è, come si è visto, una famiglia di funzioni dipendenti dal parametro c . In generale, quindi, ad $f(x)$ non può essere associata univocamente una funzione primitiva ma le infinite funzioni $\varphi(x)$ che compaiono nella definizione 2.1.2. L'operazione di derivazione e l'operazione di integrazione indefinita non possono quindi essere *scambiate*, nel senso che l'ordine con cui le due operazioni sono effettuate conduce a risultati differenti: per esempio, data una funzione $f(x)$ che ammetta primitiva e che sia derivabile, si avrà:

$$\int Df(x) dx = \int f'(x) dx = f(x) + c$$

mentre

$$D \int f(x) dx = D[F(x) + c] = F'(x) = f(x)$$

e quindi, in generale:

$$D \int f(x) dx \neq \int Df(x) dx$$

Se le due operazioni fossero una l'inversa dell'altra l'applicazione ad una funzione $f(x)$ della derivazione e successivamente dell'integrazione o viceversa dovrebbero portare allo stesso risultato, ossia a $f(x)$ stessa, il che non è. Il riferimento all'integrazione come *operazione inversa della derivazione* non è quindi da ritenersi corretto.

Osservazione. Il significato della scrittura dx all'interno dell'operatore di integrazione è da ricercarsi nella seguente definizione di differenziale.

Definizione 2.1.3. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile nel generico punto x del suo Dominio, detto Δx l'incremento della variabile indipendente a partire da x , si dice *differenziale* della funzione $f(x)$ nel punto x

$$df(x) = f'(x) \Delta x$$

Dunque il differenziale di una funzione è il prodotto della derivata della funzione stessa per l'incremento arbitrario della variabile indipendente.

Esempio 2.1.1. Data $f(x) = x^2$ si avrà $df(x) = f'(x)\Delta x = 2x\Delta x$.

Esempio 2.1.2. Data $f(x) = x$ si avrà $df(x) = dx = f'(x)\Delta x = 1\Delta x = \Delta x$. Quindi il differenziale della variabile indipendente coincide con l'incremento della stessa.

Come conseguenza la definizione di differenziale viene convenzionalmente scritta nella forma:

$$df(x) = f'(x) dx$$

2.2 Metodi di Integrazione indefinita

In generale non esiste un metodo che consenta di determinare l'integrale indefinito di una qualsiasi funzione continua. Per risolvere un integrale indefinito si adoperano speciali artifici che servono a ricondurre gli integrali dati ad altri noti oppure piu' facilmente calcolabili. I metodi elementari di integrazione indefinita che verranno esposti in questo capitolo sono i seguenti:

- Integrazione immediata
- Integrazione per scomposizione
- Integrazione per parti
- Integrazione per sostituzione

2.3 Integrazione immediata

Come diretta conseguenza dei teoremi sulle derivate delle funzioni elementari, alcune funzioni possono essere integrate immediatamente: tali casi sono riassunti nella seguente tabella.

$\int x^\alpha dx$	$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$= \tan x + c$
$\int \frac{1}{x} dx$	$= \ln x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$= -\cot x + c$
$\int \sin x dx$	$= -\cos x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$= \arcsin x + c$
$\int \cos x dx$	$= \sin x + c$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} dx$	$= \sqrt{x^2+a} + c$
$\int e^x dx$	$= e^x + c$	$\int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}} dx$	$= -\sqrt{a-x^2} + c$
$\int a^x dx$	$= \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx$	$= \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$
$\int \sqrt{x} dx$	$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$	$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$	$= \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	$= 2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$	$= \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + c$
$\int \frac{1}{x^2} dx$	$= -\frac{1}{x} + c$	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$= \ln \left \tan \frac{x}{2} \right + c$
$\int \tan x dx$	$= -\ln \cos x + c$	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$= \ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + c$
$\int \cot x dx$	$= \ln \sin x + c$	$\int \sin^2 x dx$	$= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$	$= \arcsin \frac{x}{ a } + c$	$\int \cos^2 x dx$	$= \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$= \arctan x + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx$	$= \frac{1}{2} (a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2-x^2}) + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$	$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$		

2.4 Integrazione per parti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue come pure le loro derivate. Dalla regola di derivazione del prodotto di funzioni si ha che

$$d(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

ossia

$$f'(x)g(x)dx = d(f(x)g(x)) - f(x)g'(x)dx$$

Integrando ambo i membri dell'uguaglianza si ottiene

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

detta formula di integrazione per parti.

Osservazione. Il fattore $f'(x)dx$ si dice *fattore differenziale* mentre il fattore $g(x)$ si chiama *fattore finito*.

Esempio 2.4.1. Calcoliamo $\int xe^x dx$. Applicando la regola di integrazione per parti poniamo come fattore finito $g(x) = x$ e di conseguenza $g'(x) = 1$ mentre come fattore differenziale $f'(x)dx = e^x dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = e^x$

Pertanto

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Esempio 2.4.2. Calcoliamo $\int \ln(x) dx$. Applicando la regola di integrazione per parti poniamo come fattore finito $g(x) = \ln(x)$ e di conseguenza $g'(x) = \frac{1}{x}$ mentre come fattore differenziale $f'(x)dx = 1 dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = x$

Pertanto

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + c$$

Esempio 2.4.3. Calcoliamo $\int x^2 e^x dx$. Applicando la regola di integrazione per parti poniamo come fattore finito $g(x) = x^2$ e di conseguenza $g'(x) = 2x$ mentre come fattore differenziale $f'(x)dx = e^x dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = e^x$

Pertanto

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Per risolvere quest'ultimo integrale è necessario riapplicare la regola di integrazione per parti. Questo integrale è stato risolto nell'esempio 3.3.1 e pertanto sostituendolo otteniamo

$$= x^2 e^x - 2[xe^x - e^x] + c = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Esempio 2.4.4 (Esempio particolarmente significativo di integrazione per parti). Calcoliamo $\int e^x \sin x dx$. Applicando la regola di integrazione per parti poniamo come fattore finito $g(x) = \sin x$ e di conseguenza $g'(x) = \cos x$ mentre come fattore differenziale $f'(x)dx = e^x dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = e^x$

Pertanto

$$\int e^x \sin x dx = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx$$

Per risolvere quest'ultimo integrale è necessario riapplicare la regola di integrazione per parti e pertanto poniamo come fattore finito $g(x) = \cos x$ e di conseguenza $g'(x) = -\sin x$ mentre come fattore differenziale $f'(x)dx = e^x dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = e^x$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \sin x e^x - \left[\cos x e^x - \int -\sin x e^x dx \right] = \\ &= \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx \end{aligned}$$

ritrovando così l'integrale da calcolare. Isolando l'integrale incognito a sinistra otteniamo:

$$2 \int e^x \sin x dx = \sin x e^x - \cos x e^x$$

e quindi:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}[\sin x e^x - \cos x e^x] + c = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

2.5 Integrazione per sostituzione

In alcuni casi è utile introdurre sotto il segno di integrale una variabile ausiliaria al fine di ottenere un integrale più semplice da calcolare.

Supponiamo di dover calcolare $\int f(x) dx$; scelta allora una opportuna funzione derivabile con derivata continua $x = g(t)$ ed invertibile (cioè tale che esista $t = g^{-1}(x)$), si consideri l'integrale così ottenuto:

$$\int f[g(t)]g'(t) dt$$

Se $G(t)$ è una primitiva di $g(t)$, cioè $G'(t) = g(t) \forall t$, allora la funzione composta $G[g^{-1}(x)]$ è una primitiva di $f(x)$

Esempio 2.5.1. Calcoliamo $\int \sqrt{2x-4} dx$. Posto, per ogni x appartenente al Dominio della funzione integranda, $t = 2x-4$ si ricava $x = \frac{t+4}{2}$, funzione continua con derivata continua, da cui $dx = \frac{1}{2} dt$. Sostituendo nell'integrale dato si ottiene:

$$\int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \int t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dt =$$

in base alla tabella degli integrali immediati

$$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + c$$

Ricordando che $t = 2x - 4$ allora

$$\int \sqrt{2x-4} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(2x-4)^3} + c$$

Da quanto detto si possono dedurre generalizzazioni degli integrali riportati nella tabella degli integrali immediati, come evidenzia la seguente ulteriore tabella

$$\begin{array}{ll} \int f^\alpha(x) f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c & \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\} \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c & \\ \int \sin f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + c & \end{array} \quad \begin{array}{l} \int \cos f(x) f'(x) dx = \sin f(x) + c \\ \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c \\ \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \end{array}$$

Infatti se, per esempio, nella prima delle generalizzazioni proposte si applica il metodo di sostituzione ponendo $f(x) = t$ e quindi $f'(x) dx = dt$ si ottiene $\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ e risostituendo $\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$.

Esempio 2.5.2. Calcoliamo $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

Facendo riferimento alla tabella degli integrali generalizzati si conclude che:

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$

2.6 Integrazione per scomposizione

Come abbiamo già detto, il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione non è sempre immediato. Ad esempio si può trasformare opportunamente la funzione integranda applicando regole di calcolo già acquisite. Chiariamo con alcuni esempi i procedimenti da seguire:

Esempio 2.6.1. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x}} dx \\
 & \int \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{4x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 & = 3 \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx + 4 \int \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} dx + \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx \\
 & = 3 \int x^{\frac{3}{2}} dx + 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 & = 3 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 4 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\
 & = 3 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 4 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
 & = \frac{6}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{8}{3} x \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + c
 \end{aligned}$$

Esempio 2.6.2. Calcoliamo $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \int \left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \right] dx \\
 &= \arctan x + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \arctan x + \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c
 \end{aligned}$$

Esempio 2.6.3. Calcoliamo $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\
 &= \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + c
 \end{aligned}$$

2.7 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Particolare attenzione va posta nell'integrazione delle funzioni razionali fratte. Per integrare queste funzioni si ricorre al metodo di scomposizione in modo da ottenere funzioni razionali fratte più semplici. Chiariamo il metodo con alcuni esempi e a tale scopo distinguiamo i casi a seconda della scomposizione del denominatore della funzione razionale fratta *propria* (cioè quando il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore)

$$\frac{M(x)}{N(x)}$$

RADICI REALI SEMPLICI

Teorema 2.7.1. Supponiamo che, data una funzione razionale fratta propria $\frac{M(x)}{N(x)}$, il suo denominatore $N(x)$ sia un polinomio di grado n e che l'equazione $N(x) = 0$ abbia n radici reali distinte $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Allora è sempre possibile determinare univocamente n costanti $A, B, C, \dots, N$ in modo tale che valga la seguente identità:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_3)} + \dots + \frac{N}{(x-x_n)}$$

Esempio 2.7.1. Calcoliamo $\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6} dx$. Consideriamo l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$, essa ha due radici reali e distinte (facilmente calcolabili) $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, pertanto

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

dove A e B sono due opportune costanti da determinare. Riducendo a denominatore comune risulta

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} = \frac{x(A+B)-3A-2B}{(x-2)(x-3)}$$

e per il principio di identità polinomiale che afferma che due polinomi sono identici se e solo se i coefficienti dei termini aventi il medesimo grado sono uguali, si ottiene il seguente sistema :

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -3A-2B=4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite A e B si ricava facilmente che $A = -10$ e $B = 13$. Pertanto

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6} = \frac{-10}{x-2} + \frac{13}{x-3}$$

e quindi

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6} dx = \int \left(\frac{-10}{x-2} + \frac{13}{x-3} \right) dx = -10 \ln |x-2| + 13 \ln |x-3| + c$$

Esempio 2.7.2. Calcoliamo $\int \frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3} dx$. Consideriamo l'equazione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, usando il raccoglimento parziale si scompone in $(x^2-1)(x-3) = 0$ e quindi $(x-1)(x+1)(x-3) = 0$ e pertanto le sue radici sono $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 3$, pertanto

$$\frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

dove A, B e C sono tre opportune costanti da determinare. Riducendo a denominatore comune risulta

$$\frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-3)} =$$

dopo semplici passaggi

$$= \frac{x^2(A+B+C)+x(-2A-4B)-3A+3B-C}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

e per il principio di identità polinomiale si ha:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ -2A-4B=-16 \\ -3A+3B-C=4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite A, B e C si ricava facilmente che $A = 2$, $B = 3$ e $C = -1$. Pertanto

$$\frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{-1}{x-3}$$

e quindi

$$\int \frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{-1}{x-3} \right) dx = 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x+1| - \ln |x-3| + c$$

RADICI REALI MULTIPLE

Teorema 2.7.2. Supponiamo che data una funzione razionale propria $\frac{M(x)}{N(x)}$ il suo denominatore $N(x)$ sia un polinomio di grado n e si supponga, per semplicità, che $N(x)$ ammetta uno zero r -uplo x_0 e $p = r - n$ zeri semplici $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Allora è sempre possibile determinare univocamente $r + p$ costanti $A, B, C, \dots, V$ in modo tale che valga la seguente identità:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3} + \dots + \frac{M}{(x-x_0)^r} + \frac{N}{(x-x_1)} + \frac{P}{(x-x_2)} + \dots + \frac{V}{(x-x_p)}$$

Esempio 2.7.3. Calcoliamo $\int \frac{2x^2-1}{x^3-3x+2} dx$. Consideriamo l'equazione $x^3-3x+2=0$, usando la regola di Ruffini si ottiene che $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ e pertanto

$$\frac{2x^2-1}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

dove A, B e C sono tre opportune costanti da determinare. Riducendo a denominatore comune risulta

$$\frac{2x^2-1}{x^3-3x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} =$$

dopo semplici passaggi

$$= \frac{x^2(A+C) + x(A+B-2C) + 2A-2B-C}{(x-1)^2(x+2)}$$

e per il principio di identità polinomiale si ha:

$$\begin{cases} A+C=2 \\ A+B-2C=0 \\ 2A-2B-C=1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite A, B e C si ricava facilmente che $A = \frac{11}{9}$, $B = \frac{1}{3}$ e $C = \frac{7}{9}$.
Pertanto

$$\frac{2x^2-1}{x^3-3x+2} = \frac{\frac{11}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{7}{9}}{x+2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-1}{x^3-3x+2} dx &= \int \left(\frac{\frac{11}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{7}{9}}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{11}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \int (x-1)^{-2} dx + \frac{7}{9} \ln|x+2| \\ &= \frac{11}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{7}{9} \ln|x+2| + c \end{aligned}$$

RADICI COMPLESSE SEMPLICI

Teorema 2.7.3. Supponiamo che data una funzione razionale propria $\frac{M(x)}{N(x)}$ il suo denominatore $N(x)$ sia un polinomio di grado n e si supponga, per semplicità, che $N(x)$ ammetta uno zero complesso semplice (l'equazione $ax^2+bx+c=0$ abbia $\Delta < 0$) e $n-2$ zeri semplici $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$.

Allora è sempre possibile determinare univocamente n costanti A, B, C,, N in modo tale che valga la seguente identità:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{L}{x-x_{n-2}} + \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Esempio 2.7.4. Calcoliamo $\int \frac{2x-1}{x^3-x^2+x-1} dx$. Consideriamo l'equazione $x^3-x^2+x-1=0$, usando la regola del raccoglimento parziale si ottiene che $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ e pertanto

$$\frac{2x-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

dove A, B e C sono tre opportune costanti da determinare. Riducendo a denominatore comune risulta dopo semplici passaggi

$$= \frac{x^2(A+B) + x(-B+C) + A-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

e per il principio di identità polinomiale si ha:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=2 \\ A-C=-1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite A, B e C si ricava facilmente che $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ e $C = \frac{3}{2}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x-1}{x^3-x^2+x-1} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 3 \arctan x \right) + c
 \end{aligned}$$

Esempio 2.7.5. Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$.

Poichè il polinomio x^2+x+1 è irriducibile (questo si verifica in tutti i casi di trinomio di secondo grado con $\Delta < 0$) si può dimostrare che è esprimibile come somma di due quadrati. Nel nostro caso, per esempio, avremo:

$$x^2+x+1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Cercando di ricondurci all'integrale immediato $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$, si avrà:

$$\int \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{1}{\frac{3}{4} \left[\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + 1 \right]} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]^2 + 1} dx$$

e, ponendo $\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = t$, cioè $x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}$ e $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$ otteniamo

$$\frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan t + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] + c$$

2.8 Esercizi

Esercizio 2.8.1. Calcolare utilizzando integrali immediati, formule elementari e formule generalizzate (o sostituzione di differenziale).

1. $\int 5a^2 x^6 dx$
2. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx$
3. $\int x(x+a)(x+b) dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2 + 7}$
5. $\int (a + bx^3)^2 dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$
7. $\int \tan^2 x dx$
8. $\int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx$
9. $\int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx$
10. $\int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx$
11. $\int \frac{x}{a + bx} dx$
12. $\int \frac{x}{(x + 1)^2} dx$
13. $\int \sqrt{a - bx} dx$
14. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$
15. $\int \frac{dx}{3x^2 + 5}$
16. $\int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4 + x^2} dx$
17. $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4} dx$
18. $\int \frac{3x + 1}{\sqrt{5x^2 + 1}} dx$
19. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
20. $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$
21. $\int \tan x dx$
22. $\int \cot x dx$
23. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
24. $\int \sin^2 x dx$
25. $\int \cos^2 x dx$
26. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$
27. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx$
28. $\int x \sqrt[5]{5 - x^2} dx$

Esercizio 2.8.2. Calcolare i seguenti integrali utilizzando anche il metodo di sostituzione.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}, \quad x = \frac{1}{t}$
2. $\int \frac{dx}{e^{x+1}}, \quad x = -\ln t$
3. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx, \quad t = \sin x$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad t = \sqrt{x+1}$
5. $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx$
6. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

9. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} dx$

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Esercizio 2.8.3. Calcolare i seguenti integrali utilizzando anche il metodo per parti.

1. $\int \ln x dx$

2. $\int \arctan x dx$

3. $\int \arcsin x dx$

4. $\int x \sin x dx$

5. $\int x \cos 3x dx$

6. $\int \frac{x}{e^x} dx$

7. $\int x^2 e^{3x} dx$

8. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$

9. $\int x \sin x \cos x dx$

10. $\int x^2 \ln x dx$

11. $\int \ln^2 x dx$

12. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

13. $\int x \arcsin x dx$

14. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

15. $\int x \arctan x dx$

16. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$

17. $\int e^x \sin x dx$

18. $\int \sin(\ln x) dx$

19. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

20. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

Esercizio 2.8.4. Calcolare i seguenti integrali in cui compaiono particolari trinomi di secondo grado.

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

2. $\int \frac{xdx}{x^2 - 7x + 13}$

3. $\int \frac{x^2}{x^2 - 6x + 10} dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

5. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$

6. $\int \sqrt{x-x^2} dx$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

8. $\int \frac{x}{x^4 - 4x^2 + 3} dx$

Esercizio 2.8.5. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte.

$$1. \quad \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$3. \quad \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$$

$$4. \quad \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$5. \quad \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

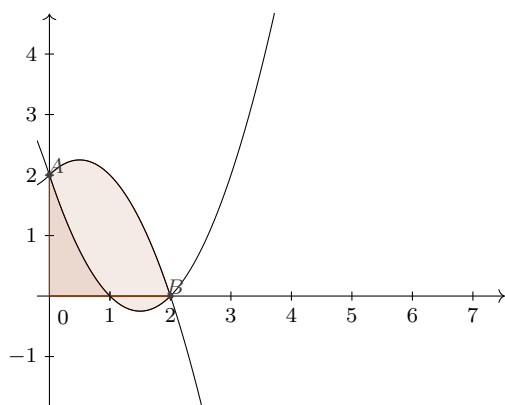
Capitolo 3

Applicazioni del calcolo integrale

3.1 Calcolo di aree

L'interpretazione geometrica dell'integrale definito suggerisce un' immediata applicazione al calcolo di aree di trapezoidi. L'integrale definito si presta, però, anche a determinare l'area di una qualunque superficie piana, limitata da una curva definita attraverso due funzioni $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$.

Esempio 3.1.1. Trovare l'area della regione di piano limitata dalle due parabole di equazioni: $y = x^2 - 3x + 2$ e $y = -x^2 + x + 2$



Dal grafico delle due parabole si deduce che esse hanno in comune i due punti $A(2, 0)$ e $B(0, 2)$. Usando i trapezoidi dobbiamo suddividere la regione di piano in

$$\int_0^1 (-x^2 + x + 2) dx - \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + x + 2) dx + \left(- \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right)$$

Applicando allora le proprietà dell'integrale definito l'espressione si può sintetizzare in

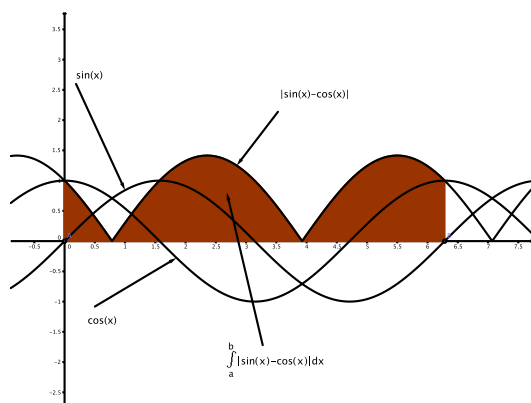
$$\begin{aligned} \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx - \int_0^2 (x^2 - 3x + 2) dx &= \int_0^2 (-x^2 + x + 2 - x^2 + 3x - 2) dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Dall'esempio si deduce che l'area di una superficie S limitata da una curva definita attraverso due funzioni continue $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ che si intersecano in due punti A e B di relative ascisse a e b e tali che nell'intervallo $[a, b]$ sia $f_1(x) \geq f_2(x)$ è, in ogni caso:

$$\text{area } S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

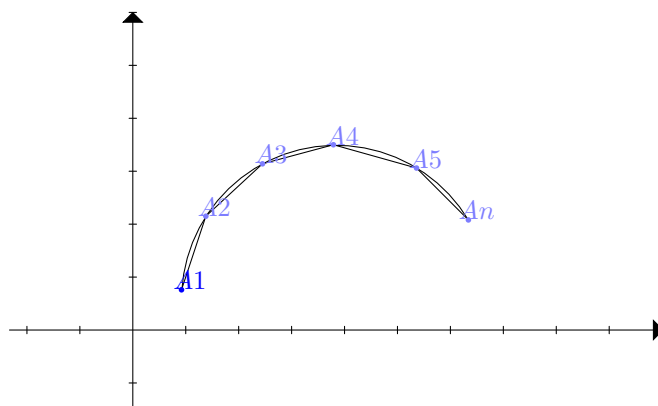
Esercizio 3.1.1. Proponiamo, a titolo di esercizio, il seguente problema: dimostrare che se due curve - diciamo $f_1(x)$ e $f_2(x)$ - si intersecano in modo da essere a volte una sopra l'altra, a volte una sotto l'altra, allora la somma delle aree delimitate dalle curve e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$ è data da:

$$\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$



La figura a lato esemplifica il significato del teorema.

3.2 Lunghezza di un arco di curva



L'idea di approssimare una figura curvilinea con rettangoli può essere applicata anche ad una curva approssimandola con una spezzata (vedi figura). La lunghezza della spezzata sarà una approssimazione della lunghezza della curva e aumentando il numero dei segmenti della spezzata otteniamo una sempre migliore approssimazione della lunghezza vera della curva. Possiamo allora *definire* come lunghezza della curva il limite della lunghezza della spezzata al tendere a 0 della lunghezza del segmento più lungo. In questo caso la curva si dirà *rettificabile*.

Supponiamo che la curva sia parte del grafico di una funzione $y = f(x)$, con derivata continua, compreso fra i punti A_1 e A_n e indichiamo con $x_1, x_2, \dots, x_n$ le ascisse degli estremi dei segmenti della spezzata; poniamo inoltre $y_i = f(x_i)$. In queste ipotesi vedremo che la curva compresa fra i punti A_1 e A_n è rettificabile e la sua misura si ottiene mediante un integrale definito.

La misura del generico segmento di spezzata risulta essere:

$$s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

e quindi la lunghezza della spezzata:

$$s = \sum_{i=2}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_{i=2}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Applicando il teorema di Lagrange nell'intervallo (x_i, x_{i-1}) otteniamo:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{con } x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

la lunghezza del singolo segmento risulta quindi:

$$s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1}) \quad \text{tenendo presente che } x_i > x_{i-1}$$

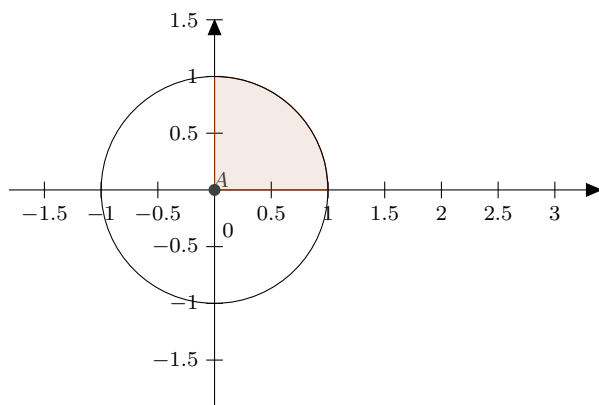
e per la lunghezza della spezzata:

$$s = \sum_{i=2}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1})$$

passando al limite per $n \mapsto +\infty$ o per la massima lunghezza del segmento che tende a 0:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad \text{avendo posto } a = A_1 \quad \text{e } b = A_n$$

Esempio 3.2.1. Calcolare la lunghezza di una circonferenza di raggio 1.



Per semplicità, possiamo pensare che la circonferenza sia centrata nell'origine degli assi; calcoliamo la lunghezza di un quarto di circonferenza superiore e poi moltiplichiamo per 4.

L'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 = 1$, esplicitando rispetto a y otteniamo $y = \sqrt{1 - x^2}$ e quindi $y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; il quarto di circonferenza è rappresentato dal grafico della funzione nell'intervallo $[0, 1]$ che sarà il nostro dominio di integrazione:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx$$

vale a dire

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = [\arcsin x]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi moltiplicando per 4

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$$

un valore già noto dalla geometria elementare.

Esercizio 3.2.1. Sviluppare i calcoli nel caso la circonferenza abbia raggio r e centro nell'origine (in questo caso l'equazione della circonferenza diventa $x^2 + y^2 = r^2$).

Esercizio 3.2.2. Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = 2\sqrt{x}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

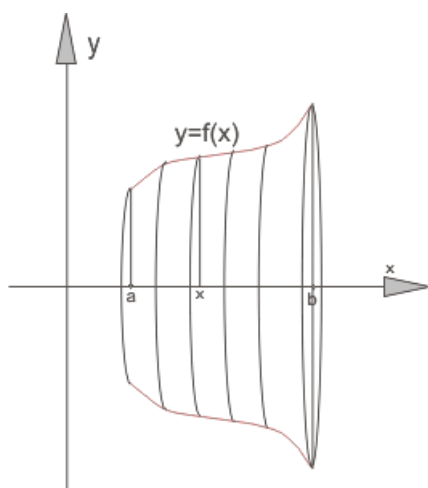
Esercizio 3.2.3. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $y = e^x$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Esercizio 3.2.4. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $y = \ln(x)$ nell'intervallo $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

3.3 Volume di un solido di rotazione

Il volume di un solido, ancora in analogia con il calcolo dell'area di una superficie, può essere calcolato sommando il volume di sottili fettine in cui lo si è suddiviso; evidentemente il calcolo sarà esatto a condizione che il volume di ciascuna fettina sia corretto e questo è il problema: una singola fettina può essere pensata come un cilindretto di base irregolare e altezza molto piccola; in tale approssimazione si commette un errore che verrà azzerato se pensiamo di tagliare infinite fettine di spessore infinitesimo; resta il problema del calcolo dell'area di base che, in generale, sarà delimitata da una curva chiusa irregolare e questo è il problema risolto dall'integrale definito – a condizione che la curva irregolare sia integrabile –. Riassumendo: per calcolare il volume di un solido lo si suddivide in tante piccole sezioni la cui area si calcola con una integrazione indefinita (ovviamente dipendente da un parametro) e poi si passa al limite per il numero di sezioni tendente all'infinito della somma dei volumi di tutte le sezioni.

Sembra molto semplice e lo è a patto che le funzioni che definiscono le curve contorno delle sezioni siano esprimibili analiticamente e integrabili e questo non si verifica frequentemente. In un caso però il calcolo è semplice perché le sezioni sono cerchi la cui area si calcola anche senza integrazione: è il caso in cui il solido è ottenuto da una rotazione completa di una curva attorno ad un asse, in questo caso lo chiameremo *solido di rotazione*.



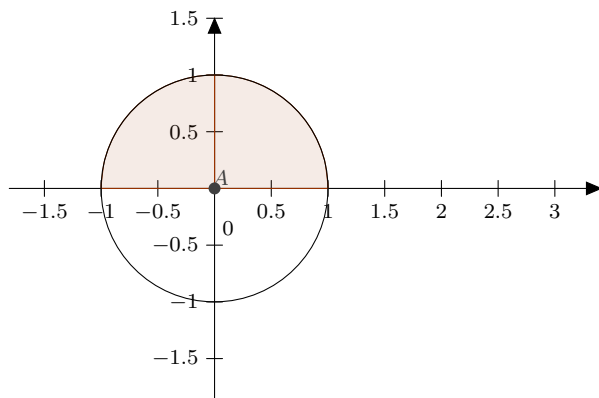
Supponiamo che il solido sia generato dalla rotazione della porzione di grafico della funzione $y = f(x)$ compresa fra le ascisse a e b attorno all'asse x . Una sezione trasversale è un cerchio di raggio $f(x)$ che avrà area:

$$A(x) = \pi f^2(x)$$

sommando tutte le sezioni e passando al limite avremo, per il volume del solido:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Esempio 3.3.1. Calcolare il volume della sfera di raggio 1.



Per semplicità, possiamo pensare che la sfera sia centrata nell'origine degli assi; facciamo ruotare la semicirconferenza positiva attorno all'asse x di un angolo giro ottenendo la sfera cercata; come in un esercizio precedente, l'equazione della semicirconferenza è $y = \sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Per la formula vista in precedenza otteniamo:

$$V = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx$$

vale a dire

$$V = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) = \pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi$$

un valore già noto dalla geometria elementare.

Esercizio 3.3.1. Sviluppare i calcoli nel caso la sfera abbia raggio r e centro nell'origine.

Esercizio 3.3.2. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione di una semionda della sinusoide $y = \sin x$ nell'intervallo $[0, \pi]$ attorno all'asse x .

Esercizio 3.3.3. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione attorno all'asse x dalla figura determinata dall'asse x e dalla parabola $y = x - x^2$.

Esercizio 3.3.4. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione attorno all'asse x dalla figura determinata dall'asse x e dalla parabola $y = ax - x^2$ con $a > 0$.

Esercizio 3.3.5. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x dalla figura delimitata dai grafici delle funzioni x e x^2 .

Esercizio 3.3.6. Calcolare il volume dell'*elissoide di rivoluzione*, vale a dire il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x della parte positiva dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Capitolo 4

Esercizi proposti

4.1 Esercizi sul calcolo degli integrali indefiniti

Esercizio 4.1.1. Calcolare gli integrali

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{e^{2x} + 4e^x}{e^{2x} + 1} dx$ | 2. $\int \frac{x^2 - 3x}{(x-1)^2(x+1)} dx$ |
| 3. $\int \frac{x}{x^2 - 5} dx$ | 4. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ |
| 5. $\int 2x \ln(x^2) dx$ | 6. $\int \arctan \sqrt{x} dx$ |
| 7. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$ | 8. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$ |
| 9. $\int \frac{2x}{8x^2 + 1} dx$ | 10. $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} dx$ |
| 11. $\int \frac{e^x \sqrt{1 - e^x}}{e^x - 2} dx$ | 12. $\int \frac{\ln x \sqrt{\ln x - 1}}{x(\ln x + 1)} dx$ |
| 13. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$ | 14. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 5x}} dx$ |
| 15. $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$ | 16. $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}} dx$ |
| 17. $\int \frac{e^{\tan x} - 1}{\cos^2 x} dx$ | 18. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} \ln^2 \sqrt{x+1}} dx$ |
| 19. $\int (\sqrt{x^2 + 1} - x^2) dx$ | 20. $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}} dx$ |

4.2 Altri esercizi

Esercizio 4.2.1. Calcolare gli integrali

1. $\int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$
3. $\int \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}} dx$
4. $\int \frac{a^x}{b^x} dx$
5. $\int \tan^2 x dx$
6. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$
8. $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$
9. $\int e^x \sin e^x dx$
10. $\int x e^{-x^2} dx$
11. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
12. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$
13. $\int e^{e^x} e^x dx$
14. $\int x \sqrt{1 - x^2} dx$
15. $\int \ln(\cos x) \tan x dx$
16. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$
17. $\int x^2 e^x dx$
18. $\int x^3 e^{x^2} dx$
19. $\int x^2 \sin x dx$
20. $\int e^{ax} \sin bx dx$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$
22. $\int \sqrt{1 - x^2} dx$
23. $\int \sqrt{1 + x^2} dx$
24. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$
26. $\int \frac{4^x + 1}{2^x + 1} dx$
27. $\int \arcsin \sqrt{x} dx$
28. $\int \frac{x}{1 + \sin x} dx$
29. $\int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} dx$
30. $\int \sin^3 x dx$
31. $\int \arctan \sqrt{x} dx$
32. $\int \sin \sqrt{x+1} dx$

Esercizio 4.2.2. Fra le primitive della funzione $y = f(x) = x \arctan(1 + \sqrt{1 - x^2})$ determinare quella passante per il punto $A = (1; 3/2)$

4.3 Esercizi sul calcolo degli integrali definiti

Esercizio 4.3.1. Calcolare gli integrali

1. $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$
3. $\int_1^4 \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx$
5. $\int_0^1 (x + 1) \ln(1 + x^2) dx$
6. $\int_{-3}^3 \ln(1 + |x|) dx$
7. $\int_0^1 (3\sqrt{x} + 2) \arctan \sqrt{x} dx$

4.4 Esercizi proposti su aree di superfici, lunghezze di archi di curva e volumi di solidi di rotazione

Esercizio 4.4.1. Calcolare l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola $y = 2x^2 - 4x + 1$ e dalla retta $y = 3$

Esercizio 4.4.2. Determinare l'area della regione di piano finita individuata dall'iperbole di equazione $y = \frac{2}{x}$ e dalla parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 4$

Esercizio 4.4.3. Data la funzione $y = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ definita in $[2; 3]$, si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di un giro completo attorno all'asse delle ascisse del relativo grafico.

Esercizio 4.4.4. Dopo aver rappresentato il grafico della funzione $y = \sqrt{(x + 1)^3}$, determinare la lunghezza dell'arco compreso fra i punti di ascissa $a = -1$ e $b = 0$.

Esercizio 4.4.5. Dopo aver rappresentato il grafico della funzione $y = \sqrt{(x + 1)^3}$, determinare la lunghezza dell'arco compreso fra i punti di ascissa $a = -1$ e $b = 0$.

Capitolo 5

Integrazione impropria

5.1 Generalità

Abbiamo definito $\int_a^b f(x) dx$ nelle ipotesi di $f(x)$ continua in $[a, b]$. Viene spontaneo chiedersi se la definizione può essere generalizzata al caso di una funzione discontinua.

Definizione 5.1.1. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b - \epsilon]$ $\forall \epsilon > 0$; se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx \quad \text{esiste, finito}$$

allora si dice che $f(x)$ è *integrabile* in $[a, b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

Analogamente se $f(x)$ è continua in $[a + \epsilon, b]$ $\forall \epsilon > 0$

In questi casi si dice che $\int_a^b f(x) dx$ *converge*.

Esempio 5.1.1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\arcsin(1-\epsilon)] = \frac{\pi}{2}$$

esiste finito e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 5.1.2 (Di importanza fondamentale).

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

Se $p = 1$ allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\ln |x|]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\ln 1 - \ln \epsilon] = +\infty$$

Quindi $\frac{1}{x}$ non è integrabile in $[0, 1]$, si dice che $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ diverge a $+\infty$.

Se $p \neq 1$ allora

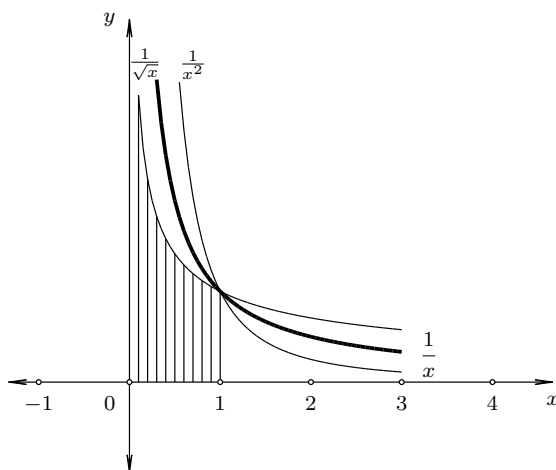
$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-p} - \frac{\epsilon^{1-p}}{1-p} \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{se } 1-p > 0 \\ +\infty & \text{se } 1-p < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nel primo caso ($p < 1$) si dice che l'integrale *converge* a $\frac{1}{1-p}$; nel secondo caso ($p > 1$) si dice che *diverge* a $+\infty$.

Concludendo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{se } p < 1 \\ \text{non esiste e diverge a } +\infty & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$

Geometricamente



L'area compresa fra la funzione, l'asse y , la retta $x = 1$ e l'asse x è finita $\Leftrightarrow p < 1$.

Esempio 5.1.3. $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\cos \frac{1}{x} \right]_{\epsilon}^{\frac{2}{\pi}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[-\cos \frac{1}{\epsilon} \right] = \text{non esiste}$$

In questo caso la funzione non è integrabile in $[0, \frac{2}{\pi}]$; si dice anche che l'integrale *non converge*.

Generalizziamo ora al caso di un intervallo illimitato.

Definizione 5.1.2. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, M]$ $\forall M > a$; se

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx \quad \text{esiste, finito}$$

allora si dice che $f(x)$ è *integrabile* in $[a, +\infty]$ e si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

In questi casi si dice che $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *converge*.

Analogamente se $f(x)$ è continua in $[N, a]$ $\forall N < a$.

Esempio 5.1.4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} [\arctan M] = \frac{\pi}{2} \text{ esiste finito.}$$

Allora $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

Esempio 5.1.5. $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$\lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^0 x e^{-x^2} dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_N^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M x e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^M = \frac{1}{2}$$

Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Esempio 5.1.6 (Di importanza fondamentale).

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

Se $p = 1$ allora

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} [\ln M - \ln 1] = +\infty$$

Quindi $\frac{1}{x}$ non è integrabile in $[1, +\infty]$; si dice che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ *diverge* a $+\infty$.

Se $p \neq 1$ allora

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-p} M^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{1-p} & \text{se } 1-p < 0 \\ +\infty & \text{se } 1-p > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nel primo caso ($p > 1$) si dice che l'integrale *converge* a $\frac{1}{1-p}$; nel secondo caso ($p < 1$) si dice che *diverge* a $+\infty$.

Concludendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \\ \text{non esiste e diverge a } +\infty & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

5.2 Criteri di integrabilità

Teorema 5.2.1 (Primo criterio). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative e continue in $[a, b - \epsilon] \forall \epsilon > 0$ e e , inoltre, $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b - \epsilon]$ e se $\int_a^b g(x) dx$ converge, allora $\int_a^b f(x) dx$ converge; se $\int_a^b f(x) dx$ diverge allora $\int_a^b g(x) dx$ diverge.*

Teorema 5.2.2 (Secondo criterio). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative e continue in $[a, b - \epsilon] \forall \epsilon > 0$ e se, inoltre, $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$ allora si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono asintotiche per $x \rightarrow b^-$ e $\int_a^b f(x) dx$ converge (o diverge) $\iff \int_a^b g(x) dx$ converge (o diverge).*

Analogamente per gli intervalli illimitati.

Teorema 5.2.3 (Terzo criterio). *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b - \epsilon] \forall \epsilon > 0$; se $\int_a^b |f(x)| dx$ converge allora $\int_a^b f(x) dx$ converge.*

Attenzione: non vale il viceversa.

Esempio 5.2.1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{\frac{1}{x^3}} = 1$ quindi $\frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \sim \frac{1}{x^3}$ per $x \rightarrow +\infty$

Poichè $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ converge ($p = 3 > 1$) allora $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$ converge.

Esempio 5.2.2. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}} dx$
 $\frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}} \sim \frac{x}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$ per $x \rightarrow 0^+$ $\alpha - 2 < 1 \Rightarrow \alpha < 3$
 $\frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{3\alpha-1}}$ per $x \rightarrow +\infty$ $3\alpha - 1 > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{2}{3}$

L'integrale converge per $\frac{2}{3} < \alpha < 3$.

Esempio 5.2.3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx$
 $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_2^M \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha} x \right]_2^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha} M - \frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha} 2 \right]$
 tale limite esiste finito $\iff 1 - \alpha < 0 \iff \alpha > 1$. In tal caso il limite vale $-\frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha} 2$.

Esempio 5.2.4 (Importante). $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln x} dx$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x \ln x}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1-p} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{p-1}}{\ln x} = \begin{cases} \infty & \text{se } p - 1 < 0 \\ 0 & \text{se } p - 1 \geq 0 \end{cases}$

nel primo caso, applicando de Hopital si ha: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(p-1)x^{p-2}}{\frac{1}{x}} = \infty$
 $\frac{1}{x \ln x}$ è, per $x \rightarrow 0^+$, un infinito di ordine superiore a $\frac{1}{x^p} \forall p < 1$, ma di ordine inferiore a $\frac{1}{x^p} \forall p \geq 1$.
 Quindi il criterio non ci permette di decidere. La questione si risolve integrando:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\ln |\ln \frac{1}{2}| - \ln |\ln \epsilon|] = -\infty$$

Quindi $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln x} dx$ diverge.

5.3 Esercizi riassuntivi

Esercizio 5.3.1. Studiare la convergenza o divergenza dei seguenti integrali e calcolarne il valore:

1. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 6x}$ [diverge]
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ $[\pi]$
3. $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ $[?]$
4. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ $[?]$

Calcolare:

Esercizio 5.3.2.

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \quad a > 0 \quad \left[\frac{b}{a^2 + b^2} \right]$$

Esercizio 5.3.3.

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \quad a > 0 \quad \left[\frac{b}{a^2 + b^2} \right]$$

Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ convergono:

Esercizio 5.3.4.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a \arctan x}{\sqrt{1+x^3}} \, dx \quad \left[-2 < a < \frac{1}{2} \right]$$

Esercizio 5.3.5.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^{2a})}{(e^{\sqrt[3]{x}} - 1)^a} \, dx \quad \left[a > -\frac{3}{5} \right]$$

Esercizio 5.3.6.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a \sqrt{x^2 - 1}} \, dx \quad \text{calcolarne il valore per } a = 1 \quad \left[a > 0; \frac{\pi}{2} \right]$$

Parte II

Serie

Capitolo 6

Successioni numeriche reali

6.1 Generalità

Definizione 6.1.1. Dicesi *successione* una funzione

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Talora il dominio è $\mathbb{N}^*$. In generale A è un insieme qualsiasi; noi supporremo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 6.1.2. Dicesi *successione numerica reale* una successione a valori in $\mathbb{R}$.

Gli a_n si dicono *termini* della successione che si indica anche con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oppure $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$.

Definizione 6.1.3. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale; diremo che il *limite* per n che tende a più infinito di a_n vale $L \in \mathbb{R}$ e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

In questo caso la successione si dice *convergente*.

Esempio 6.1.1. $a_n = \frac{1}{n}$.

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ Infatti: $\forall \epsilon > 0, |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. Per $n > \frac{1}{\epsilon}$, si trova $\bar{n} = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$.

Definizione 6.1.4. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale; diremo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{cases}$$

se

$$\forall M > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \quad \begin{cases} a_n > M \\ a_n < -M \\ |a_n| > M \end{cases}$$

¹Ricordiamo che $\lceil x \rceil$ è il primo numero intero maggiore o uguale a x .

La successione si dice, rispettivamente, *positivamente divergente*, *negativamente divergente*, *oscillante*.

Esempio 6.1.2. $a_n = n$.

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Infatti: $\forall M > 0, n > M$, si trova $\bar{n} = \lceil M \rceil$.

Definizione 6.1.5. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale; diremo che la successione è *indeterminata* se non esiste il $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Esempio 6.1.3. $a_n = (-1)^n$ è indeterminata.

Infatti: se $n = 2k \Rightarrow a_{2k} = 1$, se $n = 2k + 1 \Rightarrow a_{2k+1} = -1$. Il limite non esiste.

6.2 Successioni monotone

Definizione 6.2.1. Una successione numerica reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *monotona crescente* in senso stretto (lato) se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$); si dice *monotona decrescente* in senso stretto (lato) se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$).

Ricordiamo che l'estremo superiore di un insieme A di numeri reali si indica con $\sup(A)$ e l'estremo inferiore si indica con $\inf(A)$.

Teorema 6.2.1. Esiste sempre, finito o infinito, il limite di una successione reale monotona e coincide con $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$ se è crescente, con $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$ se è decrescente.

Dimostrazione. 1° caso: poniamo $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = L \in \mathbb{R}$, e sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ crescente in senso stretto. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_{\bar{n}} > L - \epsilon$$

per la proprietà caratteristica del sup

$$L - \epsilon < a_{\bar{n}} < a_{\bar{n}+1} < \dots < L$$

per la monotonia; allora

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \\ \mid a_n - L < \epsilon \quad \text{cioè} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \end{aligned}$$

come si voleva.

2° caso: poniamo $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = +\infty$, e sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ crescente in senso stretto. Allora

$$\forall M > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_{\bar{n}} > M$$

per la proprietà caratteristica del sup

$$M < a_{\bar{n}} < a_{\bar{n}+1} < \dots$$

per la monotonia; allora

$$\forall M > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M$$

cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

□

Esempio 6.2.1. Numero di Nepero.

Il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{esiste finito con } 2 < e < 3$$

che si dice *Numero di Nepero*.

6.3 Criteri di convergenza

Teorema 6.3.1 (Criterio di convergenza di Cauchy). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 > \bar{n} \implies |a_{n_1} - a_{n_2}| < \epsilon.$$

Dimostrazione. Enunciamo solamente. □

Teorema 6.3.2. *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale a termini non negativi; se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1 \quad \text{allora} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon \Rightarrow a_{n+1} < (L + \epsilon)a_n$$

poniamo $L + \epsilon = h$, non è restrittivo supporre $h < 1$; quindi

$$a_{n+1} < ha_n; \quad a_{n+2} < ha_{n+1} < h^2 a_n; \quad \dots \quad a_{n+k} < h^k a_n \quad \forall n > \bar{n}.$$

Concludendo:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+k} < h^k a_n < \epsilon$$

cioè

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n+k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

□

Esempio 6.3.1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

perciò

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

L'esercizio poteva essere svolto anche nel seguente modo:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{nnn\dots n} = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$

dunque:

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 3$$

per il teorema dei due carabinieri

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Teorema 6.3.3. *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale a termini non negativi; se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1 \quad \text{allora} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

Dimostrazione. Per ipotesi: supponiamo che $L \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon \Rightarrow a_{n+1} > (L - \epsilon)a_n$$

poniamo $L - \epsilon = h$, non è restrittivo supporre $h > 1$; quindi

$$a_{n+1} > ha_n; \quad a_{n+2} > ha_{n+1} > h^2 a_n; \quad \dots \quad a_{n+k} > h^k a_n \quad \forall n > \bar{n}.$$

Concludendo:

$$\forall M > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+k} > h^k a_n > M$$

cioè

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n+k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

a maggior ragione se $L = +\infty$. □

Esempio 6.3.2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n} \quad a \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{n}{n+1} = a \quad \text{se } a > 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

$$\text{se } 0 < a < 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n} = 0$$

se $a = 1$ il criterio non dice nulla ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Teorema 6.3.4. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale a termini non negativi; se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \text{allora} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Dimostrazione. Enunciamo solamente. □

Esempio 6.3.3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

sia $a_n = \frac{n!}{n^n}$, abbiamo visto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

Esempio 6.3.4. Sia data la successione numerica reale definita induttivamente:

$$a_0 \geq 0, a_1 = \sqrt{1 + a_0}, a_2 = \sqrt{1 + a_1}, \dots, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} = f(n)$$

Esercizio non svolto

ESERCIZI

Esercizio 6.3.1. Cercare i limiti delle successioni:

1. $\frac{a^n}{n!} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (0 \quad \forall a)$

2. $\sqrt[n]{a} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (1 \quad \forall a)$

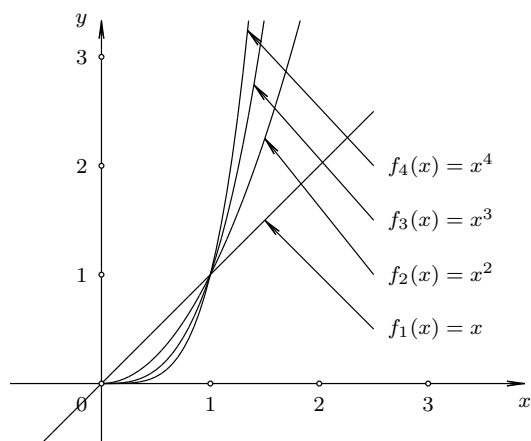
3. $\binom{2n}{n} \quad (+\infty)$

4. Sia $a_0 \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$; provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
(dimostrare prima che la successione è monotona decrescente)

6.4 Successioni di funzioni

Definizione 6.4.1. Dicesi *successione di funzioni* una successione i cui termini sono funzioni.

Esempio 6.4.1. $f_n(x) = x^n \quad x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$



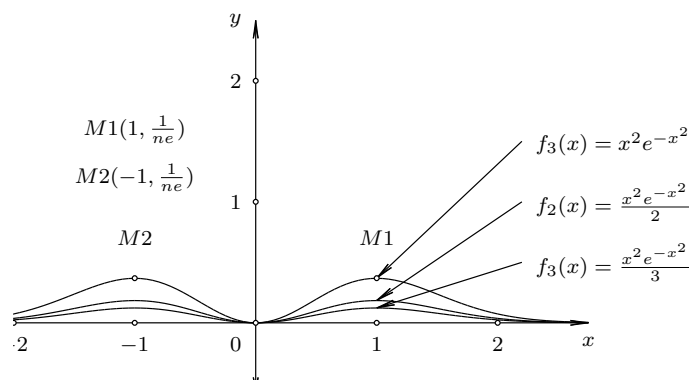
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Se $a \in \mathbb{R}^{\geq}$ possiamo considerare la successione reale $\{f_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ che

$$\text{converge a } \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

mentre diverge se $a > 1$.

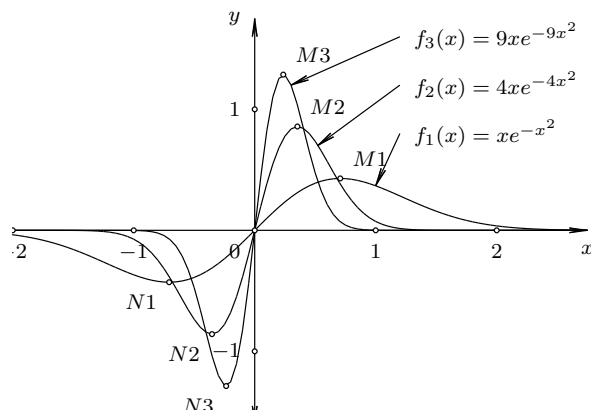
Esempio 6.4.2. $f_n(x) = \frac{x^2 e^{-x^2}}{n} \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{n} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ la } \{f_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

è una successione numerica reale che converge a 0.

Esempio 6.4.3. $f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

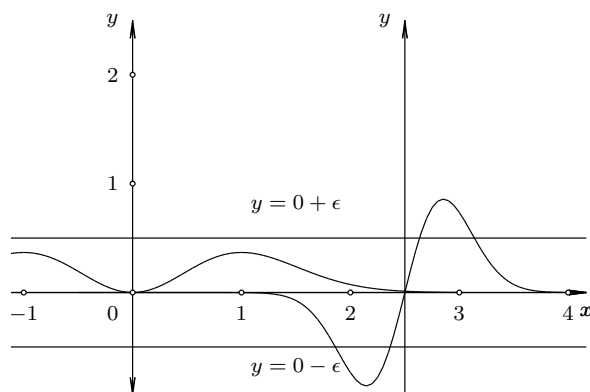


$$M\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}, \frac{ne^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right) \quad N\left(-\frac{1}{n\sqrt{2}}, -\frac{ne^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 x e^{-n^2 x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ la $\{f_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione numerica reale che converge a 0.

Osservazione. In entrambi gli ultimi esempi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Ma vi è una differenza: considerato un intorno di tale limite, nel primo caso è possibile determinare un indice h tale che da quell'indice in poi tutte le $f_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vi cadano dentro; nel secondo caso ciò *non è possibile*. Si osservi attentamente la figura successiva.



6.5 Convergenza uniforme per successioni di funzioni

Definizione 6.5.1. Data una successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, si dice che *converge uniformemente* a $f(x)$ in un intervallo D se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

ESERCIZI

Esercizio 6.5.1. Dimostrare che

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$$

converge a $f(x) = 0$ uniformemente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.5.2. Dimostrare che

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

converge a $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ma non uniformemente.

Capitolo 7

Serie numeriche reali

7.1 Generalità

Definizione 7.1.1. Data una successione numerica reale $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, sia

$$\begin{aligned}s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ &\vdots\end{aligned}$$

la successione delle *somme parziali* o *ridotte*. Tale successione si dice *serie associata* alla successione data e a_n si dice termine generale.

Definizione 7.1.2. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$, allora si dice che la serie *converge*; S si chiama la *somma* della serie e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$$

Definizione 7.1.3.

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ si dice che la serie *diverge positivamente*

se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$ si dice che la serie *diverge negativamente*

se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$ si dice che la serie *diverge oscillando* o semplicemente *diverge*.

Definizione 7.1.4. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ non esiste, allora si dice che la serie è *indeterminata*.

Esempio 7.1.1. Sia data la serie¹

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Poichè

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

¹di Mengoli

allora

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Concludiamo che la serie di Mengoli converge a 1 o anche che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Esempio 7.1.2 (Serie geometrica di ragione x). Sia data la serie

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Si ha

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} - x^{n+1} \\ &= 1 + x(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) - x^{n+1} \\ &= 1 + xs_n - x^{n+1} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} s_n - xs_n &= 1 - x^{n+1} \\ s_n(1 - x) &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

e dividendo per $1 - x$, dopo aver posto $x \neq 1$, si ha

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad x \neq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

se $|x| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

se $x = 1$ allora la serie diventa $1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ e diverge a $+\infty$ ²;

se $x = -1$ allora la serie diventa $1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n + \cdots$ ed è indeterminata³.

Se $x > 1$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = +\infty$$

quindi la serie diverge a $+\infty$; se $x < -1$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \infty$$

quindi la serie diverge oscillando.

² $s_n = n$

³ $s_{2k} = 0$ e $s_{2k+1} = 1$

ESERCIZI

Esercizio 7.1.1. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche (eventualmente al variare di $x \in \mathbb{R}$):

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ $\left[\frac{11}{8} \right]$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)}$ $a < b \quad a, b \in \mathbb{N}$ $\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} \cdots + \frac{1}{b-1} \right]$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1+x}{x} \right)^n$ $\left[\text{converge a } \frac{x}{2x+1} \text{ per } x < -\frac{1}{2} \right]$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} [\ln(x^2 - e)]^n$ $\left[\text{converge a } \frac{1}{1 - \ln(x^2 - e)} \text{ per } \sqrt{e + \frac{1}{e}} < |x| < \sqrt{2e} \right]$

7.2 Criterio di convergenza di Cauchy

Teorema 7.2.1 (Convergenza secondo Cauchy). *Data una serie $a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$, essa converge se e solo se*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^* \implies |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \epsilon$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ s_{n+k} &= a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} & \forall n, k \in \mathbb{N} \quad k > 0 \\ s_{n+k} - s_n &= a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} \end{aligned}$$

condizione necessaria e sufficiente affinché la successione numerica reale $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga è che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 > \bar{n} \implies |s_{n_2} - s_{n_1}| < \epsilon$$

scegliamo $n_2 = n + k, n_1 = n > \bar{n}$; dunque

$$|s_{n_2} - s_{n_1}| = |s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \epsilon$$

□

Corollario 7.2.1. *Se una serie converge allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. E' il criterio di Cauchy per $k = 1$.

□

Teorema 7.2.2. *Una serie a termini non negativi o converge o diverge positivamente.*

Dimostrazione. Se la serie è a termini non negativi, la $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente. Sapendo che le successioni monotone non sono mai indeterminate, segue la conclusione. □

Esempio 7.2.1 (Importante). Discutere la convergenza della serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Osserviamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ eppure la serie diverge: infatti

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right| \geq \left| \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \right|$$

dunque, per il Criterio di Cauchy, la serie non converge ed essendo a termini positivi, diverge a $+\infty$.

Definizione 7.2.1. Si dice *resto n -esimo* di una serie $a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$ la quantità

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Risulta che

$$R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - s_n$$

la serie è privata dei suoi termini fino ad a_n . La R_n è una serie le cui somme parziali sono: $R_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}$ e si ha $R_{n,k} = s_{n+k} - s_n$. Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} R_{n,k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{n+k} - s_n$$

cioè la serie e il suo resto n -esimo hanno lo stesso carattere⁴.

⁴Cioè *entrambe* convergenti, divergenti o indeterminate

7.3 Serie a termini non negativi

Teorema 7.3.1 (Criterio del confronto). *Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi. Supponiamo che*

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \quad a_n \leq b_n$$

Allora

$$\begin{aligned} \text{Se } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge} &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \\ \text{Se } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ diverge} &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ diverge.} \end{aligned}$$

Dimostrazione. $R_n^{(a)}$ sia il resto n -esimo di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $R_n^{(b)}$ sia il resto n -esimo di $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$;

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$R_{n,k}^{(a)} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} \leq b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+k} = R_{n,k}^{(b)}$$

se per ipotesi $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora

$$R_{n,k}^{(a)} \leq R_{n,k}^{(b)} < \epsilon$$

e ne consegue che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (per il Criterio di Cauchy); se per ipotesi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge allora

$$\forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$M < R_{n,k}^{(a)} \leq R_{n,k}^{(b)}$$

ne consegue che $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge. □

Esempio 7.3.1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2 \quad (\text{dimostrare})$$

Poichè

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \text{ converge (serie di Mengoli) allora } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

Esempio 7.3.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{dimostrare})$$

Poichè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge (serie armonica) allora } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

Teorema 7.3.2 (Criterio del rapporto). Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi e sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Allora

se $L > 1$ la serie diverge

se $0 \leq L < 1$ la serie converge

se $L = 1$ nulla si può dire (del carattere, naturalmente).

Dimostrazione. Caso⁵ $L > 1$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon$$

sia $L - \epsilon = h > 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> ha_n \\ a_{n+2} &> ha_{n+1} > h^2 a_n \\ &\vdots \\ a_{n+k} &> h^k a_n \quad \forall n > \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} > ha_n + h^2 a_n + \dots + h^k a_n + \dots = a_n(h + h^2 + \dots + h^k + \dots)$$

Poichè h^k è il termine generale di una serie geometrica divergente ($h > 1$), ne consegue che, per il criterio del confronto, la serie diverge.

Caso $L < 1$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon$$

sia $L - \epsilon = h < 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< ha_n \\ a_{n+2} &< ha_{n+1} < h^2 a_n \\ &\vdots \\ a_{n+k} &< h^k a_n \quad \forall n > \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} < ha_n + h^2 a_n + \dots + h^k a_n + \dots = a_n(h + h^2 + \dots + h^k + \dots)$$

Poichè h^k è il termine generale di una serie geometrica convergente ($h < 1$), ne consegue che, per il criterio del confronto, la serie converge.

Caso $L = 1$

Nulla si può dire nel senso che il criterio non è sufficientemente potente per stabilire il carattere della serie. $\square$

⁵Vale anche nel caso $L = +\infty$, ma noi ci limitiamo al caso finito.

Esempio 7.3.3.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

ne consegue che la serie data converge.

Esempio 7.3.4.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

ne consegue che la serie data converge.

Esempio 7.3.5. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}^+$ converge la serie

$$1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x+x^2} + \cdots + \frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}} + \cdots$$

Abbiamo

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad \text{se } x \neq 1$$

la serie diventa

$$1 + \frac{1-x}{1-x^2} + \frac{1-x}{1-x^3} + \cdots + \frac{1-x}{1-x^n} + \cdots$$

e quindi, applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

se $x > 1$ la serie convergese $x = 1$ si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, la serie armonica che divergese $0 < x < 1$ il criterio non dice nulla ma

$$\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}} > \underbrace{\frac{1}{1+1+\cdots+1}}_{n-\text{volte}} = \frac{1}{n}$$

per il criterio del confronto, la serie data diverge.

Teorema 7.3.3 (Criterio della radice). Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi e sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Allora

se $L > 1$ la serie divergese $0 \leq L < 1$ la serie convergese $L = 1$ nulla si può dire.

Dimostrazione. Caso $L > 1$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$$

sia $L - \epsilon = h > 1$

$\sqrt[n]{a_n} > h$ e quindi $a_n > h^n \forall n > \bar{n}$.

Poichè h^n è il termine generale di una serie geometrica divergente ($h > 1$), allora la serie data diverge per il criterio del confronto.

Caso $L < 1$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$$

sia $L - \epsilon = h < 1$

$\sqrt[n]{a_n} < h$ e quindi $a_n < h^n \forall n > \bar{n}$.

Poichè h^n è il termine generale di una serie geometrica convergente ($h < 1$), ne consegue che, per il criterio del confronto, la serie converge. $\square$

Esempio 7.3.6.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

ne consegue che la serie data converge.

Esempio 7.3.7.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{serie armonica})$$

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^t = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t \ln t} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}} = e^0 = 1$$

dove abbiamo posto $\frac{1}{n} = t$ e applicato De l'Hopital per il calcolo del limite.

Il criterio della radice non permette alcuna conclusione, pur essendo la serie armonica divergente.

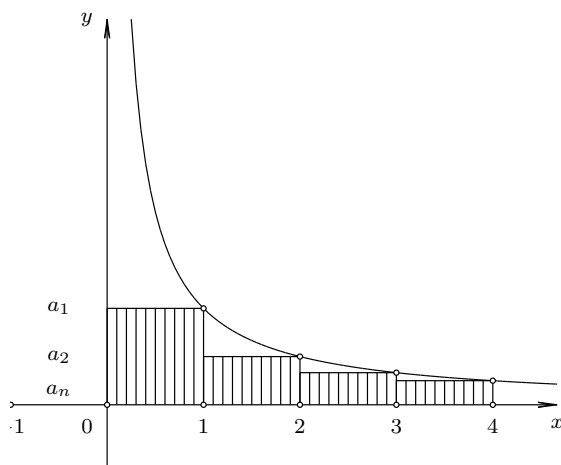
Teorema 7.3.4 (Criterio dell'integrale). *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Se $f(x)$ è una funzione decrescente tale che $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \quad \text{converge} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge}$$

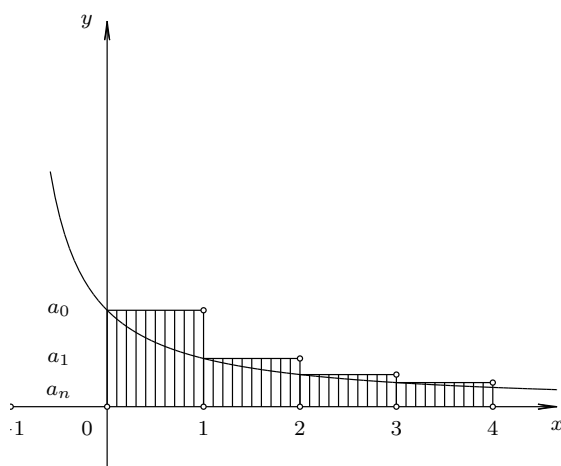
e

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \quad \text{diverge} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{diverge}.$$

Dimostrazione. Consideriamo le figure



Nella figura il plurirettangolo inscritto ha area $A_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n - a_0$.



Nella figura il plurirettangolo circoscritto ha area $A_c = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = s_{n-1}$.

Dunque

$$s_n - a_0 \leq \int_0^n f(x) dx \leq s_{n-1}$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$ esiste finito, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n - a_0$ esiste finito; quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ esiste finito e la serie converge.

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1}$ esiste finito, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$ esiste finito e l'integrale converge.

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx = +\infty$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = +\infty$ e la serie diverge.

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx = +\infty$ e l'integrale diverge.

□

Esempio 7.3.8.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Abbiamo

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \quad \text{diverge.}$$

Infatti

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} [\ln |\ln x|]_2^m = \lim_{m \rightarrow +\infty} [\ln |\ln m| - \ln |\ln 2|] = +\infty$$

quindi la serie diverge.

Esempio 7.3.9.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

Calcoliamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$$

poichè

$$\frac{1}{x + \sqrt{x}} \approx \frac{1}{x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

e siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, allora la serie data diverge.

Esercizio 7.3.1 (Serie di Riemann). La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \iff p > 1.$$

7.4 Serie a termini di segno alterno

Definizione 7.4.1. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi; si dice *serie a segno alterno* la

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

Teorema 7.4.1 (Criterio di convergenza di Leibniz). *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi, decrescenti e con termine generale infinitesimo.*

Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad \text{converge e inoltre } |R_n| \leq a_{n+1}$$

Dimostrazione. Consideriamo le somme:

$$s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} = s_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \leq s_{2k}$$

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} = s_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) \geq s_{2k-1}$$

La successione delle ridotte di indice pari è decrescente mentre quella di indice dispari è crescente.

Ma essendo $\forall k, s_{2k} \geq s_{2k+1} \geq s_1$, allora $\{s_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è inferiormente limitata (oltre che decrescente).

Analogamente si ha: $s_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_0$, allora $\{s_{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è superiormente limitata (oltre che crescente).

Risulta:

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k} - \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k+1}$$

quindi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k+1} = s$$

e la serie data converge. Risulta ancora:

$$s_{2k-1} \leq s \leq s_{2k} \quad \text{e} \quad s_{2k+1} \leq s \leq s_{2k}, \quad 0 \leq s - s_{2k-1} \leq s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k}; \quad 0 \leq s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1}.$$

vale a dire

$$|R_{2k+1}| = |s - s_{2k-1}| \leq a_{2k}$$

$$|R_{2k}| = |s_{2k} - s| \leq a_{2k+1}$$

cioè il resto risulta minore o uguale al primo termine trascurato. $\square$

Esempio 7.4.1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad \text{armonica a segni alterni.}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è decrescente, con termine generale infinitesimo; ne consegue che la serie data converge per il criterio di Leibniz. Fermarsi al termine n -esimo significa commettere un errore minore, in modulo, di $\frac{1}{n+1}$.

Esempio 7.4.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \geq 0$$

se $x = 0$ allora la serie converge a 0. Se $x \neq 0$ allora

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \text{quando} \quad 1 \geq \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

cioè

$$x^2 \leq (2n+2)(2n+3) \quad \text{cioè} \quad 4n^2 + 10n + 6 - x^2 \geq 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24 + 4x^2}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{1 + 4x^2}}{4} \quad \text{cioè} \quad n \geq \frac{-5 + \sqrt{1 + 4x^2}}{4}$$

Riassumendo: la successione di termine generale $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x \geq 0$ è decrescente $\forall n \geq \frac{-5 + \sqrt{1 + 4x^2}}{4}$, inoltre il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

per il criterio di Leibniz la serie data converge $\forall x \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Fermarsi al termine n -esimo significa commettere un errore minore, in modulo, di $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

Definizione 7.4.2. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente se converge la $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

Teorema 7.4.2. Una serie assolutamente convergente è convergente⁶

Dimostrazione.

$$|R_{n,k}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| = \overline{R_{n,k}} < \epsilon$$

dove $\overline{R_{n,k}}$ è la ridotta k -esima del resto n -esimo della serie dei moduli. Quindi, per il criterio di Cauchy, la serie data converge. $\square$

⁶Per distinguere si dirà *convergenza semplice*.

Non vale il viceversa: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente (serie armonica). Diciamo che la serie armonica a segni alterni converge semplicemente ma non assolutamente.

Esempio 7.4.3.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2x-1)^n$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei moduli $\sum_{n=0}^{+\infty} |2x-1|^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2x-1)^{n+1}}{(2x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |2x-1| = |2x-1|$$

se $|2x-1| < 1$ allora la serie converge assolutamente ed essendo una geometrica converge verso $\frac{1}{1-(2x-1)} = -\frac{1}{2x}$. Quindi, se $-1 < 2x-1 < 1$, cioè $0 < 2x < 2$, cioè $0 < x < 1$, la serie converge assolutamente. Se $|2x-1| > 1$ allora la serie dei moduli diverge e questo non ci dice nulla sulla serie data; osservando però che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2x-1)^n = \infty$, sicuramente la

serie non converge. Se $|2x-1| = 1$ si ha $x = 0$ oppure $x = 1$; se $x = 0$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ che è indeterminata. Se $x = 1$ allora

$\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ che diverge positivamente.

Esempio 7.4.4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei moduli $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)x^{2n+1}} \right| = x^2$$

se $x^2 < 1$ cioè $-1 < x < 1$, allora la serie converge assolutamente. Se $x^2 > 1$ cioè $x < -1$, $x > 1$, allora la serie dei moduli diverge e questo non ci dice nulla sulla serie data; osservando però che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \infty$, sicuramente la serie

non converge. Se $x = 1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ che converge per il criterio di Leibniz. Se $x = -1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ che converge per il criterio di Leibniz.

7.5 Proprietà e operazioni sulle serie numeriche

Valgono le seguenti proprietà e definizioni:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} k a_n$ ($k \in \mathbb{R}^*$) hanno lo stesso carattere; se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} k a_n = k s$.
2. Vale per le serie convergenti e divergenti la proprietà associativa; non vale per le serie indeterminate.
3. Non vale in generale la proprietà commutativa che però vale per le serie assolutamente convergenti.
4. Date $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, si definiscono: la serie *somma*: $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$; la serie *differenza*: $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n)$;
la serie *prodotto secondo Cauchy o prodotto di convoluzione*: $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ dove $p_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_a$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = s_b$ allora la serie somma converge verso $(s_a + s_b)$ e la serie differenza verso $(s_a - s_b)$; se una delle serie date diverge e l'altra converge, allora la serie somma e la serie differenza divergono; se ambedue le serie date sono assolutamente convergenti allora la serie prodotto è assolutamente convergente e ha per somma $(s_a s_b)$; se almeno una delle serie date è assolutamente convergente e l'altra converge semplicemente allora la serie prodotto converge a $(s_a s_b)$; se le serie date convergono anche solo semplicemente allora non si può affermare nulla sulla serie prodotto ma, se questa converge, allora converge verso $(s_a s_b)$.

7.6 Esercizi riassuntivi

Esercizio 7.6.1. Stabilire la convergenza, semplice o assoluta, delle seguenti serie.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n!}$ [converge assolutamente]
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{n\pi}{3}$ [converge assolutamente]
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n + 1}{n^2}$ [diverge]
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \sin n}$ [converge semplicemente]
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ [converge assolutamente]
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\binom{n}{k}} \quad k \in \mathbb{Z}_*^+$ [converge $\forall k \neq 1$, diverge per $k = 1$]
7. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2 + 100}$ [converge semplicemente]

Esercizio 7.6.2. Determinare per quali valori $x \in \mathbb{R}$ converge la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad [\text{converge assolutamente per } |x| < 1; \text{ per } x = 1 \text{ converge semplicemente}]$$

Capitolo 8

Serie di funzioni

8.1 Generalità

Definizione 8.1.1. Si dice *serie di funzioni* una serie i cui termini sono funzioni (reali di variabile reale). Con le solite notazioni la serie si indica con:

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) \cdots \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Definizione 8.1.2. Data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ove le $f_n(x)$ siano definite in $I \subseteq \mathbb{R}$, si dice *dominio di convergenza* l'insieme $D = \{x_0 \in I \mid \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) \text{ è una serie numerica convergente}\}$.

Esempio 8.1.1.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-x}{2} x^n \quad I = \mathbb{R}$$

Se $x = 1$ allora tutti i termini della serie sono nulli e quindi essa converge a 0. Se $x \neq 1$ allora la serie $\frac{1-x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge a $\frac{1-x}{2} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$ per $|x| < 1$; quindi $D =]-1, 1[$.

Esempio 8.1.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{n(\arctan x - x)}}{n} \quad I = \mathbb{R}$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{(n+1)(\arctan x - x)}}{n+1} \frac{n}{e^{n(\arctan x - x)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} e^{\arctan x - x} = e^{\arctan x - x}$$

La serie converge assolutamente se $e^{\arctan x - x} < 1$ cioè se $\arctan x < x$ che è vera $\forall x > 0$; se $x < 0$ allora la serie non converge perchè il termine generale non è infinitesimo. Se $x = 0$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge. Quindi $D = [0, +\infty[$.

ESERCIZI

Esercizio 8.1.1. Studiare la seguenti serie di funzioni e individuarne il dominio di convergenza:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2 - 1)^n}{n + 1}$ [Converge assolutamente in $] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$]
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|x| + 1}{x^2 + 1} \right)^n$ [Converge assolutamente in $] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[$]
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x|x|)^n}{n2^n}$ [Converge in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, converge assolutamente in $] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$]
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cos^n x$ [Converge assolutamente in $\{x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi\}$]
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(p + \frac{x}{n} \right)^n$ [Se $|p| < 1$ converge assolutamente; se $|p| \geq 1$ non converge $\forall x \in \mathbb{R}$]
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ [Converge assolutamente in $] - e, e[$]

8.2 Convergenza uniforme

Definizione 8.2.1. Data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, si dice che *converge uniformemente* in D se $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall x \in D \implies |R_n(x)| < \epsilon$.

Esempio 8.2.1. $\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1$$

Se $x = 0$ o $x = 1$ la serie converge a 0.

Se $x \neq 0$ e $x \neq 1$ la serie diventa $x \sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)^n$ che converge a $x \frac{1}{1-(1-x)}$ per $|1-x| < 1$ cioè $0 < x < 2$. Quindi $D = [0, 2[$.

$$x \sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)^n = x[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots + (1-x)^n + \cdots]$$

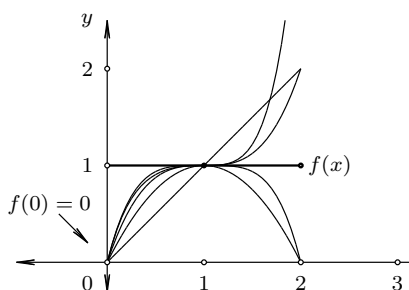
$$s_0(x) = x$$

$$s_1(x) = x[1 + (1-x)] = x[2-x]$$

$$s_2(x) = x[1 + (1-x) + (1-x)^2] = x[3-3x+x^2]$$

$$\vdots$$

$$s_n(x) = x[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots + (1-x)^n] = x \frac{1 - (1-x)^{n+1}}{1 - (1-x)} = 1 - (1-x)^{n+1}$$



Si vede dalla figura che, considerato un intorno di $f(x)$, qualunque sia $x \in [a, b] \subset]0, 2[$, è sempre possibile trovare un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che da quell'indice in poi, le somme parziali $s_n(x)$ cadano entro questo intorno. Si dice che vi è convergenza uniforme in $[a, b]$ con $0 < a < b < 2$. Infatti è:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \implies |R_n(x)| &= |f(x) - s_n(x)| = \\ &= |1 - [1 - (1-x)^{n+1}]| = \\ &= |(1-x)^{n+1}| \leq c^{n+1} < \epsilon \end{aligned}$$

ove $c = \max\{|b-1|, |a-1|\}$ e $c < 1$; allora $n+1 > \log_c \epsilon$, per cui $n > \log_c \epsilon - 1$.

Invece, preso $x \in [0, 2[$ (insieme di convergenza puntuale) non è possibile trovare un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che da quell'indice in poi, le somme parziali cadano entro quell'intorno: in prossimità di 0 e 2 vi è un ramo della $s(x)$ che se ne esce.

Infatti abbiamo: $\forall \epsilon > 0 \implies |R_n(x)| = |1-x|^{n+1}$ se $x \in]0, 2[$; $|R_n(x)| = 0$ se $x = 0$; sarà $|1-x|^{n+1} < \epsilon$ se $n+1 > \log_{|1-x|} \epsilon$ cioè se $n > \log_{|1-x|} \epsilon - 1$ cioè $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |1-x|} - 1$; si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln |1-x|} - 1 \right] = +\infty$ e anche $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln |1-x|} - 1 \right] = +\infty$ cioè non esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}, \forall x \in [0, 2[\implies |R_n(x)| < \epsilon$.

8.3 Convergenza totale

Definizione 8.3.1. Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ si dice che *converge totalmente* in D se $\forall x \in D \Rightarrow |f_n(x)| \leq$

$c_n \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ è una serie numerica reale convergente.

Teorema 8.3.1 (Criterio di Weierstrass). *La convergenza totale implica la convergenza uniforme.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \forall x \in D \quad \text{si ha } |R_n(x)| &= |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots| \leq \\ &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots = \\ &= R_n < \epsilon \end{aligned}$$

□

Osservazione:

Il criterio di Weierstrass *non è invertibile*. Infatti $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ è uniformemente convergente in $[0, 1]$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow |R_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \epsilon; \quad \text{basta che sia } \bar{n} = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} - 1 \right\rceil + 1 = \frac{1}{\epsilon}$$

ma non è totalmente convergente: $|(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}| \leq \frac{1}{n}$ e non è possibile trovare una serie numerica maggiorante che sia termini minori di quella data.

ESERCIZI

Esercizio 8.3.1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+n)^n}{n!3^n}$$

[Converge totalmente e quindi uniformemente in $] -\infty, a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$]

Esercizio 8.3.2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

[Converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$; totalmente e quindi uniformemente in $[a, b]$ con $a < b < 0$ oppure in $[c, d]$ con $0 < c < d$; suggerimento: si disegnano le somme parziali e la $f(x)$]

Esercizio 8.3.3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [n(x^n - x^{2n}) - (n-1)(x^{n-1} - x^{2n-2})] \quad x \geq 0$$

[Converge puntualmente in $[0, 1]$ a $f(x) = 0$; converge totalmente e quindi uniformemente in $[0, a]$ con $a < 1$]

Capitolo 9

Serie di potenze

9.1 Generalità

Definizione 9.1.1. Si dice *serie di potenze* di punto iniziale x_0 la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Lemma 9.1.1. Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = p > 1$ allora la serie non converge.

Dimostrazione. Per ipotesi $|a_n|(p - \epsilon) < |a_{n+1}| < |a_n|(p + \epsilon)$; posto $p - \epsilon = h > 1$ si ha: $|a_{n+k}| > |a_n|h^k \forall k \in \mathbb{N}^*$ e quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_{n+k}| \neq 0$. $\square$

Teorema 9.1.1. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge assolutamente in $]x_0 - R, x_0 + R[$ dove¹

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ e non converge in }]-\infty, x_0 - R[\cup]x_0 + R, +\infty[.$$

Dimostrazione. Applichiamo alla serie dei moduli il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}| |x - x_0|^{n+1}}{|a_n| |x - x_0|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - x_0|;$$

se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ esiste, lo poniamo $= \frac{1}{R}$; quindi il limite precedente è $\frac{|x - x_0|}{R}$. Se $\frac{|x - x_0|}{R} < 1$, la serie converge assolutamente, quindi $|x - x_0| < R$, cioè $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$. Dal lemma precedente segue la seconda parte del teorema. Negli estremi si controllerà di volta in volta l'eventuale convergenza. $\square$

Esempio 9.1.1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{n} \quad x_0 = -3 \quad a_n = \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1$$

¹ R si dice *raggio di convergenza*

$R = 1$, la serie converge assolutamente in $] -3 - 1, -3 + 1[=] -4, -2[$; se $x = -4$ allora la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge semplicemente; se $x = -2$ allora la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.

Esempio 9.1.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-2)^n \quad x_0 = 2 \quad a_n = n!$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$R = 0$; quando $R = 0$ si ha convergenza solo per $x = x_0$; nel nostro caso solo per $x = 2$.

Esempio 9.1.3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad x_0 = 0 \quad a_n = \frac{1}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{(n+1)^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) = +\infty$$

$R = +\infty$; quando $R = +\infty$ si ha convergenza assoluta su tutto l'asse reale.

ESERCIZI

Esercizio 9.1.1. Studiare la seguenti serie di funzioni e individuarne il dominio di convergenza:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} n! \left(\frac{x+6}{n}\right)^n$ [Converge assolutamente in $] -6 - e, -6 + e[$]
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{2^n \sqrt{n^2 + a^2}} \quad a \in \mathbb{R}^*$ [Converge in $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$; assolutamente in $] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$]
3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{\ln n} (1-5x)^n$ [Converge per $x = \frac{1}{5}$]
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ [Converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$]

9.2 Sviluppo in serie di potenze.

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile indefinitamente in $I \subseteq \mathbb{R}$, ci proponiamo di costruire il polinomio di grado n che l'approssima nel migliore dei modi in un intorno di x_0 , vale a dire che differisca dalla $f(x)$ per meno di un infinitesimo per $x \rightarrow x_0$. Osserviamo che il polinomio di grado 0, cioè la funzione costante, che meglio approssima la $f(x)$ in un intorno di x_0 è:

$$p_0(x) = f(x_0)$$

infatti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{cioè} \quad f(x) = f(x_0) + \sigma(x_0, x - x_0) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x_0, x - x_0) = 0.$$

Invece il polinomio di grado 1, cioè la funzione lineare, che meglio approssima la $f(x)$ in un intorno di x_0 è:

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0);$$

imponiamo che il polinomio passi per $(x_0, f(x_0))$, cioè $p_1(x_0) = f(x_0)$ da cui $a_0 = f(x_0)$; imponiamo poi che il polinomio abbia, in x_0 , la stessa derivata di $f(x)$ cioè $p'_1(x_0) = f'(x_0)$ da cui $a_1 = f'(x_0)$ e quindi finalmente:

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

questo polinomio risponde alle richieste, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{cioè} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \sigma(x_0, x - x_0)$$

con $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x_0, x - x_0) = 0$; cioè $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\sigma(x_0, x - x_0)$.

Sarà dunque ragionevole supporre che il polinomio di grado n che meglio approssima la $f(x)$ in un intorno di x_0 sia:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

con

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= f(x_0) \\ p'_n(x_0) &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ p_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f'(x_0) \\ 2a_2 &= f''(x_0) \\ 2 \cdot 3a_3 &= f'''(x_0) \\ &\vdots \\ n!a_n &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

da cui, in generale $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Abbiamo perciò la formula:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ossia

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Esempio 9.2.1.

$$f(x) = e^x \quad x_0 = 0$$

$$n = 0$$

$$p_0(x) = 1$$

$$n = 1$$

$$p_1(x) = 1 + x$$

$$n = 2$$

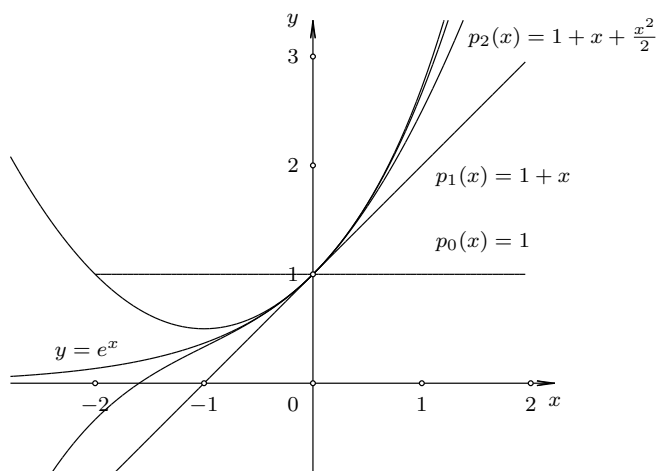
$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$n = n$$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$



Le condizioni di esistenza della costruzione appena vista sono definite nel seguente:

Teorema 9.2.1 (Formula di Taylor con resto di Lagrange). *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno aperto I di x_0 e ivi derivabile almeno $n + 1$ volte; allora esiste $\xi \in I$ tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione. Appliciamo il teorema di Cauchy ² alle funzioni $f(x) - p_{n-1}(x)$ e $(x - x_0)^n$ dove

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{nei punti } x \text{ e } x_0, \text{ con } x \in I$$

Sia, per esempio, $x > x_0$, poniamo $I_1 =]x_0, x[$, allora

$$\frac{[f(x) - p_n(x)] - [f(x_0) - p_n(x_0)]}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1) - p'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad \xi_1 \in I_1$$

2

Teorema (di Cauchy). Date due funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, continue in $[a, b]$, derivabili in $]a, b[$ con $g'(x) \neq 0$ allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Riapplicando il teorema di Cauchy nell'intervallo I_1 all'espressione così ottenuta e così via per $n+1$ volte:

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \dots \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}$$

e quindi

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

da cui la conclusione ponendo $\xi_n = \xi$. □

Il termine $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ è detto resto n -esimo nella forma di Lagrange. Consideriamo ora la serie³ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$; si tratta di una serie di potenze che, per come è stata costruita, approssima la funzione $f(x)$. Sorgono immediatamente due problemi:

1. la serie converge per $x = x_0$?
2. se converge, converge alla $f(x)$?

Teorema 9.2.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie di Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ converga alla funzione $f(x)$ è che $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ dove $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$*

Dimostrazione.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad c \in I.$$

La serie di Taylor converge alla $f(x)$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = f(x)$ ($p_n(x)$ è la usuale ridotta n -esima $s_n(x)$) cioè se e solo se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$ □

Teorema 9.2.3 (Criterio di convergenza). *Se $\exists M > 0$ tale che $|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in I$ allora la serie di Taylor converge alla $f(x)$ in I . In questo caso si dice che le derivate sono equilimitate.*

Dimostrazione.

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} :$$

Consideriamo $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ e applichiamo ad essa il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x - x_0|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!|x - x_0|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x - x_0|}{n+2} = 0 < 1$$

quindi la serie data converge e pertanto il suo termine generale è infinitesimo:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} < \epsilon.$$

□

³Di Taylor.

9.3 Sviluppi notevoli in serie di Taylor

Spesso si usa come punto iniziale $x_0 = 0$; in tal caso si parla di serie di *Mac Laurin*.

Esempio 9.3.1.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Le derivate sono del tipo $f^{(n)}(x) = e^x$ e risulta $\forall x \in [-k, k]$ che $|e^x| \leq e^k = M$; data l'arbitrarietà di k , vi è convergenza su tutto l'asse reale.

Esempio 9.3.2.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Tutte le derivate sono maggiorate in modulo da 1, quindi equilimitate $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 9.3.3.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Come sopra.

Esempio 9.3.4.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

Infatti

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln(1+x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) = -1 \\ \vdots & \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \end{array}$$

quindi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Applicando uno dei criteri noti si ottiene come dominio di convergenza $D =]-1, 1]$; la convergenza è totale in $[a, b]$ con $-1 < a < b < 1$:

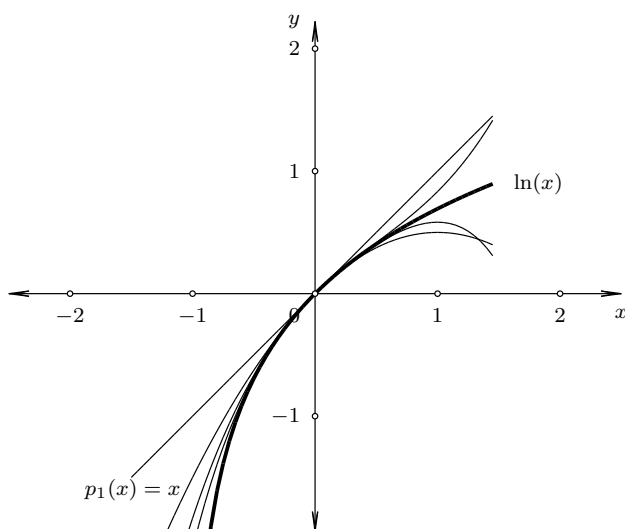
$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{c^n}{n} \quad \text{dove } c = \max(|a|, |b|) \quad 0 < c < 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c^n}{n} \quad \text{converge se } 0 < c < 1$$

La convergenza della nostra serie è addirittura uniforme in $[0, 1]$ poichè

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ rappresenta una funzione continua in $[0, 1]$. Poichè anche $\ln(1+x)$ è continua in $[0, 1]$, l'uguaglianza $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ vale anche per $x = 1$.



Come applicazione possiamo ottenere lo sviluppo in serie di

$$\ln 2 = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

l'errore commesso fermandosi al termine n -esimo è minore di $\frac{1}{n}$.

Esempio 9.3.5.

$$(1+m)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m}{n}x^n \quad m \in \mathbb{R}$$

se $m = -1$ allora $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ e si ha la serie geometrica di ragione $-x$ che converge per $|x| < 1$.

se $m = -\frac{1}{2}$ allora $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots$

se $m = \frac{1}{2}$ allora $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$

ESERCIZI

Esercizio 9.3.1. Sviluppare in serie di Mac Laurin le funzioni:

1. $e^{\sin x}$
2. e^{-x^2}
3. $\frac{\sin x}{x}$
4. $\ln(1 + \sqrt{1+x})$

Esercizio 9.3.2. Calcolare:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 - \sin x}$ $\left[\frac{1}{6} \right]$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x-x^2)}{x(e^x - 1)}$ $[1]$

9.4 Teoremi di continuità, derivazione e integrazione per serie

Teorema 9.4.1. *Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in D e x_0 è un punto di accumulazione per D e se inoltre $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x);$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Osserviamo che, in generale, se la convergenza non è uniforme il teorema non vale. Infatti consideriamo la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ che sappiamo convergere a $\frac{1}{1-x}$ per $|x| < 1$; $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ passando al limite per $x \rightarrow -1$ si ha $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow -1} (1 + x + x^2 + \dots) = (1 - 1 + 1 - \dots)$ in questo caso, non essendoci convergenza uniforme in -1 , non sussiste l'uguaglianza enunciata nel teorema.

Teorema 9.4.2. *Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in D e x_0 è un punto di accumulazione per D e le $f_n(x)$ sono continue in $x_0 \forall n \in \mathbb{N}$, allora $f(x)$ è continua in x_0 .*

Teorema 9.4.3. *Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge a $f(x)$ in D e le $f_n(x)$ sono derivabili in $D \forall n \in \mathbb{N}$, e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente a $g(x)$ allora $f(x)$ è derivabile in D e $f'(x) = g(x)$; cioè*

$$D \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} [Df_n(x)].$$

Osserviamo che, in generale, se la convergenza della serie delle derivate non è uniforme, non è detto che valga il teorema.

Teorema 9.4.4. *Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in $D = [a, b]$ e le $f_n(x)$ sono continue in $D \forall n \in \mathbb{N}$, allora $f(x)$ è integrabile in D e $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$; cioè*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Esempio 9.4.1. $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$
 per $|t| < 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - \dots) dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

per $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz

per $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-\frac{1}{n})$ che diverge a $-\infty$.

Allora:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad -1 < x \leq 1.$$

Esempio 9.4.2. $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

per $|t| < 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \dots) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

per $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ converge per il criterio di Leibniz

per $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$ converge per il criterio di Leibniz.

Allora:

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Se $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

cioè

$$\pi = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$$

Capitolo 10

Serie di Fourier

10.1 Generalità

Definizione 10.1.1. Si dice *serie trigonometrica o di Fourier* la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Supponiamo che la funzione $y = f(x)$, periodica di periodo $T = 2\pi$ sia la somma di una serie trigonometrica e che la convergenza sia uniforme. Vogliamo, in queste ipotesi, ricavare i coefficienti a_n e b_n .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (10.1)$$

Integriamo ambo i membri su $[-\pi, \pi]$ utilizzando il teorema di integrazione per serie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right] = \pi a_0$$

Infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Quindi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Moltiplichiamo ambo i membri della 10.1 per $\cos mx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right] = \pi a_m$$

Infatti se $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(n+m)x}{n+m} - \frac{\cos(n-m)x}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

se $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2nx \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*$$

Ancora: se $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

se $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2nx}{2} \right) \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Quindi

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

e analogamente

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

10.2 Sviluppabilità in serie di Fourier

Ci chiediamo quali siano le condizioni per la sviluppabilità di una funzione periodica di periodo $T = 2\pi$ in serie di Fourier:

Teorema 10.2.1 (Di Dirichlet). *Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π monotona e continua a tratti in $[-\pi, \pi]$ e ivi limitata; allora si può scrivere la serie di Fourier relativa alla $f(x)$ e tale serie converge alla $f(x)$ ove questa è continua. Converge verso*

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \right]$$

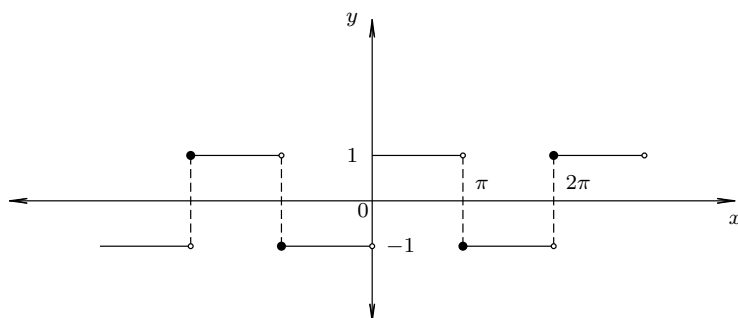
in ogni punto c di discontinuità interno all'intervallo. Converge verso

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) \right]$$

in ciascuno degli estremi. Dove la $f(x)$ è continua, la convergenza è uniforme.

Esempio 10.2.1. Si consideri l'onda quadra

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi \\ 2 & \text{se } \pi + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$



Sono banalmente verificate le ipotesi del teorema di Dirichlet.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -dx + \int_0^{\pi} dx \right] = 0$$

si può osservare che la funzione è dispari e quindi $\int_{-\pi}^0 f(x) dx = - \int_0^{\pi} f(x) dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} = 0$$

Lo stesso risultato si può ottenere osservando che, poichè $f(x)$ è dispari e $\cos nx$ è pari, il loro prodotto è dispari.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n} \right] = \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 + (-1)^{n+1}] = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \quad k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{4}{n\pi} & \text{se } n = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

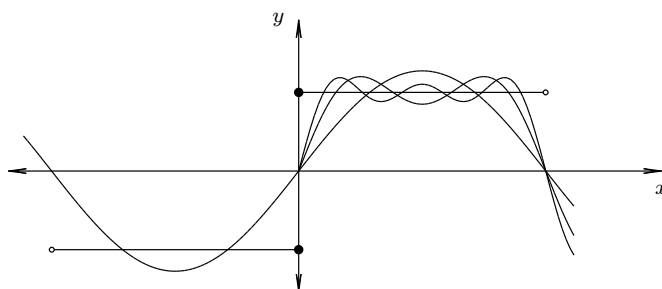
Si può osservare che, essendo $f(x)$ e $\sin nx$ entrambe dispari, il prodotto è pari e quindi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

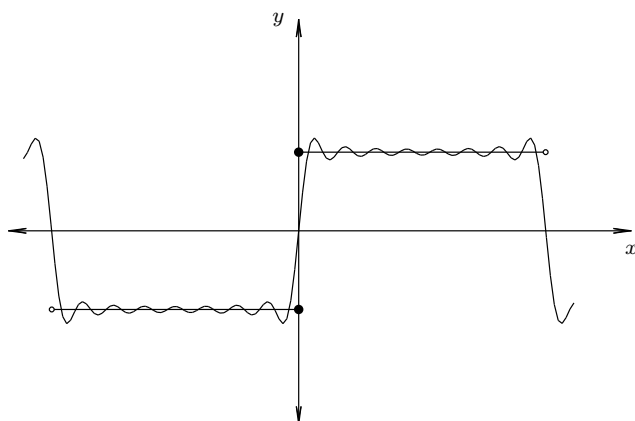
La serie di Fourier relativa all'onda quadra è:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)}$$

e converge uniformemente alla $f(x)$ per $x \neq k\pi$; converge a 0 per $x = k\pi$.



$$\begin{aligned}
s_0(x) &= \frac{4}{\pi} \sin x \\
s_1(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right] \\
s_2(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right] \\
&\vdots \\
s_n(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n} \right] \quad n = 2k + 1
\end{aligned}$$



10.3 Serie trigonometriche notevoli

Se $f(x)$ è dispari, la sua serie trigonometrica è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \quad \text{ove } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

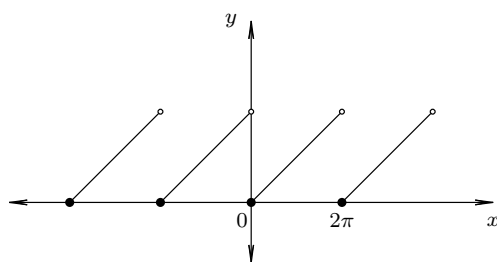
Se $f(x)$ è pari, la sua serie trigonometrica è:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \quad \text{ove } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx \quad \text{e } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Osserviamo anche che $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) \, dx$, qualunque sia $h \in \mathbb{R}$, se la funzione $f(x)$ è periodica di periodo 2π .

Esempio 10.3.1.

$$f(x) = x \quad \text{in } [0, 2\pi[\quad \text{periodica di periodo } 2\pi.$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

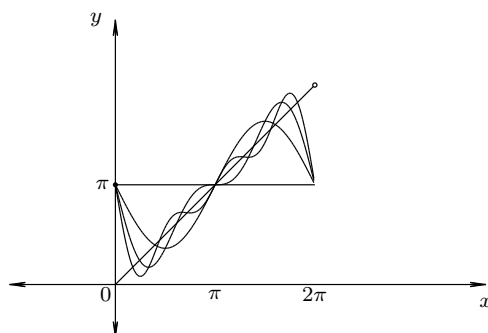
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$$

La serie diventa:

$$\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2 \sin nx}{n} \right) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin nx}{n}$$

e converge alla $f(x)$ per $x \neq 2k\pi$; converge a π per $x = 2k\pi$.



$$s_0(x) = \pi$$

$$s_1(x) = \pi - 2 \sin x$$

$$s_2(x) = \pi - 2 \left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2} \right]$$

$$\vdots$$

$$s_n(x) = \pi - 2 \left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} \right]$$

Se $x = \frac{\pi}{4}$ si ha:

$$\frac{\pi}{4} = \pi - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{4}}{n} = \pi - 2 \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} + \frac{0}{4} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5} - \frac{1}{6} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{7} + \frac{0}{8} + \dots \right]$$

$$\pi = \frac{8}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{1+8k} + \frac{1}{3+8k} - \frac{1}{5+8k} - \frac{1}{7+8k} \right) + \frac{1}{2+8k} - \frac{1}{6+8k} \right]$$

Se $x = \frac{\pi}{2}$ si ha:

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} = \pi - 2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$$

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

Osserviamo che se $f(x)$ è periodica di periodo $T = 2L$, la serie trigonometrica relativa è:

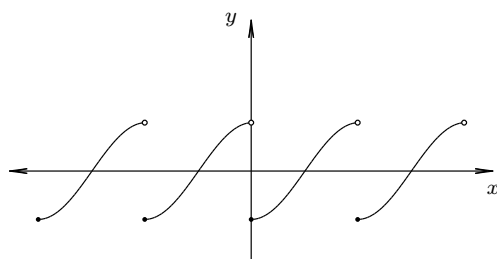
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]$$

ove

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \end{aligned}$$

Esempio 10.3.2.

$$f(x) = -\cos \sqrt{2}x \quad \text{in } 0 \leq x < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \left(T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$$



$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} -\cos \sqrt{2}x \sin \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} dx = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} -\cos \sqrt{2}x \sin 2\sqrt{2}nx dx = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \frac{1}{2} [\sin \sqrt{2}(2n+1)x + \sin \sqrt{2}(2n-1)x] dx = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{\cos \sqrt{2}(2n+1)x}{\sqrt{2}(2n+1)} + \frac{\cos \sqrt{2}(2n-1)x}{\sqrt{2}(2n-1)} \right]_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] = \frac{8}{\pi} \frac{n}{1-4n^2} \end{aligned}$$

la serie diventa:

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1-4n^2} \sin 2\sqrt{2}nx$$

e converge alla $f(x)$ per $x \neq \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$; converge a 0 per $x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$.

Osservazione

Data una funzione $f(x)$ definita in $[0, L]$, è possibile prolungarla in infiniti modi in $[-L, 0]$; sono notevoli i casi: prolungamento in modo *pari* e prolungamento in modo *dispari*.

Nel primo caso lo sviluppo in serie di Fourier sarà del tipo:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

nel secondo caso sarà del tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

10.4 Esercizi riassuntivi

Esercizio 10.4.1. Sviluppare in serie di Fourier $f(x) = x^2$ con $-1 \leq x \leq 1$ periodica con $T = 2$; calcolare quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$.

$$\left[x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \cos n\pi x; \quad \text{per } x = 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \right]$$

Esercizio 10.4.2. Sviluppare in serie di soli seni la funzione $f(x) = \cos 2x$ in $[0, \pi]$.

$$\left[\cos 2x = \begin{cases} -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1) \sin(2n+1)x}{4-(2n+1)^2} & \text{se } x \neq k\pi \\ 0 & \text{se } x = k\pi \end{cases} \right]$$

Esercizio 10.4.3. Sviluppare in serie di soli coseni $f(x) = \sin x$ in $[0, \pi]$

$$\left[\sin x = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{1 - (2n)^2} \right] \right]$$

Esercizio 10.4.4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} & \text{se } x \neq \pi + 2k\pi \\ \frac{2}{\pi} & \text{se } x = \pi + 2k\pi \end{cases} \right]$$

Esercizio 10.4.5. Sviluppare in serie di soli seni la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}x}{(2k+1)^2} \right]$$

Esercizio 10.4.6. Sviluppare in serie di soli coseni la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} \right]$$

Parte III

Equazioni differenziali

Capitolo 11

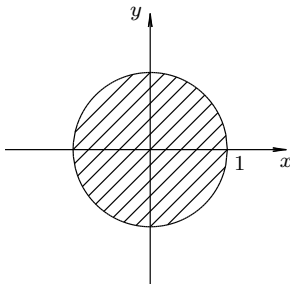
Funzioni di due variabili

11.1 Generalità

Definizione 11.1.1. Si dice *funzione reale di 2 variabili reali indipendenti* x e y e si scrive $z = f(x, y)$ ogni relazione definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tale che: $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \exists \text{ una } z \in \mathbb{R} \mid z = f(x, y)$. Si scrive anche:

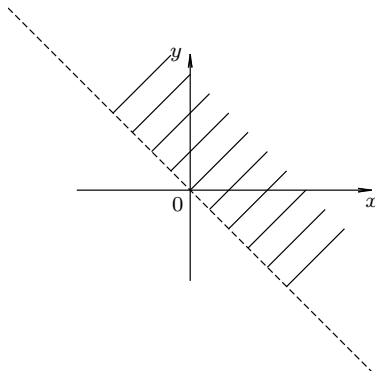
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = z \end{aligned}$$

Esempio 11.1.1. Determinare il campo di esistenza della funzione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.



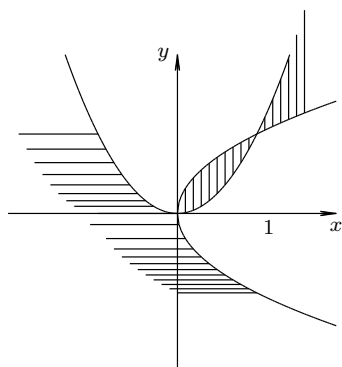
Ovviamente dovrà essere: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ cioè $x^2 + y^2 \leq 1$; il C.E. è costituito dai punti del cerchio di figura.

Esempio 11.1.2. Determinare il campo di esistenza della funzione $z = \ln(x + y)$.



Il C.E. sarà $x + y > 0$, cioè $y > -x$; geometricamente esso costituisce il semipiano tratteggiato in figura, retta origine esclusa.

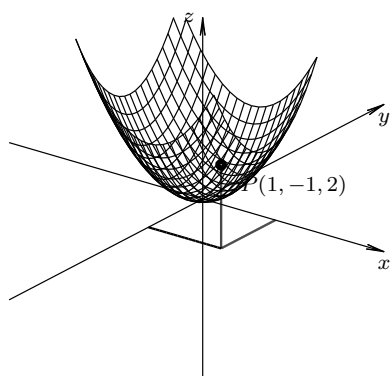
Esempio 11.1.3. Determinare il campo di esistenza della funzione $z = \sqrt{\frac{y-x^2}{x-y^2}}$.



Il C.E. sarà $\frac{y-x^2}{x-y^2} \geq 0$; geometricamente esso è composto dalle aree tratteggiate in figura.

Definizione 11.1.2. Si dice *grafico* della funzione $z = f(x, y)$ definita in un dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il luogo geometrico dei punti $P(x, y, f(x, y))$. Il grafico di una funzione di 2 variabili è dunque, generalmente, una superficie nello spazio la cui proiezione sul piano xy è D .

Esempio 11.1.4. $z = x^2 + y^2$.



C.E.: $(D) \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esempio 11.1.5. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

C.E.: $(D) x^2 + y^2 \leq 1$.

Definizione 11.1.3. Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ 2 punti di $\mathbb{R}^2$; si dice *distanza* di P_1 da P_2 e si scrive $\overline{P_1 P_2}$ o $d(P_1, P_2)$ l'espressione $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Definizione 11.1.4. Si dice *sfera aperta* di centro $P_0(x_0, y_0)$ e raggio r l'insieme

$$B(P_0, r) = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, P_0) < r\}.$$

Definizione 11.1.5. Si dice *intorno* di $P_0(x_0, y_0)$ un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ contenente una sfera aperta di centro P_0 . Si dice *intorno di infinito* P_∞ , il complementare di un intorno di P_0 .

Definizione 11.1.6. Si dice che *il limite per P che tende a P_0 di $f(x,y)$ vale k* e si scrive

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = k$$

se $\forall \epsilon > 0 \exists$ un intorno V di P_0 tale che $\forall (x,y) \in V \setminus P_0 \Rightarrow |f(x,y) - k| < \epsilon$.

Definizione 11.1.7. Si dice che *il limite per P che tende a P_0 di $f(x,y)$ vale ∞* e si scrive

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$$

se $\forall M > 0 \exists$ un intorno V di P_0 tale che $\forall (x,y) \in V \setminus P_0 \Rightarrow |f(x,y)| > M$. Se $f(x,y) > M$ il limite è $+\infty$, se $f(x,y) < -M$ il limite è $-\infty$.

Definizione 11.1.8. Si dice che *il limite per P che tende a ∞ di $f(x,y)$ vale k* e si scrive

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x,y) = k$$

se $\forall \epsilon > 0 \exists$ un intorno V di ∞ tale che $\forall (x,y) \in V \Rightarrow |f(x,y) - k| < \epsilon$.

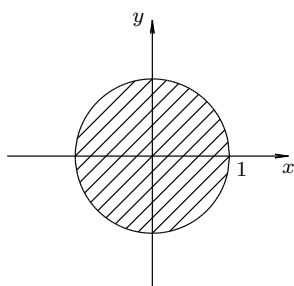
Definizione 11.1.9. Si dice che *il limite per P che tende a ∞ di $f(x,y)$ vale ∞* e si scrive

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x,y) = \infty$$

se $\forall M > 0 \exists$ un intorno V di ∞ tale che $\forall (x,y) \in V \Rightarrow |f(x,y)| > M$.

Esempio 11.1.6. Verificare che

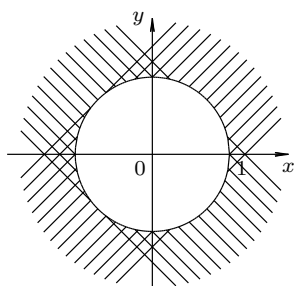
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$$



Infatti se $M > 0$ allora $\frac{1}{x^2 + y^2} > M$ cioè $x^2 + y^2 < \frac{1}{M}$ che è la parte interna della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{\frac{1}{M}}$.

Esempio 11.1.7. Verificare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

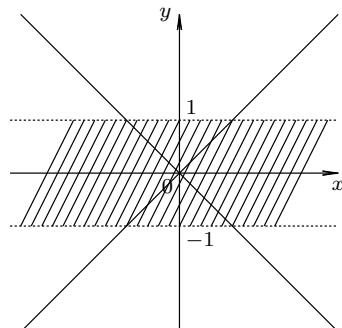


Infatti se $\epsilon > 0$ allora $\frac{1}{x^2 + y^2} < \epsilon$ cioè $x^2 + y^2 > \frac{1}{\epsilon}$ che è la parte esterna della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$.

Esempio 11.1.8. Calcolare il

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arcsin \left| \frac{y}{x} \right|}{\sqrt{1-y^2}}$$

lungo le rette $y = 0, y = x, y = 2x$.



Innanzitutto il C.E.:

$$\begin{cases} \left| \frac{y}{x} \right| \leq 1 \\ 1 - y^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{\arcsin 0}{\sqrt{1-0}} = 0, \quad \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{\arcsin 1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

in conclusione non esiste il limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ della funzione in quanto due limiti calcolati lungo due direzioni diverse sono diversi. L'ultimo limite non è calcolabile perchè la retta è esclusa dal C.E.

Definizione 11.1.10. Si dice che $z = f(x, y)$ è *continua in* $P_0(x_0, y_0)$ (di accumulazione per D) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Esempio 11.1.9. Sia

$$z = \begin{cases} \frac{2xy}{2x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Studiamone la continuità in $(0, 0)$ valutandone il limite lungo le rette $y = mx$:

$$(y = mx) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{2x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m}{2 + m^2} = \frac{2m}{2 + m^2}$$

quindi *il limite non esiste* perchè dipende da m . Osserviamo che $f(0, 0) = 0$, perciò $z = f(x, y)$ è discontinua nell'origine.

11.2 Derivate parziali

Per estendere il calcolo differenziale alle funzioni di due variabili, viene spontaneo ridursi al caso di una sola variabile indipendente dando valore costante all'altra.

Definizione 11.2.1. Sia $z = f(x, y)$ una funzione definita in $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $P_0(x_0, y_0)$ di accumulazione per D ; diremo *derivata parziale rispetto a* x della funzione $z = f(x, y)$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ il

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (y=y_0)}} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (y=y_0)}} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (h = x - x_0)$$

se esiste finito. Scriveremo anche

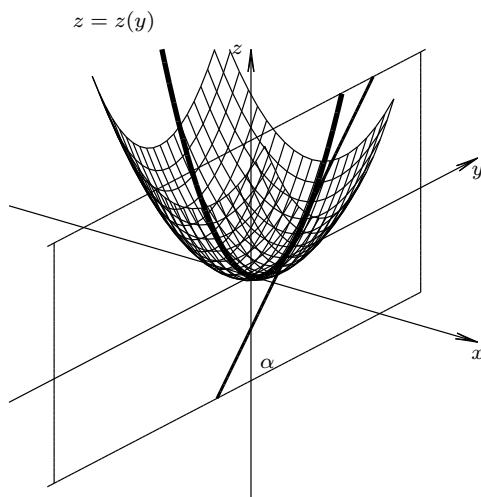
$$D_x f(x, y) \big|_{x=x_0, y=y_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (y=y_0)}} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Esempio 11.2.1. Sia $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ C.E. $x^2 + y^2 \leq 1$
Calcoliamo le derivate parziali in $P(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \left[-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right] (0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \left[-\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right] (0, 0) = 0$$

Diamo l'interpretazione geometrica delle derivate parziali: quando deriviamo rispetto a x , pensando y costante, ci poniamo in un piano dello spazio parallelo al piano xz ; la superficie $z = f(x, y)$ intersecata con tale piano ha come sezione la curva $z = f(x, y_0) = z(x)$ della quale abbiamo calcolato la derivata nel punto x_0 . Tale derivata è il coefficiente angolare della tangente alla $z = z(x)$ nel punto $(x_0, z(x_0))$ (stiamo lavorando sul piano $y = y_0$) cioè la tangente trigonometrica dell'angolo formato con la retta intersezione del piano $y = y_0$ con il piano xy . Analogamente per la derivata rispetto ad y ; ci chiediamo, però, sotto quali ipotesi sia possibile determinare il *piano tangente* alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0, z_0) .



Osservando che le derivate parziali sono funzioni di x e y è possibile derivarle ulteriormente ottenendo così: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ che si legge derivata seconda di f rispetto a x due volte; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ che si legge derivata seconda mista; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ che si legge derivata seconda di f rispetto a y due volte. Un teorema (di Schwarz) ci garantisce che le derivate miste, se continue, sono uguali.

11.3 Derivate direzionali

Il concetto di derivata parziale, che ci dà informazioni sul comportamento della funzione intersecata con piani paralleli ai piani coordinati xz e yz , può essere generalizzato facendo assumere ad ogni piano passante per (x_0, y_0, z_0) il ruolo che avevano prima i piani paralleli ai piani xz e yz . Siano $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $\sqrt{h^2 + k^2} = 1$, $P(x_0 + th, y_0 + tk)$ è il punto di $\mathbb{R}^2$ tale che la sua distanza da $P(x_0, y_0)$ è $|t|$ e la direzione della congiungente i due punti è determinata da h e k .

Definizione 11.3.1. Diremo *derivata direzionale* della $z = f(x, y)$ lungo la direzione $v(h, k)$ nel punto (x_0, y_0) il

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

se esiste finito.

Notiamo che con $v(1, 0)$ oppure $v(0, 1)$ si ottengono le derivate parziali usuali. La nozione di derivata parziale direzionale è più soddisfacente da un punto di vista geometrico di quella di derivata parziale in quanto non assegna agli assi un ruolo privilegiato. Eppure non basta ancora agli scopi del calcolo differenziale: la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

ha tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ eppure non è ivi continua.

Infatti, considerato il versore $v(\cos \alpha, \sin \alpha)$ si ricava

$$\begin{aligned} f(x_0 + th, y_0 + tk) &= f(0 + t \cos \alpha, 0 + t \sin \alpha) = \\ &= \left(\frac{t^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} \right)^2 = g(t) \end{aligned}$$

e si vede facilmente che $g'(0) = 0$; d'altra parte il $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ non esiste, in quanto calcolato lungo le parabole $y = ax^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax^2}{x^4 + a^2 x^4} \right)^2 = \left(\frac{a}{1 + a^2} \right)^2$$

è diverso per ogni a .

ESERCIZI

Esercizio 11.3.1. Calcolare le derivate parziali prime di:

1. $f(x, y) = e^{x-y}$
2. $g(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$
3. $h(x, y) = x^y$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y} \right], \left[\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \right], \left[\frac{\partial h}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = x^y \ln x \right]$$

Esercizio 11.3.2. Calcolare le derivate parziali prime e seconde di:

1. $f(x, y) = (x - y)^2$
2. $g(x, y) = \cos xy$
3. $h(x, y) = \frac{y}{1+x}$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 \right]$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x} = -y \sin xy \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -x \sin xy \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -\sin xy - xy \cos xy \right]$$

Esercizio 11.3.3. Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y) = \sqrt{1+x+2y}$ in $(0, 0)$ lungo la direzione $v \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

11.4 Teorema del differenziale totale

Definizione 11.4.1. Sia $z = f(x, y)$ una funzione da $A \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$; diremo che f è *differenziabile* in $(x_0, y_0) \in A$ se:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \right]}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

la funzione $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \right]$ si chiamerà *differenziale* della f in (x_0, y_0) e la indicheremo con $df(h, k)|_{(x_0, y_0)}$.

Teorema 11.4.1 (del differenziale totale). *Sia $z = f(x, y)$ una funzione da $A \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$; se essa ammette derivate parziali prime continue in $(x_0, y_0) \in A$ allora essa è differenziabile in (x_0, y_0) .*

Dimostrazione. Usando il teorema di Lagrange, esistono opportuni c e d con $|c - x_0| < |h|$ e $|d - y_0| < |k|$ tali che $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] + [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)] = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d)k + \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0)h$

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \right]}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \\ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d)k + \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0)h - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \right]}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \\ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] k}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \\ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left\{ \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Poichè, per la continuità delle derivate parziali prime:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{se } h \rightarrow 0 \text{ allora } c \rightarrow x_0 \\ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{se } k \rightarrow 0 \text{ allora } d \rightarrow y_0 \end{aligned}$$

e visto inoltre che le quantità $\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ e $\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ sono entrambe limitate (fra 0 e 1). $\square$

Nota

Poichè se $f(x, y) = x$, $df = dx = 1h + 0k = h$ e se $f(x, y) = y$, $df = dy = 0h + 1k = k$, in luogo di h e k scriveremo spesso dx e dy ; quindi $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Definizione 11.4.2. La funzione $w(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ da Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$, si dice *esatta* o *integrabile* se esiste una funzione differenziabile f tale che $df = w$; f si dice una *primitiva* di w .

Teorema 11.4.2. Se la funzione $w(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, con derivate parziali seconde continue, è esatta, allora

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$$

Dimostrazione. Se w è esatta, esiste f differenziabile tale che $df = w$. Ma $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ quindi

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } B = \frac{\partial f}{\partial y}. \text{ Dal teorema di Schwarz: } \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial B}{\partial x}. \quad \square$$

La condizione è, in generale, solo necessaria. Diventa anche sufficiente se si opera in un sottoinsieme chiuso e limitato di Ω in cui $A, B, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial B}{\partial x}$ siano continue.

Esempio 11.4.1. Sia $W(x, y) = 2xydx + x^2dy$; allora $A(x, y) = 2xy$ e $B(x, y) = x^2$, $\frac{\partial A}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial B}{\partial x} = 2x$.

$A, B, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial B}{\partial x}$ sono continue $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $W(x, y)$ è quindi esatta. Inoltre:

$$f(x, y) = \int 2xy dx + g(y) = x^2y + g(y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + g'(y) = B(x, y) = x^2$$

$g'(y) = 0 \quad g(y) = c$. Al variare di $c \in \mathbb{R}$ si hanno quindi le primitive di $W(x, y)$: $f(x, y) = x^2y + c$.

Esempio 11.4.2. Sia $W(x, y) = (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy$; allora $A(x, y) = y - 3x^2$ e $B(x, y) = x - 4y$, $\frac{\partial A}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial B}{\partial x} = 1$.

$A, B, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial B}{\partial x}$ sono continue $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $W(x, y)$ è quindi esatta. Inoltre:

$$f(x, y) = \int (x - 4y) dy + g(x) = xy - 2y^2 + g(x) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + g'(x) = A(x, y) = y - 3x^2$$

$g'(x) = -3x^2 \quad g(x) = -x^3 + c$. Al variare di $c \in \mathbb{R}$ si hanno quindi le primitive di $W(x, y)$: $f(x, y) = xy - 2y^2 - x^3 + c$. Si poteva operare anche col metodo cosiddetto *del raggruppamento*: $W(x, y) = (ydx + xdy) - 3x^2dx - 4ydy$, ricordando facili formule: $d(xy) = ydx + xdy$ e, ovviamente, $dx^3 = 3x^2dx$; $dy^2 = 2ydy$; si ha: $W(x, y) = d(xy) - d(x^3) - 2d(y^2) = d[xy - x^3 - 2y^2]$, da cui il risultato.

Capitolo 12

Generalità sulle equazioni differenziali

12.1 Definizioni

Definizione 12.1.1. Dicesi *equazione differenziale ordinaria di ordine n* ogni equazione del tipo:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Definizione 12.1.2. Dicesi *soluzione o integrale* dell'equazione differenziale ogni funzione $y = \phi(x)$ tale che:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

ESEMPI: $y'' + y = 0$ è una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine; $y = \sin x$ è una soluzione (o integrale) dell'equazione data poichè: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$ e $-\sin x + \sin x = 0$. Ma anche $y = \cos x$ lo è (verificarlo per esercizio) e lo sono pure funzioni del tipo $y = a \sin x + b \cos x$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$: $y' = a \cos x - b \sin x$, $y'' = -a \sin x - b \cos x$, $-a \sin x - b \cos x + a \sin x + b \cos x = 0$.

Capitolo 13

Equazioni del primo ordine

13.1 Definizioni

Definizione 13.1.1. Dicesi *equazione differenziale ordinaria del primo ordine* ogni equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (13.1)$$

Definizione 13.1.2. Dicesi *soluzione o integrale* dell'equazione differenziale 13.1.1 ogni funzione $y = \phi(x)$ tale che:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$$

Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo: $\Phi(x, y) = 0$.

Definizione 13.1.3. Dicesi *soluzione o integrale GENERALE* dell'equazione 13.1.1 una famiglia $y = \phi(x, C)$ tale che:

$$F(x, \phi(x, C), \phi'(x, C)) = 0$$

Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo: $\Phi(x, y, C) = 0$.

Definizione 13.1.4. Dicesi *soluzione o integrale PARTICOLARE* dell'equazione 13.1.1 una funzione $y = \phi(x, \bar{c})$ tale che:

$$F(x, \phi(x, \bar{c}), \phi'(x, \bar{c})) = 0$$

nella quale è stato attribuito il valore $\bar{c}$ alla costante C .

Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo: $\Phi(x, y, \bar{c}) = 0$.

La 13.1.1, se esplicitabile rispetto a y' , viene scritta nella forma:

$$y' = f(x, y) \quad (13.2)$$

Teorema 13.1.1 (Esistenza e unicità (di Cauchy)). *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (13.3)$$

ove $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sono continue in D , aperto di $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in D$, ESISTE UNICA $y = \phi(x)$ che risolve il problema.

Se (x_0, y_0) appartiene alla frontiera di D , il teorema non ci dice nulla sulla esistenza (ed eventuale unicità) della soluzione. Si possono presentare due casi: c'è una curva soluzione che passa per (x_0, y_0) e ha tutti gli altri suoi punti in D . Si tratta allora di un integrale particolare di cui si è trattato nel teorema. Oppure vi è una curva soluzione che passa per (x_0, y_0) e ha tutti i gli altri punti sulla frontiera. Si parla allora di integrale *SINGOLARE* o di frontiera¹.

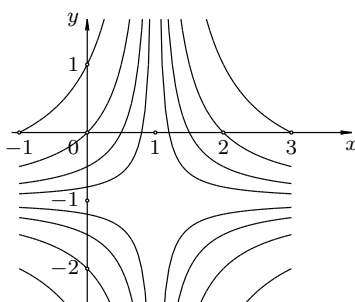
13.2 Equazioni a variabili separabili o separate

Sono equazioni del tipo $y' = A(x)B(y)$ e si possono quindi scrivere $\frac{dy}{B(y)} = A(x)dx$ che risolta da

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx + C$$

Fanno parte di questo gruppo anche le equazioni immediate del tipo $y' = f(x)$ che evidentemente pongono il problema del calcolo di un integrale indefinito: $y = \int f(x)dx + C$.

Esempio 13.2.1. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$



$$\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{1-x} \quad \ln|1+y| = -\ln|1-x| + C$$

$$\ln|(1+y)(1-x)| = C \quad (1+y)(1-x) = e^C = C_1$$

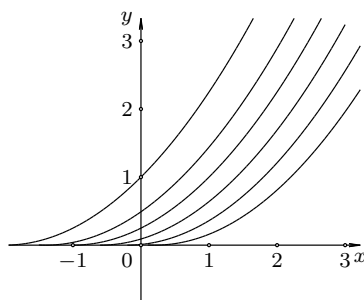
Soluzioni: $y = \frac{C_1}{1-x} - 1$ famiglia di iperboli di asintoti $x=1$ e $y=-1$.

La soluzione passante per $O(0,0)$ si ha con: $0 = \frac{C_1}{1} - 1$, cioè $C_1 = 1$ e quindi si ha la curva $y = \frac{1}{1-x} - 1$. Vista nella forma

$$y' = \frac{1+y}{1-x} = f(x, y) \quad \text{si ha} \quad \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{1}{1-x} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

si osserva che per ogni punto passa *una ed una sola* curva soluzione (per i punti del tipo $(a, -1)$ si ha la retta $y = -1$ ottenuta con $C_1 = 0$).

Esempio 13.2.2. $y' = \sqrt{y}$



$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \quad 2\sqrt{y} = \frac{x}{2} + C_1 \quad \text{essendo} \quad C_1 = \frac{C}{2}$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + C_1\right)^2 \quad \text{con } x \geq -2C_1 \quad \text{famiglia di semiparabole}$$

¹Si vedano gli esempi 13.2.1 e 13.2.2

La soluzione passante per $A(4, 1)$ si ha con $1 = \left(\frac{4}{2} + C_1\right)^2$ $C_1 = -1$ cioè la curva $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$ con $x \geq -2$. Vista nella forma

$$y' = \sqrt{y} = f(x, y) \quad \text{si ha} \quad \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$$

Si osserva che per ogni punto di D passa *una e una sola* curva soluzione; per un punto della frontiera (del tipo $(a, 0)$) passano: una curva che ha con la frontiera *solo* quel punto in comune ed è quindi ancora un integrale particolare; l'intera frontiera ($y = 0$) che, essendo soluzione dell'equazione differenziale ($y' = 0$ quindi $0 = 0$), ne è un integrale *singolare*. Osserviamo che l'integrale singolare è tangente in ogni suo punto ad una delle semiparabole soluzione: si dice che ne è *l'INVILUPPO*. Se ne poteva ottenere l'equazione derivando $y = \left(\frac{x}{2} + C_1\right)^2$ rispetto a C_1 : $0 = 2\left(\frac{x}{2} + C_1\right)$ da cui $C_1 = -\frac{x}{2}$ che, sostituito da: $y = 0$ equazione dell'involuppo.

13.3 Equazioni del tipo $y'=f(ax+by)$

Per la loro soluzione poniamo $t = ax + by$ e ricavando y si ha $y = \frac{t - ax}{b}$ da cui $y' = \frac{t' - a}{b}$ e sostituendo nell'equazione di partenza $\frac{t' - a}{b} = f(t)$ che è del tipo (ref). Essendo $y = y(x)$ è ovviamente $t = t(x)$.

Esempio 13.3.1. $y' = (x + y)^2 - (x + y) - 1$

poniamo $t = x + y \Rightarrow y = t - x \Rightarrow y' = t' - 1$ e sostituendo $t' - 1 = t^2 - t - 1$ cioè $t' = t(t - 1)$

$$\frac{dt}{t(t-1)} = dx \quad \frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \right] dt = \int dx + C \quad \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| = x + C \quad \frac{t-1}{t} = ke^x \quad k \in \mathbb{R}^* \text{ e ricordando che } t = x + y, \quad \frac{x + y - 1}{x + y} = ke^x$$

13.4 Equazioni omogenee

Definizione 13.4.1. $z = f(x, y)$ si dice *omogenea di grado α* se $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ con $t > 0$.

Esempio 13.4.1. $z = x^3 - x^2y + y^3 \arctan \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

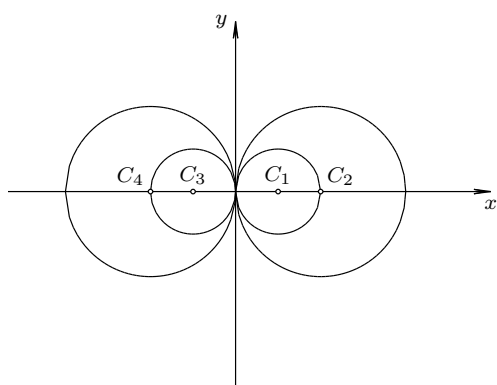
$$z(tx, ty) = t^3 x^3 - t^2 x^2 ty + t^3 y^3 \arctan \frac{\sqrt{ty}}{\sqrt{tx}} = t^3 \left[x^3 - x^2 y + y^3 \arctan \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right] = t^3 z(x, y) \quad t > 0 \quad z \text{ è omogenea di grado } 3.$$

Definizione 13.4.2. $y' = f(x, y)$ si dice *omogenea* se $f(x, y)$ è omogenea di grado 0.

Per la risoluzione poniamo $\frac{y}{x} = t$ da cui $y = xt$ e derivando $y' = t + xt'$.

Esempio 13.4.2. Data la famiglia di circonferenze $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ con centro $C(a, 0)$ e passanti per $O(0, 0)$, determinare le *traiettorie ortogonali*².

²Cioè la famiglia di curve ortogonali punto per punto alle curve della famiglia data; due curve si dicono ortogonali in un punto se hanno in questo tangenti ortogonali.



Differenziando l'equazione della famiglia, otteniamo $2x dx + 2y dy - 2a dx = 0$ cioè $(x - a)dx + y dy = 0$ cioè $y' = \frac{a - x}{y}$ e sostituendo il valore del parametro a ricavato dall'equazione della famiglia:

$$a = \frac{x^2 + y^2}{2x} y' = \frac{\frac{x^2 + y^2}{2x} - x}{y} y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

l'equazione differenziale ottenuta (che ha per integrale generale la famiglia data) esprime il coefficiente angolare (y') della tangente in ogni punto alle curve della famiglia. Le traiettorie ortogonali cercate avranno coefficiente angolare della tangente in ogni punto:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad (m_1 = -\frac{1}{m}).$$

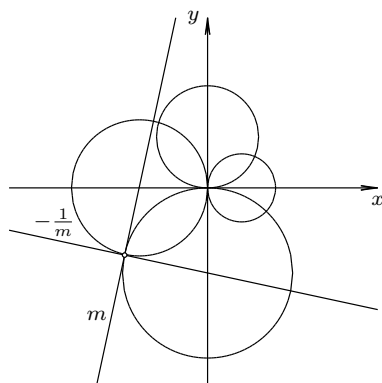
L'equazione differenziale è omogenea:

$$t = \frac{2t}{1 - t^2} \quad y = tx \quad y' = t + xt' \quad y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - (\frac{y}{x})^2} \quad t + xt' = \frac{2t}{1 - t^2} \quad t' = \frac{t(1 + t^2)}{x(1 - t^2)}$$

$$\frac{1 - t^2}{t(1 + t^2)} dt = \frac{dx}{x} \quad \frac{1 - t^2}{t(1 + t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{1 + t^2} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\int \left[\frac{1}{t} - \frac{2t}{1 + t^2} \right] dt = \int \frac{dx}{x} + C \quad \ln \left| \frac{t}{1 + t^2} \right| = \ln |x| + C \quad \frac{t}{1 + t^2} = kx \quad k \in \mathbb{R}^*$$

e sostituendo $t = \frac{y}{x}$ si ottiene: $\frac{\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = kx$; cioè $\frac{y}{x^2 + y^2} = k$, vale a dire $y = k(x^2 + y^2)$.



In forma implicita: $x^2 + y^2 - 2by = 0$ con $2b = \frac{1}{k}$.

La famiglia di traiettorie ortogonali è costituita da circonferenze con centro $D(0, b)$ e passanti per $O(0, 0)$.

13.5 Equazioni lineari

Definizione 13.5.1. Una equazione del tipo $y' + p(x)y = q(x)$ si dice *lineare*.

Se $q(x) = 0$, l'equazione diventa

$$y' + p(x)y = 0 \quad \text{lineare omogenea}$$

che, essendo anche a variabili separabili, si può scrivere:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

cioè $\ln |y| = -\int p(x) dx + C$ da cui

$$y = ke^{-\int p(x) dx}$$

Se $q(x) \neq 0$, cerchiamo soluzioni del tipo:

$$y = k(x)e^{-\int p(x) dx}$$

e derivando:

$$y' = k'(x)e^{-\int p(x) dx} + k(x)e^{-\int p(x) dx}[-p(x)] = e^{-\int p(x) dx} [(k'(x) - k(x)p(x))]$$

sostituendo:

$$e^{-\int p(x) dx} [(k'(x) - k(x)p(x)) + p(x)k(x)] = q(x)$$

$$k'(x) = q(x)e^{\int p(x) dx}$$

da cui

$$k(x) = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare è:

$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C \right] e^{-\int p(x) dx}$$

Esempio 13.5.1. $xy' - y = x^2 \cos x$

$$y' - \frac{1}{x}y = x \cos x \quad p(x) = -\frac{1}{x} \quad q(x) = x \cos x$$

$$\begin{aligned} y &= \left[\int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C \right] e^{-\int p(x) dx} = \left[\int x \cos x e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + C \right] e^{\int \frac{1}{x} dx} = \\ &= \left[\int x \cos x \frac{1}{x} dx + C \right] x = \left[\int \cos x dx + C \right] x = x[\sin x + C] \end{aligned}$$

Osservazione

in realtà

$$\begin{aligned} \int -\frac{1}{x} dx &= -\ln |x| + C_1 & e^{\int -\frac{1}{x} dx} &= e^{-\ln |x| + C_1} = e^{\ln |x|^{-1}} e^{C_1} = \frac{C_2}{|x|} \\ e^{\int \frac{1}{x} dx} &= e^{\ln x - C_1} = e^{\ln |x|} e^{-C_1} = \frac{|x|}{C_2} \end{aligned}$$

così nella formula si sarebbe ottenuto

$$y = \left[\int x \cos x \frac{C_2}{|x|} dx + C \right] \frac{|x|}{C_2} = \begin{cases} \left[\int C_2 \cos x dx + C \right] \frac{x}{C_2} = x \left[\sin x + \frac{C}{C_2} \right] & \text{se } x > 0 \\ \left[\int -C_2 \cos x dx + C \right] \left(-\frac{x}{C_2} \right) = x \left[\sin x - \frac{C}{C_2} \right] & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e quindi, per $x \neq 0$, l'integrale generale è sempre $y = x[\sin x + k] \quad k \in \mathbb{R}$.

13.6 Equazioni di Bernoulli

Sono equazioni del tipo

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

e sono facilmente riconducibili alle lineari.

Supponiamo $n \neq 0$ e $n \neq 1$ altrimenti l'equazione è lineare; dividiamo entrambi i membri per y^n , ottenendo:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x) \quad \text{vedremo a parte il caso } y = 0$$

Poniamo $\frac{1}{y^n} = z$ e deriviamo: $(1-n)y^{-n}y' = z'$; cioè $\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$ e quindi, sostituendo: $\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$ e perciò $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$ che è lineare. Risolvendo l'equazione lineare in funzione di z e poi sostituendo nella $\frac{1}{y^n} = z$ otteniamo la soluzione cercata.

Esempio 13.6.1. $y' - y = e^x \sqrt{x}$

dividiamo per $\sqrt{y}$: $\frac{y'}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} = e^x \quad y \neq 0$; poniamo $\sqrt{y} = z$ e deriviamo:

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = z' \quad \text{e sostituendo: } 2z' - z = e^x \quad z' - \frac{1}{2}z = \frac{e^x}{2}$$

$$z = \left[\int e^x e^{-\frac{1}{2} \int dx} dx + C \right] e^{\frac{1}{2} \int dx} = \left[\int \frac{e^x}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx + C \right] e^{\frac{x}{2}} = \left[e^{\frac{x}{2}} + C \right] e^{\frac{x}{2}} = e^x + C e^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{cioè } \sqrt{y} = e^x + C e^{\frac{x}{2}} \quad y = \left(e^x + C e^{\frac{x}{2}} \right)^2 \quad \text{con } e^x + C e^{\frac{x}{2}} \geq 0.$$

Inoltre: $y = 0 \quad y' = 0$ soddisfa l'equazione differenziale di partenza ma non è ottenibile per alcun valore dell'integrale generale; sarà quindi un *integrale singolare*. Considerando l'equazione scritta in forma normale:

$$y' = y + e^x \sqrt{y} = f(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \frac{e^x}{2\sqrt{y}} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

effettivamente $y = 0$ costituisce la frontiera di D .

13.7 Equazioni esatte

13.8 Equazioni di forma particolare

Capitolo 14

Equazioni del secondo ordine

14.1 Generalità

Definizione 14.1.1. Dicesi *equazione differenziale ordinaria del secondo ordine* ogni equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \quad (14.1)$$

Definizione 14.1.2. Dicesi *soluzione o integrale* dell'equazione (14.1) ogni funzione:

$$y = \phi(x) \quad \text{tale che } F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x)) = 0$$

Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo $\Phi(x, y) = 0$.

Definizione 14.1.3. Dicesi *soluzione o integrale GENERALE* dell'equazione (14.1) una famiglia $y = \phi(x, c_1, c_2)$ che verifica la (14.1) per ogni valore di c_1 e c_2 .

Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo $\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$.

Definizione 14.1.4. Dicesi *soluzione o integrale PARTICOLARE* dell'equazione (14.1) una funzione $y = \phi(x, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$ che verifica la (14.1) e nella quale sono stati attribuiti i valori $\bar{c}_1$ e $\bar{c}_2$ alle costanti c_1 e c_2 . Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo $\Phi(x, y, \bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$.

Nel caso la (14.1) sia esplicitabile rispetto alla y'' e si possa scrivere nella forma

$$y'' = f(x, y, y') \quad (14.2)$$

vale il

Teorema 14.1.1 (Esistenza e unicità (di Cauchy)). *Dato il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (14.3)$$

ove $f(x, y_0, y'_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ e $\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ sono continue in D , aperto di $\mathbb{R}^3$ e $(x_0, y_0, y'_0) \in D$
allora ESISTE UNICA $y = \phi(x)$ che risolve il problema (14.3)

14.2 Equazioni del tipo $y''=f(x)$

Sono di integrazione immediata:

$$y'' = f(x) \quad \text{da cui } y' = \int f(x) dx \quad \text{e quindi } y = \int \left[\int f(x) dx + C_1 \right] dx = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

Esempio 14.2.1. Supponiamo che un corpo di massa m cada sotto la sola azione del proprio peso, da un'altezza h con attrito trascurabile. Dalla seconda legge della dinamica, $F = ma$, si ha:

$$mg = m \frac{d^2 z}{dt^2} \quad \text{cioè} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = g \quad \frac{dz}{dt} = gt + C_1$$

e finalmente

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

$$\text{Qualora le condizioni iniziali fossero: } \begin{cases} z(0) = 0 \\ \frac{dz}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{si avrebbe} \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad z = z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

E' possibile ricavare l'istante di arrivo al suolo:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \bar{t} = \sqrt{2\frac{h}{g}}$$

Altrettanto facile ricavare la velocità del corpo nell'istante di arrivo al suolo:

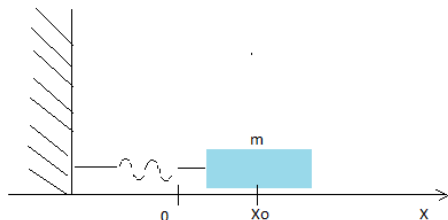
$$v(\bar{t}) = \frac{dz}{dt}(\bar{t}) = g\sqrt{2\frac{h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

14.3 Equazioni del tipo $y''=f(x,y')$

Si pone $y' = p$ da cui $y'' = p'$. L'equazione diventa: $p' = f(x, p)$ che è del primo ordine. La soluzione è rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} p' = f(x, p) \\ y' = p \end{cases}$$

Esempio 14.3.1. Corpo sottoposto ad una forza elastica di richiamo.



Fissiamo come asse x la retta lungo cui si sposta il corpo - supposto di massa m - e l'origine sia la posizione di equilibrio della molla. Supponiamo che all'istante $t_0 = 0$ il corpo, spostato dall'origine di una quantità x , sia lasciato libero di muoversi. La forza elastica di richiamo (forza di Hooke) agisce proporzionalmente allo spostamento: $F = -kx$ $k > 0$.

Dalla seconda legge della dinamica:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{cioè} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

poniamo $\frac{k}{m} = \omega^2$ e $\frac{dx}{dt} = v$ da cui:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

L'equazione diventa:

$$v \frac{dv}{dx} = -\omega^2 x \quad \text{ovvero} \quad \int v dv = \int -\omega^2 x dx + C_1 \quad \frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + C_1 \quad \text{con } C_1 > 0$$

$$v^2 = -\omega^2 x^2 + k_1^2 \quad \text{con } k_1 > 0 \quad v = \pm \sqrt{k_1^2 - \omega^2 x^2} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega x}{k_1}\right)^2}$$

e ricordando che $\frac{dx}{dt} = v$:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{k_1^2 - \omega^2 x^2} \quad \frac{1}{\sqrt{k_1^2 - \omega^2 x^2}} dx = \pm dt \quad \frac{1}{k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega x}{k_1}\right)^2}} dx = \pm dt \quad \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega x}{k_1} = \pm t + C_2$$

$$\arcsin \frac{\omega x}{k_1} = \pm \omega t + k_2 \quad \frac{\omega x}{k_1} = \sin(k_2 \pm \omega t) \quad x = \frac{k_1}{\omega} \sin(k_2 \pm \omega t)$$

$$\text{Supponendo che le condizioni iniziali siano: } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{si ottiene} \quad \begin{cases} k_1 = \omega x_0 \\ k_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{e finalmente } x = x(t) = x_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega t\right) = x_0 \cos \omega t$$

Abbiamo così trovato l'equazione del moto di un corpo (sottoposto all'azione di una forza elastica di richiamo) attorno alla posizione di equilibrio (*moto armonico*).

14.4 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Sono del tipo

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Qualora $f(x) = 0$, si dicono *lineari OMOGENEE*. Occupiamoci di queste.

14.4.1 Equazioni lineari omogenee

Risolviamo l'equazione $y'' + py' + qy = 0$; cerchiamo una soluzione del tipo $y = e^{\lambda x}$; si avrà:

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

sostituendo si avrà:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q\lambda e^{\lambda x} = 0 \quad e^{\lambda x} [\lambda^2 + p\lambda + q] = 0$$

$e^{\lambda x}$ non si annulla mai, perciò deduciamo che deve essere:

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \quad \text{detta equazione caratteristica}$$

1° Caso : l'equazione caratteristica ammette radici reali distinte λ_1, λ_2 . Allora: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni dell'equazione data. Esse sono inoltre, linearmente indipendenti $\left(\frac{y_1}{y_2} \neq k \in \mathbb{R}\right)$ e pure una loro combinazione lineare $\alpha y_1 + \beta y_2$ lo è¹:

$$\alpha y_1'' + \beta y_2'' + p\alpha y_1' + p\beta y_2' + q\alpha y_1 + q\beta y_2 = \alpha [y_1'' + py_1' + qy_1] + \beta [y_2'' + py_2' + qy_2] = 0$$

Quindi, l'integrale generale è dato da:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2° Caso : l'equazione caratteristica ammette radici reali coincidenti. Allora: $y_1 = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione data $\left(\lambda = -\frac{p}{2}\right)$. Cerchiamo un'altra soluzione linearmente indipendente dalla prima, del tipo: $y_2 = u(x)e^{\lambda x}$

$$y_2' = u'(x)e^{\lambda x} + u(x)\lambda e^{\lambda x} \quad y_2'' = u''(x)e^{\lambda x} + u'(x)\lambda e^{\lambda x} + u'(x)\lambda e^{\lambda x} + u(x)\lambda^2 e^{\lambda x}$$

Sostituendo si ha:

$$e^{\lambda x} [u''(x) + 2u'(x)\lambda + u(x)\lambda^2 + pu'(x) + pu(x)\lambda + qu(x)] = 0$$

$$u''(x) + u'(x)[2\lambda + p] + u(x)[\lambda^2 + p\lambda + q] = 0 \quad \text{ma} \quad 2\lambda + p = 0 \quad \text{e} \quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Quindi:

$$u''(x) = 0 \Rightarrow u'(x) = k_1 \Rightarrow u(x) = k_1 x + k_2 \quad \text{fra tutte scegliamo} \quad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui } y_2 = x e^{\lambda x}$$

Quindi, l'integrale generale è dato da:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x} (C_1 + C_2 x)$$

3° Caso : l'equazione caratteristica ammette radici complesse coniugate $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Allora: $y_1 = e^{\alpha + i\beta x}$ e $y_2 = e^{\alpha - i\beta x}$ sono soluzioni dell'equazione data. Usando le formule di Eulero:

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

sommando e sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$y_3 = 2e^{\alpha x} \cos \beta x \quad y_4 = 2ie^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{che sono ancora soluzioni}$$

$$\text{ma lo sono anche: } y_5 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{e} \quad y_6 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Quindi, l'integrale generale è dato da:

$$y = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$$

¹ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha lo stesso risultato. Dimostrarlo per esercizio.

Esempio 14.4.1. Riprendiamo l'esercizio del corpo sottoposto a forza elastica di richiamo.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

L'integrale generale è:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad \frac{dx}{dt} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$$

Dalle condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{dx(0)}{dt} = 0 \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

L'integrale particolare che risolve il problema della massa-molla è quindi:

$$x = x_0 \cos \omega t$$

Esempio 14.4.2. Corpo sottoposto ad una forza elastica di richiamo e una forza d'attrito proporzionale alla velocità.

14.4.2 Equazioni lineari non omogenee

Sono del tipo

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad f(x) \neq 0 \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (14.4)$$

L'integrale generale è dato da $y = y_0 + \bar{y}$, essendo y_0 l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (14.5)$$

e $\bar{y}$ una soluzione particolare dell'equazione non omogenea 14.4. Infatti

$$y = y_0 + \bar{y} \quad y' = y_0' + \bar{y}' \quad y'' = y_0'' + \bar{y}''$$

Sostituendo:

$$y_0'' + \bar{y}'' + p(y_0' + \bar{y}') + q(y_0 + \bar{y}) = (y_0'' + py_0' + qy_0) + (\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y}) = 0 + \bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = f(x)$$

come si voleva. Il problema si traduce quindi nel ricavare $\bar{y}$.

Esamineremo solo alcuni casi notevoli.

1. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n . L'equazione diventa

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x)$$

Cerchiamo $\bar{y} = e^{\alpha x} Q_n(x)$ dove $Q_n(x)$ è a sua volta un polinomio di grado n .

$$\bar{y}' = e^{\alpha x} [\alpha Q_n(x) + Q_n'(x)] \quad \bar{y}'' = e^{\alpha x} [\alpha^2 Q_n(x) + 2\alpha Q_n'(x) + Q_n''(x)]$$

Sostituendo:

$$e^{\alpha x} [\alpha^2 Q_n(x) + 2\alpha Q_n'(x) + Q_n''(x) + p\alpha Q_n(x) + pQ_n'(x) + qQ_n(x)] = e^{\alpha x} P_n(x)$$

$$[\alpha^2 + p\alpha + q] Q_n(x) + [2\alpha + p] Q_n'(x) + Q_n''(x) = P_n(x) \quad (14.6)$$

Possiamo distinguere i sottocasi:

1.A α non è soluzione di $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (equazione caratteristica dell'omogenea associata). Allora $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ e l'uguaglianza scritta sopra permette, in base al principio di identità dei polinomi, di individuare $Q_n(x)$.

1.B α è soluzione semplice di $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Allora $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ ma $2\alpha + p \neq 0$ e quindi l'uguaglianza 14.6 diventa:

$$[2\alpha + p] Q'_n(x) + Q''_n(x) = P_n(x)$$

da questa sono ricavabili solo n equazioni nelle $n + 1$ incognite (i coefficienti di $Q_n(x)$). Cerchiamo $\bar{y} = xe^{\alpha x} Q_n(x)$

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= e^{\alpha x} [Q_n(x) + \alpha x Q_n(x) + x Q'_n(x)] \\ \bar{y}'' &= e^{\alpha x} [2\alpha Q_n(x) + 2Q'_n(x) + \alpha^2 x Q_n(x) + 2\alpha x Q'_n(x) + x Q''_n(x)]\end{aligned}$$

sostituendo, dopo semplici calcoli:

$$[2\alpha + p] Q_n(x) + 2Q'_n(x) + [2\alpha + p] x Q'_n(x) + x Q''_n(x) = P_n(x) \quad (14.7)$$

da cui si conclude per il principio di identità dei polinomi.

1.C α è soluzione doppia di $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Allora $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ e $2\alpha + p = 0$ e quindi l'uguaglianza 14.6 diventa:

$$Q''_n(x) = P_n(x)$$

e nello stesso modo, la 14.7 diventa:

$$2Q'_n(x) + x Q''_n(x) = P_n(x)$$

e non sono sufficienti per ricavare gli $n + 1$ coefficienti di $Q_n(x)$. Cerchiamo $\bar{y} = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$. Procedendo come nel caso precedente, dopo facili calcoli, si ottiene:

$$2Q_n(x) + 4x Q'_n(x) + x^2 Q''_n(x) = P_n(x)$$

da cui si conclude per il principio di identità dei polinomi.

Riassumiamo quanto visto in questo schema:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \begin{cases} \alpha \text{ non è radice di } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 & \bar{y} = e^{\alpha x} Q_n(x) \\ \alpha \text{ è radice semplice di } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 & \bar{y} = x e^{\alpha x} Q_n(x) \\ \alpha \text{ è radice doppia di } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 & \bar{y} = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x) \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

L'equazione diventa

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

Cerchiamo $\bar{y} = e^{\alpha x} [R_N(x) \cos \beta x + S_N(x) \sin \beta x]$ dove $N = \max(n, m)$.

Procedendo come nei casi precedenti, dopo aver calcolato $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$ e sostituito nell'equazione di partenza, dopo facili calcoli, si ottiene:

$$\begin{aligned}
e^{\alpha x} \left[(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q)R_N(x) \cos \beta x + (\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q)S_N(x) \sin \beta x + (2\alpha + p)R'_N(x) \cos \beta x + \right. \\
\left. + (2\alpha + p)S'_N(x) \sin \beta x + R''_N(x) \cos \beta x + S''_N(x) \sin \beta x + \beta(2\alpha + p)S_N(x) \cos \beta x - \right. \\
\left. - \beta(2\alpha + p)R_N(x) \sin \beta x + 2\beta S'_N(x) \cos \beta x - 2\beta R'_N(x) \sin \beta x \right] = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]
\end{aligned}
\tag{14.8}$$

Possiamo distinguere i sottocasi:

1.A $\alpha = \pm i\beta$ non sono soluzioni di $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Allora $\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q \neq 0$ e la 14.8 permette di ricavare i coefficienti di $R_N(x)$ e $S_N(x)$ in base al principio di identità dei polinomi.

1.B $\alpha = \pm i\beta$ sono soluzioni di $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Allora $\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q = 0$ e la 14.8 diventa

$$[R''_N(x) \cos \beta x + S''_N(x) \sin \beta x + 2\beta S'_N(x) \cos \beta x - 2\beta R'_N(x) \sin \beta x] = P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$$

che non permette di ricavare i coefficienti di $R_N(x)$ e $S_N(x)$ col principio di identità dei polinomi. Cerchiamo $\bar{y} = xe^{\alpha x} [R_N(x) \cos \beta x + S_N(x) \sin \beta x]$, con procedimento analogo al caso precedente. Riassumendo:

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

$ \begin{cases} \alpha \pm i\beta \text{ non sono radici di } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 & \bar{y} = e^{\alpha x} [R_N(x) \cos \beta x + S_N(x) \sin \beta x] \\ \alpha \pm i\beta \text{ sono radici di } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 & \bar{y} = xe^{\alpha x} [R_N(x) \cos \beta x + S_N(x) \sin \beta x] \end{cases} $	dove $N = \max(n, m)$
---	-----------------------

Capitolo 15

Esercizi

15.1 Esercizi generali

Esercizio 15.1.1. Determinare l'ordine delle seguenti equazioni differenziali.

1. $dy + (xy - \cos x)dx = 0$ [primo ordine]
2. $y'' + xy'' + 2y(y')^3 + xy = 0$ [secondo ordine]
3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - (y''')^4 + x = 0$ [terzo ordine]
4. $e^{y''} + xy'' + y = x$ [secondo ordine]

Esercizio 15.1.2. Dimostrare che le funzioni sulla colonna di destra sono soluzioni delle equazioni corrispondenti della colonna di sinistra. Attenzione al campo di esistenza delle singole soluzioni.

1. $y' + y = 0$ e^{-x}
2. $y' = e^x$ $y = e^x$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
4. $f'(x) = f''(x)$ $y = e^x + 2$

Esercizio 15.1.3. Stabilire se le funzioni definite implicitamente nella colonna di destra sono soluzioni delle equazioni della colonna di sinistra.

1. $y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0$ $y^2 - 1 = (x + 2)^2$
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ $x^2 + y^2 + 1 = 0$

15.2 Esercizi sulle equazioni del primo ordine

Esercizio 15.2.1. Risolvere le equazioni separabili

1. $xy' - y = y^3$ □

2. $xyy' = 1 - x^2$ □

3. $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ □

Esercizio 15.2.2. Risolvere le equazioni separabili determinando le soluzioni particolari che verificano le condizioni iniziali indicate a fianco.

1. $(1 + e^x)yy' = e^x$ $y = 1, x = 0$

2. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$ $y = 1, x = 0$

3. $y' \sin x = y \ln y$ $y = 1, x = \frac{\pi}{2}$

Esercizio 15.2.3. Risolvere le equazioni omogenee.

1. $y' = \frac{y}{x} - 1$ □

2. $(x - y)ydx - x^2dy = 0$ □

Esercizio 15.2.4. Risolvere le equazioni lineari e di Bernoulli.

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$ □

2. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$ □

3. $xy' + y = y^2 \ln x$ $y \ln x + y + cxy = 1$

Esercizio 15.2.5. Risolvere le equazioni lineari e di Bernoulli determinando le soluzioni particolari che verificano le condizioni iniziali indicate a fianco.

1. $xy' + y - e^x = 0$ $y = b, x = a$

2. $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$ $y = 0, x = 0$

15.3 Problemi sulle equazioni del primo ordine

Esercizio 15.3.1. Determinare la funzione di crescita di una popolazione supponendo:

1. la crescita è proporzionale alla popolazione attuale;
2. la crescita è proporzionale oltre che alla popolazione attuale anche alla quantità $A - P$, dove $P = P(t)$ è la funzione cercata e A una costante sperimentale.

Soluzioni:

1. $P(t) = P_0 e^{kt}$ dove $P_0 = P(0)$

2. $P(t) = \frac{A}{1 + \left(\frac{A}{P_0}\right) e^{-kt}}$ e si osserva che il grafico di P varia a seconda che $\begin{cases} P_0 > A \\ \frac{A}{2} < P_0 < A \\ 0 < P_0 < \frac{A}{2} \end{cases}$

Esercizio 15.3.2. Determinare la funzione di variazione della temperatura di un corpo inizialmente di valore T_0 , immerso in un ambiente a temperatura T_1 , sapendo che la variazione è proporzionale al dislivello di temperatura corpo-ambiente.

Soluzione: $T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{\pm kt}$

Esercizio 15.3.3. Quanto tempo occorre affinché la temperatura di un corpo riscaldato a 100° scenda a 30° , se la temperatura ambiente è di 20° e nei primi 20 minuti si è raffreddato fino a 60° ?

Soluzione: $t = 1^h$

Esercizio 15.3.4. Determinare la funzione di variazione di massa di un materiale radioattivo supponendola proporzionale alla massa nell'istante considerato.

Soluzione: $m(t) = m_0 e^{-kt}$

Esercizio 15.3.5. Sapendo che dopo 1600 anni la massa del radio si è dimezzata, determinare la percentuale di radio disintegrata in 100 anni.

Soluzione: $\frac{m_0 - m_0 2^{-\frac{1}{16}}}{m_0} 100$

Esercizio 15.3.6. Determinare la funzione di variazione di pressione atmosferica con l'altezza, supponendo che la pressione diminuisca proporzionalmente alla pressione esistente all'altezza considerata.

Soluzione: $p(h) = p_0 e^{-kh}$

Esercizio 15.3.7. Trovare la relazione esistente tra pressione dell'aria ed altezza sapendo che al livello del mare la pressione è di 1 kg per cm^2 mentre a 500 m di altezza è di 0.92 kg per cm^2 .

Soluzione: $p(h) = \left(\frac{23}{25}\right)^{\frac{h}{500}} m \frac{kg}{cm^2}$

Esercizio 15.3.8. Determinare la funzione di variazione dell'altezza di un liquido in un serbatoio supponendo che esso entri con velocità costante V_0 (rubinetto aperto) ed esca con velocità proporzionale all'altezza all'istante considerato.

Soluzione: $h(t) = \frac{V_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{s}t}\right)$ ove s è l'area di base del serbatoio.

Esercizio 15.3.9. Determinare le curve per le quali è costante la distanza di una qualunque tangente da un punto fisso.

Soluzione: integrale generale: $y = kx + h$ dove h è costante d'integrazione e k è costante dipendente dal problema.

Integrale singolare: $x^2 + y^2 = d^2$ dove d = distanza costante.

Esercizio 15.3.10. Determinare la configurazione di equilibrio di una catena sottoposta al suo peso.

Soluzione: il problema non è di facile soluzione; si suggerisce di scomporre la tensione agente su ciascun elemento infinitesimo d_1 della catena nelle 2 componenti orizzontale (deve essere poi costante per l'equilibrio) e verticale (la sua variazione deve bilanciare il peso).

$y(x) = \frac{H}{w} \left(\cosh \frac{w}{H} x - 1 \right)$ dove H = componenete orizzontale della tensione, w = peso per unità di lunghezza. La curva che si ottiene è detta *CATENARIA*.

Esercizio 15.3.11. Determinare la curva la cui lunghezza è uguale all'area sottesa e passante per $A(0, 1)$.

Soluzione: osserviamo che la lunghezza di una curva di estremi $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ è data da $\int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$
 $y = \cosh x$

15.4 Esercizi sulle equazioni del secondo ordine

Esercizio 15.4.1. Risolvere le equazioni lineari.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$ □

2. $y'' + 2y' + y = 0$ □

3. $y = y'' + y'$ □

4. $y'' - 4y' + 4y = x^2$ □

5. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ □

6. $y'' + y = \cos x$ □

7. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$ □

15.5 Problemi sulle equazioni del secondo ordine

Esercizio 15.5.1. Determinare il moto del pendolo semplice di lunghezza l supponendo che all'istante iniziale l'angolo descritto sia α_0 e la velocità angolare sia nulla.

Soluzione: $\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t$ dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Esercizio 15.5.2. Determinare la funzione di scarica di un condensatore in serie in un circuito LC sulle cui armature all'istante iniziale vi sia la carica q_0 e supponendo che l'intensità iniziale della corrente sia nulla.

Soluzione: $q(t) = q_0 \cos \omega t$ dove $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Esercizio 15.5.3. Determinare il moto dell'esercizio 15.5.1 quando la massa è sottoposta anche ad una forza esterna del tipo $F(t) = \sin \Omega t$.

Soluzione: se $\omega \neq \Omega$ $\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t - \frac{\frac{\Omega}{\omega}}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t$
 se $\omega = \Omega$ $\alpha(t) = \left(\alpha_0 - \frac{t}{2\omega} \right) \cos \omega t + \frac{1}{2\omega^2} \sin \omega t$

Esercizio 15.5.4. Il circuito LC del problema 15.5.2 venga collegato ad un generatore che eroga una d.d.p. $V(t) = \sin \Omega t$.

Soluzione: analoghe all'esercizio precedente.

Esercizio 15.5.5. La massa del problema 15.5.1 sia sottoposta, oltre che alla forza di richiamo anche ad una forza d'attrito proporzionale alla velocità.

Soluzione:
 Detto $S = \frac{h}{2ml}$ e $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ dove h = costante di proporzionalità dell'attrito
 se $S^2 > \omega^2$ $\alpha(t) = C_1 e^{-(S+T)t} + C_2 e^{-(S-T)t}$ dove $T = \sqrt{S^2 - \omega^2}$
 se $S^2 = \omega^2$ $\alpha(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-St}$
 se $S^2 < \omega^2$ $\alpha(t) = e^{-St} (C_1 \cos Tt + C_2 \sin Tt)$ dove $T = \sqrt{S^2 - \omega^2}$

Esercizio 15.5.6. Nel circuito del problema 15.5.2 vi sia anche inserita in serie una resistenza R (RLC).

Soluzione: come sopra.

Esercizio 15.5.7. Un uomo si muove in linea retta con velocità costante V e il suo cane cerca di raggiungerlo puntando in ogni istante nella direzione del padrone con velocità v costante in modulo. Determinare la traiettoria del moto del cane.

Suggerimento: la posizione dell'uomo sia, all'istante iniziale, nell'origine di un sistema di riferimento; quella del cane nel punto $P(a, 0)$. La velocità V dell'uomo abbia direzione e verso dell'asse y . Ricordiamo che $t = \frac{s}{v}$.

Soluzione: $y(x) = \frac{x^{1+\frac{V}{v}}}{2a^{\frac{V}{v}}(1+\frac{V}{v})} - \frac{x^{1-\frac{V}{v}}}{2a^{-\frac{V}{v}}(1-\frac{V}{v})} + \frac{a^{\frac{V}{v}}}{1-\frac{V^2}{v^2}}$ Osserviamo che l'incontro uomo-cane avviene in $y(0)$ da cui si deduce che $V < v$.

Parte IV

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Algebra Li- neare - Integrazione - Matematica 5 - Statistica descrittiva - Sistemi dinamici
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II - Teoria della probabilità III
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5
Lucia Perissinotto	Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5
Pietro Sinico	Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II Geometria I - Geometria II

STUDENTI

Matteo Alessandrini	
classe VA 2012-2013	Algebra Lineare
Simone Simonella	
classe IVA 2014-2015	Sistemi dinamici

La presente opera è distribuita secondo le attribuzioni della [Creative Commons](#).

La versione corrente è la 

In particolare chi vuole redistribuire in qualsiasi modo l'opera, deve garantire la presenza della prima di copertina e della intera Parte Contributi composta dai paragrafi: Contributi e licenza.

Dipartimento di Matematica
ITIS V. Volterra
San Donà di Piave