

# Matematica 1

Dipartimento di Matematica



ITIS V. Volterra  
San Donà di Piave

Versione [2015-16]



# Indice

<b>I</b>	<b>ALGEBRA</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>ALGEBRA 0</b>	<b>2</b>
1.1	Introduzione . . . . .	2
1.2	Insiemi numerici . . . . .	2
1.3	Operazioni e proprietà. Terminologia . . . . .	2
1.4	Potenze ad esponente naturale ed intero . . . . .	4
1.5	Massimo comun divisore e minimo comune multiplo tra numeri naturali . . . . .	5
1.6	Espressioni aritmetiche . . . . .	6
1.7	Esercizi riepilogativi . . . . .	9
<b>2</b>	<b>INSIEMI</b>	<b>11</b>
2.1	Introduzione . . . . .	11
2.2	Rappresentazioni . . . . .	11
2.2.1	Rappresentazione per elencazione . . . . .	11
2.2.2	Rappresentazione per proprietà caratteristica . . . . .	12
2.2.3	Rappresentazione grafica di Eulero-Venn . . . . .	14
2.3	Sottoinsiemi . . . . .	15
2.4	Operazioni . . . . .	17
2.4.1	Intersezione . . . . .	17
2.4.2	Unione . . . . .	18
2.4.3	Differenza . . . . .	19
2.4.4	Differenza simmetrica . . . . .	20
2.4.5	Complementare . . . . .	20
2.4.6	Prodotto cartesiano . . . . .	21
2.5	Esercizi riepilogativi . . . . .	25
<b>3</b>	<b>MONOMI</b>	<b>27</b>
3.1	Introduzione . . . . .	27
3.2	Monomi . . . . .	27
3.3	Operazioni tra monomi . . . . .	29
<b>4</b>	<b>POLINOMI</b>	<b>32</b>
4.1	Polinomi . . . . .	32
4.2	Operazioni . . . . .	34
4.3	Prodotti notevoli . . . . .	34
4.4	Divisione . . . . .	38
4.5	Divisione con la Regola di Ruffini . . . . .	41
4.6	Esercizi a tema . . . . .	44
4.7	Esercizi riepilogativi . . . . .	46

<b>5</b>	<b>SCOMPOSIZIONI</b>	<b>49</b>
5.1	Scomposizioni . . . . .	49
5.2	Sintesi . . . . .	57
5.3	Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di polinomi . . . . .	58
5.4	Esercizi a tema . . . . .	59
5.5	Esercizi riepilogativi . . . . .	62
<b>6</b>	<b>FRAZIONI ALGEBRICHE</b>	<b>67</b>
6.1	Frazioni algebriche . . . . .	67
6.2	Operazioni . . . . .	68
6.3	Esercizi riepilogativi . . . . .	74
<b>7</b>	<b>EQUAZIONI</b>	<b>78</b>
7.1	Introduzione . . . . .	78
7.2	Risoluzione di equazioni in una incognita . . . . .	80
7.3	Equazioni di primo grado . . . . .	84
7.4	Particolari equazioni riconducibili a quelle di primo grado . . . . .	90
7.5	Problemi di primo grado . . . . .	93
7.6	Esercizi riepilogativi . . . . .	96
<b>II</b>	<b>GEOMETRIA</b>	<b>100</b>
<b>8</b>	<b>La geometria razionale</b>	<b>101</b>
8.1	Logica elementare . . . . .	101
8.2	Concetti primitivi e definizioni . . . . .	102
8.3	Postulati e teoremi . . . . .	103
<b>9</b>	<b>I Postulati della Geometria</b>	<b>106</b>
9.1	Postulati di appartenenza . . . . .	106
9.2	Postulati dell'ordine . . . . .	109
9.3	Postulato di partizione del piano . . . . .	113
9.4	Postulati di congruenza . . . . .	113
<b>10</b>	<b>I criteri di congruenza per i triangoli</b>	<b>124</b>
10.1	Definizione e classificazione dei triangoli . . . . .	124
10.2	I criteri di congruenza dei triangoli . . . . .	127
<b>11</b>	<b>Proprietà fondamentali dei triangoli</b>	<b>131</b>
11.1	Prime proprietà dei triangoli isosceli . . . . .	131
11.2	Il primo teorema dell'angolo esterno . . . . .	136
11.3	Teoremi delle disuguaglianze triangolari . . . . .	139
<b>12</b>	<b>Perpendicolarità</b>	<b>144</b>
12.1	Definizioni e prime applicazioni . . . . .	144
12.2	Le simmetrie centrale e assiale . . . . .	146
12.3	Ulteriori proprietà dei triangoli isosceli . . . . .	150
12.4	Costruzioni con riga e compasso . . . . .	152
12.5	Luoghi geometrici . . . . .	155

---

<b>13</b>	<b>Parallelismo</b>	<b>160</b>
13.1	Definizioni e Postulato delle parallele . . . . .	160
13.2	Criteri di parallelismo . . . . .	161
13.3	Teorema degli angoli interni di un triangolo . . . . .	166
<b>14</b>	<b>Quadrilateri notevoli</b>	<b>170</b>
14.1	Il trapezio . . . . .	170
14.2	Il parallelogramma . . . . .	173
14.3	Il rombo . . . . .	178
14.4	Il rettangolo . . . . .	181
14.5	Il quadrato . . . . .	183
14.6	I teoremi dei punti medi . . . . .	184
<b>III</b>	<b>Contributi</b>	<b>191</b>

Parte I

**ALGEBRA**

# Capitolo 1

## ALGEBRA 0

### 1.1 Introduzione

In questo capitolo vengono richiamati e sintetizzati i principali argomenti di aritmetica affrontati alla scuola media, prerequisiti indispensabili per affrontare il nuovo corso di studi.

### 1.2 Insiemi numerici

Distinguiamo i seguenti insiemi numerici le cui notazioni e rappresentazioni saranno sviluppate nel capitolo sugli insiemi.

Insieme dei numeri naturali:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Insieme dei numeri interi:  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

Insieme dei numeri razionali:  $\mathbb{Q} = \{\text{frazioni con denominatore diverso da zero}\}$

*Osservazione.*

- Ogni numero intero è anche un razionale in quanto si può pensare come una frazione con denominatore uno.
- Ogni numero razionale può essere scritto in forma decimale eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore. Viceversa, un numero decimale finito o illimitato periodico può essere scritto sotto forma di frazione (*frazione generatrice*) utilizzando le regole studiate alla scuola media che vengono proposte nei seguenti esempi:

$$2,35 = \frac{235}{100} = \frac{47}{20}$$

$$0,012 = \frac{12}{1000} = \frac{3}{250}$$

$$5,\overline{36} = \frac{536 - 5}{99} = \frac{531}{99} = \frac{59}{11}$$

$$13,2\overline{8} = \frac{1328 - 132}{90} = \frac{1196}{90} = \frac{598}{45}$$

$$1,\overline{9} = \frac{19 - 1}{9} = \frac{18}{9} = 2 (!)$$

### 1.3 Operazioni e proprietà. Terminologia

Le operazioni tra numeri e le relative proprietà possono essere riassunte nella seguente tabella:

<i>OPERAZIONI</i>	<i>TERMINI</i>	<i>RISULTATO</i>	<i>PROPIETA' PRINCIPALI</i>
<i>addizione</i>	<i>addendi</i>	<i>somma</i>	<i>commutativa, associativa</i>
<i>sottrazione</i>	<i>minuendo sottraendo</i>	<i>differenza</i>	
<i>moltiplicazione</i>	<i>fattori</i>	<i>prodotto</i>	<i>commutativa, associativa distributiva legge di annullamento di un prodotto (*)</i>
<i>divisione</i>	<i>dividendo divisore</i>	<i>quoziente</i>	<i>distributiva</i>

(\*) Legge di annullamento di un prodotto: il prodotto di fattori è nullo se e solo se è nullo almeno uno di essi.

*Osservazione.* In una divisione il divisore deve essere diverso da zero; se ciò non accade l'operazione è priva di significato.

E' opportuno ricordare che, oltre alla divisione il cui quoziente è un numero decimale, esiste anche la divisione euclidea (la prima incontrata alle scuole elementari), così definita:

**Definizione 1.3.1.** Eseguire la divisione  $P : D$  significa determinare due numeri  $Q$  (quoziente) ed  $R$  (resto) tali che

$$P = D \cdot Q + R \quad \text{con} \quad R < D$$

**Esempio 1.3.1.** Nella divisione  $20 : 3$  si ottiene  $Q = 6$  ed  $R = 2$  infatti  $20 = 3 \cdot 6 + 2$  con  $2 < 3$

**Definizione 1.3.2.** Due numeri diversi da zero si dicono *concordi* se hanno lo stesso segno, *discordi* se hanno segno diverso.

**Definizione 1.3.3.** Due numeri si dicono *opposti* quando la loro somma è zero

**Esempio 1.3.2.** Gli opposti di  $-3, 5, \frac{3}{2}, -\frac{1}{7}$  sono rispettivamente:  $3, -5, -\frac{3}{2}, \frac{1}{7}$

**Definizione 1.3.4.** Due numeri si dicono *reciproci* (o inversi uno dell'altro) se il loro prodotto è uno.

**Esempio 1.3.3.** I reciproci di  $1, -\frac{3}{5}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{5}$  sono rispettivamente:  $1, -\frac{5}{3}, \frac{2}{7}, -5$

*Osservazione.* Non esiste il reciproco dello zero in quanto nessun numero moltiplicato per esso dà uno.

**Definizione 1.3.5.** Si dice *modulo* (o *valore assoluto*) di un numero, il numero stesso se esso è non negativo, il suo opposto in caso contrario.

Indicato con  $|x|$  il modulo di  $x$ , si ha:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

## 1.4 Potenze ad esponente naturale ed intero

**Definizione 1.4.1.** Dato  $a$  numero razionale ed  $n$  numero naturale maggiore od uguale a 2, si definisce *potenza  $n$ -esima di  $a$*  il prodotto di  $n$  fattori uguali ad  $a$ :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}} \text{ e si assume } a^1 = a$$

$a$  si chiama base della potenza,  $n$  esponente.

**Esempio 1.4.1.**

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$
- $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Proprietà:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$  con  $a \neq 0$  e  $n > m$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $a^n : b^n = (a : b)^n$  con  $b \neq 0$

Per convenzione si assume  $a^0 = 1$  purchè  $a \neq 0$ ; ciò estende la seconda proprietà al caso  $n = m$  infatti  $a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = 1$

Per convenzione si assume che  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  purchè  $a \neq 0$ ; ciò, oltre che dare significato alle potenze con esponente intero, è compatibile con le proprietà ed estende la seconda al caso  $n < m$  infatti:  $a^{-n} = a^{0-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n}$

**Esempio 1.4.2.**

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{49}} = \frac{49}{9}$
- $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$
- $\left(\frac{6}{13}\right)^{-1} = \frac{13}{6}$

*Osservazione.*

- Dalla definizione di potenza e dalle convenzioni assunte si deduce che la potenza  $0^0$  è priva di significato.
- La potenza di un numero diverso da zero con esponente pari è sempre positiva, quella con esponente dispari mantiene il segno della base.



## 1.5 Massimo comun divisore e minimo comune multiplo tra numeri naturali

**Definizione 1.5.1.** Un numero naturale si dice *primo* se è diverso da 1 ed è divisibile solo per se stesso e per 1.

**Definizione 1.5.2.** Un numero naturale si dice *scomposto in fattori primi* se è scritto come prodotto di potenze di numeri primi.

**Esempio 1.5.1.** Il numero 360 si può scrivere, come prodotto di fattori, in più modi:

$$360 = \begin{cases} 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 2^3 \cdot 3 \cdot 15 \\ \dots \end{cases}$$

solo  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$  è la scomposizione in fattori primi di 360 perchè le altre scritte contengono anche numeri non primi (rispettivamente 4 e 15).

E' possibile dimostrare che la scomposizione in fattori primi di un numero è unica (ciò non sarebbe vero se anche l'1 venisse annoverato tra i numeri primi).

**Definizione 1.5.3.** Si dice *massimo comun divisore* (M.C.D.) tra numeri naturali, il più grande divisore comune.

Per calcolare il M.C.D. è sufficiente scomporre in fattori primi i numeri dati e moltiplicare i fattori comuni con il minimo esponente.

**Definizione 1.5.4.** Si dice *minimo comune multiplo* (m.c.m.) tra numeri naturali non nulli, il più piccolo multiplo comune, diverso da zero.

Per calcolare il m.c.m. è sufficiente scomporre in fattori primi i numeri dati e moltiplicare i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente.

**Esempio 1.5.2.**

- $M.C.D.(8, 12, 4) = 2^2 = 4$       $m.c.m.(8, 12, 4) = 2^3 \cdot 3 = 24$   
essendo  $8 = 2^3$ ,  $12 = 2^2 \cdot 3$ ,  $4 = 2^2$
- $M.C.D.(50, 63) = 1$       $m.c.m.(50, 63) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150$   
essendo  $50 = 2 \cdot 5^2$ ,  $63 = 3^2 \cdot 7$

**Definizione 1.5.5.** Due numeri naturali  $a$  e  $b$  si dicono *primi tra loro* (coprimi) se  $M.C.D.(a, b) = 1$

*Osservazione.* Due numeri primi sono primi tra loro, ma due numeri primi tra loro non sono necessariamente numeri primi (50 e 63 sono primi tra loro, ma non primi)

## 1.6 Espressioni aritmetiche

In una espressione aritmetica le operazioni devono essere svolte nel seguente ordine:

- potenze
- moltiplicazioni e divisioni (nell'ordine sinistra destra)
- addizioni e sottrazioni

Nel caso si intenda eseguire le operazioni in ordine diverso è necessario utilizzare le parentesi.

### Esempio 1.6.1.

- $2^3 \cdot 5 - 6 \cdot 7 : 3 + 4 = 8 \cdot 5 - 42 : 3 + 4 = 40 - 14 + 4 = 30$
- $2^3 \cdot 5 - 6 \cdot 7 : (3 + 4) = 8 \cdot 5 - 42 : 7 = 40 - 6 = 34$

Proponiamo alcuni esercizi svolti riguardanti la semplificazione di espressioni aritmetiche:

### Esempio 1.6.2.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( 5 - \frac{3}{2} \right) : \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{16} \right) \right] : \frac{7}{4} \cdot \left( 2 + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( 1 + \frac{1}{2} \right)^2 = \\
 & = \left[ \frac{3}{16} \cdot \left( \frac{7}{2} \right) : \left( \frac{12-3}{16} \right) \right] : \frac{7}{4} \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^2 - \left( \frac{3}{2} \right)^2 \\
 & = \left[ \frac{21}{32} : \left( \frac{9}{16} \right) \right] : \frac{7}{4} \cdot \frac{25}{4} - \frac{9}{4} \\
 & = \left[ \frac{21^1}{32_2} \cdot \frac{16^1}{9_3} \right] : \frac{7}{4} \cdot \frac{25}{4} - \frac{9}{4} \\
 & = \left[ \frac{7^1}{6} \right] \cdot \frac{4^1}{7_1} \cdot \frac{25}{4_1} - \frac{9}{4} \\
 & = \frac{25}{6} - \frac{9}{4} \\
 & = \frac{50 - 27}{12} \\
 & = \frac{23}{12}
 \end{aligned}$$

**Esempio 1.6.3.**

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[ (0, \bar{5} + 2, \bar{3}) (0, \bar{5} + 0, 4) : \frac{13}{2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) \right]^2 \left( -\frac{2}{5} \right)^{-4} \right\}^{-1} = \\
& = \left\{ \left[ \left( \frac{5-0}{9} + \frac{23-2}{9} \right) \left( \frac{5}{10} + \frac{4}{10} \right) : \frac{13}{2} - \left( \frac{5+2+1}{10} \right) \right]^2 \left( -\frac{2}{5} \right)^{-4} \right\}^{-1} \\
& = \left\{ \left[ \left( \frac{5}{9} + \frac{21}{9} \right) \left( \frac{9}{10} \right) \cdot \frac{2}{13} - \frac{8^4}{10^5} \right]^2 \left( -\frac{2}{5} \right)^{-4} \right\}^{-1} \\
& = \left\{ \left[ \frac{26^2}{9^1} \cdot \frac{9^1}{10^5} \cdot \frac{2^1}{13^1} - \frac{4}{5} \right]^2 \left( -\frac{2}{5} \right)^{-4} \right\}^{-1} \\
& = \left\{ \left[ \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \right]^2 \left( -\frac{2}{5} \right)^{-4} \right\}^{-1} \\
& = \left\{ \left[ -\frac{2}{5} \right]^2 \left( -\frac{2}{5} \right)^{-4} \right\}^{-1} \\
& = \left\{ \left[ -\frac{2}{5} \right]^{-2} \right\}^{-1} \\
& = \left\{ -\frac{2}{5} \right\}^2 \\
& = \frac{4}{25}
\end{aligned}$$

**Esempio 1.6.4.**

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{5}{7} \right)^{-3} : \left( -\frac{7}{5} \right)^2 \cdot \left( \frac{7}{5} \right)^{-2} : \left( -\frac{5}{7} \right)^{-3} = \\
& = \left( \frac{5}{7} \right)^{-3} : \left( \frac{5}{7} \right)^{-2} \cdot \left( \frac{5}{7} \right)^2 : \left( -\frac{5}{7} \right)^{-3} \\
& = \left( \frac{5}{7} \right)^{-3+2+2} : \left( -\frac{5}{7} \right)^{-3} \\
& = \left( \frac{5}{7} \right)^1 : \left[ -\left( \frac{5}{7} \right)^{-3} \right] \\
& = -\left( \frac{5}{7} \right)^{1+3} \\
& = -\left( \frac{5}{7} \right)^4
\end{aligned}$$

**Esempio 1.6.5.**

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3} : 2^{-3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^{-4} : 2^{11} = \\
& = \left( -\frac{1}{2} \right)^{-6} : 2^{-3} \cdot (-2)^4 : 2^{11} \\
& = 2^6 : 2^{-3} \cdot 2^4 : 2^{11} \\
& = 2^{6+3+4-11} \\
& = 2^2 = 4
\end{aligned}$$

**Esempio 1.6.6.**

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{2}{7} \right)^2 \left( \frac{14}{5} \right)^2 : \left( -\frac{4}{5} \right)^3 + 1 = \\
& = \left( \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{5} \right)^2 : \left( -\frac{4}{5} \right)^3 + 1 \\
& = \left( \frac{4}{5} \right)^2 : \left( -\frac{4}{5} \right)^3 + 1 \\
& = - \left( \frac{4}{5} \right)^{2-3} + 1 \\
& = - \left( \frac{4}{5} \right)^{-1} + 1 \\
& = -\frac{5}{4} + 1 \\
& = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

**Esempio 1.6.7.**

$$\begin{aligned}
& \frac{16}{81} \left( \frac{2}{3} \right)^{-7} \left( -\frac{3}{2} \right)^3 : \left( \frac{9}{4} \right)^3 = \\
& = \left( \frac{2}{3} \right)^4 \left( \frac{2}{3} \right)^{-7} \left( -\frac{2}{3} \right)^{-3} : \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{-2} \right]^3 \\
& = - \left( \frac{2}{3} \right)^4 \left( \frac{2}{3} \right)^{-7} \left( \frac{2}{3} \right)^{-3} : \left( \frac{2}{3} \right)^{-6} \\
& = - \left( \frac{2}{3} \right)^{4-7-3+6} \\
& = - \left( \frac{2}{3} \right)^0 = -1
\end{aligned}$$

## 1.7 Esercizi riepilogativi

1.  $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2} + 1 - \frac{9}{8}\right) + \left(\frac{3}{25} + \frac{1}{3}\right)$   $\left[\frac{16}{25}\right]$
2.  $\left(\frac{1}{3} + 1\right) : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{10}\right)$   $\left[\frac{11}{5}\right]$
3.  $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^3 \cdot \left[\left(\frac{2}{15}\right)^3\right]^2 : \left(\frac{1}{9}\right)^4$   $\left[\frac{1}{81}\right]$
4.  $\left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$   $\left[\frac{1}{4}\right]$
5.  $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} : \left(-\frac{5}{4}\right)^{-6}$   $\left[\frac{5}{4}\right]$
6.  $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2 \cdot 2^{15}$   $[2^{21}]$
7.  $(3, \bar{5} - 2, 0\bar{5} + 0, 1) : \frac{8}{5} + (6 - 0, 8 \cdot 1, \bar{3}) : 0, \bar{6} - (2 + 1, 3) (2 - 0, \bar{6})$   $[4]$
8.  $\left(-\frac{3}{5}\right) \left(\frac{7}{6} - 2\right) \left[2 - \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right] + \frac{14}{5} \left(\frac{2}{7} - 1\right)$   $\left[-\frac{5}{6}\right]$
9.  $\left(4 - \frac{1}{2}\right)^{-2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^0 : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{3} - 3^{-2}\right)\right]^3 \right\}$   $\left[\frac{1}{2}\right]$
10.  $\left\{ \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2^2}\right]^2 \left[1 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2\right] - 1 \right\} : \frac{91}{3} + 1$   $\left[\frac{4}{3}\right]$
11.  $\left(\frac{3}{5} - 0, \bar{4}\right) \frac{9}{2} + (2, \bar{3} - 0, 5) \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4} \cdot 0, \bar{3} + \frac{1}{3}\right) \frac{3}{7} - 0, 05$   $\left[\frac{3}{2}\right]$
12.  $\frac{(0, \bar{1} + 0, 2\bar{7}) : \left(0, 8\bar{3} - \frac{7}{9}\right)}{0, \bar{2}\bar{7} + 1, \bar{6} + 0, \bar{3}\bar{9}}$   $[3]$
13.  $\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 : \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)$   $\left[-\frac{13}{12}\right]$
14.  $\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2\right]^3 : \frac{3^6}{2^{12}}$   $[1]$
15.  $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^{-1} \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : \left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-2}$   $\left[-\frac{1}{3}\right]$
16.  $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} \left(-\frac{2}{5}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2\right] : \left[(-1)^{-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}\right] + 2(-3)^{-2}$   $\left[\frac{1}{4}\right]$
17.  $-(-0, 5)^2 \cdot \frac{2}{3} - 1 + \left[(-0, 4 + 0, 5)^2 : (0, 1)^2 + \frac{2}{(-3)^2}\right] \cdot (-0, 5)^2$   $\left[-\frac{31}{36}\right]$

18.  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left\{ \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] : \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] \right\} : \left(2 + \frac{4}{9}\right) - \frac{3}{4}$   $\left[\frac{1}{4}\right]$
19.  $\left\{ \left[ \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{9}{11}\right) \right] : \left(\frac{7}{9} - \frac{1}{3}\right) \right\} \left(\frac{4}{3} - \frac{14}{11}\right)$   $\left[-\frac{1}{9}\right]$
20.  $(-2)(-1+2)^3 - (-1)[-1-2(2)^1]^3 - 2[-2-(2)]^3$  [1]
21.  $\left\{ - \left[ \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}\right)^3 : \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{5}\right)^2 \right]^3 : \left\{ \left[ \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right)^{-2} \right]^{-1} \right\}^6 \right.$   $[-1]$
22.  $\frac{\left(\frac{7}{3}\right)^5 : \left(\frac{7}{3}\right)^6 + \frac{4}{7}(2)^3}{\left\{ \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 \right] \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3} \right\}^3} + 4$   $[-1]$
23.  $\frac{(8^5 \cdot 2^3)^4 : 4^4}{8^5 : 16^2}$   $[2^{57}]$
24.  $\frac{\left[ \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^7 \right]^3 : \left(\frac{1}{27}\right)^3}{3^4 : 3^7}$   $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{45}\right]$
25.  $\left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 : \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{9} \right]^2 : \left(-\frac{1}{3}\right)^3$   $\left[-\frac{1}{3}\right]$
26.  $\frac{\left(-2 + \frac{1}{2}\right) \left[ 0,3 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} - 0,2\right) \right]}{2,5 - \left(8 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{4}{5}\right)}$   $\left[-\frac{1}{2}\right]$
27.  $\left[ (35^3)^{-2} : (7^2)^{-3} \right]^{-3} (5^4)^2 : \left[ (15^3)^{-2} : (3^{-2})^3 \right]^{-4} : 5^2$  [1]
28.  $-\frac{3}{2} : \left(-3 + \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{9}{8}\right) : \left(-\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right) + \frac{8}{5} : \left(-\frac{2}{3} - 2\right)$   $\left[-\frac{1}{10}\right]$
29.  $\frac{\left(\frac{11}{3} + \frac{7}{9}\right) : (-8) + \frac{1}{5}}{\left[ \left(\frac{11}{2} - \frac{3}{5}\right) - \frac{7}{5} \right] : \left[ \left(1 + \frac{1}{3}\right) \frac{7}{8} \right] - 3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4}}{3 - \frac{1}{5}}$   $[impossibile]$
30.  $\frac{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \left(4 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 \left(3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}$  [1]

# Capitolo 2

## INSIEMI

### 2.1 Introduzione

Il concetto di insieme è un concetto primitivo; scegliamo dunque di non darne una definizione esplicita. Con il termine *insieme* intendiamo intuitivamente un raggruppamento o una collezione di oggetti, di natura qualsiasi, detti *elementi*.

Un insieme si dice *ben definito* cioè "Insieme da un punto di vista matematico" se si può stabilire con "assoluta certezza" se un oggetto gli appartiene o no.

#### Esempio 2.1.1.

1. L'insieme degli insegnanti di matematica dell'ITIS è un insieme ben definito.
2. L'insieme degli insegnanti di matematica simpatici dell'ITIS non è ben definito perchè uno stesso insegnante può risultare simpatico ad alcuni alunni e non ad altri.

**Esercizio 2.1.1.** Stabilire quali dei seguenti è un insieme da un punto di vista matematico:

1. L'insieme degli alunni dell'ITIS "Volterra".
2. L'insieme delle alunne più belle dell'ITIS "Volterra".
3. L'insieme dei numeri grandi.
4. L'insieme dei divisori di 10.
5. L'insieme dei calciatori che hanno realizzato pochi goal.
6. L'insieme dei calciatori che hanno realizzato almeno un goal.

### 2.2 Rappresentazioni

Per rappresentare un insieme si utilizzano diverse simbologie:

#### 2.2.1 Rappresentazione per elencazione

La rappresentazione per elencazione consiste nello scrivere entro parentesi graffe tutti gli elementi dell'insieme separati da " ," o da " ; , "

**Esempio 2.2.1.**  $\{3, 7, 9\}$  è la rappresentazione per elencazione dell'insieme delle cifre del numero 9373

*Osservazione.* Un oggetto che compare più volte non va ripetuto.

Gli insiemi vengono solitamente *etichettati* utilizzando le prime lettere dell'alfabeto maiuscolo. Rifacendoci all'esempio 2.2.1 si può scrivere  $A = \{3, 7, 9\}$ . Per indicare che un elemento appartiene ad un insieme useremo il simbolo  $\in$ ; in caso contrario il simbolo  $\notin$ .

Con riferimento all'esempio 2.2.1 si scrive:

$$7 \in \{3, 7, 9\} \quad \text{oppure} \quad 7 \in A$$

(si noti la convenienza dell'etichetta  $A$  usata)

$$5 \notin A$$

Se vogliamo rappresentare l'insieme delle lettere dell'alfabeto si conviene di scrivere:

$$B = \{a, b, c, d, \dots, z\}$$

per evitare di elencare tutti gli elementi. (maggiore è il numero di elementi dell'insieme e più è evidente l'utilità di una tale convenzione).

**Esempio 2.2.2.** Dato

$$C = \{a, 1, \{2, *\}\}$$

possiamo notare che ad esso appartengono 3 elementi e dunque scriviamo

$$a \in C, \quad 1 \in C, \quad \{2, *\} \in C$$

*Osservazione.* Gli elementi di un insieme non sono necessariamente dello stesso "tipo" e tra essi vi può essere anche un insieme. Nell'esempio 2.2.2 all'insieme  $C$  appartiene l'insieme  $\{2, *\}$ . Si nota perciò che  $2 \notin C$  ma  $2$  appartiene ad un elemento di  $C$ .

**Definizione 2.2.1.** Si dice *insieme vuoto* un insieme privo di elementi.

La rappresentazione per elencazione dell'insieme vuoto è  $\{\}$ , esso viene etichettato con il simbolo  $\emptyset$

**Definizione 2.2.2.** Si dice *cardinalità* di un insieme  $A$  il numero degli elementi che gli appartengono. Essa si indica con  $|A|$ .

Se il numero degli elementi di un insieme è finito si dice che l'insieme ha cardinalità finita, in caso contrario che ha cardinalità infinita.

In riferimento all'esempio 2.2.2 si scrive  $|C| = 3$  (la cardinalità di un insieme finito è un numero!)

Due esempi importanti di insiemi numerici di cardinalità infinita sono l'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  e l'insieme dei numeri interi  $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ .

**Esercizio 2.2.1.** Scrivere la rappresentazione per elencazione dei seguenti insiemi:

1. L'insieme dei numeri interi compresi tra  $-2$  escluso e  $3$  compreso.
2. L'insieme dei numeri naturali compresi tra  $-2$  incluso e  $3$  escluso.
3. L'insieme dei numeri naturali multipli di  $3$ .
4. L'insieme dei numeri naturali minori di  $100$  che sono potenze di  $5$ .
5. L'insieme dei numeri interi il cui quadrato è minore di  $16$ .
6. L'insieme dei numeri interi il cui valore assoluto è  $7$  oppure  $5$ .
7. L'insieme dei numeri naturali maggiori di  $10$ .

## 2.2.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica

La rappresentazione per proprietà caratteristica consiste nell'esplicitare una proprietà che caratterizza tutti e soli gli elementi dell'insieme.

**Esempio 2.2.3.** Utilizzando la rappresentazione per caratteristica, l'insieme  $D = \{1, 2, 4, 8\}$  può essere scritto come

$$D = \{x \text{ tale che } x \text{ è un divisore naturale di } 8\}$$

dove  $x$  indica un elemento generico dell'insieme.



Possiamo notare che la proprietà caratteristica individuata non è l'unica. L'insieme  $D$  può, infatti, essere scritto anche

$$D = \{x \text{ tale che } x \text{ è una potenza naturale di } 2 \text{ minore o uguale ad } 8\}$$

o usando il simbolismo matematico

$$D = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 8\}$$

*Osservazione.* Per determinare la proprietà caratteristica di un insieme non è sufficiente individuare una proprietà di cui godono tutti gli elementi di un insieme perchè potrebbero non essere i soli ad averla.

**Esempio 2.2.4.** Dato l'insieme  $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  se scrivessimo  $E = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$  non avremmo individuato la proprietà caratteristica perchè con tale scrittura anche il numero 16 apparterebbe all'insieme e ciò è palesemente errato. La scrittura corretta è invece:

$$E = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}, x \leq 12\}$$

oppure

$$E = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}, n \leq 6\}$$

dove è chiaramente esplicitato che gli elementi di  $E$  sono tutti e soli i multipli naturali di 2 minori o uguali di 12.

Un ulteriore importante esempio di insieme numerico è l'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

In  $\mathbb{N}$  e in  $\mathbb{Z}$  è possibile definire il concetto di precedente e successivo di un elemento  $x$ , rispettivamente  $x - 1$  e  $x + 1$ , in quanto tra  $x - 1$  ed  $x$  (così come tra  $x$  e  $x + 1$ ) non esistono altri elementi di tali insiemi. (È bene precisare che in  $\mathbb{N}$  il precedente di  $x$  è definito solo se  $x \neq 0$ )

Diversamente in  $\mathbb{Q}$  non è possibile parlare di precedente o di successivo di un elemento infatti:

**Teorema 2.2.1.** *Dati 2 elementi qualunque di  $\mathbb{Q}$  diversi tra loro, esiste un terzo elemento di  $\mathbb{Q}$ , compreso tra essi.*

Usando la simbologia matematica :

$$\underbrace{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, x_1 < x_2}_{\text{Ipotesi}} \quad \underbrace{\exists x_3 \in \mathbb{Q}}_{\text{Tesi 1}} \mid \underbrace{x_1 < x_3}_{\text{Tesi 2}} \underbrace{x_3 < x_2}_{\text{Tesi 3}}$$

*Dim.* Siano  $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$  con  $x_1 < x_2$  allora

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1}; \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z} \quad q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$$

Consideriamo  $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  allora

$$x_3 = \frac{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}{2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2 q_1 q_2} \quad \text{con} \quad p_1 q_2 + p_2 q_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 0 \neq 2 q_1 q_2 \in \mathbb{Z}$$

quindi  $x_3 \in \mathbb{Q}$  (*Tesi 1*)

Essendo per ipotesi  $x_1 < x_2$  allora  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$  dunque (portando le frazioni allo stesso denominatore)

$$\frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} < \frac{p_2 q_1}{q_2 q_1} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2 q_1 q_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} + \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} \right) \stackrel{\text{per (2.1)}}{>} \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} + \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} \right) = \frac{p_1}{q_1} = x_1 \quad \text{cioè} \quad x_3 > x_1 \quad (\text{Tesi 2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2 q_1 q_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} + \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} \right) \stackrel{\text{per (2.1)}}{<} \frac{1}{2} \left( \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} + \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} \right) = \frac{p_2}{q_2} = x_2 \quad \text{cioè} \quad x_3 < x_2 \quad (\text{Tesi 3}) \end{aligned}$$

□

**Corollario 2.2.1.** *Dati due elementi  $x_1$  e  $x_2$  di  $\mathbb{Q}$ , con  $x_1 \neq x_2$ , esistono infiniti elementi di  $\mathbb{Q}$  compresi tra loro.*

*Dimostrazione.* Per il teorema 2.1  $\exists x_3 \in \mathbb{Q} \mid x_1 < x_3 < x_2$

Ora, considerando  $x_1$  e  $x_3$ , per il teorema 2.1  $\exists x_4 \in \mathbb{Q} \mid x_1 < x_4 < x_3$

E' facile convincerci che, ripetendo tale ragionamento si avrà :

$$x_1 < \dots < x_5 < x_4 < x_3 < x_2$$

□

**Esercizio 2.2.2.** Determinare la rappresentazione per elencazione dei seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$$

$$B = \{x \mid x = 7n, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x \leq 1\}$$

$$D = \{x \mid x = \text{MCD}(36, 40, 54)\}$$

$$E = \{x \mid x = 3^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$$

$$G = \{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$$

$$H = \{x \mid x = 2^n + 1, n \in \mathbb{N}\}$$

$$I = \{x \mid x = 5^k, k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 1\}$$

$$L = \{x \mid x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-k+2}, k \in \mathbb{Z}, -1 \leq k \leq 3\}$$

**Esercizio 2.2.3.** Determinare la rappresentazione per proprietà caratteristica dei seguenti insiemi:

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$C = \{2, 3, 4, 5, \dots, 99\}$$

$$D = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \dots\}$$

$$E = \{1, 4, 16, 64, \dots\}$$

$$F = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}$$

$$G = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{20}\right\}$$

$$H = \{6, 12, 18, 24, 30\}$$

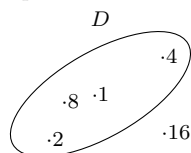
$$I = \{2, 6, 10, 14, \dots\}$$

**Esercizio 2.2.4.** Determinare la cardinalità di  $A = \{1, \{2, 3\}, 4, 5, \{6\}\}$  e stabilire se i seguenti elementi appartengono ad  $A$ :  $1, 2, 4, \{2, 3\}, \{5\}, 6$

### 2.2.3 Rappresentazione grafica di Eulero-Venn

La rappresentazione grafica di Eulero-Venn consiste nel delimitare con una linea chiusa una regione di piano all'interno della quale vanno collocati gli elementi dell'insieme.

**Esempio 2.2.5.** L'insieme  $D = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 8\}$  sarà con la rappresentazione grafica:



**Esercizio 2.2.5.** Rappresentare per elencazione e con i diagrammi di Eulero-Venn i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x < 1\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{5}{2} < x \leq \frac{3}{2}\}$$

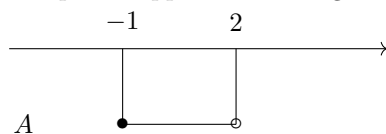
$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\}$$

A questo punto notiamo l'impossibilità di rappresentare per elencazione e con i diagrammi di Eulero-Venn l'insieme

$$F = \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 2\}$$

in quanto, non potendo parlare di successivo nell'insieme  $\mathbb{Q}$ , la scelta degli elementi da scrivere dopo  $-1$  è arbitraria, il "così via" indicato dai puntini è privo di significato e non esiste un "ultimo" elemento

dell'insieme perchè non esiste in  $\mathbb{Q}$  il precedente di 2. Per questo genere di insiemi può essere utile un nuovo tipo di rappresentazione grafica :



dove i punti del segmento  $\bullet \text{---} \circ$  rappresentano tutti i numeri razionali tra -1 incluso e 2 escluso (si conviene di indicare con  $\bullet$  valore incluso e con  $\circ$  valore escluso).

*Osservazione.* La retta orientata *sistema di ascisse* utilizzata in questa rappresentazione comprende in realtà, oltre a tutti i numeri razionali, altri numeri come ad esempio  $\sqrt{2} = 1,4142\dots$  già incontrati alla scuola media. A rigore il segmento che rappresenta  $F$  non dovrebbe essere continuo, ma presentare dei "buchi" (interruzioni) in corrispondenza dei numeri non razionali. Conveniamo tuttavia di mantenere la notazione descritta in tale tipo di rappresentazione grafica.

## 2.3 Sottoinsiemi

**Definizione 2.3.1.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$  si dice che  $B$  è *sottoinsieme* o una *parte* di  $A$  se ogni elemento di  $B$  appartiene all'insieme  $A$ .

Si scrive  $B \subseteq A$  e si legge  $B$  è sottoinsieme di  $A$  (o  $B$  è contenuto in  $A$ ) oppure  $A \supseteq B$  e si legge  $A$  contiene  $B$ . Usando il simbolismo matematico:

$$B \subseteq A \text{ significa } \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

Dalla definizione si ricava che  $B$  può anche essere eventualmente coincidente con  $A$ . Tra i sottoinsiemi di  $A$ , dunque, c'è anche  $A$  stesso detto sottoinsieme *improprio* o *banale*.

Anche l'insieme vuoto è sottoinsieme di tutti gli insiemi e anch'esso viene chiamato sottoinsieme improprio o banale.

Ogni insieme non vuoto ha, dunque, due sottoinsiemi impropri; gli altri eventuali sottoinsiemi si dicono propri.

Se vogliamo indicare che  $B$  è sottoinsieme di  $A$  non coincidente con  $A$  stesso, scriviamo  $B \subset A$  (oppure  $A \supset B$ ).

**Esempio 2.3.1.** Dato  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  l'insieme  $B = \{3, 4\}$  è un suo sottoinsieme proprio di cardinalità 2.

**Esempio 2.3.2.** Dato  $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$  l'insieme :

$B = \{1, 2\}$  è un suo sottoinsieme proprio di cardinalità 2

$C = \{2\}$  è un suo sottoinsieme proprio di cardinalità 1

$D = \{3, 4\}$  non è un suo sottoinsieme proprio infatti  $3 \in D$  ma  $3 \notin A$

$E = \{\{3, 4\}\}$  è un suo sottoinsieme proprio di cardinalità 1

**Definizione 2.3.2.** Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono *uguali* e si scrive  $A = B$  se  $A \subseteq B$  e  $A \supseteq B$

In tal caso, dunque, i due insiemi contengono gli stessi elementi.

**Esempio 2.3.3.** Dati

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di } 2\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisibile per } 2\}$$

allora

$$A \subseteq B$$

perchè se  $x \in A$ ,  $x$  è multiplo di 2 dunque è divisibile per 2 perciò  $x \in B$ , inoltre

$$A \supseteq B$$

perchè se  $x \in B$ ,  $x$  è divisibile per 2 dunque esso è multiplo di 2 perciò  $x \in A$ . In conclusione:  $A = B$ .

**Definizione 2.3.3.** Dato un insieme  $A$  se si considerano tutti i suoi sottoinsiemi (propri e impropri) possiamo formare un nuovo insieme chiamato *insieme dei sottoinsiemi di  $A$*  o, più spesso, *insieme delle parti di  $A$* . Esso si indica con  $P(A)$ , quindi

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

**Esempio 2.3.4.** Dato  $A = \{a, b\}$  sarà  $P(A) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

*Osservazione.* E' bene ricordare, in riferimento all'esempio appena fatto che:

$$\begin{aligned} a \in A & \text{ ma } a \notin P(A) \\ \{a\} \in P(A) & \text{ ma } \{a\} \notin A \\ \{a\} & \text{ non è sottoinsieme di } P(A) \text{ ma } \{a\} \subseteq A \end{aligned}$$

e facciamo notare che le scritture  $\{a\} \subseteq A$  e  $\{a\} \in P(A)$  sono equivalenti.

**Teorema 2.3.1.** Se  $|A| = n$  allora  $|P(A)| = 2^n$

*Dim.* Consideriamo la sequenza:

$$\begin{aligned} A_0 = \{\} & \text{ cioè } |A_0| = 0 \implies P(A_0) = \{\emptyset\} \implies |P(A_0)| = 1 = 2^0 \\ A_1 = \{*\} & \text{ cioè } |A_1| = 1 \implies P(A_1) = \{\emptyset, \{*\}\} \implies |P(A_1)| = 2 = 2^1 \\ A_2 = \{*, \bullet\} & \text{ cioè } |A_2| = 2 \implies P(A_2) = \{\emptyset, \{*\}, \{\bullet\}, \{*, \bullet\}\} \implies |P(A_2)| = 4 = 2^2 \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

E' sufficiente notare che *ogni volta* che si aggiunge un elemento  $x$  ad  $A$ , la cardinalità di  $P(A)$  raddoppia in quanto a  $P(A)$  appartengono tutti i "vecchi" sottoinsiemi di  $A$  non contenenti  $x$  e altrettanti di "nuovi" ottenuti dai precedenti con l'inserimento dell'elemento  $x$ . Possiamo allora affermare che procedendo nella sequenza:

$$\begin{aligned} |A_3| = 3 & \implies |P(A_3)| = 2|P(A_2)| & = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2 = 2^3 \\ & \vdots & \vdots \\ |A_{n-1}| = n-1 & \implies |P(A_{n-1})| & = 2^{n-1} \\ |A_n| = n & \implies |P(A_n)| = 2|P(A_{n-1})| & = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

□

*Osservazione.* Se vogliamo determinare  $A$  tale che  $|P(A)| = 16$  è sufficiente scrivere un qualunque insieme di cardinalità 4 come può essere  $\{a, b, c, d\}$ .

Non è possibile, invece, determinare alcun insieme  $A$  tale che  $|P(A)| = 9$  perchè 9 non è una potenza di 2.

**Esercizio 2.3.1.** Determinare l'insieme delle parti di  $A = \{-2, 0, 4\}$  e di  $B = \{2, \{0, 1\}\}$

**Esercizio 2.3.2.** Determinare i sottoinsiemi propri di  $C = \{-1, \frac{2}{5}, 3\}$

**Esercizio 2.3.3.** Spiegare perchè non esiste alcun insieme  $A$  per cui  $P(A) = \emptyset$

**Esercizio 2.3.4.** Determinare le cardinalità di  $P(A)$  e di  $P(P(A))$  sapendo che la cardinalità di  $A$  è 3

**Esercizio 2.3.5.** Determinare  $|P(P(A))|$  nei casi in cui  $|A| = 2$  e  $|A| = 11$

**Esercizio 2.3.6.** Stabilire quali tra i seguenti insiemi sono uguali:

$$\begin{aligned} A = \{-2, -1, 0, 1\} \quad B = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}, k < 4\} \quad C = \{0, 3, 6, 9\} \\ D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 2\} \quad E = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\} \quad F = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}, -2 \leq k \leq 3\} \end{aligned}$$

## 2.4 Operazioni

### 2.4.1 Intersezione

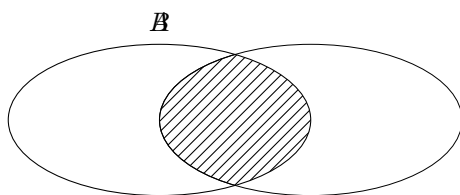
**Definizione 2.4.1.** Si definisce *intersezione* tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme, indicato con  $A \cap B$ , degli elementi appartenenti ad entrambi.

In simboli:

1. con la rappresentazione per proprietà caratteristica

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

2. con la rappresentazione di Eulero-Venn



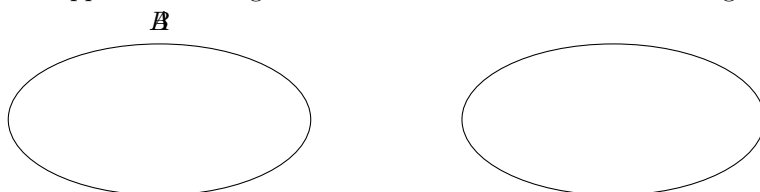
**Esempio 2.4.1.**

Dati  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{2, 4, 6\}$  sarà  $A \cap B = \{2, 4\}$

Dati  $C = \{1, \{2, 3\}, 4\}$  e  $D = \{2, 4, 6\}$  sarà  $C \cap D = \{4\}$

**Definizione 2.4.2.** Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono *disgiunti* se  $A \cap B = \emptyset$

La rappresentazione grafica di Eulero-Venn di due insiemi disgiunti è:



*Osservazione.* :

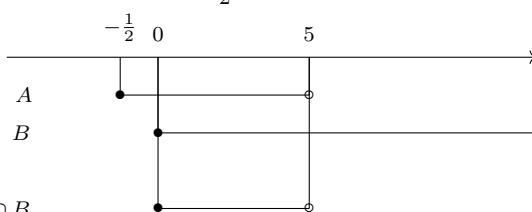
$$\forall A \quad A \cap A = A \quad ; \quad \forall A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\forall A, B \quad A \cap B = B \cap A \quad (\text{proprietà commutativa})$$

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$$

Per determinare l'intersezione tra due sottoinsiemi di  $\mathbb{Q}$ , può essere utile la rappresentazione grafica rispetto ad un sistema di ascisse.

**Esempio 2.4.2.** Dati  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 5\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$  dalla loro rappresentazione grafica:



si ricava  $A \cap B$

cioè, con la rappresentazione per caratteristica:  $A \cap B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < 5\}$

**Esercizio 2.4.1.** Dopo aver dato la rappresentazione per elencazione degli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{3}{2} \leq x < 4\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq \frac{1}{2}\} \text{ determinare } A \cap B.$$

**Esercizio 2.4.2.** Determinare  $C \cap D$  con  $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3 \leq x < \frac{1}{2}\}$  e

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -1\}$$

## 2.4.2 Unione

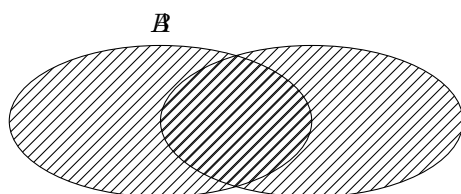
**Definizione 2.4.3.** Si definisce *unione* tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme, indicato con  $A \cup B$ , degli elementi appartenenti ad almeno uno di essi.

In simboli:

1. con la rappresentazione per proprietà caratteristica

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

2. con la rappresentazione di Eulero-Venn

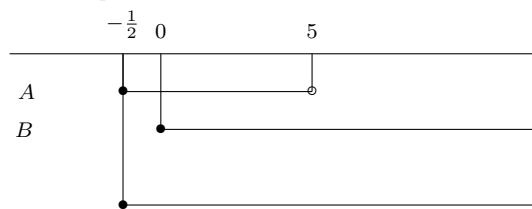


Con riferimento all'esempio 4.1 sarà:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$C \cup D = \{1, 2, \{2, 3\}, 4, 6\}$$

e con riferimento all' esempio 4.2 sarà:



si ricava  $A \cup B$

$$\text{cioè } A \cup B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq -\frac{1}{2}\}$$

*Osservazione.* :

$$\forall A \quad A \cup A = A \quad ; \quad \forall A \quad A \cup \emptyset = A$$

$$\forall A, B \quad A \cup B = B \cup A \quad (\text{proprietà commutativa})$$

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$$

**Esercizio 2.4.3.** Dopo aver dato la rappresentazione per elencazione degli insiemi  $A = \{x \mid x = |2k - 3|, k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$  e  $B = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$  determinare  $A \cup B$  e darne la rappresentazione per caratteristica.

**Esercizio 2.4.4.** Determinare  $C \cup D$  con  $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \left(-\frac{3}{5}\right)^2\}$  e  $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} < x \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\}$

### 2.4.3 Differenza

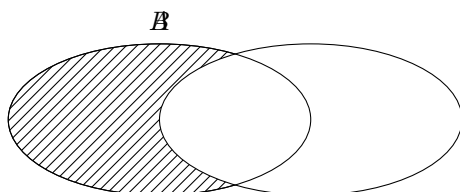
**Definizione 2.4.4.** Si definisce *differenza* tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme, indicato con  $A \setminus B$ , degli elementi appartenenti ad  $A$  ma non a  $B$ .

In simboli:

1. con la rappresentazione per proprietà caratteristica

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

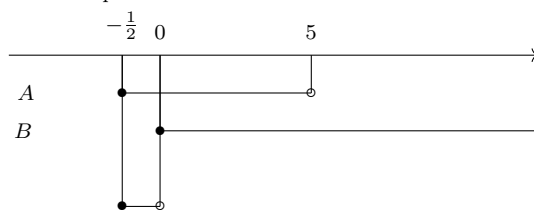
2. con la rappresentazione di Eulero-Venn



Con riferimento all'esempio 4.1 sarà:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{1, 3\} \\ C \setminus D &= \{1, \{2, 3\}\} \end{aligned}$$

e con riferimento all'esempio 4.2 sarà:



si ricava  $A \setminus B$

$$\text{cioè } A \setminus B = \{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 0\}$$

*Osservazione.* :

$$\begin{aligned} \forall A \quad A \setminus A &= \emptyset \quad ; \quad \forall A \quad A \setminus \emptyset = A \\ B \subseteq A &\Rightarrow B \setminus A = \emptyset \\ A \cap B = \emptyset &\Rightarrow A \setminus B = A \end{aligned}$$

Per questa operazione non vale la proprietà commutativa, infatti, controesempio:

dati  $A = \{a, b, c, d\}$  e  $B = \{b, c, e, f, g\}$  sarà

$$A \setminus B = \{a, d\} \neq \{e, f, g\} = B \setminus A$$

Si conviene di indicare l'insieme  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  con  $\mathbb{N}^*$ , analogamente  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

**Esercizio 2.4.5.** Determinare  $A \setminus B$  e  $B \setminus A$  con  $A = \{0.\bar{3}, 1.2, 2.5, 3^2\}$  e

$$B = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, 9\}$$

**Esercizio 2.4.6.** Determinare  $C \setminus D$  e  $D \setminus C$  con

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3 < x \leq -1 \text{ oppure } \frac{1}{2} < x < 2\} \text{ e } D = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$$

### 2.4.4 Differenza simmetrica

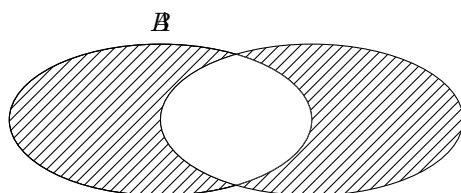
**Definizione 2.4.5.** Si definisce *differenza simmetrica* tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme, indicato con  $A\Delta B$ , degli elementi appartenenti solo ad  $A$  oppure solo a  $B$ .

In simboli:

1. con le precedenti operazioni insiemistiche

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

2. con la rappresentazione di Eulero-Venn

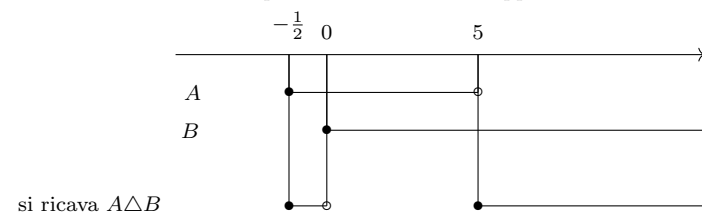


Con riferimento all'esempio 4.1 sar :

$$A\Delta B = \{1, 3, 6\}$$

$$C\Delta D = \{1, \{2, 3\}, 2, 6\}$$

e con riferimento all'esempio 4.2 sar  sufficiente rappresentare  $A \cup B$  e  $A \cap B$  e successivamente  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$



si ricava  $A\Delta B$

*Osservazione.* :

$$\forall A \quad A\Delta A = \emptyset \quad ; \quad \forall A \quad A\Delta \emptyset = A$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A\Delta B = A \cup B$$

$$\forall A, B \Rightarrow A\Delta B = B\Delta A$$

**Esercizio 2.4.7.** Dati  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x \leq 4\}$ ,  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, -1 \leq x < 3\}$  e  $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 3\}$  determinare  $A\Delta B$ ,  $A\Delta C$ ,  $(A \setminus B) \Delta C$

**Esercizio 2.4.8.** dati  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \leq x < \left|-\frac{10}{3}\right|\}$   
e  $D = \{x \mid x = 3^k, k \in \mathbb{Z}, -1 \leq k \leq 2\}$  determinare  $C\Delta D$

### 2.4.5 Complementare

**Definizione 2.4.6.** Un insieme  $U$  si dice *insieme universo* (o *insieme ambiente*) di un insieme  $A$  se  $A$    sottoinsieme di  $U$

**Esempio 2.4.3.** Dato  $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ , possibili insiemi universo sono:

$$U_1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$U_2 = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$U_3 = \mathbb{N}$$

$$U_4 = \mathbb{Q}$$

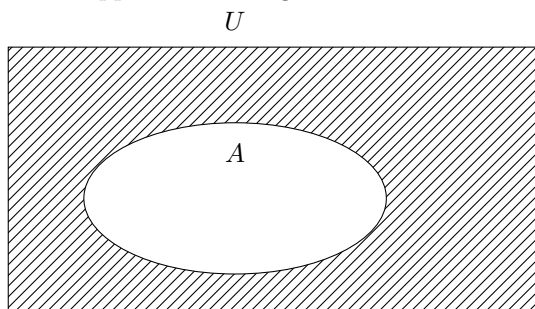


**Definizione 2.4.7.** Si definisce *complementare* di un insieme  $A$  rispetto ad un suo insieme universo  $U$  l'insieme, indicato con  $C_U(A)$  o  $\overline{A}_U$ , degli elementi appartenenti ad  $U$  ma non ad  $A$ .

Quindi

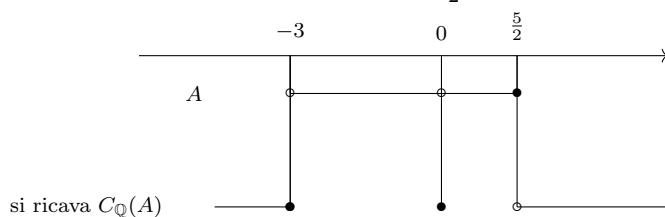
$$C_U = U \setminus A$$

o, con la rappresentazione grafica:



**Esempio 2.4.4.** Dati  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 15\}$  e  $B = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$  rispetto all'insieme universo  $\mathbb{N}$  si avrà  $C_{\mathbb{N}}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 16\}$  e  $C_{\mathbb{N}}(B) = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$

**Esempio 2.4.5.** Dato  $A = \{x \in \mathbb{Q}^* \mid -3 < x \leq \frac{5}{2}\}$  rispetto all'insieme universo  $\mathbb{Q}$  si avrà :



si ricava  $C_{\mathbb{Q}}(A)$

$$\text{cioè } C_{\mathbb{Q}}(A) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq -3 \text{ o } x > \frac{5}{2} \text{ o } x = 0\}$$

*Osservazione.*

$$C_U(U) = \emptyset \quad ; \quad C_U(\emptyset) = U \\ \forall A \Rightarrow C_U(C_U(A)) = A$$

**Esercizio 2.4.9.** Per ciascuno dei seguenti insiemi determina due possibili insiemi universo:  $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ ,  $B = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27\}$

$$C = \{x \in \mathbb{Q}^* \mid x > -\frac{1}{2}\}, D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 24\}$$

**Esercizio 2.4.10.** Dati  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 10\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 19\}$  e

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq -5 \text{ o } x > \frac{3}{2}\}$$
 determinare :

$$C_{\mathbb{N}}(A), C_{\mathbb{N}}(B), C_{\mathbb{N}}(A \cap B), C_{\mathbb{N}}(A \cup B), C_{\mathbb{Z}}(A), C_{\mathbb{Z}}(B), C_{\mathbb{Q}}(C)$$

## 2.4.6 Prodotto cartesiano

**Definizione 2.4.8.** Si definisce *prodotto cartesiano* tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme, indicato con  $A \times B$ , di tutte le coppie ordinate aventi il primo elemento appartenente ad  $A$  ed il secondo appartenente a  $B$ .

In simboli :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

**Esempio 2.4.6.** Dati  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 4\}$  si avrà  $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

Gli elementi appartenenti ad  $A \times B$  non appartengono nè ad  $A$ , nè a  $B$ . Essi sono infatti di "nuova natura": la coppia costituisce una nuova entità.

Con riferimento all'esempio 4.6,  $1 \notin A \times B$ ,  $4 \notin A \times B$  invece  $(1, 4) \in A \times B$ ;  $(4, 1) \notin A \times B$  e ciò dimostra l'importanza dell'ordine all'interno della coppia.

Si raccomanda di non confondere la coppia  $(1, 4)$  con  $\{1, 4\}$  che invece è un insieme.

Nel caso  $B = A$  si conviene di indicare  $A \times A$  con  $A^2$

*Osservazione.*  $\forall A \Rightarrow A \times \emptyset = \emptyset$  e  $\emptyset \times A = \emptyset$

Anche per questa operazione non vale la proprietà commutativa, infatti, controesempio:

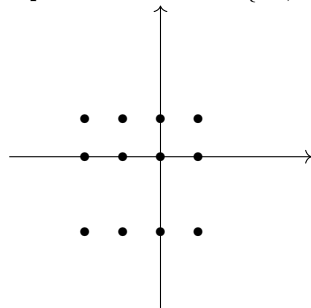
dati  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{1\}$  sarà

$$A \times B = \{(1, 1), (2, 1)\} \neq \{(1, 1), (1, 2)\} = B \times A$$

Facciamo notare che la nuova natura degli elementi di  $A \times B$  non permette una sua rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn, a partire da quella di  $A$  e  $B$ .

Si introduce tuttavia, nel caso in cui  $A$  e  $B$  siano insiemi numerici, una nuova rappresentazione grafica utilizzando il piano cartesiano nel quale ogni coppia ordinata è individuata da un punto.

**Esempio 2.4.7.** Dati  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$  e  $B = \{-2, 0, 1\}$  la rappresentazione nel piano cartesiano di  $A \times B$  sarà:



**Teorema 2.4.1.** Se  $|A| = n$  e  $|B| = m$  allora  $|A \times B| = n \cdot m$

*Dimostrazione.*

$$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

$$|B| = m \Rightarrow B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

Le coppie con primo elemento  $a_1$  sono  $m$ , infatti esse sono:

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m)$$

Le coppie con primo elemento  $a_2$  sono ancora  $m$ , infatti esse sono:

$$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m)$$

Procedendo con questo ragionamento possiamo affermare che con ogni elemento di  $A$  si ottengono  $m$  coppie. Quindi in tutto  $\underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ volte}}$  coppie, cioè  $n \cdot m$  coppie.  $\square$

**Esercizio 2.4.11.** Determinare  $A \times B$  e  $B \times A$  per elencazione e graficamente nel piano cartesiano essendo:  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$

**Esercizio 2.4.12.** Dati  $A = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$  e  $B = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$  determinare la cardinalità di  $P(A \times B)$

Il teorema 2.4.1 ci permette di calcolare la cardinalità di  $A \times B$  se sono note le cardinalità di  $A$  e  $B$  anche se non ne conosciamo gli elementi.

Questo non è invece possibile per le altre operazioni tra  $A$  e  $B$ , infatti, non possiamo calcolare  $|A \cup B|$ ,  $|A \cap B|$ ,  $|A \setminus B|$ ,  $|B \setminus A|$ ,  $|A \Delta B|$  perchè, non conoscendo gli elementi dei due insiemi non sappiamo quali e quanti sono comuni ad entrambi.

Possiamo però individuare quali sono i valori minimi e massimi che possono assumere pensando alle situazioni "estreme" nelle quali gli insiemi sono disgiunti oppure uno è sottoinsieme dell'altro.

Quindi se, per esempio,  $|A| = 5$  e  $|B| = 3$  allora  $|A \cup B|$  come valore minimo assume valore 5 (caso in cui  $B \subseteq A$ ) e come valore massimo assume valore 8 (caso in cui  $A \cap B = \emptyset$ ), scriviamo dunque

$$5 \leq |A \cup B| \leq 8$$

Analogamente si determina :

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{0} & \leq |A \cap B| \leq & \underbrace{3} & ; & \underbrace{2} & \leq |A \setminus B| \leq & \underbrace{5} \\ \text{quando } A \cap B = \emptyset & & \text{quando } B \subseteq A & & \text{quando } B \subseteq A & & \text{quando } A \cap B = \emptyset \\ \underbrace{0} & \leq |B \setminus A| \leq & \underbrace{3} & ; & \underbrace{2} & \leq |A \Delta B| \leq & \underbrace{8} \\ \text{quando } B \subseteq A & & \text{quando } A \cap B = \emptyset & & \text{quando } B \subseteq A & & \text{quando } A \cap B = \emptyset \end{array}$$

Un'attenta analisi delle cardinalità degli insiemi può esserci d'aiuto nell'affrontare problemi la cui risoluzione può essere svolta utilizzando una rappresentazione insiemistica.

**Esempio 2.4.8.** Nella mensa di una azienda con 110 operai :

- i) 40 mangiano almeno il primo piatto
- ii) 53 mangiano solo il secondo piatto
- iii) 13 mangiano sia il primo che il secondo piatto.

Quanti operai

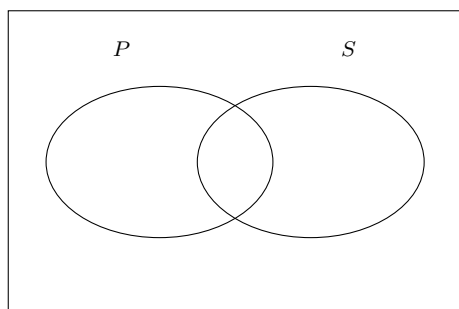
- a) non mangiano?
- b) mangiano solo il primo piatto?
- c) mangiano solo un piatto?
- d) non mangiano il secondo piatto?

Se indichiamo con  $O$  l'insieme degli operai (in tale contesto insieme universo)  $P$  ed  $S$  rispettivamente l'insieme degli operai che mangiano il primo piatto e l'insieme di quelli che mangiano il secondo piatto, per rispondere alle domande dovremo calcolare nell'ordine :

$$|C_O(P \cup S)| ; |P \setminus S| ; |P \Delta S| ; |C_O(S)|$$

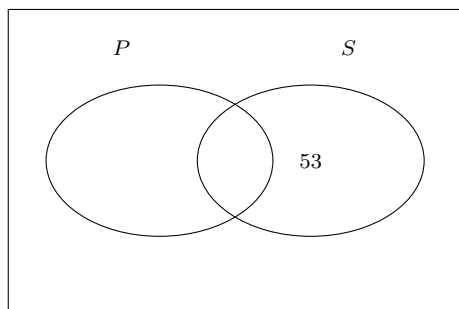
Può essere utile allo scopo dare una rappresentazione grafica del problema, con i diagrammi di Eulero-Venn, convenendo di indicare non gli elementi appartenenti agli insiemi, ma le rispettive cardinalità.

$O$



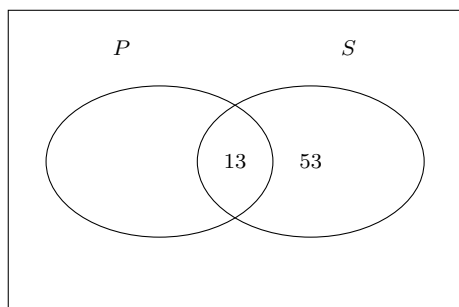
Dall'ipotesi ii) possiamo ricavare  $|S \setminus P| = 53$  cioè

O



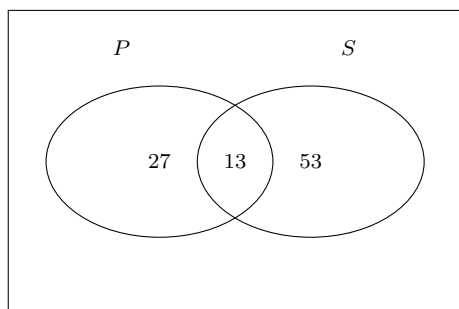
Dall'ipotesi iii) possiamo ricavare  $|P \cap S| = 13$  cioè

O



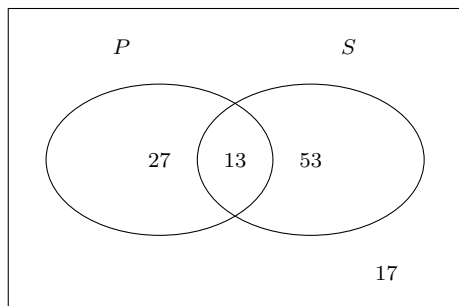
e dunque, utilizzando l'ulteriore ipotesi i) cioè  $|P| = 40$  ricaviamo che  $|P \setminus S| = |P| - |P \cap S| = 40 - 13 = 27$  cioè

O



Sapendo infine che gli operai sono 110 si ricava  $|C_O(P \cup S)| = |O| - |P \cup S| = 110 - 93 = 17$  cioè

O



Dall'esame attento della rappresentazione finale possiamo rispondere alle domande:

$$a) |C_O(P \cup S)| = 17 \quad b) |P \setminus S| = 27 \quad c) |P \Delta S| = 80 \quad d) |C_O(S)| = 44$$

## 2.5 Esercizi riepilogativi

**Esercizio 2.5.1.** Determinare la rappresentazione per proprietà caratteristica degli insiemi:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots \right\} & B &= \{1, -2, 4, -8, 16, -32, 64\} \\ C &= \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \dots \right\} & D &= \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\} \\ E &= \{1, 3, 6, 11, 20, 37, 70, \dots\} \end{aligned}$$

**Esercizio 2.5.2.** Dati gli insiemi :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 \leq x < 2\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \mid -1 \leq x \leq 3\} \end{aligned}$$

determinare :

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A, \quad A \Delta B, \quad A \times (A \cap B), \quad P(B \setminus A)$$

**Esercizio 2.5.3.** Siano

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{1}{2} \leq x < \left[ \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{5} - \frac{9}{5} \right)^2 + \left( 1 - \frac{4}{25} \right) \right] : \left[ \left( 1 - \frac{2}{5} \right)^2 + \frac{3}{25} \right]\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \left[ \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \right)^2 \left( 5 - \frac{1}{2} \right)^2 : \left( \frac{3}{2} \right)^3 \right] - \left( 1 + \frac{1}{2} \right)\} \end{aligned}$$

determinare :  $A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A, \quad C_Q(A), \quad C_Q(B)$

**Esercizio 2.5.4.** Dati gli insiemi :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \left( \frac{2}{5} \right)^3 \left( \frac{5}{2} \right)^2 \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^5 : \left( -\frac{1}{2} \right)^{-2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^{-6} \right] + (-13)^0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Q} \mid -2 < x \leq \left( 3 - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{5} - 1 \right)^2 - (-3)^2 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{-3} + 2\} \end{aligned}$$

determinare:  $A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A, \quad \overline{B}_Q, \quad A \Delta B$

**Esercizio 2.5.5.** Siano

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \mid -4 \leq x \leq 1 \quad \text{o} \quad 5 < x \leq 7\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 < x < 4\} \end{aligned}$$

determinare:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A, \quad P(B \setminus A), \quad A \times (A \cap B)$$

**Esercizio 2.5.6.** Dati gli insiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq E_1\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Q} \mid E_2 \leq x < 2.0\overline{5}\} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} E_1 &= \left[ \frac{\left( -\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right)^2 \cdot \left( -\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right)^3}{\left( -\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right)^6} \right]^{-1} - \left( -\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right)^{-2} : \left( -\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right)^{-3} \\ E_2 &= \left[ \left( -1 - \frac{1}{2} \right) : \left( 2 - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) : \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{4} - \frac{19}{9} : \left( 1 - \frac{1}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

determinare :

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{A}_Q, \quad \overline{B}_Q, \quad \overline{B \setminus A}_Q$$

Si chiede infine se  $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{37}{18}\}$  è disgiunto da  $B$ .

**Esercizio 2.5.7.** Dati  $A = \{\{2\}, \{0\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$  e  $B = \{0, 1, 2\}$

determinare:

$$P(B) \cup A, \quad P(B) \cap A, \quad A \setminus P(B), \quad P(B) \setminus A$$

**Esercizio 2.5.8.** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi tali che :

$$A \times B = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (-1, 2), (0, 2), (1, 2)\}$$

determinare :  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $C = (A \times B) \setminus A^2$ ,  $P(C)$

**Esercizio 2.5.9.** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi con  $|A| = 20$  e  $|B| = 8$ , determinare:

1.  $|A \cup B|$ ,  $|A \cap B|$ ,  $|B \setminus A|$ ,  $|A \times B|$ ,  $|P(B)|$
2.  $|A \cup B|$  e  $|A \setminus B|$  sapendo che  $|A \cap B| = 3$

**Esercizio 2.5.10.** Se  $|A| = 8$  e  $|B| = 7$ , determinare le cardinalità di :

$$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, P(A), B \times A$$

**Esercizio 2.5.11.** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi disgiunti con  $|A| = 10$  e  $|B| = 7$ , determinare :

$$|A \cup B|, |A \cap B|, |A \setminus B|, |A \times B|, |P(B)|$$

**Esercizio 2.5.12.** Individuare la relazione tra  $A$  e  $B$  nei seguenti casi:

1.  $A \cap B = A$
2.  $A \cup B = A$
3.  $A \setminus B = \emptyset$
4.  $\overline{A}_B = B$

**Esercizio 2.5.13.** Per ciascuna delle seguenti affermazioni false fornisci un controesempio:

1.  $A \cup B = A$
2. se  $|A| = 3$  e  $|B| = 5 \Rightarrow |A \cap B| = 3$
3.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$
4. se  $x$  è multiplo di 3 è anche multiplo di 6

**Esercizio 2.5.14.** Determinare una scrittura più semplice per i seguenti insiemi:

1.  $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$
2.  $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$
3.  $(A \cup B) \setminus (B \setminus A)$
4.  $(B \setminus A) \cup A$

**Esercizio 2.5.15.** In una scuola con 150 alunni ci sono:

- 23 studenti che frequentano lo sportello di matematica
- 41 studenti che frequentano solo lo sportello di chimica
- 3 studenti che frequentano sia lo sportello di chimica che quello di matematica

Quanti sono gli studenti che:

1. frequentano solo lo sportello di matematica?
2. non frequentano sportelli?

**Esercizio 2.5.16.** In un pomeriggio assolato 20 alunni dovrebbero studiare inglese e matematica ; 8 non studiano inglese, 10 studiano matematica e 4 non studiano niente. Quanti allievi studiano entrambe le materie?

**Esercizio 2.5.17.** In una classe di 20 studenti ,18 hanno visitato Venezia, 14 Roma e 5 Firenze. Sapendo che 3 soli hanno visitato le 3 città, 5 sia Firenze che Venezia, 3 esclusivamente Venezia, determina quanti hanno visitato :

1. solo Firenze
2. Firenze e Roma
3. nessuna delle tre città
4. non hanno visitato Roma

# Capitolo 3

## MONOMI

### 3.1 Introduzione

Per rispondere alla domanda su quale sia il triplo del successivo del numero 7 si esegue il seguente calcolo:  
 $3 \cdot (7 + 1)$  ottenendo come risultato il numero 24

**Definizione 3.1.1.** Si dice *espressione aritmetica* una scrittura che si ottiene mediante operazioni tra numeri.

L'espressione sopra calcolata è un esempio di espressione aritmetica.

Se ora volessimo determinare il triplo del successivo di un generico numero naturale  $n$  useremmo la scrittura:

$$3 \cdot (n + 1)$$

**Definizione 3.1.2.** Si dice *espressione algebrica* una scrittura che si ottiene mediante operazioni tra numeri e lettere.

Quindi  $3 \cdot (n + 1)$  è un esempio di espressione algebrica. Sono esempi di espressioni algebriche:

$$\begin{aligned} &2 \cdot (a + 3b) \\ &(a + 7x) \cdot x \\ &\frac{2a + 3b}{2} + 5c : (y - 2) \end{aligned}$$

Cominciamo a studiare le espressioni algebriche introducendo le più semplici tra esse.

### 3.2 Monomi

**Definizione 3.2.1.** Si dice *monomio* un'espressione algebrica contenente solo l'operazione di moltiplicazione.

Sono monomi le espressioni algebriche:

$$3 \cdot a \cdot b \cdot b \quad , \quad \frac{3}{5} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot b$$

non lo sono

$$3 \cdot a : b \quad , \quad \frac{3}{5}a + b \quad , \quad 2\frac{ab}{c} \quad , \quad 4 - a$$

**Definizione 3.2.2.** Un monomio si dice ridotto a *forma normale* quando contiene un solo fattore numerico, detto coefficiente, ed una parte letterale in cui ogni lettera figura una sola volta con l'esponente ottenuto utilizzando la definizione di potenza.

$3 \cdot a \cdot b \cdot b$  in forma normale si scrive  $3ab^2$

$\frac{3}{5} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot b$  in forma normale si scrive  $\frac{2}{5}ab$

Altri esempi di monomi scritti in forma normale sono:

$-\frac{2}{7}a^2b^5c$  ,  $2x^3y^6$

D'ora in poi quando parleremo di monomi li intenderemo già scritti in forma normale.

*Osservazione.* Non è un monomio l'espressione  $2a^3bc^{-2}$  perchè una sua scrittura equivalente è  $\frac{2a^3b}{c^2}$  nella quale compare anche l'operazione di divisione.

Qualora il coefficiente sia 1 si conviene di scrivere la sola parte letterale:

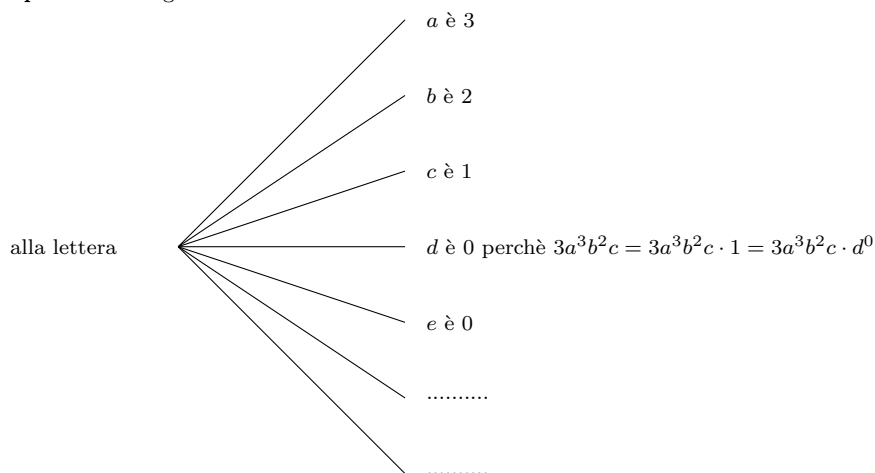
$$1a^2b = a^2b \quad , \quad 1x^2y^3z = x^2y^3z$$

Analogamente la scrittura  $-a^2b$  indica un monomio con coefficiente  $-1$  e parte letterale  $a^2b$

**Definizione 3.2.3.** Si dice *monomio nullo* un monomio con coefficiente uguale a zero.

**Definizione 3.2.4.** Si dice *grado relativo ad una lettera* di un monomio non nullo l'esponente con cui tale lettera compare nel monomio.

**Esempio 3.2.1.** Il grado del monomio  $3a^3b^2c$  relativo



**Definizione 3.2.5.** Si dice *grado assoluto* di un monomio non nullo la somma dei gradi relativi.

**Esempio 3.2.2.** Il grado assoluto di  $3a^3b^2c$  è 6, quello di  $-2xy$  è 2.

*Osservazione.* Ogni numero diverso da zero è un monomio di grado assoluto zero (ovviamente è zero anche il grado relativo ad ogni lettera).



Si è convenuto di non attribuire alcun grado al monomio nullo in quanto qualunque valore sarebbe corretto, infatti:

$$0 = \begin{cases} 0x^0 \\ 0xyz^3 \\ \dots \end{cases}$$

**Definizione 3.2.6.** Due monomi si dicono *simili* quando hanno la stessa parte letterale.

**Definizione 3.2.7.** Due monomi si dicono *opposti* quando sono simili e hanno coefficienti opposti.

**Esempio 3.2.3.**

$$\begin{aligned} 2ab &, -3ab && \text{sono simili ma non opposti} \\ \frac{7}{2}a^2b &, -\frac{7}{2}a^2b && \text{sono opposti} \\ \frac{2}{3}a &, \frac{3}{2}a && \text{sono simili ma non opposti} \\ -5a &, 5a^2 && \text{non sono simili} \end{aligned}$$

### 3.3 Operazioni tra monomi

**Definizione 3.3.1.** La *somma algebrica* di monomi simili è un monomio simile ad essi ed avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

**Esempio 3.3.1.**

$$\begin{aligned} 2a^2b + 3a^2b &= 5a^2b \\ -3xy^3 - 2xy^3 + xy^3 &= -4xy^3 \\ \frac{1}{2}x^2a + \frac{3}{4}x^2a - x^2a &= \frac{1}{4}x^2a \end{aligned}$$

*Osservazione.*  $3a^2b + 2ab$  non dà come risultato un monomio (non essendo simili i monomi) ma un'espressione algebrica che definiremo in seguito.

**Definizione 3.3.2.** Il *prodotto* di monomi è un monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali (applicando le proprietà delle potenze).

**Esempio 3.3.2.**

$$\begin{aligned} -2a^2b^3 \cdot (-3abc) &= 6a^3b^4c \\ \frac{2}{5}x^3y \cdot \left(-\frac{15}{4}x^5\right) &= -\frac{3}{2}x^8y \end{aligned}$$

**Definizione 3.3.3.** La *potenza* di un monomio è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale (applicando le proprietà delle potenze).

**Esempio 3.3.3.**

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}ab^2\right)^3 &= -\frac{8}{27}a^3b^6 \\ (-a^2b^3c)^2 &= a^4b^6c^2 \\ [(3ab^2)^3 - 20a^3b^6]^2 &= [27a^3b^6 - 20a^3b^6]^2 = [7a^3b^6]^2 = 49a^6b^{12} \end{aligned}$$

**Definizione 3.3.4.** Il *quoziente* tra due monomi è una espressione algebrica che si ottiene dividendo tra loro i coefficienti e le parti letterali.

**Esempio 3.3.4.**

$$15x^3y^4z : (-3x^2z) = -5xy^4$$

$$\frac{5}{2}a^5b^2 : \left(\frac{15}{4}a^5b\right) = \frac{2}{3}b$$

*Osservazione.* Da  $(10x^3y^2) : (2x^5y)$  si ottiene  $5x^{-2}y$  che non è un monomio. Il quoziente tra due monomi è dunque un monomio solo se il dividendo contiene almeno tutte le lettere del divisore con grado relativo non minore.

Quando il quoziente tra due monomi è un monomio il dividendo si dice *divisibile* per il divisore e il divisore si dice *fattore* del dividendo.

**Esempio 3.3.5.**

$$\left[ \frac{3}{4}a^3b^6c^3 - \left(-\frac{1}{4}ab^2c\right)^3 - \left(\frac{1}{2}ab^2\right)^2 \left(-\frac{1}{16}ab^2c^3\right) \right] : \left(-\frac{5}{4}ab^2c\right)^2 =$$

$$\left[ \frac{3}{4}a^3b^6c^3 - \left(-\frac{1}{64}a^3b^6c^3\right) - \left(\frac{1}{4}a^2b^4\right) \left(-\frac{1}{16}ab^2c^3\right) \right] : \left(\frac{25}{16}a^2b^4c^2\right) =$$

$$\left[ \frac{3}{4}a^3b^6c^3 + \frac{1}{64}a^3b^6c^3 + \frac{1}{64}a^3b^6c^3 \right] : \left(\frac{25}{16}a^2b^4c^2\right) =$$

$$\left[ \frac{25}{32}a^3b^6c^3 \right] : \left(\frac{25}{16}a^2b^4c^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}ab^2c$$

**Esercizio 3.3.1.** Semplifica le seguenti espressioni:

- $\left(2xy^2 - \frac{3}{2}xy^2\right) - [(xy^2 + 2xy^2 - 4xy^2)]$
- $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2 - \left[\frac{3}{2}x^5y^4 : \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 - 3x^3y^2\right] \left(-\frac{1}{3}x\right)$
- $\left[-\frac{2}{5}x^3y : \left(-\frac{1}{5}x^2y\right) + \frac{2}{3}(-3x)\right]^7 + \left(x^2 - \frac{2}{3}x^2y : y\right)^0 + 5$
- $(x+x)^3(-y)^5 - \left(-\frac{1}{3}xy - \frac{3}{5}xy + \frac{7}{10}xy\right)(xy^2 - 6xy^2)^2$
- $[(x^2y : x)y] : x - 2y[y^2 : (3y) - y]$
- $\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right)\left[\frac{8}{5}xy + \frac{8}{5}x^2y^2 : (6xy)\right]^2 - x^4y^2$
- $\left\{a - \left[2a\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) : a\right]\right\}^2 - \left(\frac{2}{3}a + a\right)\left(\frac{2}{3}a - a\right)$
- $a^{5n-1} : a^{n-2} : a^{n+3} + a^{3n-2} + 3a^{3n} : a^2$  con  $n \geq 2$

**Esercizio 3.3.2.** Calcola il valore delle seguenti espressioni attribuendo alle lettere i valori a fianco indicati:

- $-\frac{2}{3}a^3b^2 + \frac{1}{4}\left[(-2ab)(-ab) - \frac{1}{2} \cdot 3a^2(-2b^2) - 2a^2b^2 + 5a(ab^2)\right]$  per  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = -3$
- $[2a^3 : (-8a^3)]a + (-a^2)^2 : a^3 - \frac{1}{4}\left(2a^8 - \frac{5}{2}a^2(-a^2)^3\right)^0$  per  $a = \frac{4}{3}$

**Esercizio 3.3.3.** Dopo aver stabilito il grado relativo ed assoluto dei monomi:

$$15xy^4z; -10x^3t; xz^3; y^3z^2; \frac{3}{2}z \text{ stabilire quali dividono } 40x^3y^4z^2$$

**Definizione 3.3.5.** Si dice *massimo comun divisore* (*M.C.D.*) di monomi un monomio di grado massimo che è un fattore (o divisore) di tutti i monomi dati.

Per calcolare il *M.C.D.* tra monomi è sufficiente scegliere un qualunque monomio avente per parte letterale il prodotto di tutte le lettere comuni prese con l'esponente minore (questo affinché il monomio ottenuto sia un fattore comune).

Vista l'arbitrarietà del coefficiente del *M.C.D.* si conviene di assegnare ad esso il *M.C.D.* tra i coefficienti, qualora questi siano interi, il numero 1 se almeno uno di essi è frazionario.

**Esempio 3.3.6.**

$$M.C.D.(30a^2b^3, -18a^3c, 24a^4b^5c) = 6a^2(\text{oppure } -6a^2)$$

$$M.C.D.\left(\frac{21}{13}a^3b^2, -\frac{7}{8}ab^5, 5ab^4c\right) = \pm ab^2$$

$$M.C.D.(12ab^5, -20x) = \pm 4$$

$$M.C.D.(5x^2z, 9y^4) = \pm 1$$

**Definizione 3.3.6.** Si dice *minimo comune multiplo* (*m.c.m.*) di monomi un monomio di grado minimo che è divisibile per tutti i monomi dati (o multiplo dei monomi dati).

Per calcolare il *m.c.m.* tra monomi è sufficiente scegliere un qualunque monomio avente per parte letterale il prodotto di tutte le lettere comuni e non comuni prese con l'esponente maggiore (questo affinché il monomio ottenuto sia un multiplo comune).

Vista l'arbitrarietà del coefficiente del *m.c.m.* si conviene di assegnare ad esso il *m.c.m.* tra i coefficienti, qualora questi siano interi, il numero 1 se almeno uno di essi è frazionario.

**Esempio 3.3.7.**

$$m.c.m.(30a^2b^3, -18a^3c, 24a^4b^5c) = 360a^4b^5c(\text{oppure } -360a^4b^5c)$$

$$m.c.m.\left(\frac{21}{13}a^3b^2, -\frac{7}{8}ab^5, 5ab^4c\right) = \pm a^3b^5c$$

$$m.c.m.(12ab^5, -20x) = \pm 60ab^5x$$

$$m.c.m.(5x^2z, 9y^4) = \pm 45x^2y^4z$$

**Esercizio 3.3.4.** Determinare M.C.D. e m.c.m. tra i seguenti gruppi di monomi:

- $15x^2yz^3 \quad 20y^3 \quad 10xy^2 \quad 12yz^5$
- $10ab^4 \quad 6a^3 \quad 15b^2$
- $4x^3y^2 \quad -12x^5y \quad \frac{2}{3}y^6$
- $27a^3b \quad -81a^2b^2 \quad 9ab^3 \quad 18b^4$
- $-\frac{5}{3}a^6b^2c^4 \quad \frac{7}{3}a^3c^3 \quad -2ab$
- $2a^{2n} \quad 4a^nb \quad 6a^nb^2$  con  $n \geq 0$

# Capitolo 4

# POLINOMI

## 4.1 Polinomi

**Definizione 4.1.1.** Si dice *polinomio* un'espressione ottenuta dalla somma algebrica di monomi.

**Esempio 4.1.1.** Sono polinomi le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} & -2ab + 3a^2 - 2b + 1 \\ & \frac{1}{2}a^2 + 3 - 2a + 5 - a \end{aligned}$$

All'occorrenza un polinomio può essere "etichettato" utilizzando una lettera maiuscola seguita da una parentesi tonda contenente le lettere presenti nel polinomio; con riferimento all'esempio scriveremo:

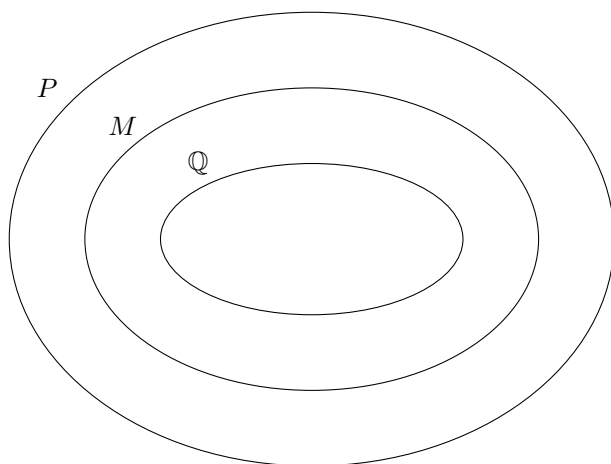
$$\begin{aligned} P(a, b) &= -2ab + 3a^2 - 2b + 1 \\ Q(a) &= \frac{1}{2}a^2 + 3 - 2a + 5 - a \end{aligned}$$

**Definizione 4.1.2.** Un polinomio si dice *ridotto a forma normale* se non contiene monomi simili.

Relativamente all'esempio precedente il polinomio  $P(a, b)$  è già in forma normale; la forma normale del polinomio  $Q(a)$  è  $\frac{1}{2}a^2 + 8 - 3a$

D'ora in poi, quando parleremo di polinomi, li intenderemo ridotti a forma normale.

*Osservazione.* Ogni monomio è un particolare polinomio in quanto si può ottenere come somma di monomi simili. Ricorrendo alla terminologia insiemistica possiamo affermare che l'insieme  $\mathbb{Q}$  è un sottoinsieme dell'insieme dei monomi  $M$  che a sua volta è sottoinsieme dell'insieme dei polinomi  $P$ .

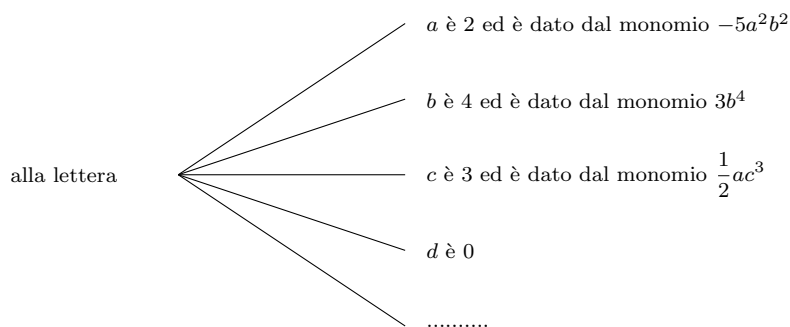


Il monomio nullo pensato come un polinomio si chiama *polinomio nullo*

E' consuetudine chiamare binomio, trinomio, e quadrimonio rispettivamente un polinomio con due, tre, quattro monomi.

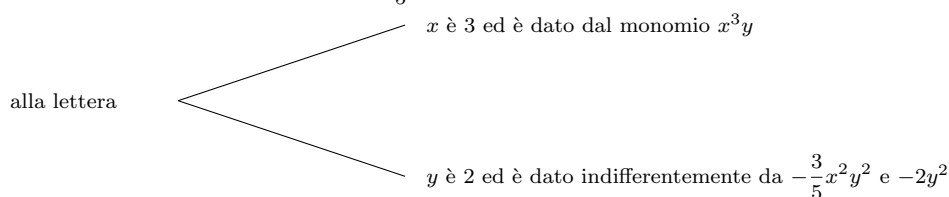
**Definizione 4.1.3.** Si dice *grado relativo (assoluto)* di un polinomio non nullo il grado relativo (assoluto) del monomio componente di grado maggiore.

**Esempio 4.1.2.** Dato il polinomio:  $3b^4 - 2ab^3c + \frac{1}{2}ac^3 - 5a^2b^2$  il grado relativo



e il grado assoluto è 5 ed è dato dal monomio  $-2ab^3c$ .

**Esempio 4.1.3.** Dato il polinomio:  $x^3y - \frac{3}{5}x^2y^2 - 2y^2$  il grado relativo



e il grado assoluto è 4 ed è dato indifferentemente da  $x^3y$  e  $-\frac{3}{5}x^2y^2$ .

Dato un polinomio, con riferimento ad una lettera, si dice *termine noto* il monomio di grado zero.

Qualora il polinomio contenga una sola lettera si dice *coefficiente direttivo* il coefficiente del monomio di grado maggiore.

**Definizione 4.1.4.** Un polinomio si dice *omogeneo* quando tutti i monomi che lo compongono hanno lo stesso grado assoluto.

**Definizione 4.1.5.** Un polinomio si dice *ordinato* rispetto ad una lettera quando i monomi componenti sono scritti secondo le potenze crescenti o decrescenti di quella lettera.

Generalmente si preferisce ordinare secondo le potenze decrescenti della lettera.

**Definizione 4.1.6.** Un polinomio si dice *completo* rispetto ad una lettera quando contiene tutte le potenze di quella lettera dal grado relativo fino a zero.

**Esercizio 4.1.1.** Stabilire grado assoluto e relativo dei seguenti polinomi e ordinarli rispetto a ciascuna lettera:

- $x^2y^3 + x^5 - 2xy^4 - 3x^3y^2 + 9y^5$
- $2a^3b - a^4 + b^4 + 8a^2b^2$

## 4.2 Operazioni

**Definizione 4.2.1.** La *somma* tra polinomi è il polinomio che si ottiene sommando i monomi di tutti i polinomi.

**Esempio 4.2.1.**

$$(3a - 5ab + 2) + (-2a^2 + 3 + 2ab) = 3a - 3ab + 5 - 2a^2$$

**Definizione 4.2.2.** La *differenza* tra due polinomi è il polinomio che si ottiene sommando ai monomi del primo polinomio gli opposti del secondo.

**Esempio 4.2.2.**

$$\begin{aligned} & (3a - 5ab + 2) - (-2a^2 + 3 + 2ab) \\ &= (3a - 5ab + 2) + (+2a^2 - 3 - 2ab) = 2a^2 - 7ab + 3a - 1 \end{aligned}$$

In generale l'addizione algebrica tra polinomi si esegue togliendo le parentesi ai polinomi e cambiando il segno a quelli preceduti dal segno meno.

**Esempio 4.2.3.**

$$(x - 1) + (x - 2y + 3) - (2x + 2 - 5y) = x - 1 + x - 2y + 3 - 2x - 2 + 5y = 3y$$

**Esercizio 4.2.1.**

- $(a^2 + ab + 3b^2) - (a^2 - 2ab + 3b^2)$
- $(2x - y - z) - (3x + 2y - 3z) - (y + 4x - z) + (5x - 4z + 4y)$

**Definizione 4.2.3.** Il *prodotto* tra due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni monomio del primo polinomio per tutti quelli del secondo.

**Esempio 4.2.4.**

$$(3x^2 - xy^4) \cdot (-2x + y^4) = -6x^3 + 3x^2y^4 + 2x^2y^4 - xy^8 = -6x^3 + 5x^2y^4 - xy^8$$

**Esercizio 4.2.2.**

- $(2x - 3y) \left( \frac{1}{2}y + 5x \right)$
- $\left( 2a^2 + b - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + b - 2a^2 \right)$
- $(3a^2 - 1)(2a + 1)(a^2 - a + 3)$

Un esempio di una espressione algebrica contenente le operazioni sin qui definite è il seguente:

**Esempio 4.2.5.**

$$\begin{aligned} & (x + 2y)(2x - y + 3) - 2(x^2 - y^2) + (x - y)(y - 3) = \\ & 2x^2 - xy + 3x + 4xy - 2y^2 + 6y - 2x^2 + 2y^2 + xy - 3x - y^2 + 3y = \\ & -y^2 + 4xy + 9y \end{aligned}$$

**Esercizio 4.2.3.**  $3(x - 1) - (2x - 2)(x + 2) + (2 - y)(x^2 - 4) - (4y - x^2y)$

## 4.3 Prodotti notevoli

Nel calcolo di una espressione algebrica polinomiale sono spesso presenti particolari moltiplicazioni tra polinomi, anche sotto forma di potenza. Tali prodotti, detti *prodotti notevoli*, si possono determinare mediante regole pratiche che permettono di snellire i calcoli.

### 1. Somma per differenza

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

infatti

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2$$

**Esempio 4.3.1.**

$$(2x + 3y^2)(2x - 3y^2) \stackrel{\text{con } A=2x \text{ e } B=3y^2}{=} (2x)^2 - (3y^2)^2 = 4x^2 - 9y^4$$

$$(7x^2 - 1)(7x^2 + 1) = 49x^4 - 1$$

$$(-2x^2 + 3y)(-2x^2 - 3y) = 4x^4 - 9y^2$$

$$(5a + 2b)(2b - 5a) = 4b^2 - 25a^2$$

Dagli esempi si nota che:

il prodotto tra la somma di due termini e la loro differenza si ottiene facendo il quadrato del termine che mantiene il segno, meno il quadrato di quello che cambia di segno.

**Esercizio 4.3.1.**

- $(-4x + 3y^2)(-4x - 3y^2)$
- $\left(\frac{1}{2}a^3 - 5b\right)\left(\frac{1}{2}a^3 + 5b\right)$
- $\left(\frac{2}{3}x^2y + 7y^4\right)\left(7y^4 - \frac{2}{3}x^2y\right)$

2. Quadrato di binomio

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

infatti

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

**Esempio 4.3.2.**

$$(2x - 7)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-7) + (-7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$$

$$(y^3 + 5xy)^2 = y^6 + 10xy^4 + 25x^2y^2$$

$$\left(-\frac{2}{3} + x^2\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{4}{3}x^2 + x^4$$

$$\left(-\frac{1}{2}a - 3b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + 3ab + 9b^2$$

$$(x - 2y + 3)(x - 2y - 3) = (x - 2y)^2 - 3^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 - 9$$

Riassumendo possiamo memorizzare che:

il quadrato di un binomio si ottiene sommando il quadrato del primo termine, il doppio prodotto dei due termini e il quadrato del secondo termine.

**Esercizio 4.3.2.**

$$(3x^2 - xy)^2; \quad (-2x - y^2)^2; \quad \left(\frac{1}{2}x^3 + 4\right)^2; \quad (y^2 + 3x + 4)(y^2 - 3x - 4)$$

3. Quadrato di trinomio

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

infatti

$$\begin{aligned} (A + B + C)^2 &= \\ &= (A + B + C)(A + B + C) \\ &= A^2 + AB + AC + AB + B^2 + BC + AC + BC + C^2 \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \end{aligned}$$

**Esempio 4.3.3.**

$$(2x - y^2 + 1)^2 = 4x^2 + y^4 + 1 - 4xy^2 + 4x - 2y^2$$

$$\left(\frac{3}{2} - xy + y^2\right)^2 = \frac{9}{4} + x^2y^2 + y^4 - 3xy + 3y^2 - 2xy^3$$

Riassumendo possiamo memorizzare che:

il quadrato di un trinomio si ottiene sommando i quadrati dei tre termini e i doppi prodotti dei termini presi a due a due.

Analogamente il quadrato di un polinomio si ottiene sommando i quadrati di tutti i termini e i doppi prodotti dei termini presi a due a due.

**Esempio 4.3.4.**

$$(x - 2y + 5xy - 1)^2 = x^2 + 4y^2 + 25x^2y^2 + 1 - 4xy + 10x^2y - 2x - 20xy^2 + 4y - 10xy$$

$$= x^2 + 4y^2 + 25x^2y^2 + 1 - 14xy + 10x^2y - 2x - 20xy^2 + 4y$$

**Esercizio 4.3.3.**

$$(2a + 3b^2 - 5)^2; \quad \left(x^2 - xy + \frac{1}{3}\right)^2; \quad (-3x + 2xy - 2y + 1)^2$$

4. Cubo di binomio

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

infatti

$$(A + B)^3 = (A + B)(A + B)^2 = (A + B)(A^2 + 2AB + B^2)$$

$$= A^3 + 2A^2B + AB^2 + A^2B + 2AB^2 + B^3$$

$$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

**Esempio 4.3.5.**

$$(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3(2x) \cdot 3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

$$(x - 5y^2)^3 = x^3 - 15x^2y^2 + 75xy^4 - 125y^6$$

$$\left(-\frac{1}{3}x^2 + 2x\right)^3 = -\frac{1}{27}x^6 + \frac{2}{3}x^5 - 4x^4 + 8x^3$$

$$\left(-a - \frac{1}{4}ab\right)^3 = -a^3 - \frac{3}{4}a^3b - \frac{3}{16}a^3b^2 - \frac{1}{64}a^3b^3$$

Riassumendo possiamo memorizzare che:

il cubo di un binomio si ottiene sommando il cubo del primo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo termine per il primo e il cubo del secondo termine.

**Esercizio 4.3.4.**

$$\left(\frac{3}{4}x + 4\right)^3; \quad (x^2 - 3)^3; \quad \left(-xy - \frac{1}{2}x\right)^3$$

Abbiamo sinora imparato a calcolare la potenza di un binomio fino al terzo grado.

Riscrivendo i risultati ottenuti:

$$(A + B)^0 = 1$$

$$(A + B)^1 = A + B$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$



possiamo notare che il risultato è formalmente sempre un polinomio omogeneo, ordinato e completo in A e B con grado uguale a quello della potenza che stiamo calcolando.

Osserviamo inoltre, che il primo e l'ultimo coefficiente di ogni polinomio risultato (nell'ordine in cui è stato scritto) sono uguali ad 1, mentre gli altri sono la somma dei due coefficienti "vicini" della potenza precedente.

Si potrebbe dimostrare, con strumenti matematici che ancora non possediamo, che quanto osservato si può generalizzare per calcolare una qualsiasi potenza di binomio.

Continuando quindi l'elenco delle potenze avremo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (A + B)^3 & = & 1A^3 & + & 3A^2B & + & 3AB^2 & + & 1B^3 \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
 (A + B)^4 & = & 1A^4 & + & 4A^3B & + & 6A^2B^2 & + & 4AB^3 & + & 1B^4 \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
 & & & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

che ci permette di enunciare la seguente regola pratica:

la *potenza n-esima* di un binomio è un polinomio omogeneo, ordinato e completo di grado n i cui coefficienti si ricavano dalla seguente tabella (detta Triangolo di Tartaglia) nella quale ogni numero è la somma dei due numeri "vicini" sopra ad esso:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & & & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 &
 \end{array}$$

**Esempio 4.3.6.**

$$\begin{aligned}
 (2x - y^2)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4(-y^2) + 10(2x)^3(-y^2)^2 + 10(2x)^2(-y^2)^3 + \\
 &+ 5(2x)(-y^2)^4 + (-y^2)^5 \\
 &= 32x^5 - 80x^4y^2 + 80x^3y^4 - 40x^2y^6 + 10xy^8 - y^{10}
 \end{aligned}$$

**Esercizio 4.3.5.**

$(3x - x^2)^4$  ;  $(x + 2y)^6$

Vediamo ora due esempi di espressioni algebriche contenenti le operazioni e i prodotti notevoli tra polinomi:

**Esempio 4.3.7.**

$$\begin{aligned}
 &[(y^2 + 1)(y - 1)(y + 1) - (y^2 + 4)^2 + (2 + y)(y - 2) + (-4y)^2 + 8(3 - y^2)]^3 - (3y^2 - 1)^2 - 26 = \\
 &[(y^2 + 1)(y^2 - 1) - (y^4 + 8y^2 + 16) + y^2 - 4 + 16y^2 + 24 - 8y^2]^3 - (9y^4 - 6y^2 + 1) - 26 = \\
 &[y^4 - 1 - y^4 - 8y^2 - 16 + y^2 - 4 + 16y^2 + 24 - 8y^2]^3 - 9y^4 + 6y^2 - 1 - 26 = \\
 &[y^2 + 3]^3 - 9y^4 + 6y^2 - 27 = \\
 &y^6 + 9y^4 + 27y^2 + 27 - 9y^4 + 6y^2 - 27 = y^6 + 33y^2
 \end{aligned}$$

**Esempio 4.3.8.**

$$\begin{aligned}
 &(x + 2y - 1)(x + 2y + 1) - (x + 2y + 1)^2 + 2(2y + x) = \\
 &(x + 2y)^2 - 1 - x^2 - 4y^2 - 1 - 4xy - 2x - 4y + 4y + 2x = \\
 &x^2 + 4xy + 4y^2 - x^2 - 4y^2 - 4xy - 2 = -2
 \end{aligned}$$

**Esercizio 4.3.6.**

- $(a + 3b)^2(a - 3b)^2 - (-3b)^4 - (1 - a^2)^2 + (a + b)(a - b) + 2(-3ab)^2$
- $(x^2 - 3x + 2)^2 + x^2(x + 2)(x - 3) + 2x(x - 1)^3 + x(x^2 - x + 10)$

## 4.4 Divisione

Per dividere un polinomio per un monomio non nullo è sufficiente dividere ogni suo termine per il monomio. L'espressione algebrica ottenuta è un polinomio solo quando il monomio divisore è un fattore di tutti i termini componenti il polinomio dividendo.

**Esempio 4.4.1.**

$$(-6x^2y^3 + 4xy^2 - 5xy^4) : (2xy^2) = -3xy + 2 - \frac{5}{2}y^2$$

**Esercizio 4.4.1.**  $\left(\frac{3}{2}xy^3z^2 - \frac{1}{2}xyz + x^2y^2z\right) : \left(\frac{1}{2}xyz\right)$

Vogliamo ora definire ed imparare ad eseguire la divisione tra due polinomi.

**Definizione 4.4.1.** Dati due polinomi  $P$  e  $D$  (rispettivamente dividendo e divisore) il quoziente  $Q$  e il resto  $R$  della divisione tra  $P$  e  $D$  sono due polinomi tali che

$$P = D \cdot Q + R \text{ ove il grado di } R \text{ è minore del grado di } D$$

Per imparare ad eseguire la divisione tra due polinomi procediamo con un esempio:  
data la divisione

$$(x - 6x^3 + 2x^4 - 1) : (x^2 - 2)$$

ordiniamo dividendo  $P$  e divisore  $D$  e otteniamo:

$$(2x^4 - 6x^3 + x - 1) : (x^2 - 2)$$

Dividiamo il monomio di grado massimo di  $P$  per quello di grado massimo di  $D$  (essi sono ovviamente i primi monomi di  $P$  e  $D$  essendo questi ultimi ordinati). Il risultato ottenuto,  $Q_1 = 2x^2$ , è il primo candidato quoziente mentre il primo candidato resto si ottiene calcolando

$$R_1 = P - D \cdot Q_1 = 2x^4 - 6x^3 + x - 1 - (x^2 - 2) \cdot 2x^2 = 2x^4 - 6x^3 + x - 1 - 2x^4 + 4x^2 = -6x^3 + 4x^2 + x - 1$$

Poichè il grado di  $R_1$  non è minore del grado di  $D$ , ripetiamo il procedimento per la divisione  $R_1 : D$  ed otteniamo  $Q_2 = -6x$  e  $R_2 = R_1 - D \cdot Q_2 = -6x^3 + 4x^2 + x - 1 - (x^2 - 2)(-6x) = -6x^3 + 4x^2 + x - 1 + 6x^3 - 12x = 4x^2 - 11x - 1$

Poichè ancora il grado di  $R_2$  non è minore del grado di  $D$ , continuiamo con  $R_2 : D$  ottenendo  $Q_3 = 4$  e  $R_3 = R_2 - D \cdot Q_3 = 4x^2 - 11x - 1 - (x^2 - 2) \cdot 4 = -11x + 7$

Poichè finalmente il grado di  $R_3$  è minore del grado di  $D$ , possiamo scrivere (riassumendo il procedimento svolto)

$$\begin{aligned} P &= D \cdot Q_1 + R_1 = D \cdot Q_1 + D \cdot Q_2 + R_2 = D \cdot Q_1 + D \cdot Q_2 + D \cdot Q_3 + R_3 \\ &= \text{(proprietà distributiva)} \\ &= D \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + R_3 \end{aligned}$$

con riferimento al nostro esempio abbiamo:

$$2x^4 - 6x^3 + x - 1 = (x^2 - 2) \cdot (2x^2 - 6x + 4) + (-11x + 7)$$

e quindi possiamo dire che il quoziente  $Q$  è  $2x^2 - 6x + 4$  e il resto  $R$  è  $-11x + 7$

Il procedimento appena illustrato viene sintetizzato con la seguente regola pratica:

$$\begin{array}{r|l}
 P \rightarrow 2x^4 - 6x^3 + 0x^2 + x - 1 & x^2 - 2 \leftarrow D \\
 -D \cdot Q_1 \rightarrow -2x^4 & + 4x^2 & 2x^2 - 6x + 4 \leftarrow Q \\
 \hline
 R_1 \rightarrow // -6x^3 + 4x^2 + x - 1 & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array} \\
 -D \cdot Q_2 \rightarrow +6x^3 & -12x & \\
 \hline
 R_2 \rightarrow // +4x^2 - 11x - 1 & \\
 -D \cdot Q_3 \rightarrow -4x^2 & +8 & \\
 \hline
 R = R_3 \rightarrow // -11x + 7 & 
 \end{array}$$

Osserviamo che:

1. nella precedente "tabella di divisione" è stato necessario completare formalmente il polinomio dividendo  $P$  diversamente da quanto fatto per il divisore  $D$ .
2. il grado del quoziente  $Q$  è determinato dal monomio  $Q_1$  e quindi esso è la differenza tra il grado del dividendo  $P$  e quello del divisore  $D$ .
3. dalla definizione di divisione sappiamo che il grado del resto è minore di quello del divisore e infatti nell'esempio svolto è
 
$$gr(R) = 1 < 2 = gr(D).$$

E' importante non commettere l'errore di pensare che il grado del resto sia sempre inferiore di uno a quello del divisore come si può verificare con la seguente divisione  $(4x^3 - 5x + 16) : (2x^2 - 3x + 2)$  nella quale il resto ha grado zero.

**Esercizio 4.4.2.**

- $(x^5 - 3x^3 + 2x + x^2 - 2) : (x^2 - x)$
- $(-10x^3 - 6 + 9x^2) : (2 - 5x^2 - 3x)$

Proponiamoci di eseguire una divisione tra polinomi in cui compare più di una lettera:

$$(x^3 - 4y^3 + 2xy^2) : (x^2 + y^2 - 3xy)$$

Per utilizzare il procedimento imparato è necessario stabilire rispetto a quale lettera ordinare i polinomi.

1. divisione rispetto ad  $x$ :

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 0x^2 + 2xy^2 - 4y^3 & x^2 - 3xy + y^2 \\
 -x^3 + 3x^2y - xy^2 & \hline
 // + 3x^2y + xy^2 - 4y^3 & x + 3y \\
 -3x^2y + 9xy^2 - 3y^3 & \\
 \hline
 10xy^2 - 7y^3 & 
 \end{array}$$

2. divisione rispetto ad  $y$ :

$$\begin{array}{r|l}
 -4y^3 + 2xy^2 + 0y + x^3 & y^2 - 3xy + x^2 \\
 +4y^3 - 12xy^2 + 4x^2y & \hline
 // - 10xy^2 + 4x^2y + x^3 & -4y - 10x \\
 +10xy^2 - 30x^2y + 10x^3 & \\
 \hline
 -26x^2y + 11x^3 & 
 \end{array}$$

Osservando che i quozienti e i resti ottenuti con le due divisioni sono diversi, conveniamo di indicarli con  $Q(x)$  ed  $R(x)$  o  $Q(y)$  ed  $R(y)$  se sono stati ottenuti rispettivamente rispetto ad  $x$  o ad  $y$  e quindi:

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= x + 3y \text{ e } R(x) = 10xy^2 - 7y^3 \\
 Q(y) &= -4y - 10x \text{ e } R(y) = -26x^2y + 11x^3
 \end{aligned}$$

*Osservazioni:*

1. Nel caso particolare in cui il grado del dividendo  $P$  sia minore di quello del divisore  $D$ , possiamo affermare che il quoziente  $Q$  è il polinomio nullo ed il resto  $R$  è proprio il dividendo  $P$  infatti possiamo scrivere la seguente uguaglianza:

$$P = D \cdot 0 + P \quad \text{con} \quad gr(P) < gr(D)$$

2. Qualora il resto sia nullo, il divisore  $D$  della divisione si dice fattore (o divisore) del polinomio dividendo, infatti:

$$P = D \cdot Q + 0 \quad \text{da cui} \quad P = D \cdot Q$$

Ovviamente anche  $Q$  sarà un fattore o divisore di  $P$  ed è facile convincerci che in tal caso

$$P : Q = D$$

3. Nelle divisioni tra polinomi in più lettere, se il resto è nullo, i quozienti ottenuti rispetto a ciascuna lettera sono uguali tra loro.

**Esercizio 4.4.3.**

- $(3a^5 - 4a^4b - 10a^2b^3 + 4a^3b^2 + ab^4) : (a^2 + b^2)$
- $\left(\frac{5}{8}x^4y - \frac{2}{3}x^3y^2 + \frac{3}{2}x^3y - \frac{7}{3}x^2y^3 - x^2y^2 + xy^4 - 6xy^3\right) : \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}y + 2\right)$

## 4.5 Divisione con la Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione quando il divisore è un polinomio di primo grado con coefficiente direttivo unitario rispetto ad una lettera esiste una regola, detta *Regola di Ruffini*, che consente di determinare quoziente e resto in modo più rapido ed elegante.

Scegliamo di illustrare il nuovo procedimento mediante degli esempi.

Data la divisione  $(x^3 - 5x^2 + 3) : (x - 2)$ , disponiamo tutti i coefficienti del dividendo, ordinato e formalmente completo, all'interno di una "tabella":

	1	- 5	0	3

Scriviamo l'opposto del termine noto del divisore nella "tabella":

	1	- 5	0	3
+2				

Trascriviamo il coefficiente direttivo sotto la linea orizzontale :

	1	- 5	0	3
+2				
	1			

Moltiplichiamo quest'ultimo per l'opposto del termine noto (+2) e scriviamo il prodotto nella colonna successiva (quella del -5) sulla riga del 2:

	1	- 5	0	3
+2	2			
	1			

Sommiamo -5 e 2 riportando il risultato sotto la linea orizzontale:

	1	- 5	0	3
+2	2			
	1	- 3		

Ripetiamo lo stesso procedimento moltiplicando -3 e 2, riportando nella colonna successiva il prodotto e calcolando infine la somma:

	1	- 5	0	3
+2	2		- 6	
	1	- 3	- 6	

Iterando ancora una volta otteniamo:

	1	- 5	0	3
+2	2		- 6	- 12
	1	- 3	- 6	- 9

L'ultima riga contiene in modo ordinato rispettivamente i coefficienti del quoziente ed il resto. Il quoziente, che sappiamo essere un polinomio di grado due, (uno in meno del dividendo essendo il divisore di grado uno) è dunque  $x^2 - 3x - 6$ .

Il resto, che sappiamo essere un polinomio di grado zero, è  $-9$ .

Un ulteriore esempio è la seguente divisione

$$(2a^2x^2 - 3x^3 + a^4x - 4a^6) : (x + 2a^2)$$

Il calcolo con la regola di Ruffini è:

	-3	$2a^2$	$a^4$	-4a <sup>6</sup>
-2a <sup>2</sup>		$6a^2 - 16a^4$		30a <sup>6</sup>
	-3	$8a^2 - 15a^4$		26a <sup>6</sup>

Il quoziente ed il resto risultano rispettivamente:

$$Q(x) = -3x^2 + 8a^2x - 15a^4, R = 26a^6$$

Se avessimo voluto eseguire la divisione rispetto alla lettera  $a$  non avremmo potuto usare la nuova regola (non avendo il divisore grado 1 rispetto ad  $a$ ) e con il metodo generale di divisione avremmo ottenuto:

$$Q(a) = -2a^4 + \frac{3}{2}a^2x + \frac{1}{4}x^2, R = -\frac{13}{4}x^3$$

*Osservazione.* Se il coefficiente direttivo non è unitario è possibile adattare la regola di Ruffini per eseguire la divisione. In questo caso, però, il procedimento risulta appesantito perdendo in parte la sua rapidità esecutiva; si consiglia, dunque, di eseguire la divisione con il metodo tradizionale.

#### Esercizio 4.5.1.

- $(x^3 - 13x + 12) : (x + 1)$
- $\left(x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1\right) : (x - 3)$
- $(x^2y + 4xy^2 + 3y^3) : (2x + y)$

Nel caso in cui il divisore sia un polinomio di primo grado con coefficiente direttivo unitario è possibile determinare il resto senza eseguire la divisione utilizzando il seguente:

**Teorema 4.5.1** (Teorema del resto). *Il resto della divisione tra  $P(x)$  e  $(x - k)$  si ottiene sostituendo l'opposto del termine noto del divisore alla lettera del dividendo cioè:  $R = P(k)$ .*

*Dim.* Per definizione di divisione

$$P(x) = (x - k) \cdot Q(x) + R$$

sostituendo  $k$  alla  $x$  si ottiene:

$$P(k) = (k - k) \cdot Q(k) + R$$

quindi:

$$P(k) = 0 \cdot Q(k) + R$$

cioè

$$P(k) = R$$

□

#### Esempio 4.5.1.

Il resto della divisione:  $(2x^4 + x - 5) : (x - 1)$  è  $R = P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1 - 5 = 2 + 1 - 5 = -2$

Il resto della divisione:  $(x^2 + x - 2) : (x + 2)$  è  $R = P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

In quest'ultimo esempio, poichè il resto è nullo, il divisore  $(x+2)$  è un fattore del polinomio  $x^2+x-2$

Più in generale per controllare se un polinomio del tipo  $(x-k)$  è un fattore di  $P(x)$  è sufficiente calcolare il resto (e quindi  $P(k)$ ) e vedere se esso è nullo; si può enunciare, infatti il seguente teorema:

**Teorema 4.5.2** (Teorema di Ruffini). *Se un polinomio  $P(x)$  si annulla per  $x$  uguale a  $k$ , un suo fattore è  $(x-k)$ , e viceversa.*

Dim. ( $\Rightarrow$ )

$$P(x) = (x-k) \cdot Q(x) + R$$

poichè per ipotesi

$$R = P(k) = 0$$

allora

$$P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$$

dunque

$$(x-k) \text{ è un fattore di } P(x)$$

( $\Leftarrow$ )

se

$$(x-k) \text{ è un fattore di } P(x)$$

allora

$$P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$$

dunque

$$P(k) = (k-k) \cdot Q(x) = 0$$

□

**Esempio 4.5.2.** Stabilire quale dei seguenti polinomi è un divisore di  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ :

$$x+1; \quad x-2; \quad x+3$$

$$P(-1) = -1 + 3 + 4 - 12 \neq 0 \Rightarrow x+1 \text{ non è un fattore}$$

$$P(+2) = 8 + 12 - 8 - 12 = 0 \Rightarrow x-2 \text{ è un fattore}$$

$$P(-3) = -27 + 27 + 12 - 12 = 0 \Rightarrow x+3 \text{ è un fattore}$$

**Esempio 4.5.3.** Determinare il valore da attribuire alla lettera  $t$  affinché  $x-1$  sia un fattore del polinomio  $x^2 - 3x + t + 4$   
Calcoliamo  $P(1) = 1 - 3 + t + 4 = t + 2$  dovrà essere  $R = 0$  cioè  $t + 2 = 0$  dunque  $t = -2$

**Esempio 4.5.4.** Determinare un divisore di  $x^2 + 2x - 15$

Con il teorema di Ruffini siamo in grado di determinare i divisori del tipo  $(x-k)$

Infatti calcolando  $P(1), P(-1), P(2), P(-2), \dots$  otteniamo i resti della divisione rispettivamente per  $(x-1), (x+1), (x-2), (x+2), \dots$

$$P(1) = -13, P(-1) = -16, P(2) = -7, P(-2) = -15, P(3) = 0 \Rightarrow (x-3) \text{ è un divisore (fattore) del polinomio.}$$

**Osservazione:** Per determinare un fattore di un polinomio  $P(x)$ , come nell'ultimo esempio, non è necessario sostituire alla  $x$  tutti i numeri interi finchè si ottiene zero, ma solo i divisori del termine noto del dividendo. Infatti dall'uguaglianza:

$$P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$$

si deduce che il termine noto di  $P(x)$  è il prodotto tra il termine noto di  $Q(x)$  (indichiamolo con  $q$ ) e quello di  $(x-k)$ , dunque esso è  $-k \cdot q$  e quindi  $k$  risulta un fattore del termine noto di  $P(x)$ .

Se vogliamo ora cercare un fattore di  $x^3 - 4x^2 - 25$  i numeri da sostituire a  $x$  saranno i divisori di 25 ovvero  $\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Poichè  $P(1) \neq 0, P(-1) \neq 0$  ma  $P(5) = 0$  possiamo concludere che  $(x-5)$  è un fattore del polinomio.

E' opportuno far notare che non sempre un polinomio ha fattori del tipo  $(x-k)$  come è il caso di  $x^2 + 5x + 2$  per il quale  $P(1) \neq 0, P(-1) \neq 0, P(2) \neq 0, P(-2) \neq 0$ .

**Esercizio 4.5.2.**

- Calcolare il resto della divisione:  $(3x^4 + 6x^2 + x - 3) : \left(x + \frac{2}{3}\right)$
- Stabilire quale dei seguenti binomi è un fattore di  $x^3 - 5x^2 + 3x - 15$ :  
 $(x - 1); (x - 2); (x - 4); (x - 5); (x + 6)$
- Determinare due fattori di primo grado di  $x^4 - x^3 - x^2 - 5x - 30$
- Determinare il valore di  $k$  affinché  $(y + 1)$  sia un fattore di  $y^3 + 2ky^2 - 5ky - 6k - 2$
- Determinare  $k$  in modo che il resto della divisione:  $(2x^4 - 3x^2 + kx - k) : (x + 2)$  sia 17

**4.6 Esercizi a tema****Esercizio 4.6.1.** Esegui i prodotti notevoli del tipo  $(A + B)(A - B)$ :

1.  $(4y + 3)(4y - 3)$
2.  $(4m - 5n)(5n + 4m)$
3.  $(7ab^2 - 2a^3b)(2a^3b + 7ab^2)$
4.  $(-13 + 5a^2)(-13 - 5a^2)$
5.  $(5b^2y^4 - 6)(-5b^2y^4 - 6)$
6.  $\left(\frac{2}{3}ab - \frac{3}{4}c\right)\left(\frac{2}{3}ab + \frac{3}{4}c\right)$
7.  $\left(\frac{1}{5}x^3 + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{1}{5}x^3 - \frac{5}{6}y\right)$
8.  $\left(\frac{2}{5}x^3y^2 + \frac{3}{4}xy^3\right)\left(\frac{3}{4}xy^3 - \frac{2}{5}x^3y^2\right)$
9.  $\left(\frac{1}{4}m^2n - \frac{9}{8}mn^2\right)\left(\frac{9}{8}mn^2 + \frac{1}{4}m^2n\right)$
10.  $(4, 2x^3yz^2 - 0, 5y^2)(4, 2x^3yz^2 + 0, 5y^2)$

**Esercizio 4.6.2.** Sviluppa i quadrati dei polinomi:

1.  $(4y + 3)^2$
2.  $(5n - 4mn^2)^2$
3.  $(-3ab^2 - 2a^3b)^2$
4.  $(-13 + 5a^3)^2$
5.  $\left(\frac{4}{5}a^4b - \frac{3}{4}c\right)^2$
6.  $\left(-\frac{1}{7}x^3 + \frac{14}{3}y^5\right)^2$
7.  $\left(\frac{2}{3}x^3y^2 - \frac{3}{4}xy^3\right)^2$
8.  $(-1 + 5a^3 + b)^2$
9.  $(2a^2 - 3ab + b^3)^2$
10.  $(-3x^5y - 10xy^2 + y^3)^2$
11.  $\left(\frac{1}{4}m^2n - \frac{2}{3}mn^2 + 2m\right)^2$
12.  $\left(\frac{3}{2}x^2y^3 - 6x + \frac{2}{3}xy^2\right)^2$
13.  $(2a^2 - 5ab + a^3 - ab^3)^2$
14.  $(-x^5y^3 - 7xy^6 - 2 + 3y^3)^2$

**Esercizio 4.6.3.** Sviluppa i cubi dei binomi:

1.  $(3y - 1)^3$



2.  $(2n - 3mn^2)^3$
3.  $(-3ab^2 - 2a^3b)^3$
4.  $(5a^2 - 3b)^3$
5.  $\left(x^3 - \frac{x}{6}\right)^3$
6.  $(-1 + 4a^5)^3$
7.  $\left(\frac{y^2}{2} - 4y^3\right)^3$
8.  $\left(\frac{2}{3}a^2b - \frac{3}{4}a\right)^3$
9.  $\left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}xy^5\right)^3$
10.  $\left(-\frac{1}{3}x^3y^2 - 3xy^3\right)^3$

**Esercizio 4.6.4.** Sviluppa le potenze dei binomi:

1.  $(2y - 1)^5$
2.  $(3n - 2mn^3)^4$
3.  $(-ab^2 - a^3b)^6$
4.  $(2x^4 - y)^7$
5.  $\left(x^5 - \frac{x}{2}\right)^4$

**Esercizio 4.6.5.** Esegui le divisioni e verificane la correttezza:

1.  $(-2a^3 + 9a^2 - 4a - 15) : (-a + 3)$
2.  $(12b^3 - 21b + 8b^2 - 14) : (3b + 2)$
3.  $(4y^4 - 2y^3 + 10y^2 + 3y) : (2y^2 + y + 1)$
4.  $(x^5 - 3x^2 + x + 5) : (x^2 - x + 1)$
5.  $(a^4 - 3a^2 - 4) : (a^2 - 4)$
6.  $\left(x^3 - \frac{37}{30}x^2 + \frac{7}{12}x - 1\right) : \left(\frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}\right)$

**Esercizio 4.6.6.** Esegui le divisioni:

1.  $(-4x^4 + 7x^2y^2 - y^4 - xy^3) : (-2x + y)$

$$[Q(x) = Q(y) = 2x^3 + x^2y - 3xy^2 - y^3, \quad R = 0]$$

2.  $(2a^4 + ab^3 - a^3b) : (a^3 + b^3 - 2ab^2)$

$$[Q(a) = 2a - b, \quad R(a) = 4a^2b^2 - 3ab^3 + b^4]$$

3.  $(2x^6 - 6x^5y + 3x^4y^2 + x^3y^3 - 3x^2y^4 + 6xy^5 + 4y^6) : (x^2 - xy - y^2)$

$$[Q(x) = Q(y) = 2x^4 - 4x^3y + x^2y^2 - 2xy^3 - 4y^4, \quad R = 0]$$

**Esercizio 4.6.7.** Esegui le divisioni con la regola di Ruffini:

1.  $(3b^3 + 13b^2 + 5b) : (b + 4)$

$$[Q = 3b^2 + b + 1, \quad R = -4]$$

2.  $(3x^2 - x^3 + 17x + 7) : (2 + x)$

$$[Q = -x^2 + 5x + 7, \quad R = -7]$$

3.  $(3x^5 - 2x - 12x^3 - 5x^4 + 7) : (x - 3)$

$$[Q = 3x^4 + 4x^3 - 2, \quad R = 1]$$

4.  $(2a^2 - 3a + 1) : \left(a - \frac{1}{2}\right)$

$$[Q = 2a - 2, \quad R = 0]$$

5.  $\left(-\frac{17}{4}y^3 + 4y^5 - 2y + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y^2\right) : \left(y + \frac{3}{4}\right)$

[ $Q = 4y^4 - 3y^3 - 2y^2 - 2$ ,  $R = 2$ ]

6.  $(4a^2x - 3ax^2 + 2x^3 + 3a^3) : (2x + a)$

[ $Q = x^2 - 2ax + 3a^2$ ,  $R = 0$ ]

7.  $(2y^4 + by^3 - 10b^2y^2 + b^3y + 3b^4) : (y - 2b)$

[ $Q = 2y^3 + 5by^2 + b^3$ ,  $R = 5b^4$ ]

## 4.7 Esercizi riepilogativi

**Esercizio 4.7.1.** Calcola il valore delle seguenti espressioni:

1.  $\left(\frac{3}{2} - a\right)^2 - a(a - 3) + \left(2a - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + 2a\right) - \frac{3}{2}b^2$

[ $4a^2 - \frac{3}{2}b^2$ ]

2.  $(a - b)(a + b)^3 - (a + b)(a - b)^3 - 4ab(a^2 - 2b^2)$

[ $4ab^3$ ]

3.  $(x^2 - 3xy + 2y^2)^2 - x(x - 3y)^3 - 3xy(x^2 + 5y^2)$

[ $4y^4 - 14x^2y^2$ ]

4.  $8(y - 1)^3 + 4(y - 1)^2 + (y^2 - 4y + 2)^2 - y^2(y^2 - 1)$

[ $y^2$ ]

5.  $(2x - y - 1)(2x + y + 1) - (2x + 1)(2x - 3) + (y - 2)(y + 2)$

[ $4x - 2y - 2$ ]

6.  $(a^2 - 2a)^3 + a(2a^2 + 3a)^2 - 2a^3\left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 - a^4(a + 2)(a - 12)$

[ $52a^4 + \frac{1}{2}a^3$ ]

7.  $(a + b + c)^2 + (b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2$

[ $4a^2 + 4b^2 + 4c^2$ ]

8.  $[x^2 + 2(x - 1)]^2 - 4x^2(x - 1) - [2(x - 1)]^2 - (x^2 - 1)^2$

[ $2x^2 - 1$ ]

9.  $(a + 1 + 3b)^2 - 2(a + 1 - 3b)(a + 1 + 3b) + (a - 3b + 1)^2$

[ $36b^2$ ]

10.  $\left[\left(x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)^2 + (-2x^2)(x - y)(x + y) - \frac{1}{4}y^4\right] : (-2x^2)$

[ $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ ]

11.  $\left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y + 1\right)^2 - \left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}x - 1\right)^2 + \frac{1}{3}y\right]^2 - (2x - 3y)^2$

[ $24xy$ ]

12.  $\left[(x + y)^3 - (x - y)(x^2 + y^2 + xy) - 3xy(x + y)\right]^2 - (2y^2)^3$

[ $-4y^6$ ]

13.  $(x^2 - 2y)^2 + (x + 2y)^3 - (x - y)^3 - 3y\left(3y^2 + \frac{5}{3}x^2\right) - 4y^2$

[ $x^4 + 9xy^2$ ]

$$14. (x + 2y - 1)^2 + (x^2 - x - 2y)(x^2 + x + 2y) + (x^2 - 2)^3 + 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2(x + 2y - 6x^2) \quad [x^6 - 12]$$

$$15. 2(ab - 1)(ab + 1) + \left(a^2 - ab - \frac{1}{2}b^2\right)^2 - \left(ab + \frac{1}{2}b^2\right)^2 - a^2(a - b)^2 \quad [-2]$$

$$16. \left[\frac{1}{2}ab - \left(\frac{1}{4}a + b\right)^2 + \left(b + \frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{4}a + b\right)\right]a + \left(b + \frac{1}{2}a\right)^3 - b^2\left(\frac{3}{2}a + b\right) \quad \left[\frac{3}{4}a^2b\right]$$

$$17. (x - 1)(x + 3) - (x + 1)^2 - (x - 2)^2 + 2(x + 3)^2 - (x + 2 - y)^2 - 2y\left(x + 2 - \frac{1}{2}y\right) \quad [12x + 6]$$

$$18. [(3x - 1)(3x + 1)]^2 - \left(9x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad [-9x^2 + 1]$$

$$19. x(x - 2y)^3 - \left[(x + 2y)^2 - (2x + y)^2\right]^2 + 2xy(3x^2 + 4y^2 - 15xy) + 9y^4 \quad [-8x^4]$$

$$20. (x^{n+1} - x^2)(x^{n+1} + x^2) - x^2(x^n + x)^2 \quad [-2x^{n+3} - 2x^4]$$

**Esercizio 4.7.2.** Calcola quoziente e resto delle seguenti divisioni:

$$1. (4x^3 - 5x + 16) : (2x^2 - 3x + 2) \quad [Q(x) = 2x + 3, R(x) = 10]$$

$$2. \left(\frac{1}{4}x^4 - x^2y^2 + 6xy^3 - 6y^4\right) : \left(\frac{1}{2}x^2 + xy - 3y^2\right) \quad [Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - xy + 3y^2, R(x) = 3y^4],$$

$$[Q(y) = 2y^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{2}{9}x^2, R(y) = \frac{4}{9}x^3y + \frac{5}{36}x^4]$$

$$3. (2x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x + 2) \quad [Q(x) = 2x^2 - x, R = 2]$$

$$4. (2a^5 - 15a^3b^2 - 25ab^4 - b^5) : (a - 3b) \text{ rispetto alla lettera } a \quad [Q(a) = 2a^4 + 6a^3b + 3a^2b^2 + 9ab^3 + 2b^4, R(a) = 5b^5]$$

$$5. \left(a^5 + \frac{10}{3}a^4 - 3a^2 + \frac{1}{2}\right) : (a + 3) \quad [Q(a) = a^4 + \frac{1}{3}a^3 - a^2, R = \frac{1}{2}]$$

$$6. (64x^6 - y^6) : (16x^4 + 4x^2y^2 + y^4) \quad [Q(x) = Q(y) = 4x^2 - y^2, R(x) = R(y) = 0]$$

$$7. (2a^4 - 6a^2 + 3) : (a^2 - 3a - 1) \quad [Q(a) = 2a^2 + 6a + 14, R(a) = 48a + 17]$$

$$8. \left(x^4 - x^3 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}\right) : \left(x - \frac{3}{2}\right) \quad [Q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x, R = -\frac{1}{4}]$$

$$9. (2x^3 - x^2 - 8x + 4) : (2x - 1) \quad [Q(x) = x^2 - 4, R = 0]$$

10.  $(10a^5 - 25a^4 + 1 + 2a^3) : (2a^3 - 5a^2 + 1)$

$[Q(a) = 5a^2 + 1, R(a) = 0]$

11.  $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}\right) : \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + 1\right)$

$[Q(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}, R(x) = -\frac{3}{4}x]$

12.  $(10a^4 - 13a^3y - 2a^2y^2 + 7ay^3 - 2y^4) : (y - 2a)$

$[Q(y) = Q(a) = -5a^3 + 4a^2y + 3ay^2 - 2y^3, R = 0]$

**Esercizio 4.7.3.** Calcola il valore delle seguenti espressioni contenenti divisioni tra polinomi

1.  $[(2x^4 + x^3 - 3x^2 + x) : (x^2 + x - 1) + x]^2 - 4x^4$

$[0]$

2.  $(x - 4)^2 + [(x^2 - 16) : (4 - x)] \cdot [(2x^2 - 13x + 20) : (2x - 5)]$

$[-8x + 32]$

**Esercizio 4.7.4.** Stabilisci per quale valore di  $a$  la divisione  $(2x^2 - ax + 3) : (x + 1)$  dà resto 5.

$[a = 0]$

**Esercizio 4.7.5.** Stabilisci per quale valore di  $k$  il polinomio  $P(x) = 2x^3 - x^2 + kx - 3k$  è divisibile per  $x + 2$ .

$[k = -4]$

**Esercizio 4.7.6.** Stabilisci per quale valore di  $k$  la divisione  $(2x^2 + 3x + k - 2) : (x - 1)$  è esatta.

$[k = -3]$

**Esercizio 4.7.7.** Dati i polinomi  $A(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3k - 2$  e  $B(x) = kx^2 - (3k - 1)x - 4k + 7$  determina  $k$  in modo che i due polinomi, divisi entrambi per  $x + 1$  abbiano lo stesso resto.

$[k = 2]$

**Esercizio 4.7.8.** Verifica che il polinomio  $x^4 - x^2 + 12x - 36$  è divisibile per i binomi  $(x - 2)$  e  $(x + 3)$  utilizzando il teorema di Ruffini. Successivamente, utilizzando la divisione, verifica che è divisibile per il loro prodotto.

**Esercizio 4.7.9.** Calcola i resti delle divisioni:  $(x^2 + ax - 3a) : (x + 6)$  e  $(x^2 + x - (a + 2)) : (x + 3)$  e verifica che coincidono per  $a = 4$ .

# Capitolo 5

## SCOMPOSIZIONI

### 5.1 Scomposizioni

Nei capitoli precedenti abbiamo imparato a semplificare le espressioni algebriche contenenti operazioni tra polinomi; nella maggior parte dei casi la semplificazione consisteva nell'eseguire la moltiplicazione (o lo sviluppo di una potenza) di polinomi per ottenere come risultato un polinomio. In questo capitolo ci proponiamo di affrontare il problema inverso, cioè scrivere un polinomio, se possibile, come prodotto di altri polinomi.

**Esempio 5.1.1.** Dato  $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$  si può facilmente verificare che  $P(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$  ma anche  $P(x) = (x - 2)(x^2 + 3x + 2)$  oppure  $P(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)$

**Definizione 5.1.1.** Un polinomio si dice *riducibile* (scomponibile) se può essere scritto come prodotto di due o più polinomi (detti fattori) di grado maggiore di zero. In caso contrario esso si dirà *irriducibile*.

*Osservazione.* Dalla definizione si deduce banalmente che:

- un polinomio di primo grado è irriducibile;
- un polinomio di grado  $n$  può essere scritto come prodotto di al più  $n$  fattori di primo grado.

**Definizione 5.1.2.** Si chiama *scomposizione in fattori* di un polinomio la sua scrittura come prodotto di fattori irriducibili

Con riferimento all'esempio la scrittura  $(x^2 - 4)(x + 1)$  non è la scomposizione in fattori di  $P(x)$  in quanto  $x^2 - 4$  non è un polinomio irriducibile. La scomposizione in fattori di  $P(x)$  è invece  $(x - 2)(x + 2)(x + 1)$  essendo ciascuno dei tre fattori un polinomio di primo grado e quindi irriducibile.

*Osservazione.* La riducibilità o irriducibilità di un polinomio è legata all'insieme numerico al quale appartengono i suoi coefficienti; pertanto alcuni polinomi che sono irriducibili in quanto operiamo con coefficienti razionali ( $\mathbb{Q}$ ), potranno diventare riducibili se i loro coefficienti saranno considerati nell'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali (che contiene oltre a tutti i razionali anche altri numeri, incontrati alla scuola media, come ad esempio  $\sqrt{2}$  e  $\pi$ )

Un esempio di quanto osservato è il polinomio  $x^2 - 2$ , irriducibile in  $\mathbb{Q}$ , riducibile in  $\mathbb{R}$  in quanto:

$$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = x^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$$

Per scomporre un polinomio non esistono metodi generali, ma particolari strategie da applicare a determinate tipologie di polinomi. Una strategia già a nostra disposizione è l'applicazione del Teorema di Ruffini che permette di determinare i fattori di primo grado di un polinomio.

**Esempio 5.1.2.** Dato  $P(x) = x^2 - 25$  si ottiene  $P(1) \neq 0 \neq P(-1)$ ,  $P(5) = 0$  quindi  $x - 5$  è un fattore di  $x^2 - 25$ . L'altro fattore, cioè  $x + 5$ , si ottiene eseguendo la divisione  $(x^2 - 25) : (x - 5)$ . Essendo  $P(x) = D(x) \cdot Q(x)$  si ha  $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$

Alla tecnica di scomposizione che utilizza il Teorema di Ruffini, pur efficace e generale, si preferiscono metodi più snelli adatti ciascuno ad un particolare tipo di polinomio. Illustriamo ora i principali metodi di scomposizione.

### 1. Raccoglimento a fattore comune

Consiste nell'applicare la proprietà distributiva della moltiplicazione "evidenziando" come primo fattore il M.C.D. tra i monomi del polinomio e come secondo fattore il quoziente tra il polinomio e il M.C.D. In simboli:

$$A \cdot B + A \cdot C + A \cdot D = A \cdot (B + C + D)$$

#### Esempio 5.1.3.

- $2xy + 4x^2 - 6x^3y = 2x(y + 2x - 3x^2y)$
- $a^2b^3c - 5ab^2c^2 = ab^2c(ab - 5c)$
- $7xa^2 - 7a^2 = 7a^2(x - 1)$
- $\frac{2}{3}a^4b^2 + \frac{1}{5}a^2b^3c - 3a^3b^4c^2 = a^2b^2 \left( \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{5}bc - 3ab^2c^2 \right)$
- $-12x^2 - 15xy = -3x(4x + 5y)$  meglio di  $3x(-4x - 5y)$
- $x^{n+2} - 5x^n = x^n(x^2 - 5)$ , ( $n \in \mathbb{N}$ )

*Osservazione.*

(a) Quando i coefficienti sono frazionari abbiamo stabilito che il coefficiente del M.C.D. è 1. E' opportuno tuttavia raccogliere, in alcuni casi, anche un coefficiente non unitario come dimostrano i seguenti esempi:

$$\frac{4}{5}a^2b^5 - \frac{4}{5}ab^6 = \frac{4}{5}ab^5(a - b) \text{ preferibile a } ab^5 \left( \frac{4}{5}a - \frac{4}{5}b \right)$$

$$\frac{6}{7}xy^3 + \frac{3}{5}x^2 - 9x = 3x \left( \frac{2}{7}y^3 + \frac{1}{5}x - 3 \right)$$

$$\frac{1}{2}b^2c - \frac{3}{4}c = \frac{1}{4}c(2b^2 - 3)$$

(b) Qualora il M.C.D. che raccogliamo sia un monomio di grado zero, quella che otteniamo non è una scomposizione in base alla definizione data, tuttavia la scrittura ottenuta è spesso utile per poter continuare con la scomposizione come mostra il seguente esempio:

$$3x^2 - 75 = 3(x^2 - 25) \underbrace{=}_{\text{vedi es. 3.1.2}} 3(x - 5)(x + 5)$$

(c) La scomposizione mediante raccoglimento a fattore comune può essere estesa anche ad espressioni i cui addendi contengono uno stesso polinomio come fattore; vediamone alcuni esempi:

$$3(x + y) - 2a(x + y) - x(x + y) = (x + y)(3 - 2a - x)$$

$$(b - a)^2 - (b - a)(2 - a) = (b - a)[(b - a) - (2 - a)] = (b - a)(b - a - 2 + a) = (b - a)(b - 2)$$

$$2x(x - y) + 5y(y - x) = 2x(x - y) - 5y(-y + x) = 2x(x - y) - 5y(x - y) = (x - y)(2x - 5y)$$

#### Esercizio 5.1.1.

- $4a^2b + 16a^2c$
- $25a^3b^4 - 5a^2b^3 + 5a^2b^2$
- $\frac{1}{9}a^3b^3 + \frac{2}{3}a^2b^4$
- $3x^{n+1}y^m + 2x^ny^{m+2}$
- $(a - b)^2 + 2(a - b) - (a - b)ab$
- $3x(a - 1) + x^2(-a + 1)$

2. Raccoglimento parziale

Consiste nell'applicare il raccoglimento a fattore comune a gruppi di monomi e successivamente effettuare il raccoglimento a fattore comune nell'intera espressione ottenuta.

**Esempio 5.1.4.**

- $2x + 4y + ax + 2ay = 2(x + 2y) + a(x + 2y)$  avendo raccolto il fattore 2 nel gruppo dei primi due monomi ed  $a$  nel gruppo dei rimanenti  $= (x + 2y)(2 + a)$  avendo raccolto a fattore comune  $(x + 2y)$

Allo stesso risultato si può pervenire raccogliendo parzialmente tra il primo e il terzo monomio e tra il secondo e il quarto:  $x(2 + a) + 2y(2 + a) = (2 + a)(x + 2y)$

- $9x^2 - 3x - 3xy + y = 3x(3x - 1) - y(3x - 1) = (3x - 1)(3x - y)$

$$\bullet \quad 5ab^2 - 2a^2 + 6a - 15b^2 = \begin{cases} = a(5b^2 - 2a) - 3(-2a + 5b^2) = (5b^2 - 2a)(a - 3) \\ = 5b^2(a - 3) - 2a(a - 3) = (a - 3)(5b^2 - 2a) \end{cases}$$

- $11x^2 - 22xy + x - 2y = 11x(x - 2y) + 1(x - 2y) = (x - 2y)(11x + 1)$

- $12a^2x^2 + 6ax^2y - 4a^2b - 2aby = 2a(6ax^2 + 3x^2y - 2ab - by) = 2a[3x^2(2a + y) - b(2a + y)] = 2a(2a + y)(3x^2 - b)$

$$\bullet \quad ax + a - bx - b - 2cx - 2c = \begin{cases} = a(x + 1) - b(x + 1) - 2c(x + 1) = (x + 1)(a - b - 2c) \\ = x(a - b - 2c) + 1(a - b - 2c) = (a - b - 2c)(x + 1) \end{cases}$$

Dagli esempi svolti è facile convincerci che affinché si possa applicare il raccoglimento parziale è necessario che i gruppi di monomi individuati contengano lo stesso numero di termini.

**Esercizio 5.1.2.**

- $a^4 - a^3 - 2a + 2$
- $y^2 - 3x^3 + xy - 3x^2y$
- $10p^2 - 4pq - 15p + 6q$
- $2x^2 - 3xy + xz - 2ax + 3ay - az$

3. Scomposizione mediante riconoscimento di prodotti notevoli

Consiste nell'applicare la proprietà simmetrica dell'uguaglianza alle formule studiate relativamente ai prodotti notevoli. Si avrà quindi:

- (a) Differenza tra due quadrati

Ricordando che  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$  si ricava

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

**Esempio 5.1.5.**

- $9 - 4x^2 = (3)^2 - (2x)^2 = (3 + 2x)(3 - 2x)$
- $\frac{1}{4}x^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$
- $25a^2b^4 - \frac{9}{16}y^6 = \left(5ab^2 + \frac{3}{4}y^3\right)\left(5ab^2 - \frac{3}{4}y^3\right)$
- $-16 + 25x^2 = (5x + 4)(5x - 4)$
- $(2x - 3a)^2 - (x + a)^2 = (2x - 3a + x + a)(2x - 3a - x - a) = (3x - 2a)(x - 4a)$

**Esercizio 5.1.3.**

- $a^2 - 9b^2$
- $\frac{25}{16}a^2 - 1$

- $x^{2n} - y^4$
- $(2a - 1)^2 - (1 - a)^2$

(b) Sviluppo del quadrato di un binomio

Ricordando che  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  si ricava

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

**Esempio 5.1.6.**

- $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + (3)^2 = (x + 3)^2$
- $x^4 y^2 + 2x^2 y + 1 = (x^2 y + 1)^2$
- $9x^2 - 12xy^2 + 4y^4 = (3x - 2y^2)^2$
- $\frac{25}{4}a^2 - 5ab + b^2 = \left(\frac{5}{2}a - b\right)^2$
- $\frac{1}{4}x^2 y^2 + 1 - xy = \left(\frac{1}{2}xy - 1\right)^2$  osserva che non sempre il doppio prodotto è il monomio centrale

**Esercizio 5.1.4.**

- $49a^2 - 14ab + b^2$
- $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{3}xy$
- $\frac{1}{25} + \frac{2}{5}x^2 + x^4$
- $4y^{2n} - 12y^n + 9$

(c) Sviluppo del quadrato di un trinomio

Ricordando che  $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$  si ricava

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2$$

**Esempio 5.1.7.**

- $x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y = (x)^2 + (2y)^2 + (1)^2 + 2 \cdot (x) \cdot (2y) + 2 \cdot (x) \cdot (1) + 2 \cdot (2y) \cdot (1) = (x + 2y + 1)^2$
- $9x^4 + a^2 + 16 - 6x^2 a + 24x^2 - 8a = (3x^2 - a + 4)^2$
- $x^2 y^2 - 6xy - 14x^2 y + 9 + 49x^2 + 42x = (xy - 3 - 7x)^2$  anche in questo caso osserva che i monomi possono presentarsi in ordine sparso.

**Esercizio 5.1.5.**

- $a^2 + 4x^2 + 9 + 4ax - 6a - 12x$
- $16x^2 + 9x^4 y^2 - 24x^3 y - 12x^2 y^3 + 4y^4 + 16xy^2$

(d) Sviluppo del cubo di un binomio

Ricordando che  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3$  si ricava

$$A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

**Esempio 5.1.8.**

- $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x)^3 + 3 \cdot (x)^2 \cdot (2) + 3 \cdot (x) \cdot (2)^2 + (2)^3 = (x + 2)^3$
- $125x^6 - 75x^4 y + 15x^2 y^2 - y^3 = (5x^2 - y)^3$
- $\frac{1}{27}a^3 b^3 - \frac{2}{3}a^2 b^2 x^3 + 4abx^6 - 8x^9 = \left(\frac{1}{3}ab - 2x^3\right)^3$



**Esercizio 5.1.6.**

- $27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$
- $\frac{8}{27}a^3 - 2a^2 + \frac{9}{2}a - \frac{27}{8}$
- $a^{3n} + 3a^{2n} + 3a^n + 1$

Vediamo ora alcuni esempi in cui per scomporre un polinomio è necessario utilizzare più di un metodo tra quelli illustrati.

**Esempio 5.1.9.**

- $\underbrace{50x^5 - 2x^3y^4}_{\text{racc. f. c.}} = 2x^3 \underbrace{(25x^2 - y^4)}_{\text{diff. quad.}} = 2x^3(5x - y^2)(5x + y^2)$
- $\underbrace{a^4 - 8a^2 + 16}_{\text{quad. bin.}} = \underbrace{(a^2 - 4)}_{\text{diff. quad.}}^2 = [(a - 2)(a + 2)]^2 = (a - 2)^2(a + 2)^2$

$$\begin{aligned} & \underbrace{(x^2 - 9y^2)24a^3 + (x^2 - 9y^2)36a^2 + (x^2 - 9y^2)18a + 3(x^2 - 9y^2)}_{\text{racc. f.c.}} \\ &= 3 \underbrace{(x^2 - 9y^2)}_{\text{diff. quad.}} \underbrace{(8a^3 + 12a^2 + 6a + 1)}_{\text{cubo bin.}} = 3(x - 3y)(x + 3y)(2a + 1)^3 \end{aligned}$$

- $\underbrace{x^4 - a^2x^2 - 4x^2 + 4a^2}_{\text{racc. parz.}} = x^2(x^2 - a^2) - 4(x^2 - a^2) = \underbrace{(x^2 - a^2)}_{\text{diff. quad.}} \underbrace{(x^2 - 4)}_{\text{diff. quad.}} =$

$$= (x - a)(x + a)(x - 2)(x + 2)$$

- $\underbrace{\frac{1}{2}y^3 - 4y^2 + 8y}_{\text{racc. f.c.}} = \frac{1}{2}y \underbrace{(y^2 - 8y + 16)}_{\text{quad. bin.}} = \frac{1}{2}y(y - 4)^2$

- $\underbrace{3x^3 - 9x^2 + 12}_{\text{racc. f.c.}} = 3(x^3 - 3x^2 + 4)$  poiché il polinomio  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  non è riconducibile ad alcun prodotto

notevole, dobbiamo cercare un suo fattore utilizzando il Teorema di Ruffini.

$P(1) = 1 - 3 + 4 \neq 0$ ,  $P(-1) = -1 - 3 + 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)$  è un fattore di  $P(x)$ ; l'altro fattore lo otteniamo eseguendo la divisione:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$\text{Quindi } 3x^3 - 9x^2 + 12 = 3 \underbrace{(x^3 - 3x^2 + 4)}_{\text{Ruffini}} = 3(x + 1) \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{\text{quad. bin.}} =$$

$$= 3(x + 1)(x - 2)^2$$

**Esercizio 5.1.7.**

- $x^5 + xy^4 - 2x^3y^2$
- $192a^8b^7 - 3a^2b$
- $a^2x^2 - a^2y^2 + abx^2 - aby^2$
- $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$
- $24x - 36x^2 - 4$
- $(a + 2)x^2 - 6(a + 2)x + 9(a + 2)$
- $(3x - 1)^3 - (3x - 1)$
- $x^3y - 2x^3 - 3x^2y + 6x^2 + 3xy - 6x - y + 2$
- $2ax^4 - 162ay^4$

- $(2a - 5)^2 - (a + 2)^2$

#### 4. Scomposizione di particolari binomi

(a) Somma di due cubi

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

infatti posto  $P(A) = A^3 + B^3$ , per il Teorema di Ruffini, essendo  $P(-B) = 0$ , un suo fattore è  $A + B$ , l'altro si otterrà dalla divisione:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & B^3 \\ -B & & -B & B^2 & -B^3 \\ \hline & 1 & -B & B^2 & 0 \end{array}$$

$$Q(A) = A^2 - AB + B^2 \text{ quindi } A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

**Esempio 5.1.10.**  $8x^3 + 27 = (2x)^3 + (3)^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

(b) Differenza di due cubi

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

(la dimostrazione è analoga a quella precedente)

**Esempio 5.1.11.**  $a^3 - 125b^6 = (a)^3 - (5b^2)^3 = (a - 5b^2)(a^2 + 5ab^2 + 25b^4)$

*Osservazione.* I trinomi  $A^2 \pm AB + B^2$  vengono chiamati falsi quadrati e, come verrà dimostrato in seguito, se di secondo grado, sono irriducibili. (I falsi quadrati di grado superiore al secondo sono riducibili, ma con tecniche che esulano da questo corso di studi)

**Esercizio 5.1.8.**

- $x^6 + 1$
- $27x^3y^3 + z^9$
- $125a^3 - x^6$
- $-64 + \frac{1}{8}y^3$

(c) Somma o differenza di due potenze ennesime

Qualora per scomporre la somma o la differenza di due potenze ennesime non sia possibile ricondursi ai casi finora esaminati, è possibile dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:  $A^n + B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \dots - AB^{n-2} + B^{n-1})$  con  $n$  naturale dispari. Qualora  $n$  sia pari dimostreremo che il binomio, se di secondo grado, è irriducibile (se di grado superiore è riducibile, ma non sempre con tecniche elementari)

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}) \text{ qualunque sia } n \text{ naturale}$$

**Esempio 5.1.12.**

- $x^5 - 32 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$
- $1 + x^7 = (1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6)$
- $y^6 - x^6 = (y^3 - x^3)(y^3 + x^3) = (y - x)(y^2 + xy + x^2)(y + x)(y^2 - xy + x^2)$  (è preferibile riconoscere la differenza di quadrati)

#### 5. Regola "somma-prodotto" per trinomi

Consideriamo il trinomio di secondo grado con coefficiente direttivo unitario del tipo

$$x^2 + sx + p$$

e supponiamo che il coefficiente  $s$  e il termine noto  $p$  siano rispettivamente la somma e il prodotto di due numeri  $a$  e  $b$  ossia  $s = a + b$ ,  $p = a \cdot b$ . Possiamo scrivere :

$$x^2 + sx + p = x^2 + (a + b)x + a \cdot b = x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b)$$

Otteniamo dunque la seguente regola :

$$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$$

con  $s = a + b$  e  $p = a \cdot b$

Per la determinazione dei numeri  $a$  e  $b$  consigliamo operativamente di individuare i fattori di  $p$  e tra questi scegliere quelli che hanno la somma  $s$  desiderata.

**Esempio 5.1.13.**

- $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$      $s = +5 = +2 + 3$ ,  $p = +6 = (+2) \cdot (+3)$
- $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$      $s = -1 = -4 + 3$ ,  $p = -12 = (-4) \cdot (+3)$
- $x^2 - 7xy + 10y^2 = (x - 5y)(x - 2y)$      $s = -7y = -5y - 2y$ ,  $p = 10y^2 = (-5y) \cdot (-2y)$
- $3x^2 - 33x - 36 = 3(x^2 - 11x - 12) = 3(x - 12)(x + 1)$

Nell'ultimo esempio, pur non avendo il polinomio coefficiente direttivo unitario, è stato possibile ricondurci alla regola "somma-prodotto" perchè abbiamo potuto operare il raccoglimento a fattore comune. Nei casi in cui il coefficiente direttivo rimanga diverso da 1 è possibile una generalizzazione come nel seguente esempio: dato il polinomio  $6x^2 - 11x + 3$ , cerchiamo due numeri la cui somma sia ancora il coefficiente di  $x$  cioè  $-11$  e il cui prodotto sia il prodotto tra il coefficiente direttivo e il termine noto, cioè  $6 \cdot 3 = 18$ . Individuati tali valori in  $-9$  e  $-2$  trasformiamo il trinomio nel quadrinomio  $6x^2 - 2x - 9x + 3$  e lo scomponiamo mediante raccoglimento parziale:

$$6x^2 - 11x + 3 = 6x^2 - 2x - 9x + 3 = 2x(3x - 1) - 3(3x - 1) = (3x - 1)(2x - 3)$$

La regola "somma -prodotto" e la sua generalizzazione possono essere estese anche a polinomi di grado maggiore di due del tipo  $ax^{2n} + bx^n + c$  in quanto tale polinomio può essere pensato come  $ay^2 + by + c$  avendo posto  $y = x^n$

**Esempio 5.1.14.**

- $x^4 - 5x^2 + 4 = \underbrace{y^2 - 5y + 4}_{x^2=y} = (y - 4)(y - 1) = \underbrace{(x^2 - 4)(x^2 - 1)}_{y=x^2} = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$
- $2x^6 - 10x^3 - 48 = 2(x^6 - 5x^3 - 24) = 2(x^3 - 8)(x^3 + 3) = 2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^3 + 3)$
- $2x^8 + 3x^4 + 1 = 2x^8 + 2x^4 + x^4 + 1 = 2x^4(x^4 + 1) + 1(x^4 + 1) = (x^4 + 1)(2x^4 + 1)$
- $x^4 - 3x^2y^2 - 4y^4 = (x^2 - 4y^2)(x^2 + y^2) = (x - 2y)(x + 2y)(x^2 + y^2)$

**Esercizio 5.1.9.**

- $x^2 - 11x + 24$
- $x^2 - 6ax - 55a^2$
- $x^4 - 13x^2 + 36$
- $x^2 + 10x + 9$
- $a^2 - 2ab - 15b^2$
- $a^6 + 2a^3 - 15$
- $y^{10} + 2xy^5 - 80x^2$
- $9x^2 - 3x - 2$
- $6x^2 + 7x - 10$
- $21x^2 - xy - 10y^2$
- $3x^2 - 8xy^2 + 5y^4$
- $15x^2 + 8xy^2 + y^4$

## 6. Scomposizione non standard

Qualora il polinomio non sia scomponibile con alcuno dei metodi illustrati può essere, in alcuni casi, possibile ricondurci ad essi, dopo aver opportunamente scomposto alcune parti del polinomio, come dimostrano i seguenti esempi.

**Esempio 5.1.15.**

- $\underbrace{x^2 - 4xy + 4y^2}_{\text{quad. bin.}} - 25 = \underbrace{(x - 2y)^2 - 25}_{\text{diff. quad.}} = (x - 2y + 5)(x - 2y - 5)$
- $\underbrace{x^2 - 9}_{\text{diff. quad.}} + \underbrace{2xy - 6y}_{\text{racc. f.c.}} = \underbrace{(x - 3)(x + 3) + 2y(x - 3)}_{\text{racc.f.c.}} = (x - 3)(x + 3 + 2y)$
- $\underbrace{x^2 - 7x + 6}_{\text{s. p.}} - \underbrace{ax + a}_{\text{racc. f.c.}} = \underbrace{(x - 6)(x - 1) - a(x - 1)}_{\text{racc.f.c.}} = (x - 1)(x - 6 - a)$
- $x^4 + x^3 + 2x - 4 = \underbrace{x^4 - 4}_{\text{diff. quad.}} + \underbrace{x^3 + 2x}_{\text{racc. f.c.}} = \underbrace{(x^2 - 2)(x^2 + 2) + x(x^2 + 2)}_{\text{racc.f.c.}} = (x^2 + 2)(x^2 - 2 + x) = (x^2 + 2)(x^2 + x - 2) = (x^2 + 2)(x + 2)(x - 1)$   
s. p

Quest'ultimo polinomio poteva essere scomposto anche ricorrendo al Teorema di Ruffini, ma il procedimento, seppur corretto, sarebbe risultato meno veloce ed elegante.

- $\underbrace{4a^2 - 4a + 1}_{\text{quad. bin.}} - \underbrace{y^2 + 2xy - x^2}_{\text{opposto quad. bin.}} = (2a - 1)^2 - (y^2 - 2xy + x^2) = \underbrace{(2a - 1)^2 - (y - x)^2}_{\text{diff. quad.}} = (2a - 1 + y - x)(2a - 1 - y + x)$
- $27 + \underbrace{8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3}_{\text{cubo bin.}} = \underbrace{27 + (2a + b)^3}_{\text{somma cubi}} = (3 + 2a + b)[9 - 3(2a + b) + (2a + b)^2] = (3 + 2a + b)(9 - 6a - 3b + 4a^2 + 4ab + b^2)$
- $\underbrace{4x^4 + 1}_{\text{somma quad. non 2° grado}} = \underbrace{4x^4 + 1 + 4x^2 - 4x^2}_{\text{quad. bin.}} = \underbrace{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2}_{\text{diff. quad.}} = (2x^2 + 1 - 2x)(2x^2 + 1 + 2x)$
- $\underbrace{(x^2 - y^2)}_{\text{diff. quad.}}(x - y) - x^2(x + y) = \underbrace{(x - y)(x + y)(x - y) - x^2(x + y)}_{\text{racc. f.c.}} = (x + y)\underbrace{[(x - y)^2 - x^2]}_{\text{diff. quad.}} = (x + y)(x - y - x)(x - y + x) = -y(x + y)(2x - y)$
- $\underbrace{x^4 + x^2y^2 + y^4}_{\text{falso quad. non 2° grado}} = x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2 = \underbrace{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2}_{\text{quad. bin.}} = \underbrace{(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2}_{\text{diff. quad.}} = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$

**Esercizio 5.1.10.**

- $x^4 - y^6 + 6y^3 - 9$
- $x^2 + xy + y^2 + x^3 - y^3$
- $y^2 - 3y + 2 + xy - 2x$
- $a^2 - 4a^2x + 4a^2x^2 - (1 - 2x)^2$
- $y^3 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
- $4x^2 - 9 + 4ax^2 + 12ax + 9a$

## 5.2 Sintesi

Per facilitare la memorizzazione e l'applicazione delle tecniche di scomposizione, possiamo riassumerle e schematizzarle nel modo seguente:

- Raccoglimento a fattore comune
- Binomio:
  1. differenza di quadrati
  2. somma o differenza di cubi
  3. somma o differenza di due potenze ennesime ( $n > 3$ )
- Trinomio:
  1. sviluppo del quadrato di binomio
  2. regola "somma-prodotto"
- Quadrinomio:
  1. sviluppo del cubo di binomio
  2. raccoglimento parziale
- Polinomio con sei termini:
  1. sviluppo del quadrato di trinomio
  2. raccoglimento parziale
- Scomposizioni non standard
- Scomposizioni con la Regola di Ruffini

## 5.3 Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di polinomi

**Definizione 5.3.1.** Si dice massimo comun divisore (M.C.D.) di polinomi, il polinomio di grado massimo che è fattore di tutti i polinomi dati.

**Definizione 5.3.2.** Si dice minimo comune multiplo (m.c.m.) di polinomi, il polinomio di grado minimo che è multiplo di tutti i polinomi dati.

Dalle definizioni risulta evidente che per calcolare il M.C.D. e il m.c.m. di polinomi è necessario determinare i fattori irriducibili di ognuno di essi. Scomposti quindi in fattori tutti i polinomi:

il M.C.D. sarà il prodotto dei soli fattori comuni con il minimo esponente;

il m.c.m. sarà il prodotto di tutti i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente.

*Osservazione.* Poichè un polinomio non cambia grado e rimane un fattore di un altro polinomio se lo si moltiplica per una costante non nulla, a rigore (come già sottolineato per i monomi) dovremmo parlare di un M.C.D. (m.c.m.) anzichè del M.C.D. (m.c.m.).

Adottiamo anche in questo caso la stessa convenzione introdotta per il coefficiente del M.C.D. e m.c.m. di monomi.

### Esempio 5.3.1.

- $P_1(x) = 18x^2 - 54x$ ,  $P_2(x) = 2x^2 - 18$ ,  $P_3(x) = 2x^2 - 12x + 18$

Dopo aver determinato le scomposizioni:

$$P_1(x) = 18x(x-3), P_2(x) = 2(x+3)(x-3), P_3(x) = 2(x-3)^2$$

sarà:

$$\text{M.C.D.}(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = \pm 2(x-3)$$

$$\text{m.c.m.}(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = \pm 18x(x-3)^2(x+3)$$

- $P_1(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ ,  $P_2(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 2(x+3)(x-2)$ ,  $P_3(x) = 5x^2 - 20 = 5(x-2)(x+2)$

$$\text{M.C.D.}(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = \pm (x-2)$$

$$\text{m.c.m.}(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = \pm 10(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

- $P_1(x, y) = 8x^3 - y^3 = (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$ ,  $P_2(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x+y)^2$ ,  $\text{M.C.D.}(P_1(x, y), P_2(x, y)) = \pm 1$

$$\text{m.c.m.}(P_1(x, y), P_2(x, y)) = \pm (2x-y)(2x+y)^2(4x^2 + 2xy + y^2)$$

- $P_1(x, y) = 3x^2 - 30x + 75 = 3(x-5)^2$ ,  $P_2(x, y) = 5y + 10 - xy - 2x = (5-x)(y+2)$

Così come sono scritti non si riconoscono fattori comuni.

Possiamo però scrivere  $P_2(x, y) = -(x-5)(y+2)$  e quindi

$$\text{M.C.D.}(P_1(x, y), P_2(x, y)) = \pm (x-5)$$

$$\text{m.c.m.}(P_1(x, y), P_2(x, y)) = \pm 3(x-5)^2(y+2)$$

Avremmo potuto anche cambiare segno a  $P_1(x, y)$  anzichè a  $P_2(x, y)$  ottenendo

$$P_1(x, y) = 3[-(-x+5)]^2 = 3(5-x)^2 \text{ e quindi}$$

$$\text{M.C.D.}(P_1(x, y), P_2(x, y)) = \pm (5-x)$$

$$\text{m.c.m.}(P_1(x, y), P_2(x, y)) = \pm 3(5-x)^2(y+2)$$

ottenendo lo stesso risultato.

- $P_1(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x-3)^3$ ,  $P_2(x) = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}x + \frac{4}{5}x^2 = \frac{1}{5}(3-2x)^2$

Possiamo scegliere di cambiare  $P_1(x)$  in  $-(3-2x)^3$  oppure  $P_2(x)$  in  $\frac{1}{5}(2x-3)^2$  ottenendo in entrambi i casi :

$$\text{M.C.D.}(P_1(x), P_2(x)) = \pm (2x-3)^2$$

$$\text{m.c.m.}(P_1(x), P_2(x)) = \pm (2x-3)^3$$

### Esercizio 5.3.1.

- $a^2 - 6a + 9$  ;  $a^2 - 8a + 15$  ;  $a^2 - 4a + 3$
- $25 - x^2$  ;  $2x - 10$  ;  $25 - 10x + x^2$
- $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$  ;  $6x + 12y$  ;  $x^2 - 4y^2$
- $4x^3 - 4$  ;  $2x^2 - 4x + 2$  ;  $6x^2 - 6$
- $10a - 10b - 6ax + 6bx$  ;  $4a^2 - 4b^2$  ;  $18x^2 - 60x + 50$

## 5.4 Esercizi a tema

**Esercizio 5.4.1.** Scomponi mediante raccoglimento a fattor comune:

1.  $5x^4 + 30x^3 - 40x^2$
2.  $-6y^5 + 9y^4 + 15y^3$
3.  $6x^4y - 12x^3y^2 - 18x^2y^3$
4.  $-4a^3bx^2 + 8a^2b^2x - 12a^2bc$
5.  $12a^2b^3c^5d^5x^2 - 36a^2b^3c^4d^6y^2$
6.  $\frac{1}{3}x^3yz^2 + \frac{1}{9}x^2y^2z^2 - \frac{1}{3}xy^2z^3$
7.  $2x^4(y+1)^4 + 4x^8(y+1)^5$
8.  $\frac{1}{2}x(x-1) + \frac{3}{2}x(x-1)^2 + \frac{1}{4}x^2(x-1)$
9.  $3x^{3n}(y-1)^{n+2}z + 6x^{2n}(y-1)^{n+1}z^3$

**Esercizio 5.4.2.** Scomponi mediante raccoglimento parziale:

1.  $a^3 - ab^3 - 2a^2b + 2b^4$   $[(a-2b)(a^2-b^3)]$
2.  $3a^2b^2 - b^2 + 3a^2 - 1$   $[(3a^2-1)(b^2+1)]$
3.  $4x^2y^2 + 20x^2 - 3y^2 - 15$   $[(4x^2-3)(y^2+5)]$
4.  $2a^4 - a^2z^4 + 4a^2y^2 - 2y^2z^4$   $[(a^2+2y^2)(2a^2-z^4)]$
5.  $ax - 4a + x - 4 + xy - 4y$   $[(x-4)(a+1+y)]$
6.  $3(a+b) + x(a-b) - 3(a-b) - x(a+b)$   $[2b(3-x)]$
7.  $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}xy - 3a + ay$   $\left[ (3-y) \left( \frac{1}{2}x - a \right) \right]$
8.  $4x - 4 - 3(x-1)^2$

$$[(x-1)(7-3x)]$$

$$9. x^2 - xy + b(x-y)^2 - 2x + 2y$$

$$[(x-y)(x+bx-by-2)]$$

**Esercizio 5.4.3.** Scomponi riconoscendo la differenza di due quadrati:

$$1. 16x^2 - 9$$

$$2. 36a^4b^2 - c^6$$

$$3. -a^4 + b^2$$

$$4. \frac{1}{16}p^4 - \frac{25}{9}q^2$$

$$5. 81x^4 - y^8$$

$$6. \frac{1}{36}a^6b^2 - 121x^4$$

$$7. 100^{-2} - y^4$$

$$8. 4a^4 - (a^2 + 1)^2$$

$$9. (x+y)^2 - (a+b)^2$$

$$10. (x+2y)^2 - (x-3y)^2$$

**Esercizio 5.4.4.** Scomponi riconoscendo lo sviluppo del quadrato di un polinomio:

$$1. x^4 + 2x^2 + 1$$

$$2. 4a^2 - 12ab + 9b^2$$

$$3. \frac{1}{4}x^2y^2 - xy + 1$$

$$4. 100x^2y^4 + 60xy^2 + 9$$

$$5. a^4 + \frac{25}{4}b^2 - 5a^2b$$

$$6. x^{10} - x^5 + \frac{1}{4}$$

$$7. 64x^{2n} + 16x^n + 1$$

$$8. x^2 + 2x(a+b) + (a+b)^2$$

$$9. x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$$

$$10. 4y^2 + x^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6xz$$

$$11. \frac{1}{4}a^2 + 4b^4 + 1 - 2ab^2 - a + 4b^2$$

$$12. a^{2n} + 4b^{2n} + 9c^{2m} - 4a^n b^n - 6a^n c^m + 12b^n c^m$$

**Esercizio 5.4.5.** Scomponi riconoscendo lo sviluppo del cubo di un binomio:



1.  $8x^9 + 12x^6 + 9x^3 + 1$
2.  $27x^6 - 54x^4 + 18x^2 - 8$
3.  $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
4.  $a^6b^3 - \frac{3}{2}a^4b^2 + \frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{8}$
5.  $a^3 + 3a(b+c)^2 + 3a^2(b+c) + (b+c)^3$
6.  $0,125t^3 - 3t^2 + 24t - 64$

**Esercizio 5.4.6.** Scomponi riconoscendo la somma o differenza di cubi:

1.  $a^3 + 27$
2.  $x^6 - 8y^3$
3.  $125a^3 + 8$
4.  $a^3y^6 + \frac{1}{8}$
5.  $x^{15} - 1$
6.  $-1 + 64b^3$
7.  $8x^6y^9 - 27a^3$
8.  $p^3 + 27^{-1}$
9.  $x^{3n} - 216$
10.  $(x+1)^3 - 8x^3$
11.  $(a+1)^3 + (a+2)^3$

**Esercizio 5.4.7.** Scomponi utilizzando la regola 'somma-prodotto':

1.  $x^2 - 6x + 5$
2.  $b^2 + 11b + 10$
3.  $b^2 + 2b - 8$
4.  $x^2 + x - 30$
5.  $m^2 - 2m - 24$
6.  $x^6 + 4x^3 - 12$
7.  $x^{10} - 2x^5 - 15$
8.  $-x^2 + 3x + 18$
9.  $a^2 + 5ab - 50b^2$
10.  $y^2 - 7xy - 8x^2$
11.  $x^2y^2 + 4xy - 1$
12.  $a^{2n} - 4a^n - 21$

13.  $3x^2 - 2x - 8$

14.  $2b^{14} - 5b^7 - 3$

15.  $2a^2b^2 + 11ab - 6$

16.  $15x^2 + 7x - 2$

17.  $6m^4 + 5m^2 - 6$

18.  $-2x^2 - 3x + 5$

**Esercizio 5.4.8.** Scomponi utilizzando la regola di Ruffini:

1.  $a^3 - a^2 - 5a - 3$

$$[(a - 3)(a + 1)^2]$$

2.  $x^3 + x - 2$

$$[(x - 1)(x^2 + x + 2)]$$

3.  $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

$$[(x + 1)(x - 2)(x + 5)]$$

4.  $2x^3 - x^2 - 8x + 4$

$$[(x - 2)(x + 2)(2x - 1)]$$

5.  $t^3 - 39t + 70$

$$[(t - 2)(t - 5)(t + 7)]$$

## 5.5 Esercizi riepilogativi

**Esercizio 5.5.1.**

1.  $a^5 - a - 2 + 2a^4$

$$[(a + 2)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)]$$

2.  $6a^2x + 11ax + 3x$

$$[x(2a + 3)(3a + 1)]$$

3.  $2x^4 - 16xy^3$

$$[2x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)]$$

4.  $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

$$[(x - 1)(x^2 - x + 3)]$$

5.  $8x^5 - 50x^3y^2$

$[2x^3(2x - 5y)(2x + 5y)]$

6.  $2a^2b^2c + 2a^2bc^2 + 8a^2bc + 2ab^2c + 8abc + 2abc^2$

$[2abc(a + 1)(b + c + 4)]$

7.  $2x^3 - 7x^2 + 3x$

$[x(2x - 1)(x - 3)]$

8.  $\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2y^2 + xy^4 - y^6$

$\left[\left(\frac{1}{3}x - y^2\right)^3\right]$

9.  $16 - a^2 - b^2 + 2ab$

$[(4 + a - b)(4 - a + b)]$

10.  $(a - 2b)^2 + 2(a - 2b)(3a + 5b) + (3a + 5b)^2$

$[(4a + 3b)^2]$

11.  $y^3 - 7y - 6$

$[(y + 1)(y - 3)(y + 2)]$

12.  $(x^3 - 27)(x + 3) + (x^3 + 27)(x - 3)$

$[2(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9)]$

13.  $9x^4 + 4y^2 + 25x^2y^2 - 12x^2y + 30x^3y - 20xy^2$

$[(3x^2 - 2y + 5xy)^2]$

14.  $x^2 - 2ax - 2a - 1$

$[(x + 1)(x - 1 - 2a)]$

15.  $a^4 + 4a^2 - 32$

$[(a + 2)(a - 2)(a^2 + 8)]$

16.  $6x^3 - x^2 - 11x + 6$

$[(x - 1)(2x + 3)(3x - 2)]$

17.  $t^6 + 26t^3 - 27$

$$[(t-1)(t^2+t+1)(t+3)(t^2-3t+9)]$$

18.  $(5a^2x^3 - 10ax^3 + 5x^3)^2$

$$[25x^6(a-1)^2]$$

19.  $\frac{1}{4} + y^2 + z^2 - y + z - 2yz$

$$\left[ \left( \frac{1}{2} - y + z \right)^2 \right]$$

20.  $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$

$$\left[ \frac{1}{2}x(x-2)(x+1) \right]$$

21.  $x^4 - x^3 - 8x + 8$

$$[(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)]$$

22.  $5x^3y^3 + \frac{625}{8}$

$$\left[ 5 \left( xy + \frac{5}{2} \right) \left( x^2y^2 - \frac{5}{2}xy + \frac{25}{4} \right) \right]$$

23.  $3ax + 3xy + 2a + 2y$

$$[(a+y)(3x+2)]$$

24.  $a^2b - 9ab^2 + 20b^3$

$$[b(a-5b)(a-4b)]$$

25.  $a^8 - 2a^4 + 1$

$$[(a^2+1)^2(a+1)^2(a-1)^2]$$

26.  $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

$$[(x-3)(x-2)^2]$$

27.  $ax + 2bx + 3ay + 6by$

$$[(a+2b)(x+3y)]$$

28.  $a^4(x^2+1) - 10a^4$

$$[a^4(x+3)(x-3)]$$

29.  $16a^2b - \frac{1}{9}b$

$$\left[ b \left( 4a - \frac{1}{3} \right) \left( 4a + \frac{1}{3} \right) \right]$$

30.  $-12x^4 + 32x^2 - 16$

$$[-4(x^2 - 2)(3x^2 - 2)]$$

31.  $8a^3b^3 - 6a^2b^2 + \frac{3}{2}ab - \frac{1}{8}$

$$\left[ \left( 2ab - \frac{1}{2} \right)^3 \right]$$

32.  $(2a - 3b)^2 - (a - b)^2$

$$[(3a - 4b)(a - 2b)]$$

33.  $-9m^3 + 12m^2n - 4mn^2$

$$[-m(3m - 2n)^2]$$

34.  $x^4 - 18x^2 + 81$

$$[(x + 3)^2(x - 3)^2]$$

35.  $a^2x + a^2y - ax - ay - 2x - 2y$

$$[(x + y)(a - 2)(a + 1)]$$

36.  $4x^5 - 15x^3 - 5x^2 + 15x + 9$

$$[(x + 1)^3(2x - 3)^2]$$

37.  $x^6y^6 - 64$

$$[(xy + 2)(xy - 2)(x^2y^2 - xy + 4)(x^2y^2 + xy + 4)]$$

38.  $\frac{27}{8}x^6 - \frac{125}{8}x^3$

$$\left[ \frac{1}{8}x^3(3x - 5)(9x^2 + 15x + 25) \right]$$

39.  $2x^4 + 5x^3 + 3x^2$

$$[x^2(x + 1)(2x + 3)]$$

40.  $x^2 + 2x - 3 + 5ax - 5a$

$$[(x - 1)(x + 3 + 5a)]$$

41.  $2y^4 - 5y^3 + 5y - 2$

$$[(y+1)(y-1)(y-2)(2y-1)]$$

42.  $x^2y - 5xy + 6y + x^2 - 4x + 4$

$$[(x-2)(xy-3y+x-2)]$$

43.  $70a^4 + 51a^2b - 70b^2$

$$[(10a^2 - 7b)(7a^2 + 10b)]$$

44.  $y^6 - 7y^3 - 8$

$$[(y-2)(y^2+2y+4)(y+1)(y^2-y+1)]$$

45.  $8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

$$[(x-1)(2x+1)^3]$$

# Capitolo 6

## FRAZIONI ALGEBRICHE

### 6.1 Frazioni algebriche

**Definizione 6.1.1.** Si dice *frazione algebrica* il rapporto tra due espressioni algebriche

Sono esempi di frazioni algebriche:

$$\frac{3a-b}{a+2}, \frac{2x^2+3x+1}{x^2-4}, \frac{3ab^2}{c^5}, x^2-2x \text{ (il denominatore è 1)}$$

In questo tipo di espressioni in generale non è possibile attribuire alle lettere un qualsiasi valore perchè, essendo frazioni, non possono avere zero al denominatore. E' necessario, pertanto, determinare l'insieme dei valori che possono assumere le lettere; tale insieme viene chiamato *campo di esistenza* (C.E.) Per la frazione  $\frac{3a-b}{a+2}$  dovendo imporre che il denominatore non sia zero, avremo la condizione  $a+2 \neq 0$  cioè  $a \neq -2$ . Quindi il campo di esistenza è  $\mathbb{Q} \setminus \{-2\}$ .

Relativamente alla frazione  $\frac{2x^2+3x+1}{x^2-4}$ , dovrà essere  $x^2-4 \neq 0$  cioè, scomponendo e applicando la legge di annullamento di un prodotto  $(x-2) \cdot (x+2) \neq 0$  ovvero  $x-2 \neq 0$  e  $x+2 \neq 0$  quindi  $x \neq +2$  e  $x \neq -2$ . Il campo di esistenza è dunque  $\mathbb{Q} \setminus \{-2, +2\}$

E' opportuno osservare che, diversamente dal denominatore, il numeratore può annullarsi, rendendo nulla la frazione; i valori per i quali è zero il numeratore, non essendo da escludere, non vanno perciò determinati.

Una frazione algebrica può essere in alcuni casi semplificata trasformandola in un'altra *equivalente* applicando la proprietà invariantiva delle frazioni.

Data la frazione  $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$  per semplificarla procederemo nel modo seguente:

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{x+2}{x-3} \quad C.E. \mathbb{Q} \setminus \{2, 3\}$$

E' importante far notare che la frazione ottenuta  $\frac{x+2}{x-3}$  deve conservare il campo di esistenza della frazione iniziale anche se potrebbe essere calcolata per  $x=2$ ; le due frazioni sono perciò equivalenti solo per i valori delle lettere per i quali esistono entrambe.

In generale l'equivalenza tra frazioni va sempre riferita al loro campo di esistenza. Ad esempio le frazioni  $\frac{x(x+1)}{2x}$  e  $\frac{x+1}{2}$  non sono equivalenti per  $x=0$  mentre lo sono per qualsiasi altro valore.

**Esempio 6.1.1.** Semplificare le seguenti frazioni:  $\frac{3x^2-9x}{x^2-9}, \frac{a^2-ab}{a^2-2ab+b^2}, \frac{2x^3-6x^2+6x-2}{2x^2+2x-4}$

$$\frac{3x^2-9x}{x^2-9} = \frac{3x\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{3x}{x+3} \quad C.E. \mathbb{Q} \setminus \{\pm 3\}$$

(E' consuetudine, anzichè scrivere il campo di esistenza, indicare le condizioni di esistenza (che continueremo ad abbreviare con C.E.) della frazione, nel modo seguente:  $x \neq +3$ ,  $x \neq -3$  (oppure  $x \neq \pm 3$ )

$$\frac{a^2 - ab}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a\cancel{(a-b)}}{(a-b)\cancel{b}} = \frac{a}{a-b} \quad \text{C.E. } a \neq b$$

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 2}{2x^2 + 2x - 4} = \frac{2(x-1)\cancel{b^2}}{2\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{(x-1)^2}{x+2} \quad \text{C.E. } x \neq 1; x \neq -2$$

**Esercizio 6.1.1.** Semplificare le seguenti frazioni:

- $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - x}$
- $\frac{xy + 3x + 4y + 12}{y^2 - 9}$
- $\frac{a^3 - 8}{2a^2 - 3a - 2}$
- $\frac{4b^3 - 4b^2}{2b^3 - 4b^2 + 2b}$
- $\frac{1 - x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$
- $\frac{y^2 - 3y + 2}{y^2 - y - 2}$
- $\frac{x^2 - 10xy + 25y^2}{25x^2y^2 - 10x^3y + x^4}$

## 6.2 Operazioni

Per operare con le frazioni algebriche si può procedere in modo analogo a quanto appreso con le frazioni numeriche tenendo presente che ora i fattori saranno quelli ottenuti attraverso la scomposizione dei polinomi. E' quindi sufficiente illustrare le operazioni con degli esempi.

### 1. Addizione algebrica

**Esempio 6.2.1.**

$$\bullet \frac{1-a}{a+1} - \frac{a^2-a}{a+1} = \quad \text{C.E. } a \neq -1$$

$$\frac{(1-a) - (a^2-a)}{a+1} =$$

$$\frac{1-a-a^2+a}{a+1} =$$

$$\frac{1-a^2}{a+1} =$$

$$\frac{(1-a)\cancel{(1+a)}}{a+1} = 1-a$$

$$\bullet \frac{18}{x^2-9} - \frac{x}{x+3} + \frac{x}{x-3} =$$

$$\frac{18}{(x-3)(x+3)} - \frac{x}{x+3} + \frac{x}{x-3} = \quad \text{C.E. } x \neq \pm 3$$

$$\frac{18 - x(x-3) + x(x+3)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$\frac{18 - x^2 + 3x + x^2 + 3x}{(x-3)(x+3)} = \frac{6x+18}{(x-3)(x+3)} =$$



$$\frac{6(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{6}{x-3}$$

$$\bullet \frac{1-xy}{x^2+xy} + \frac{x+y}{x} - 1 =$$

$$\frac{1-xy}{x(x+y)} + \frac{x+y}{x} - 1 =$$

C.E.  $x \neq 0, x \neq -y$ 

$$\frac{1-xy + (x+y)^2 - x(x+y)}{x(x+y)} =$$

$$\frac{1-xy + x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - xy}{x(x+y)} =$$

$$\frac{1+y^2}{x(x+y)}$$

$$\bullet \text{ (Importante) } \frac{3}{10-5y} - \frac{y}{y^2-4y+4} =$$

$$\frac{3}{5(2-y)} - \frac{y}{(y-2)^2}$$

C.E.  $y \neq 2$ 

poichè  $2-y$  e  $y-2$  sono fattori opposti, per calcolare il minimo comun denominatore è opportuno renderli uguali raccogliendo un segno "-" in uno dei due. (Ciò serve per cambiarlo di segno).

Abbiamo quindi due possibilità:

$$\text{a) } \frac{3}{-5(y-2)} - \frac{y}{(y-2)^2} = -\frac{3}{5(y-2)} - \frac{y}{(y-2)^2} = \frac{-3(y-2) - 5y}{5(y-2)^2} = \frac{-3y+6-5y}{5(y-2)^2} = \frac{-8y+6}{5(y-2)^2}$$

$$\text{b) } \frac{3}{5(2-y)} - \frac{y}{[-(2-y)]^2} = \frac{3}{5(2-y)} - \frac{y}{(2-y)^2} = \frac{3(2-y) - 5y}{5(2-y)^2} = \frac{6-3y-5y}{5(2-y)^2} = \frac{-8y+6}{5(2-y)^2}$$

Nei due casi abbiamo ovviamente ottenuto lo stesso risultato essendo  $(2-y)^2 = (y-2)^2$

Dall'ultimo esempio ricaviamo la seguente regola pratica: qualora un fattore venga cambiato di segno dovrà essere cambiato il segno anche alla frazione che lo contiene solo se tale fattore figura con esponente dispari.

**Esercizio 6.2.1.** Eseguire le seguenti addizioni algebriche:

- $\frac{b-3}{b^3-b^2} - \frac{4+b^2}{b^4-b^3} + \frac{3b^2+4}{b^5-b^4}$
- $\frac{x+1}{x-2} + \frac{1-x}{2x+4} - \frac{x}{4-2x} - \frac{x^2-10}{x^2-4}$
- $\frac{8x^2-18y^2}{4x^2-12xy+9y^2} + \frac{24xy}{9y^2-4x^2} - \frac{4x^2-9y^2}{4x^2+12xy+9y^2}$
- $\frac{8x+16y}{2x^2-4xy+8y^2} - \frac{3x+3y}{x^2+3xy+2y^2} - \frac{18xy}{x^3+8y^3}$

## 2. Moltiplicazione

$$\bullet \frac{16x^4-1}{x^2-7x+6} \cdot \frac{x^2-6x}{4x^3+4x^2+x} = \frac{(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)}{(x-1)(x-6)} \cdot \frac{\cancel{x}(x-6)}{\cancel{x}(2x+1)^2} =$$

C.E.  $x \neq 1; x \neq 6; x \neq 0; x \neq -\frac{1}{2}$

$$\frac{(4x^2 + 1)(2x - 1)}{(x - 1)(2x + 1)}$$

$$\bullet \frac{2x - 4}{xy + 3x} \cdot \frac{y^3 + 9y^2 + 27y + 27}{x^2 - 4x + 4} \cdot \frac{x^2}{6y + 18} =$$

$$\frac{\cancel{2(x-2)}}{\cancel{3(y+3)}} \cdot \frac{(y+3)^{\cancel{3}}}{(x-2)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{3(y+3)}} =$$

C.E.  $x \neq 0; x \neq 2; y \neq -3$

$$\frac{x(y+3)}{3(x-2)}$$

$$\bullet \frac{x^2 - 49}{27x^3 + 1} \cdot \frac{1}{7-x} \cdot (9x^2 - 3x + 1) =$$

$$\frac{(x-7)(x+7)}{(3x+1)\cancel{(9x^2-3x+1)}} \cdot \frac{1}{7-x} \cdot \cancel{(9x^2-3x+1)} =$$

C.E.  $x \neq -\frac{1}{3}; x \neq 7$

per il fattore  $9x^2 - 3x + 1$  non sono state indicate condizioni perchè, come dimostreremo in seguito, i fattori irriducibili (somme di quadrati e falsi quadrati) se in una lettera non si annullano mai, se omogenei in due lettere si annullano solo quando esse sono contemporaneamente nulle.

$$\frac{\cancel{(x-7)}(x+7)}{3x+1} \cdot \left( -\frac{1}{\cancel{x-7}} \right) = -\frac{x+7}{3x+1}$$

$$\bullet \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right) =$$

$$\frac{(a-b)(a+b)}{a^2 + b^2} \cdot \left[ \frac{a(a-b) + b(a+b)}{(a+b)(a-b)} \right]$$

C.E.  $a, b$  non contemporaneamente nulli;  $a \neq -b$ ;  $a \neq +b$

$$\frac{(a-b)(a+b)}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2 - ab + ab + b^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$\frac{\cancel{(a-b)}\cancel{(a+b)}}{\cancel{a^2+b^2}} \cdot \frac{\cancel{a^2+b^2}}{\cancel{(a-b)}\cancel{(a+b)}} = 1$$

**Esercizio 6.2.2.** Eseguire le seguenti moltiplicazioni:

$$\bullet \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8} \cdot \frac{x^2 + 5x}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 25}$$

$$\bullet 3x \cdot \frac{x + y}{3x - 3y} \cdot \frac{2xy - x^2 - y^2}{x^3 + xy^2 + 2x^2y}$$

$$\bullet \frac{a^3 + b^3}{4a^2 + 4b^2} \cdot \frac{2a^4 - 2b^4}{a^2 - ab + b^2} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$\bullet \frac{8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3}{2x^2 + xy - y^2} \cdot \frac{2x^2 - 3xy + y^2}{2x^2 - 5xy + 3y^2}$$

### 3. Potenza

$$\begin{aligned} & \bullet \left( \frac{2x^2}{x+4} \right)^3 = \frac{8x^6}{(x+4)^3} \quad \text{C.E. } x \neq -4 \\ & \bullet \left( \frac{5x^2 - 9x - 2}{36x^5 - 12x^4y + x^3y^2} \right)^4 = \frac{[(5x+1)(x-2)]^4}{x^{12}(6x-y)^8} = \quad \text{C.E. } x \neq 0; y \neq 6x \\ & \bullet \left( \frac{y^2}{y^3+8} - \frac{y}{y^2-2y+4} + \frac{1}{y+2} \right)^2 \cdot \frac{xy^2+4xy+4x}{x(y^3-6y^2+12y-8)} = \\ & \left[ \frac{y^2}{(y+2)(y^2-2y+4)} - \frac{y}{y^2-2y+4} + \frac{1}{y+2} \right]^2 \cdot \frac{\cancel{x}(y+2)^2}{\cancel{x}(y-2)^3} = \\ & \quad \text{C.E. } y \neq -2; x \neq 0; y \neq 2 \\ & \left[ \frac{y^2 - y^2 - 2y + y^2 - 2y + 4}{(y+2)(y^2-2y+4)} \right]^2 \cdot \frac{(y+2)^2}{(y-2)^3} = \\ & \left[ \frac{y^2 - 4y + 4}{(y+2)(y^2-2y+4)} \right]^2 \cdot \frac{(y+2)^2}{(y-2)^3} = \\ & \left[ \frac{(y-2)^2}{(y+2)(y^2-2y+4)} \right]^2 \cdot \frac{(y+2)^2}{(y-2)^3} = \\ & \frac{(y-2)^4}{(y+2)^2(y^2-2y+4)^2} \cdot \frac{\cancel{(y+2)^2}}{\cancel{(y-2)^3}} = \\ & \frac{y-2}{(y^2-2y+4)^2} \end{aligned}$$

**Esercizio 6.2.3.** Eseguire le seguenti potenze:

$$\begin{aligned} & \bullet \left( \frac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2} \right)^3 \\ & \bullet \left( -\frac{a^2b^3}{1-2a+a^2} \right)^4 \\ & \bullet \left( \frac{x^2-2x}{x^2-2x+1} - 1 \right)^5 \\ & \bullet \left\{ \left[ \frac{ab^2(a+b)^3}{-2x(x-y)} \right]^3 \right\}^2 \end{aligned}$$

#### 4. Divisione

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{a^2+10a+25}{a^2-3a+2} : \frac{a^3+15a^2+75a+125}{3a^2-6a} = \\ & \frac{(a+5)^2}{(a-1)(a-2)} : \frac{(a+5)^3}{3a(a-2)} = \quad \text{C.E. } a \neq 1; a \neq 2; a \neq 0 \\ & \frac{\cancel{(a+5)^2}}{(a-1)\cancel{(a-2)}} \cdot \frac{3a\cancel{(a-2)}}{(a+5)^3} = \end{aligned}$$

Poichè invertendo la frazione c'è un nuovo fattore a denominatore, è necessario aggiungere la condizione di esistenza  $a \neq -5$ . (avremmo potuto, già nel passaggio precedente, imporre  $a \neq -5$  in quanto, in una divisione, il divisore deve essere sempre diverso da zero)

$$\frac{3a}{(a-1)(a+5)}$$

$$\bullet \frac{3ax + 6bx - ay - 2by}{27x^3 - y^3 + 9xy^2 - 27x^2y} : \frac{2by + ay + 3ax + 6bx}{-y^2 + 6xy - 9x^2} =$$

$$\frac{(3x-y)(a+2b)}{(3x-y)^2} : \frac{(y+3x)(2b+a)}{-(y-3x)^2} = \quad C.E. y \neq 3x; \left(x \neq \frac{1}{3}y\right)$$

$$\frac{(a+2b)}{(3x-y)^2} \cdot \frac{-(y-3x)^2}{(y+3x)(2b+a)} =$$

$$C.E. y \neq -3x; a \neq -2b$$

$$\frac{1}{(3x-y)^2} \cdot \frac{-(3x-y)^2}{(y+3x)} =$$

$$\frac{1}{y+3x}$$

$$\bullet \frac{2x^2 - x - 1}{3} : \frac{8x^3 + 1}{x+3} \cdot \frac{(x+3)(4x^2 - 2x + 1)}{x-1} =$$

$$C.E. x \neq -3; x \neq 1$$

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{3} : \frac{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)}{x+3} \cdot \frac{(x+3)(4x^2 - 2x + 1)}{x-1} =$$

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{3} \cdot \frac{x+3}{x+3} \cdot \frac{x-1}{x-1} =$$

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{3} \cdot \frac{(x+3)(4x^2 - 2x + 1)}{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)} \cdot \frac{x-1}{x-1} =$$

$$C.E. x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(x+3)^2}{3}$$

$$\bullet \frac{\frac{a}{x^2} + \frac{x}{a^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ax} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$C.E. a \neq 0; x \neq 0$$

$$\frac{\frac{a^3 + x^3}{a^2x^2}}{x^2 - ax + a^2} =$$

$$\frac{a^3 + x^3}{a^2x^2} \cdot \frac{a^2x^2}{x^2 - ax + a^2} =$$

$$\frac{(a+x)(a^2 - ax + x^2)}{a^2x^2} \cdot \frac{a^2x^2}{x^2 - ax + a^2} =$$

$$a+x$$

$$\bullet \left(x + \frac{2-x}{1+2x}\right) : \left(1 - \frac{1+2x}{2x-x^2}\right) \cdot \frac{1+2x}{2x} =$$

$$\left(x + \frac{2-x}{1+2x}\right) : \left(1 - \frac{1+2x}{x(2-x)}\right) \cdot \frac{1+2x}{2x} =$$

$$C.E. x \neq -\frac{1}{2}; x \neq 0; x \neq 2$$

$$\frac{x + 2x^2 + 2 - x}{1 + 2x} : \frac{2x - x^2 - 1 - 2x}{x(2-x)} \cdot \frac{1 + 2x}{2x} =$$

$$\frac{2x^2 + 2}{1 + 2x} : \frac{-x^2 - 1}{x(2-x)} \cdot \frac{1 + 2x}{2x} =$$

$$\frac{\cancel{2(x^2+1)}}{1+2x} \cdot \frac{\cancel{x}(2-x)}{-(x^2+1)} \cdot \frac{1+\cancel{2x}}{\cancel{2x}} =$$

(non ci sono condizioni aggiunte perchè  $x^2 + 1$  è sempre diverso da zero)

$$-(2-x) =$$

$$x - 2$$

$$\bullet \frac{\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right)} : \left(1 - \frac{2b}{a+b}\right)^2 =$$

C.E.  $b \neq 0; a \neq 0; a \neq -b$

$$\frac{\left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^2 : \left(\frac{a+b}{ab}\right)^2}{\frac{a^4 - b^4}{a^2b^2} : \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}} : \left(\frac{a+b-2b}{a+b}\right)^2 =$$

$$\frac{\left[\frac{(a-b)(a+b)}{ab}\right]^2 : \frac{(a+b)^2}{a^2b^2}}{\frac{(a+b)(a-b)(\cancel{a^2+b^2})}{\cancel{a^2b^2}} \cdot \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2+b^2}}} : \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 =$$

$$\frac{(a-b)^2(\cancel{a+b})^2 \cdot \cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{\cancel{a^2+b^2}}} : \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} =$$

C.E.  $a \neq b$

$$\frac{\cancel{(a-b)^2}}{\cancel{(a+b)(a-b)} \cdot \cancel{(a-b)^2}} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2} =$$

$$\frac{a+b}{a-b}$$

**Esercizio 6.2.4.** Eseguire le seguenti divisioni:

$$\bullet \frac{x^3 - 49x}{x^2 + 14x + 49} : \frac{x^2 - 14x + 49}{2x^2 - 98} : (-4x^2)$$

$$\bullet \frac{a^2 + ab}{x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy} : \frac{a^3 - ab^2}{x^3 + 4x + 4x^2}$$

$$\bullet \frac{a^6 - b^6}{ax^2 + bx^2} : \frac{(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2}{x}$$

$$\bullet \left(\frac{a-2}{b-1}\right)^2 : \left(\frac{a^2-4}{2b-2}\right)^3$$

### 6.3 Esercizi riepilogativi

**Esercizio 6.3.1.**

$$1. \left( \frac{a}{5a^2 - 3a - 2} + \frac{2a - 1}{a^2 - 1} \right) : \left[ 2 + 9a \left( \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{a^2 - 1} \right) \right]$$

$$\left[ \frac{1}{5a + 2} \right]$$

$$2. \left( \frac{15}{4x + 12} - \frac{3}{x + 1} + \frac{1}{4x - 4} \right) : \left( \frac{3}{2x + 2} - \frac{1}{2x - 2} \right)$$

$$\left[ \frac{x - 3}{x + 3} \right]$$

$$3. \left( \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} \right) : \left( \frac{1}{x + 1} + \frac{x}{1 - x} \right) \frac{1 + x^2}{2}$$

$$[-x]$$

$$4. \left[ \frac{a - 3}{a^2 + 3a + 2} : \left( \frac{2}{a + 2} - \frac{3}{a + 1} \right) \right] : \left[ \left( \frac{1}{2a} + \frac{1}{a + 1} \right) : \frac{3a + 1}{a^2 - 2a - 3} \right]$$

$$\left[ -\frac{2a}{a + 4} \right]$$

$$5. \left( \frac{x + 2y}{x - 2y} + \frac{x - 2y}{x + 2y} - \frac{2x^2 + 1 + 4y^2}{x^2 - 4y^2} \right) : \frac{4y^2 + 1 + 4y}{3x^2 - 12y^2}$$

$$\left[ \frac{3(2y - 1)}{2y + 1} \right]$$

$$6. \left( \frac{x - 1}{2x^2 + 5x + 3} - \frac{1 - 3x}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{4x^2 - 9}{7x - 2}$$

$$\left[ \frac{2x - 3}{x - 1} \right]$$

$$7. \left( \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 4x - 4} \cdot \frac{x - 2}{x} - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{2x^3 + x^2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$\left[ \frac{3x}{4 - x^2} \right]$$

$$8. \left( \frac{x + 5}{x^2 + 5x + 6} + \frac{2}{x + 3} - \frac{2}{x + 2} \right)^2 : \left( \frac{1}{x + 2} \right)^3$$

$$[x + 2]$$

$$9. \left[ \left( \frac{x}{y} + 1 \right)^2 : \left( \frac{x}{y} - 1 \right) \right] \cdot \left( \frac{x}{y} - 1 \right)^2 : \left( \frac{x}{y} + 1 \right) + 2 + \frac{2x}{y}$$

$$\left[ \left( \frac{x+y}{y} \right)^2 \right]$$

$$10. \left( 1 + \frac{2y}{x-y} \right) \cdot \left[ \left( 1 - \frac{2xy}{x^2+xy+y^2} \right) : \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \right]^2$$

$$\left[ \frac{x-y}{x+y} \right]$$

$$11. \left[ \left( \frac{3x^2-2}{x-1} + \frac{6x-2}{x-3} \right) \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{x+13}{x-3} \right]^2 \cdot \left( 1 + \frac{x-2}{x-1} \right)^{-3}$$

$$\left[ \frac{x-1}{2x-3} \right]$$

$$12. \left\{ \left[ \left( \frac{1}{x-3} + \frac{1}{1-x} \right) (x^2 - 4x + 3) - \frac{4}{3x-1} \right] \cdot \frac{1}{6} \right\}^2 : \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$\left[ \frac{x-1}{3x-1} \right]$$

$$13. \left( a + \frac{a}{a+3} + \frac{4}{a+3} \right) \cdot \left[ \left( \frac{2}{a+1} - 1 + a \right)^2 : \left( \frac{2+3a+a^2}{a^2+2a-3} \right)^2 \right] : \left( \frac{2}{a+1} + a - 1 \right)^2$$

$$\left[ \frac{(a+3)(a-1)^2}{(a+1)^2} \right]$$

$$14. \left( \frac{3m-n}{m+n} + \frac{m+2n}{m-n} + \frac{m(5n+m)}{n^2-m^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{2n}{m+n} \right)^{-3}$$

$$\left[ \frac{9(m+n)}{m-n} \right]$$

$$15. \frac{\left[ \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{3} \left( 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{9}{x^3-x^2} \right) \right] \cdot \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)}{\frac{x^2}{3x-3} - \frac{1}{1-x} \left( \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x} \right)}$$

$$\left[ \frac{2x}{x^2-1} \right]$$

$$16. \left\{ \frac{1}{x+2y} - \frac{1}{x^2+4y^2+4xy} \cdot \left[ x - \frac{12y^2-2x^2-2xy}{x-2y} \right] \right\} : \left( \frac{1}{2y-x} + \frac{6y-x}{x^2-4y^2} \right)$$

$$[1]$$

$$17. \left( \frac{8a^2}{1+2a} - 2a \right) \left( 2a + \frac{1+4a-8a^3}{4a^2-1} \right) \left( \frac{2}{2a-1} + \frac{4}{2a+1} - 2 \right)^{-1} : \left( a - \frac{2a}{2a+1} \right)$$

$$\left[ \frac{2a+1}{2a(3-2a)} \right]$$

$$18. \left[ \frac{2x+y}{x-y} - \frac{x^2+5xy}{x^2-y^2} \right]^3 : \frac{x^6+y^6-2x^3y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3} + \frac{y-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

$$[0]$$

$$19. \left[ \left( \frac{a}{2} - \frac{2a}{b^2} \right)^{-2} : \left( \frac{a}{2} - \frac{2a}{b^2} \right)^{-1} \right] : \left( \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b^2-4} \right)$$

$$[2b]$$

$$20. \left[ \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{3-x} \right) : \frac{5-2x}{x^2+3-4x} + \left( \frac{x-2}{1-x} \right)^{-2} \right] : \left[ \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^2 - \frac{x-1}{x^2-4x+4} \right]$$

$$\left[ \frac{1}{x-2} \right]$$



**Esercizio 6.3.2.** Calcolare il valore dell'espressione seguente per  $x = 9$ :

$$\left( \frac{1}{x^3 + 4x^2 + x - 6} - \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} \right) : (x^4 - 5x^2 + 4)^{-1} + \frac{60}{9 - x^2}$$

$$\left[ \frac{1}{3} \right]$$

**Esercizio 6.3.3.** Calcolare il valore dell'espressione seguente per  $a = 1$  e  $b = -\frac{1}{6}$ :

$$\left( \frac{a - b}{4a^2 - b^2} + \frac{2a}{2a^2 + ab - b^2} - \frac{b}{2a^2 + 3ab + b^2} \right) \cdot \left( \frac{b^2 - 3a^2}{a^2} - 1 \right)$$

$$[-6]$$

# Capitolo 7

## EQUAZIONI

### 7.1 Introduzione

**Definizione 7.1.1.** Si dice *equazione* una uguaglianza tra due espressioni algebriche.

Dette  $A$  e  $B$  le due espressioni algebriche, l'equazione si presenterà nella forma:

$$A = B$$

$A$  e  $B$  si dicono rispettivamente primo e secondo membro dell'equazione.

Sono esempi di equazioni:

1.  $2x + 1 = x - 3$  ( $A = 2x + 1, B = x - 3$ )

2.  $x^2 - 3 = 1$  ( $A = x^2 - 3, B = 1$ )

3.  $1 - x = 0$  ( $A = 1 - x, B = 0$ )

4.  $x = y + 1$  ( $A = x, B = y + 1$ )

5.  $x^2 + 2y = 5 - z$  ( $A = x^2 + 2y, B = 5 - z$ )

6.  $\frac{2x + 3}{x - 1} = 1 - \frac{1}{x}$  ( $A = \frac{2x + 3}{x - 1}, B = 1 - \frac{1}{x}$ )

Se in una equazione sostituiamo alle lettere presenti dei numeri, i due membri assumono anch'essi valori numerici.

Con riferimento all'esempio 1, se  $x = 1$  otteniamo  $A = 2 \cdot 1 + 1 = 3$  e  $B = 1 - 3 = -2$  dunque l'uguaglianza diventa  $3 = -2$  ovviamente falsa; se  $x = -4$  otteniamo, invece  $-7 = -7$  che è una vera uguaglianza.

Con riferimento all'esempio 2 è facile constatare che l'uguaglianza risulta verificata per  $x = 2$  e  $x = -2$  mentre non lo è, ad esempio, per  $x = 0, x = 1, x = -1$ .

Con riferimento all'esempio 4, per stabilire se l'uguaglianza è verificata, è necessario attribuire dei valori numerici ad entrambe le lettere presenti, cioè una coppia ordinata di numeri (l'ordine è generalmente quello alfabetico):

se  $x = 1$  e  $y = 2 \Rightarrow 1 = 3 \Rightarrow$  la coppia  $(1, 2)$  non verifica l'uguaglianza

se  $x = -5$  e  $y = 0 \Rightarrow -5 = 1 \Rightarrow$  la coppia  $(-5, 0)$  non verifica l'uguaglianza

se  $x = 2$  e  $y = 1 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow$  la coppia  $(2, 1)$  verifica l'uguaglianza

se  $x = 0$  e  $y = -1 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$  la coppia  $(0, -1)$  verifica l'uguaglianza

Analogamente, nell'esempio 5, per stabilire se l'uguaglianza è verificata dovremo scegliere delle terne di numeri.

**Definizione 7.1.2.** Un numero (coppia, terna...) si dice *soluzione* di una equazione se, sostituito nei due membri, rende vera l'uguaglianza.

**Definizione 7.1.3.** *Risolvere* un'equazione significa determinare l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Poichè per risolvere le equazioni è necessario determinare dei particolari valori delle lettere, che inizialmente non conosciamo, attribuiamo ad esse il nome di *incognite* (solitamente vengono indicate con le ultime lettere dell'alfabeto).

E' opportuno osservare che:

se in una equazione figura una incognita, ogni soluzione è un numero, se figurano due incognite (tre incognite,...) ogni soluzione è una coppia (terna,...) ordinata.

Per determinare le soluzioni di una equazione è importante tenere presente l'insieme numerico al quale appartengono i valori che possono assumere le incognite. Se consideriamo l'equazione  $3x^3 - x^2 = 12x - 4$  con  $x \in \mathbb{Q}$  si può verificare che sono soluzioni i valori 2, -2, 1/3; se diversamente si richiede che  $x \in \mathbb{N}$ , delle tre soluzioni verificate, è accettabile solo il 2. Quando non è specificato l'insieme numerico al quale riferirsi, conveniamo che esso sia:  $\mathbb{Q}$  se figura una sola incognita,  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  ( $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \dots$ ) se figurano due incognite (tre incognite,...).

Con riferimento all'insieme  $S$  delle soluzioni, è possibile classificare una equazione come segue:

**determinata**  $\Leftrightarrow$  l'insieme  $S$  non è vuoto ed ha cardinalità finita ( $|S| \in \mathbb{N}^*$ )

**impossibile**  $\Leftrightarrow$  l'insieme  $S$  è vuoto ( $|S| = 0$ )

**indeterminata**  $\Leftrightarrow$  l'insieme  $S$  ha cardinalità infinita

**identità**  $\Leftrightarrow$  tutti i valori attribuibili alle incognite sono soluzioni

Con riferimento alla forma algebrica nella quale si presenta, una equazione si dice:

**intera** quando i suoi membri sono espressioni polinomiali

**fratta** quando almeno una incognita figura al denominatore.

Sono esempi di equazioni intere:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 1 &= (x - 1)(2x + 3) \\x + \frac{2}{3}y &= \frac{5x + 1}{6}\end{aligned}$$

Sono esempi di equazioni fratte:

$$\begin{aligned}\frac{x + 1}{x} &= 3 + x \\ \frac{1}{x - 1} &= \frac{x + 3}{x + 2} \\ \frac{xy + 3}{x - 2} &= \frac{y}{y + 1}\end{aligned}$$

Talvolta in una equazione compaiono delle lettere che rappresentano dei numeri assegnati, anche se non esplicitamente precisati; esse non vengono considerate incognite e sono dette *parametri* (solitamente vengono indicate con le prime lettere dell'alfabeto).

Con riferimento alle lettere presenti, un'equazione si dice:

**letterale o parametrica** se in essa compare almeno un parametro oltre alle incognite

**numerica** se non contiene altre lettere oltre alle incognite.

Sono esempi di equazioni letterali:

$$x + 3a = (x - 1)^2 + 2ax + b$$

(una incognita:  $x$ , due parametri:  $a, b$ )

$$\frac{2x + 5y}{k - 3} = (k - 2)y + kx$$

(due incognite:  $x, y$ , un parametro:  $k$ )

**Definizione 7.1.4.** Due equazioni si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Sono equivalenti le equazioni  $x - 3 = 0$  e  $x - 1 = 2$  in quanto è facile intuire che l'insieme delle soluzioni è  $S = \{3\}$  per entrambe. Non sono equivalenti le equazioni  $x^2 - 9 = 0$  e  $x - 3 = 0$  pur avendo entrambe 3 come soluzione, infatti non hanno lo stesso insieme di soluzioni essendo  $-3$  soluzione di  $x^2 - 9 = 0$ , ma non di  $x - 3 = 0$ .

Ci proponiamo ora di affrontare la risoluzione delle equazioni ed iniziamo con lo studio delle equazioni in una incognita.

## 7.2 Risoluzione di equazioni in una incognita

Il metodo per risolvere una equazione consiste nell'individuare una equazione ad essa equivalente della quale sia immediato determinare quante e quali siano le soluzioni.

Per arrivare a scrivere questa equazione equivalente ricorriamo ai *principi di equivalenza*.

**Teorema 7.2.1** (Primo principio di equivalenza). *Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di una equazione una stessa espressione algebrica (purchè esista per gli stessi valori per i quali esistono i due membri) si ottiene una equazione equivalente a quella iniziale.*

In sintesi:  $A(x) = B(x)$  e  $A(x) + E(x) = B(x) + E(x)$  sono equivalenti

*Dimostrazione.* Detti  $S_1$  l'insieme delle soluzioni di  $A(x) = B(x)$  e  $S_2$  l'insieme delle soluzioni di  $A(x) + E(x) = B(x) + E(x)$ :

si ha che:

$$S_1 \subseteq S_2$$

infatti se  $x_0 \in S_1 \Rightarrow A(x_0) = B(x_0) \Rightarrow A(x_0) + E(x_0) = B(x_0) + E(x_0)$  perchè somma di numeri uguali a due a due. Dunque  $x_0 \in S_2$

ma anche:

$$S_2 \subseteq S_1$$

infatti se  $x_0 \in S_2 \Rightarrow \underbrace{A(x_0) + E(x_0)}_{A_1(x_0)} = \underbrace{B(x_0) + E(x_0)}_{B_1(x_0)} \Rightarrow A_1(x_0) = B_1(x_0)$

$\Rightarrow A_1(x_0) - E(x_0) = B_1(x_0) - E(x_0)$  per differenza di numeri uguali a due a due

$\Rightarrow A(x_0) + E(x_0) - E(x_0) = B(x_0) + E(x_0) - E(x_0)$  cioè  $A(x_0) = B(x_0)$  dunque  $x_0 \in S_1$ .

Poichè  $S_1 \subseteq S_2$  e  $S_2 \subseteq S_1$  allora  $S_1 = S_2$ .

□

**Esempio 7.2.1.** L'equazione:

$$\underbrace{3x + 2}_{A(x)} = \underbrace{2x - 1}_{B(x)}$$

applicando il primo principio è equivalente a:

$$\underbrace{3x + 2}_{A(x)} + \underbrace{(-2x - 2)}_{E(x)} = \underbrace{2x - 1}_{B(x)} + \underbrace{(-2x - 2)}_{E(x)}$$

ossia:

$$3x + 2 - 2x - 2 = 2x - 1 - 2x - 2$$

eseguendo i calcoli algebrici essa diventa:

$$x = -3$$

Poichè, in quest'ultima equazione, risulta evidente che l'insieme delle soluzioni è  $S = \{-3\}$ , possiamo concludere che  $S$  è l'insieme delle soluzioni anche dell'equazione di partenza.

**Esempio 7.2.2.** L'equazione:

$$x + 2 = 8$$

applicando il primo principio è equivalente a:

$$x + 2 + (-2) = 8 + (-2)$$

eseguendo i calcoli algebrici essa diventa:

$$x = 8 - 2$$

da cui:

$$x = 6 \quad \text{quindi} \quad S = \{6\}$$

**Esempio 7.2.3.** L'equazione:

$$x - x^2 + 1 = 5 - x^2$$

applicando il primo principio è equivalente a:

$$x - x^2 + 1 + x^2 - 1 = 5 - x^2 + x^2 - 1$$

eseguendo i calcoli algebrici essa diventa:

$$x = 5 - 1$$

da cui:

$$x = 4 \quad \text{quindi} \quad S = \{4\}$$

Un'analisi attenta degli ultimi due esempi ci permette di osservare e generalizzare facilmente due conseguenze pratiche del primo principio di equivalenza.

**Principio del trasporto:** Si ottiene una equazione equivalente se si trasporta un termine da un membro all'altro cambiandolo di segno.

**Principio di cancellazione** Si ottiene una equazione equivalente se si elimina (cancella) uno stesso termine da entrambi i membri.

**Teorema 7.2.2** (Secondo principio di equivalenza). *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione per una stessa espressione algebrica non nulla (purchè esista per gli stessi valori per i quali esistono i due membri) si ottiene una equazione equivalente a quella iniziale.*

In sintesi le uguaglianze:

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) \\ A(x) \cdot E(x) &= B(x) \cdot E(x) \\ \frac{A(x)}{E(x)} &= \frac{B(x)}{E(x)} \quad \text{con } E(x) \neq 0 \end{aligned}$$

sono equivalenti.

E' sufficiente dimostrare l'equivalenza tra le prime due scritte in quanto la divisione è riconducibile alla moltiplicazione per il reciproco.

*Dimostrazione.* Detti  $S_1$  l'insieme delle soluzioni di  $A(x) = B(x)$  e  $S_2$  l'insieme delle soluzioni di  $A(x) \cdot E(x) = B(x) \cdot E(x)$ :

si ha che:

$$S_1 \subseteq S_2$$

infatti se  $x_0 \in S_1$  allora

$$A(x_0) = B(x_0)$$

e moltiplicando numeri uguali a due a due

$$A(x_0) \cdot E(x_0) = B(x_0) \cdot E(x_0)$$

Dunque  $x_0 \in S_2$

ma anche:

$$S_2 \subseteq S_1$$

infatti se  $x_0 \in S_2$  allora

$$A(x_0) \cdot E(x_0) = B(x_0) \cdot E(x_0)$$

applicando il principio del trasporto

$$\begin{aligned} A(x_0) \cdot E(x_0) - B(x_0) \cdot E(x_0) &= 0 \\ E(x_0) \cdot (A(x_0) - B(x_0)) &= 0 \end{aligned}$$

e poichè  $E(x_0) \neq 0$  per la legge di annullamento del prodotto deve essere

$$\begin{aligned} A(x_0) - B(x_0) &= 0 \\ A(x_0) &= B(x_0) \end{aligned}$$

dunque  $x_0 \in S_1$ .

Poichè  $S_1 \subseteq S_2$  e  $S_2 \subseteq S_1$  allora  $S_1 = S_2$ . □

**Esempio 7.2.4.** L'equazione:

$$3x + 2 = x - 1$$

per il principio del trasporto è equivalente a:

$$3x - x = -1 - 2$$

eseguendo i calcoli algebrici diventa:

$$\underbrace{2x}_{A(x)} = \underbrace{-3}_{B(x)}$$

per il secondo principio è equivalente a:

$$2x \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{E(x)} = -3 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{E(x)}$$

da cui si ottiene:

$$x = -\frac{3}{2}$$

quindi:

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

**Esempio 7.2.5.** L'equazione:

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{3}x + 1$$

può essere risolta in due modi:

(a) applicando il principio del trasporto è equivalente a:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{3}{4} + 1$$

eseguendo i calcoli algebrici diventa:

$$\frac{1}{6}x = \frac{7}{4}$$

applicando il secondo principio è equivalente a:

$$\frac{1}{6}x \cdot 6 = \frac{7}{4} \cdot 6^3$$

da cui si ottiene:

$$x = \frac{21}{2} \quad \text{quindi} \quad S = \left\{ \frac{21}{2} \right\}$$

(b) riducendo i due membri allo stesso denominatore diventa:

$$\frac{6x - 9}{12} = \frac{4x + 12}{12}$$

applicando il secondo principio è equivalente a:

$$\cancel{12} \cdot \frac{6x - 9}{\cancel{12}} = \frac{4x + 12}{\cancel{12}} \cdot \cancel{12}$$

ossia:

$$6x - 9 = 4x + 12$$

applicando il principio del trasporto è equivalente a:

$$6x - 4x = 9 + 12$$

eseguendo i calcoli algebrici diventa:

$$2x = 21$$

applicando il secondo principio è equivalente a:

$$\frac{2x}{2} = \frac{21}{2}$$

da cui si ottiene:

$$x = \frac{21}{2}$$

(spesso si tralascia la scrittura insiemistica).

**Definizione 7.2.1.** Un' equazione si dice ridotta a *forma normale* quando si presenta nella forma:  $P(x) = 0$  ove  $P(x)$  è un polinomio.

**Definizione 7.2.2.** Il *grado* di una equazione è il grado del polinomio ottenuto dopo aver ridotto l'equazione a forma normale.

#### Esempio 7.2.6.

- $20x - 1 = 5x + 3$  portando tutti i termini a primo membro otteniamo la sua forma normale:  
 $15x - 4 = 0$  dalla quale deduciamo che è di primo grado.
- $2x(x^2 - 1) - 2 = x^2(2x - 3)$  semplificando e portando a primo membro otteniamo la forma normale:  
 $3x^2 - 2x - 2 = 0$  dalla quale si deduce che il grado è due.

**Esercizio 7.2.1.** Determinare il grado delle seguenti equazioni:

- $3x(x - 1)^2 - 5(6x + 5) = (2x + 1)(2x - 1) - (x + 3)^2$
- $\frac{x - 4}{5} - x \cdot \frac{x + 4}{3} = x + 1$

## 7.3 Equazioni di primo grado

In questo paragrafo proponiamo la risoluzione, mediante alcuni esempi, di equazioni di primo grado: intere, fratte e letterali.

### Equazioni intere

- L'equazione:

$$(x - 2)^3 - 3x(2 - x) = (x - 1)^3 + 2$$

eseguendo i calcoli algebrici diventa:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 6x + 3x^2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2$$



applicando il principio di cancellazione e sommando i monomi simili si ottiene:

$$-3x^2 + 6x - 8 = -3x^2 + 3x + 1$$

applicando il principio di cancellazione e del trasporto si ha:

$$6x - 3x = 8 + 1$$

da cui:

$$3x = 9$$

applicando il secondo principio di equivalenza si ottiene:

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

ossia:

$$x = 3$$

L'equazione risolta ha una soluzione, è dunque determinata. Per controllare se la soluzione è corretta è sufficiente sostituire nel testo, all'incognita, il valore ottenuto constatando che l'equazione è verificata (questo controllo prende il nome di *verifica*):

$$(3 - 2)^2 - 3 \cdot 3(2 - 3) = (3 - 1)^3 + 2$$

$$1^3 - 9(-1) = 2^3 + 2$$

$$1 + 9 = 8 + 2$$

$$10 = 10$$

- $2(3x - 3) - (x + 3)(4x - 2) - 2 = (2x + 1)^2 - (3x - 1)^2 + (x - 1)(x + 2)$   
 $6x - 6 - 4x^2 + 2x - 12x + 6 - 2 = 4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 6x - 1 + x^2 + 2x - x - 2$   
 $-4x^2 - 6x = -4x^2 + 9x$   
 $-15x = 0$   
 $x = 0$  equazione determinata
- $\frac{x - 5}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{x + 2}{3} \right) = x + \frac{1}{12}(x + 1)$   
 $\frac{x - 5}{4} - \frac{x + 2}{6} = x + \frac{x + 1}{12}$   
 $\frac{3x - 15 - 2x - 4}{12} = \frac{12x + x + 1}{12}$   
 $x - 19 = 13x + 1$   
 $x - 13x = 19 + 1$   
 $-12x = 20$   
 $x = -\frac{20}{12}$   
 $x = -\frac{5}{3}$  equazione determinata

*Osservazione.*

– Poichè il m.c.d. viene semplificato per il secondo principio di equivalenza, è possibile fare a meno di scriverlo.

– Negli esempi finora esaminati abbiamo sempre isolato l'incognita trasportandola al primo membro. E' preferibile tuttavia fare in modo che l'incognita isolata abbia coefficiente positivo e quindi trasportarla nel membro più opportuno.

Riferendoci all'ultimo esempio: da  $x - 19 = 13x + 1$  si ricava, portando l'incognita a secondo membro,  $-19 - 1 = 13x - x$  cioè  $-20 = 12x$  da cui, applicando la proprietà simmetrica dell'uguaglianza,  $12x = -20$  e quindi  $x = -\frac{5}{3}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & 2x(x+1) + (x-2) \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{7}{6}x \\ & 2x^2 + 2x + 2x^2 - \frac{1}{2}x - 4x + 1 = 4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{7}{6}x \\ & 4x^2 - 2x - \frac{1}{2}x + 1 = 4x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{7}{6}x + \frac{1}{9} \quad \text{m.c.d.}=18 \\ & -36x - 9x + 18 = -24x - 21x + 2 \\ & -45x + 18 = -45x + 2 \\ & 0 = -16 \end{aligned}$$

Poichè l'uguaglianza ottenuta non è mai verificata (non esiste alcun valore dell'incognita che rende uguali i due membri) possiamo concludere che l'equazione è impossibile ( $\nexists x$  ovvero  $S = \emptyset$ )

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{2(x+1)(1-x)}{3} = (1-2x)^2 - 3(x-1)^2 - 3 + \frac{1}{3}(17-5x^2) - 2x \quad \text{m.c.d.}=3 \\ & 2(1-x^2) = 3(1-4x+4x^2) - 9(x^2-2x+1) - 9 + 17 - 5x^2 - 6x \\ & 2 - 2x^2 = 3 - 12x + 12x^2 - 9x^2 + 18x - 9 - 9 + 17 - 5x^2 - 6x \\ & -2x^2 + 2 = -2x^2 + 2 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

Poichè l'uguaglianza ottenuta è sempre verificata (qualsiasi valore dell'incognita rende uguali i due membri) possiamo concludere che l'equazione è una identità ( $\forall x$  ovvero  $S = \mathbb{Q}$ )

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{5} = 3 - 2x + \frac{(x^2-x+1)(x+1)}{3} - \frac{11-x^3}{15} \quad \text{m.c.d.}=15 \\ & 6(x^3-1) = 45 - 30x + 5(x^3+1) - 11 + x^3 \\ & 6x^3 - 6 = 45 - 30x + 5x^3 + 5 - 11 + x^3 \\ & 6x^3 - 6 = 6x^3 - 30x + 39 \\ & 30x = 45 \\ & x = \frac{3}{2} \text{ equazione determinata} \end{aligned}$$

**Esercizio 7.3.1.**

- $(x-1)(x+1) + 3 - 2x = 3x + (x-1)^2$
- $(x-1)^3 + (2x-1)(2x+1) - (x-3)(x+2) = x(x+1)(x-2) + (2x-3)^2 - 3x^2 + 1$
- $\frac{3}{5}x + \frac{6}{15} + \frac{4}{15}x + 2 = \frac{x-5}{5} + \frac{2x}{3}$
- $\frac{2x+3}{4} + \frac{x+5}{6} + \frac{x}{2} - x = \frac{1+2x}{8} - \frac{2x-35}{24}$

$$\bullet \frac{2x+1}{7} - \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} - 2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$$

Equazioni fratte

$$\bullet \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-2} \quad \text{m.c.d.}=(x-1)(x-2); \quad \text{C.E. } x \neq 1, x \neq 2$$

$$x-2 = 2(x-1)$$

$$x-2 = 2x-2$$

$$x=0$$

Nelle equazioni fratte bisogna controllare che la soluzione non contrasti le C.E. Nel nostro caso la soluzione è accettabile, dunque l'equazione è determinata.

$$\bullet \frac{x^2-2}{x^2-8x+7} - \frac{5-x}{7-x} = 1 + \frac{3-x}{x-1}$$

$$\frac{x^2-2}{(x-7)(x-1)} + \frac{5-x}{x-7} = 1 + \frac{3-x}{x-1} \quad \text{m.c.d.}=(x-7)(x-1)$$

$$\text{C.E. } x \neq 7, x \neq 1$$

$$x^2-2 + (5-x)(x-1) = (x-7)(x-1) + (3-x)(x-1)$$

$$x^2-2 + 5x-5 - x^2+x = x^2-x-7x+7 + 3x-21 - x^2+7x$$

$$6x-7 = 2x-14$$

$$4x = -7$$

$$x = -\frac{7}{4} \text{ accettabile} \Rightarrow \text{equazione determinata}$$

$$\bullet \frac{2x+1}{x^2-3x} - \frac{x-3}{x^2+3x} = \frac{x}{x^2-9} + \frac{6}{9x-x^3}$$

$$\frac{2x+1}{x(x-3)} - \frac{x-3}{x(x+3)} = \frac{x}{(x-3)(x+3)} - \frac{6}{x(x-3)(x+3)}$$

$$\text{m.c.d.} = x(x-3)(x+3); \quad \text{C.E. } x \neq 0, x \neq \pm 3$$

$$(2x+1)(x+3) - (x-3)^2 = x^2-6$$

$$2x^2+6x+x+3 - x^2+6x-9 = x^2-6$$

$$x^2+13x-6 = x^2-6$$

$$13x=0$$

$$x=0 \text{ non accettabile} \Rightarrow \text{equazione impossibile}$$

$$\bullet \frac{x}{(x+2)(2x^2+3x-2)} - \frac{3}{x^2+4x+4} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-1}$$

$$\frac{x}{(x+2)^2(2x-1)} - \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-1}$$

$$\text{m.c.d.} = (x+2)^2(2x-1); \quad \text{C.E. } x \neq -2, x \neq \frac{1}{2}$$

$$x-3(2x-1) = (x+2)(2x-1) - 2(x+2)^2$$

$$x-6x+3 = 2x^2-x+4x-2 - 2x^2-8x-8$$

$$-5x+3 = -5x-10$$

$$0 = -13 \text{ equazione impossibile}$$

$$\bullet \frac{5x^2 - 6x + 1}{6x^3 - 18x^2 + 18x - 6} - \frac{x + 1}{3x^2 - 6x + 3} = \frac{1}{2x - 2}$$

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{6(x-1)^3} - \frac{x + 1}{3(x-1)^2} = \frac{1}{2(x-1)}$$

$$\text{m.c.d.} = 6(x-1)^3; \quad C.E.x \neq 1$$

$$5x^2 - 6x + 1 - 2(x+1)(x-1) = 3(x-1)^2$$

$$5x^2 - 6x + 1 - 2x^2 + 2 = 3x^2 - 6x + 3$$

$$3x^2 + 3 = 3x^2 + 3$$

$0 = 0$  l'equazione è una identità

E' importante far notare che non tutti i razionali sono soluzioni, in quanto il numero 1 non è attribuibile all'incognita per le C.E.; per indicare le soluzioni dobbiamo scrivere quindi:  $\forall x \neq 1$  ovvero  $S = \mathbb{Q} - \{1\}$

#### Esercizio 7.3.2.

$$\bullet \frac{1}{x-1} = 1$$

$$\bullet \frac{2x+1}{x+3} + \frac{2x-5}{6-x} + \frac{1}{x^2-3x-18} = 0$$

$$\bullet \frac{2}{3} - \frac{x-3}{x} + \frac{x+2}{3x-1} = \frac{x-18}{18x^2-6x}$$

$$\bullet \frac{5}{x^2+2x-15} + \frac{x+2}{3-x} = \frac{5-x}{x+5}$$

$$\bullet \frac{6x}{x^2+4x+4} + \frac{x^3+8}{x^3+6x^2+12x+8} = 1$$

#### Equazioni letterali

$$\bullet 6x - a + (2a - x)^2 = 4(x + a) - (2a - x)(2a + x) + 8a(a - \frac{1}{2}x)$$

$$6x - a + 4a^2 - 4ax + x^2 = 4x + 4a - 4a^2 + x^2 + 8a^2 - 4ax$$

$$6x - a + 4a^2 = 4x + 4a + 4a^2$$

$$2x = 5a$$

$$x = \frac{5}{2}a$$

L'equazione ha una unica soluzione che dipende dal valore assunto dal parametro; se, ad esempio,  $a = 2$  la soluzione è  $x = 5$ , se  $a = -\frac{1}{2}$  la soluzione è  $x = -\frac{5}{4}, \dots$  In questo caso, attribuendo al parametro un qualunque valore numerico, otteniamo sempre una equazione determinata; altre volte può accadere che, per alcuni valori del parametro, l'equazione non sia determinata e quindi sia necessario classificarla mediante una opportuna discussione.

$$\bullet 3x - 2k(1 + x) = x(1 + 2k) - 2x(k - 1)$$

$$3x - 2k - 2kx = x + 2kx - 2kx + 2x$$

$$3x - 2k - 2kx = 3x$$

$$2kx = -2k$$

$kx = -k$  per poter dividere per  $k$  applicando il secondo principio di equivalenza,  $k$  deve essere diverso da zero:

$$\text{se } k \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{k}{k} \Rightarrow x = -1 \text{ l'equazione è determinata.}$$

Resta da esaminare il caso  $k = 0$ : sostituendo nell'equazione  $kx = -k$  otteniamo  $0 = 0 \Rightarrow$  l'equazione è una identità.

- $2 + 2x = 3ax + a - a^2x$

$$a^2x - 3ax + 2x = a - 2$$

$$x(a^2 - 3a + 2) = a - 2$$

$$x(a - 2)(a - 1) = a - 2$$

se  $a \neq 2$  e  $a \neq 1 \Rightarrow x = \frac{a - 2}{(a - 2)(a - 1)} \Rightarrow x = \frac{1}{a - 1}$  equazione determinata

se  $a = 2 \Rightarrow 0 = 0$  identità

se  $a = 1 \Rightarrow 0 = -1$  impossibile

- $3abx = ab(x + 1) + a$

$$3abx = abx + ab + a$$

$$2abx = ab + a$$

$$2abx = a(b + 1)$$

se  $a \neq 0$  e  $b \neq 0 \Rightarrow x = \frac{a(b + 1)}{2ab} \Rightarrow x = \frac{b + 1}{2b}$  equazione determinata

se  $a = 0 \Rightarrow 0 = 0$  identità

se  $b = 0 \Rightarrow 0 = a$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } a = 0 \Rightarrow \text{identità} \\ \text{se } a \neq 0 \Rightarrow \text{impossibile} \end{array} \right.$

- $x - b = ax - 2$

$$x - ax = b - 2$$

$$x(1 - a) = b - 2$$

se  $a \neq 1 \Rightarrow x = \frac{b - 2}{1 - a}$  equazione determinata

se  $a = 1 \Rightarrow 0 = b - 2$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } b = 2 \Rightarrow \text{identità} \\ \text{se } b \neq 2 \Rightarrow \text{impossibile} \end{array} \right.$

- $\frac{a - 2x}{a - 1} - \frac{x + 1}{a + 1} + \frac{x}{a - 1} = \frac{x - a}{a^2 - 1} - 1$

$$\frac{a - 2x}{a - 1} - \frac{x + 1}{a + 1} + \frac{x}{a - 1} = \frac{x - a}{(a - 1)(a + 1)} - 1 \quad \text{m.c.d.} = (a - 1)(a + 1)$$

$a \neq \pm 1$ : questa non è una condizione di esistenza relativa all'incognita, da controllare per l'accettabilità della soluzione, essendo  $a$  un parametro. Per  $a = 1$  o  $a = -1$  l'equazione perde di significato.

$$(a - 2x)(a + 1) - (x + 1)(a - 1) + x(a + 1) = x - a - (a + 1)(a - 1)$$

$$a^2 + a - 2ax - 2x - ax - a + x + 1 + ax + x = x - a - a^2 + 1$$

$$-x - 2ax + a^2 + a = -a^2$$

$$x + 2ax = 2a^2 + a$$

$$x(1 + 2a) = a(2a + 1)$$

se  $a \neq -\frac{1}{2}$  (e ovviamente  $a \neq \pm 1$ )  $\Rightarrow x = \frac{a(2a + 1)}{1 + 2a} \Rightarrow x = a$  equazione determinata

se  $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 = 0$  identità.

$$\bullet \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{(x-1)(2a-1)} = 0 \quad \text{m.c.d.} = (x-1)(2a-1); \text{ C.E. } x \neq 1, a \neq \frac{1}{2}$$

(per  $a = \frac{1}{2}$  l'equazione perde di significato)

$$2a - 1 - x + 1 + 1 = 0$$

$$-x + 2a + 1 = 0$$

$$x = 2a + 1 \text{ perchè la soluzione sia accettabile deve essere } 2a + 1 \neq 1 \Rightarrow a \neq 0$$

Quindi se  $a \neq 0$  (e ovviamente  $a \neq \frac{1}{2}$ ) l'equazione è determinata; se  $a = 0$  l'equazione è impossibile.

**Esercizio 7.3.3.**

- $(a-3)x = a^2 - 9$
- $ab(1-x) + 2x = -3ax + (3a+2)(3a-2) - ab(x-1)$
- $\frac{1}{2}(a+b)^2x = (2a-2b)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x(a^2+b^2)$
- $\frac{x-1}{a-3} + \frac{x+1}{a-2} = \frac{4(a^2-6)-2}{a^2-5a+6}$
- $\frac{x-a}{a-b} + \frac{3x+2b}{a+b} - \frac{5b}{a+b} = \frac{bx-a^2}{a^2-b^2}$
- $\frac{a}{x-1} + \frac{3x}{x+1} = -\frac{3x^2}{1-x^2}$
- $\frac{1-b}{x} + \frac{2}{1-b} - \frac{1+b}{x} = \frac{2}{1+b}$

## 7.4 Particolari equazioni riconducibili a quelle di primo grado

Nelle equazioni di primo grado l'obiettivo è stato quello di isolare l'incognita; nel caso in cui ciò sia stato possibile, ovvero l'equazione sia risultata determinata, abbiamo sempre ottenuto un'unica soluzione.

Qualora l'equazione sia di grado superiore al primo una possibile strategia risolutiva consiste nel:

- portare l'equazione a forma normale
- scomporre in fattori il polinomio ottenuto
- determinare i valori che annullano i singoli fattori (detti *zeri* del polinomio).

Ciò permette di risolvere l'equazione in virtù della legge di annullamento di un prodotto.

**Esempio 7.4.1.**  $x(x-1) = 2$

$$x^2 - x = 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

*Osservazione.* Questa strategia risolutiva non è applicabile ad ogni equazione in quanto permette di determinare tutte le soluzioni solo se il polinomio della forma normale è scomponibile in fattori tutti di primo grado. Dell'equazione  $x^3 - 2x - 1 = 0$  possiamo determinare solo la soluzione  $x = -1$  in quanto, scomponendo il polinomio, in  $(x+1)(x^2-x-1)$  non riusciamo, con le tecniche sinora a nostra disposizione, a determinare gli zeri di  $x^2 - x - 1$

**Teorema 7.4.1.** Una equazione di grado  $n$ , ha al massimo  $n$  soluzioni.

*Dimostrazione.*

Sia  $P(x) = 0$  l'equazione ridotta a forma normale con  $P(x)$  di grado  $n$  per ipotesi. Se  $\alpha$  è una soluzione dell'equazione,  $x - \alpha$  è un fattore di primo grado di  $P(x)$  per il Teorema di Ruffini.

Poichè  $P(x)$  ha al massimo  $n$  fattori di primo grado, l'equazione ha al massimo  $n$  soluzioni.  $\square$

**Esempio 7.4.2.**

- $3x(x^2 + 10) = 21x^2$   
 $3x^3 + 30x = 21x^2$   
 $3x^3 + 30x - 21x^2 = 0$   
 $3x(x^2 - 7x + 10) = 0$   
 $3x(x - 2)(x - 5) = 0$   
 $3x = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$   
 $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Quindi l'equazione ha tre soluzioni.

- $x^4 = 16$   
 $x^4 - 16 = 0$   
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$   
 $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$   
 $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$   
 $x^2 + 4 = 0$  non ha soluzioni perchè somma di una quantità non negativa ed una positiva.

Quindi l'equazione ha due soluzioni.

*Osservazione.* Nell'ultimo esempio abbiamo visto che il fattore  $x^2 + 4$ , che sappiamo essere irriducibile, non ha zeri. Questo risultato può essere esteso a tutti i polinomi irriducibili di grado superiore al primo (non abbiamo ancora gli strumenti per dimostrarlo). In particolare non hanno zeri i falsi quadrati e le somme di quadrati.

- $x^2(x + 1) - 4 = (x + 2)(x - 2) - 27$   
 $x^3 + x^2 - 4 = x^2 - 4 - 27$   
 $x^3 + 27 = 0$   
 $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$   
 $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$   
 $x^2 - 3x + 9 = 0$  non ha soluzioni ( $x^2 - 3x + 9$  è un falso quadrato)

Quindi l'equazione ha una soluzione.

- $\frac{2x - 1}{x - 1} + \frac{4x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3(x - 1)}{3 - x}$   
 $\frac{2x - 1}{x - 1} + \frac{4x - 2}{(x - 1)(x - 3)} = -\frac{3(x - 1)}{x - 3}$

$$\text{m.c.d.} = (x - 1)(x - 3); \quad \text{C.E. } x \neq 1, x \neq 3$$

$$(2x - 1)(x - 3) + 4x - 2 = -3(x - 1)^2$$

$$2x^2 - 6x - x + 3 + 4x - 2 = -3x^2 + 6x - 3$$

$$2x^2 - 3x + 1 = -3x^2 + 6x - 3$$

$$5x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$(5x - 4)(x - 1) = 0$$

$$5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ non accettabile}$$

Quindi l'equazione ha una soluzione.

- $4x + (4x - 1)(x + 2) = 4x^2(x + 3) + 1$   
 $4x + 4x^2 + 8x - x - 2 = 4x^3 + 12x^2 + 1$   
 $4x^2 + 11x - 2 = 4x^3 + 12x^2 + 1$   
 $4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = 0$   
 $(x + 3)(2x - 1)^2 = 0$   
 $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$$(2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow (2x - 1)(2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi l'equazione ha tre soluzioni delle quali due coincidono con il valore  $\frac{1}{2}$ , ovvero l'equazione ha due soluzioni distinte.

- $(x - 2)^3(x^2 + 1) = 2x(x - 2)^3$   
 $(x - 2)^3(x^2 + 1) - 2x(x - 2)^3 = 0$   
 $(x - 2)^3(x^2 + 1 - 2x) = 0$   
 $(x - 2)^3(x - 1)^2 = 0$   
 $(x - 2)^3 = 0 \Rightarrow x = 2$  tre soluzioni coincidono con 2 in quanto:  
 $(x - 2)^3 = (x - 2)(x - 2)(x - 2)$   
 $(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$  due soluzioni coincidono con 1 in quanto:  
 $(x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$

Quindi l'equazione ha due soluzioni distinte delle quali tre coincidono con il valore 2 e due con il valore 1; in totale ha dunque cinque soluzioni.

#### Definizione 7.4.1.

Si dice che  $\alpha$ , soluzione di una equazione, ha *molteplicità*  $m$  se il polinomio della forma normale dell'equazione ha come fattore  $(x - \alpha)^m$ .

Se la molteplicità è uno, la soluzione si dice *semplice*.

#### Esempio 7.4.3.

- $x^2(x + 7)(3x - 1)^3 = 0$   
 $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$  con molteplicità due  
 $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$  soluzione semplice  
 $(3x - 1)^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$  con molteplicità tre.

Quindi l'equazione ha sei soluzioni delle quali tre distinte.



$$\bullet x(x+1)^3 + \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{3x-3}{x^2-4x+4} + \frac{3}{2-x}$$

$$x(x+1)^3 + \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{3x-3}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2}$$

$$\text{m.c.d.} = (x-2)^2; \quad C.E.x \neq 2$$

$$x(x+1)^3(x-2)^2 + 3 = 3x - 3 - 3x + 6$$

$$x(x+1)^3(x-2)^2 + 3 = 3$$

$$x(x+1)^3(x-2)^2 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ soluzione semplice}$$

$$(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ con molteplicità tre}$$

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ con molteplicità due, non accettabile.}$$

Quindi l'equazione ha quattro soluzioni di cui due distinte.

#### Esercizio 7.4.1.

- $x^3 = 4x$
- $(x+1)(25x^2 + 10x + 1) = 0$
- $3x^2(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = (7x-2)(2x+1)^3$
- $\frac{3x}{x-2} + \frac{4}{x+3} - 2 = \frac{16x-2}{x^2-6+x}$
- $\frac{(x^2-6x+9)(x-1)}{x+1} \cdot \frac{3x+3}{x^2-2x-3} = \frac{4x+9}{x+1}$
- $\frac{3}{x-1} + \frac{2x}{x+3} = \frac{10}{x^2+2x-3}$

## 7.5 Problemi di primo grado

Consideriamo l'equazione  $2x = \frac{1}{2}x + 12$ , essa può essere interpretata come la descrizione algebrica dell'affermazione: il doppio di un numero è pari alla sua metà aumentata di 12. Quest'ultima può essere la sintesi di un problema concreto quale ad esempio: determinare il peso di un sacco di farina sapendo che due sacchi pesano 12 chilogrammi in più di mezzo sacco.

Per rispondere a questo problema è sufficiente risolvere l'equazione iniziale; ottenuta la soluzione  $x = 8$  possiamo concludere che un sacco di farina pesa 8 chilogrammi.

Una equazione, quindi, può essere interpretata come la descrizione algebrica di un problema. Ci proponiamo, in questo paragrafo, di partire, viceversa, da un problema per arrivare alla sua soluzione, determinando e risolvendo una equazione che ne sia la traduzione algebrica. Per fare questo è necessario, dopo aver letto con attenzione il testo del problema, individuare l'incognita (o le incognite) con le sue eventuali limitazioni (dette anche vincoli) e utilizzare i dati per scrivere l'equazione (o le equazioni) risolvente.

Proponiamo alcuni esempi di problemi risolvibili con una equazione ad una incognita di primo grado o di grado superiore, ma riconducibile al primo.

1. Determinare due numeri naturali consecutivi la cui somma sia 31.

Il problema chiede di determinare due incognite (i due numeri naturali  $n_1, n_2$ ) tuttavia essi sono esprimibili con una sola incognita; infatti, posto  $n_1 = x$  il minore, il suo consecutivo è  $n_2 = x + 1$ .

In questo caso come vincolo ricaviamo  $x \in \mathbb{N}$ . L'equazione risolvente è:

$$x + (x + 1) = 31$$

che ha per soluzione  $x = 15$  ed è accettabile perchè soddisfa il vincolo.

Possiamo concludere che i numeri naturali richiesti sono  $n_1 = 15, n_2 = 16$ .

(Alla stessa conclusione saremmo arrivati ponendo  $n_2 = x$  ed  $n_1 = x - 1$ , con il vincolo  $x \in \mathbb{N}^*$ ), ma in tal caso l'equazione risolvente avrebbe avuto come soluzione  $x = 16$  )

2. Determinare due numeri naturali pari consecutivi il cui prodotto è 168.

$$n_1 = x$$

$$n_2 = x + 2$$

$$x \in \mathbb{N} \text{ (vincolo)}$$

$$x(x + 2) = 168$$

$$x^2 + 2x = 168$$

$$x^2 + 2x - 168 = 0$$

$$(x + 14)(x - 12) = 0$$

$$x + 14 = 0 \Rightarrow x = -14 \text{ non accettabile (vedi vincolo)}$$

$$x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow n_1 = 12, n_2 = 14$$

3. Luca, Carlo e Anna sono tre fratelli. Carlo ha 10 anni più di Luca ed Anna ha il doppio dell'età di Luca. Determinare le loro età sapendo che il prodotto delle età dei maschi supera di 21 il prodotto delle età di Luca ed Anna.

$$e_L = x \text{ (} x \text{ rappresenta l'età in anni)}$$

$$e_C = x + 10$$

$$e_A = 2x$$

$$x \in \mathbb{N} \text{ (vincolo)}$$

$$x(x + 10) = x \cdot 2x + 21$$

$$x^2 + 10x = 2x^2 + 21$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$(x - 3)(x - 7) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow e_L = 3, e_C = 13, e_A = 6$$

$$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow e_L = 7, e_C = 17, e_A = 14$$

Osserviamo che questo problema ha due soluzioni possibili.

4. Dividere il numero 13 in due parti in modo che la differenza dei loro quadrati, diminuita di 42 valga 23.

$$n_1 = x$$

$$n_2 = 13 - x$$

$$0 \leq x \leq 13 \text{ (vincolo)}$$

$$x^2 - (13 - x)^2 - 42 = 23$$

$$x^2 - 169 + 26x - x^2 - 42 = 23$$

$$26x - 211 = 23$$

$$26x = 234$$

$$x = 9 \Rightarrow n_1 = 9, n_2 = 4$$

5. Determinare un numero di due cifre aventi per somma 11, sapendo che il numero dato, diminuito di 5 è uguale al triplo del numero ottenuto invertendo le cifre.

Indichiamo con  $C_d$  e  $C_u$  rispettivamente la cifra delle decine e la cifra delle unità del numero  $n$  da determinare; è dunque  $n = 10C_d + C_u$ .

$$C_d = x$$

$$C_u = 11 - x$$

$$x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 9 \text{ (vincolo)}$$

$$10x + (11 - x) - 5 = 3[10(11 - x) + x]$$

$$10x + 11 - x - 5 = 330 - 30x + 3x$$

$$9x + 6 = 330 - 27x$$

$$36x = 324$$

$$x = 9 \Rightarrow C_d = 9, C_u = 2$$

Il numero richiesto è 92

**Esercizio 7.5.1.**

- Determinare due numeri dispari consecutivi sapendo che la differenza dei loro quadrati è 56.
- In una banca lavorano 52 persone. I diplomati sono 7 in più dei laureati, mentre quelli senza diploma sono la metà dei laureati. Calcola il numero di laureati, diplomati e non diplomati della banca.
- Un animatore di un centro turistico vuole dividere un gruppo di 21 bambini in due squadre formate l'una dal doppio dei bambini dell'altra. Quanti bambini formano ogni squadra?
- In un negozio si sono vendute 27 paia di calzini, alcuni di lana, altri di cotone. Un paio di calzini di lana costa 7,5 euro, di cotone 6 euro. Se l'incasso totale è stato di 180 euro quante paia di calzini di ogni tipo si sono vendute?
- Lucia raccoglie in un prato un mazzolino di trifogli e quadrifogli; sapendo che i trifogli sono 32 più del quintuplo dei quadrifogli e che in tutto ci sono 172 foglie, quanti sono i trifogli e i quadrifogli?

## 7.6 Esercizi riepilogativi

1.  $(x+2)(x+5) - (x+3)^2 = (x+2)(x-1) - x(x+1)$  [-3]
2.  $(x+2)^3 + x^3 + 8x^2 = [x+2x(x+4)](x+3) - (x+2)^2 - 11x$  [impossibile]
3.  $(2-3x)^2 - 4x(2x-5) - 4 = x(x+4)$  [0]
4.  $2x + (x+2)^3 - (x-1)^3 = 9(x+1)^2 - 7x$  [identità]
5.  $\frac{2x-3}{6} + \frac{2-x}{4} + \frac{3x+4}{5} = \frac{2x-1}{12} - \frac{3}{20}$  [-2]
6.  $\frac{(x+1)^3}{4} - \frac{(x+2)^3}{9} = \frac{x^3-4+x^2}{12} + \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{18}$  [ $-\frac{3}{7}$ ]
7.  $(x+1)^2 - 4 = 2x + (x+2)(x-2) + 1$  [identità]
8.  $(x-1)^3 + (2x+1)(2x-1) - (x-3)(x+2) = x(x+1)(x-2) + (2x-3)^2 - 3x^2 + 1$  [ $\frac{1}{3}$ ]
9.  $\frac{3}{5}x + \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + 2 = \frac{x-5}{5} + \frac{2}{3}x$  [impossibile]
10.  $(2x-1)^3 + 6x(2x-1) = (2x-1)(4x^2+2x+1)$  [identità]
11.  $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x+2)(x-2) - 2x}{3} = \frac{(x-3)^2}{6} + \frac{5x-1}{3}$  [ $\frac{2}{3}$ ]
12.  $\frac{(x-2)(x+3)}{9} - \frac{(x+1)(x-4)}{6} = -\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{25x-36-8x^2}{18}$  [identità]
13.  $\frac{x-6}{5} - \frac{x-24}{6} + \frac{5x-144}{12} = \frac{x+4}{8} + \left(\frac{3}{4}x-19\right) - \left(\frac{5}{6}x-24\right)$  [36]
14.  $\frac{x^2}{x^3-8} + \frac{3}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x-2}$  [10]
15.  $\frac{3}{x+3} - \frac{3x}{x^2+6x+9} = 0$  [impossibile]

16.  $\frac{2x}{1-2x} + \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{2}{2x+1}$   $\left[\frac{3}{2}\right]$
17.  $\frac{x+2}{x^2-3x+2} + \frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{1-2x}{4-x^2}$   $\left[-\frac{7}{3}\right]$
18.  $\frac{4}{x+2} + \frac{3x}{x-2} + \frac{3x^2-8}{4-x^2} = 0$   $[0]$
19.  $\frac{3x}{x-3} + \frac{x}{x-4} = \frac{(2x-1)^2-12}{x^2-7x+12}$   $[1]$
20.  $\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2+2x+1} = 4 \left(-\frac{1+2x}{(x^2-1)^2}\right)$  [identità con  $x \neq \pm 1$ ]
21.  $\frac{x}{x+2} - \frac{2(x^2-3)}{x^2+2x} = \frac{3-x}{x}$  [impossibile]
22.  $\frac{12(x+5)}{6x^2-11x-10} = \frac{10}{2x-5} - \frac{8}{3x+2}$   $[0]$
23.  $\frac{3}{8x^2-36x+36} - \frac{2x+5}{12-4x} = \frac{x+5}{2x-3}$   $[12]$
24.  $(3x-10)^2 + 36x - 189 = (2x-6)^2$   $[\pm 5]$
25.  $x^2(x^2-5) = -4$   $[\pm 1 \pm 2]$
26.  $x(x-3)(x+3) + 12x = 6x(x-1)$   $[0; 3 \text{ con molt. due}]$
27.  $(2x-1)(2x+1) + 2(x-1)^3 + 3 = x(2x-5)(x+3)$   $[0; 7]$
28.  $(x-1)^2 - 3x(2-x)(x+2) = -2x(x+4) + 1$   $[0; -2; 1]$
29.  $\frac{5x-2}{(x-1)^2} + \frac{3x+4}{1-x} = \frac{x+2}{x^2-2x+1}$   $[0]$
30.  $\frac{3+x}{1+x} - \frac{34}{15} + \frac{1+x}{3+x} = 0$   $[2; -6]$
31.  $(x^2-6x+8)(x^2-12x+35) = 0$   $[2; 4; 5; 7]$
32.  $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$   $[1 \text{ con molt. due}]$
33.  $4x - 13 = \frac{13x-4}{x^2}$   $\left[-1; \frac{1}{4}; 4\right]$

**Esercizio 7.6.1** (Equazioni letterali).

1.  $a(a-5)x + a(a+1) = -6(x-1)$

$$\left[ a \neq 2, 3 \quad x = \frac{a+3}{3-a} \quad ; \quad a = 2 \quad \text{identità} \quad ; \quad a = 3 \quad \text{impossibile} \right]$$

$$2. (a+b)(x-2) + 3a - 2b = 2b(x-1)$$

$$\left[ a \neq b \quad x = \frac{2b-a}{a-b} \quad ; \quad a = b = 0 \text{ identità} \quad ; \quad a = b \neq 0 \text{ impossibile} \right]$$

$$3. (x+a)^2 - (x-a)^2 + (a-4)(a+4) = a^2$$

$$\left[ a \neq 0 \quad x = \frac{4}{a} \quad ; \quad a = 0 \text{ impossibile} \right]$$

$$4. x(x+2) + 3ax = b + x^2$$

$$\left[ a \neq -\frac{2}{3} \quad x = \frac{b}{2+3a} \quad ; \quad a = -\frac{2}{3} \text{ e } b = 0 \text{ identità} \quad ; \quad a = -\frac{2}{3} \text{ e } b \neq 0 \text{ impossibile} \right]$$

$$5. (x-a)^2 + b(2b+1) = (x-2a)^2 + b - 3a^2$$

$$\left[ a \neq 0 \quad x = -\frac{b^2}{a} \quad ; \quad a = 0 \text{ e } b = 0 \text{ identità} \quad ; \quad a = 0 \text{ e } b \neq 0 \text{ impossibile} \right]$$

$$6. \frac{a^2-9}{a+2}x = a-3$$

$$\left[ a \neq \pm 3 \text{ e } a \neq -2 \quad x = \frac{a+2}{a+3} \quad ; \quad a = 3 \text{ identità} \quad ; \quad a = -3 \text{ impossibile} \quad ; \quad a = -2 \text{ perde di significato} \right]$$

$$7. \frac{x}{a-2} + \frac{x-2}{a+2} = \frac{4}{a^2-4}$$

$$[a \neq \pm 2 \text{ e } a \neq 0 \quad x = 1 \quad ; \quad a = 0 \text{ identità} \quad ; \quad a = \pm 2 \text{ perde di significato}]$$

$$8. \frac{x}{x-a} + \frac{1}{x+a} = 1$$

$$\left[ a \neq 0 \text{ e } a \neq -1 \quad x = -\frac{a(a-1)}{a+1} \quad ; \quad a = 0 \text{ oppure } a = -1 \text{ impossibile} \right]$$

$$9. \frac{4}{3a-2} + 1 = \frac{19}{2x(2a-5)} + \frac{3}{2}$$

$$\left[ a \neq \pm \frac{2}{3} \text{ e } a \neq \frac{5}{2} \quad x = -\frac{3a-2}{2a-5} \quad ; \quad a = \frac{2}{3} \text{ oppure } a = \frac{5}{2} \text{ impossibile} \quad ; \quad a = -\frac{2}{3} \text{ identità} \right]$$

**Esercizio 7.6.2** (Problemi di primo grado).

1. Un cane cresce ogni mese di  $\frac{1}{3}$  della sua altezza. Se dopo 3 mesi dalla nascita è alto 64 cm, quanto era alto appena nato?  
[27 cm]
2. La massa di una botte colma di vino è di 192 kg mentre se la botte è riempita di vino per un terzo la sua massa è di 74 kg. Trovare la massa della botte vuota.  
[15 kg]
3. Carlo e Luigi percorrono in auto, a velocità costante un percorso di 400 chilometri ma in senso opposto. Sapendo che partono alla stessa ora dagli estremi del percorso e che Carlo corre a 120 km/h mentre Luigi viaggia a 80 km/h, calcolare dopo quanto tempo si incontrano.  
[2 ore]
4. Un fiorista ordina dei vasi di stelle di Natale che pensa di rivendere a 12 euro al vaso con un guadagno complessivo di 320 euro. Le piantine però sono più piccole del previsto, per questo è costretto a rivendere ogni vaso a 7 euro rimettendoci complessivamente 80 euro. Quanti sono i vasi comprati dal fiorista?  
[80]
5. Un contadino possiede 25 tra galline e conigli; determinare il loro numero sapendo che in tutto hanno 70 zampe.  
[15 galline e 10 conigli]
6. Un commerciante di mele e pere carica nel suo autocarro 130 casse di frutta per un peso totale di 23,5 quintali. Sapendo che ogni cassa di pere e mele pesa rispettivamente 20 kg e 15 kg, determinare il numero di casse per ogni tipo caricate.  
[80 pere e 50 mele]
7. Determina due numeri uno triplo dell'altro sapendo che dividendo il maggiore aumentato di 60 per l'altro diminuito di 20 si ottiene 5.  
[240 ; 80 ]
8. Un quinto di uno sciame di api si posa su una rosa, un terzo su una margherita. Tre volte la differenza dei due numeri vola sui fiori di pesco, e rimane una sola ape che si libra qua e là nell'aria. Quante sono le api dello sciame?  
[15]
9. Per organizzare un viaggio di 540 persone un'agenzia si serve di 12 autobus, alcuni con 40 posti a sedere e altri con 52; quanti sono gli autobus di ciascun tipo?  
[7 autobus da 40 posti e 5 da 52]
10. Il papà di Paola ha venti volte l'età che lei avrà tra due anni e la mamma, cinque anni più giovane del marito, ha la metà dell'età che avrà quest'ultimo fra venticinque anni; dove si trova Paola oggi?

Parte II

**GEOMETRIA**



# Capitolo 8

## La geometria razionale

### 8.1 Logica elementare

In questo paragrafo introduttivo presenteremo alcuni concetti e notazioni che saranno diffusamente utilizzati nel seguito di questo corso di geometria. In particolare, cercheremo di connotare il concetto di *proposizione logica* e i principi fondamentali della cosiddetta *logica aristotelica*, senza la pretesa di esaurire tale argomento in modo rigoroso.

Nel seguito supporremo di aver fissato una volta per tutte un linguaggio qualsiasi, come, ad esempio, l'italiano, o la teoria degli insiemi, oppure il linguaggio matematico in generale. Di tali linguaggi converremo di utilizzare solo *frasi sintatticamente corrette e di senso compiuto* che chiameremo **frasi ben formate**. Tutte le frasi ben formate non saranno ulteriormente studiate da un punto di vista sintattico, bensì verranno interpretate in base alla loro *verità o falsità*. I valori **vero** e **falso** non verranno esplicitamente definiti, ma saranno intesi come nozioni primitive che supporremo di essere sempre in grado di esplicitare in *modo oggettivo*, cioè non condizionate dal *giudizio soggettivo del singolo individuo*.

In base a tali premesse possiamo dare la seguente

**Definizione 8.1.1.** Si definisce **proposizione logica** una frase ben formata per cui *ha significato chiedersi se è vera o falsa*.

Le proposizioni logiche, o semplicemente proposizioni, devono soddisfare i **principi della logica aristotelica**, di seguito enunciati.

1. **Principio di identità:** *una proposizione è uguale a sé stessa.*
2. **Principio di non-contraddizione:** *una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.*
3. **Principio del terzo escluso:** *una proposizione deve essere o vera o falsa, non esiste una terza possibilità.*

Indicheremo le proposizioni con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino:  $P, Q, R$ , e così via.

Le proposizioni possono essere:

- **proposizioni elementari o atomiche:** esse sono le proposizioni più semplici, le quali non possono essere scomposte in proposizioni di livello più semplice;
- **proposizioni composte o molecolari:** esse si ricavano dalla composizione di proposizioni atomiche.

Per legare le proposizioni atomiche in modo da ottenere le proposizioni molecolari si utilizzano i **connettivi logici**. Definiremo ora i connettivi logici che utilizzeremo diffusamente nel testo.

**Definizione 8.1.2.** Data la proposizione  $P$ , si definisce **negazione di  $P$**  la proposizione che assume valore di verità opposto rispetto a  $P$ . Notazione:  $\bar{P}$ , e si legge  $P$  *negato*.

**Definizione 8.1.3.** Date le proposizioni  $P$  e  $Q$ , si definisce **disgiunzione inclusiva di  $P$  e  $Q$**  la proposizione che risulta falsa solo nel caso in cui  $P$  e  $Q$  sono entrambe false, vera negli altri casi. Notazione:  $P \vee Q$ , e si legge  $P$  *vel*  $Q$ .

**Definizione 8.1.4.** Date le proposizioni  $P$  e  $Q$ , si definisce **disgiunzione esclusiva di  $P$  e  $Q$**  la proposizione che risulta vera nel caso in cui  $P$  e  $Q$  hanno valore di verità opposto, falsa negli altri casi. Notazione:  $P \dot{\vee} Q$ , e si legge  $P$  *aut*  $Q$ .

**Definizione 8.1.5.** Date le proposizioni  $P$  e  $Q$ , si definisce **congiunzione di  $P$  e  $Q$**  la proposizione che risulta vera solo nel caso in cui  $P$  e  $Q$  sono entrambe vere, falsa negli altri casi. Notazione:  $P \wedge Q$ , e si legge  $P$  *et*  $Q$ .

**Definizione 8.1.6.** Date le proposizioni  $P$  e  $Q$ , si definisce **implicazione materiale da  $P$  a  $Q$**  la proposizione che risulta falsa solo nel caso in cui  $P$  è vera e  $Q$  è falsa, vera negli altri casi. Notazione:  $P \implies Q$ , e si legge *se  $P$ , allora  $Q$* . La proposizione  $P$  si dice **premessa**, mentre la proposizione  $Q$  si dice **conclusione**.

Nel seguito, riguardo l'implicazione materiale, saremo interessati solo al caso in cui sia  $P$  che  $Q$  siano entrambe proposizioni vere, e parleremo di **deduzione logica** che indicheremo ancora col simbolo  $\implies$ . La premessa verrà detta **ipotesi**, mentre la conclusione verrà detta **tesi**. Diremo altresì che  $P$  è **condizione sufficiente** per  $P \implies Q$ , mentre  $Q$  è **condizione necessaria** per  $P \implies Q$ .

**Definizione 8.1.7.** Date le proposizioni  $P$  e  $Q$ , si definisce **equivalenza logica di  $P$  e  $Q$**  la proposizione che risulta vera nel caso in cui sia  $P$  che  $Q$  hanno lo stesso valore di verità, falsa negli altri casi. Notazione:  $P \iff Q$ , e si legge  $P$  *se, e solo se,  $Q$* .

L'equivalenza logica è, pertanto, una doppia implicazione e si può intendere come la proposizione  $P \implies Q \wedge Q \implies P$ . Si possono ripetere le stesse considerazioni della deduzione logica, in quanto nel seguito studieremo solo il caso in cui sia  $P$  che  $Q$  siano vere. Entrambe le proposizioni sono sia condizione necessaria che sufficiente.

## 8.2 Concetti primitivi e definizioni

Gli oggetti di studio della geometria piana sono ovviamente le figure geometriche piane, quali le rette, i triangoli, i quadrati, e così via. Le figure geometriche, prima ancora di essere studiate, vanno descritte precisamente. Però non è possibile definire esplicitamente ogni oggetto allorché si voglia costruire un linguaggio rigoroso come quello matematico. Alcune figure geometriche, pertanto, *non saranno definite esplicitamente*, costituendo i cosiddetti **enti primitivi**, o **figure primitive**, della geometria.

Assumeremo che gli enti primitivi della geometria piana siano

- **piano**
- **retta**
- **punto.**

Solitamente denoteremo il piano con una lettera minuscola dell'alfabeto greco  $\alpha, \beta, \dots$ , le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto latino  $a, b, r, s, \dots$ , i punti con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino  $A, B, C, \dots$

Come si può osservare, la scelta delle figure che sono enti primitivi è caduta su oggetti particolarmente semplici e ben fissati nella nostra mente dall'intuizione. Attraverso essi sarà possibile *definire esplicitamente* le altre figure geometriche, dalle più semplici a quelle via via più complesse.

Quando definiremo esplicitamente una nuova figura geometrica seguiremo i seguenti criteri:

1. **descriveremo rigorosamente e nel modo più semplice la nuova figura geometrica a partire dagli enti primitivi o da altre figure già definite;**
2. **assegneremo ad essa un nome.**

Vediamo alcuni esempi.

**Definizione 8.2.1.** Due rette aventi un punto in comune si dicono **incidenti**.

La precedente è un esempio di definizione in cui vengono direttamente coinvolti gli enti primitivi retta e punto.

**Definizione 8.2.2.** Si definisce **parallelogramma** un quadrilatero avente i lati opposti a due a due paralleli.

In questa seconda definizione vengono coinvolti oggetti più complessi, i quadrilateri. Inoltre, si fa uso della relazione di parallelismo tra rette. Entrambi i concetti devono essere stati definiti in precedenza.

## 8.3 Postulati e teoremi

Una volta definita una figura geometrica si procede allo studio delle sue proprietà attraverso enunciati che naturalmente speriamo essere veri. Per gli enti primitivi, non definiti esplicitamente, si enunceranno delle proposizioni particolari che verranno considerate come autoevidenti senza richiedere una verifica esplicita. Tali proposizioni sono i **postulati** o **assiomi** della geometria piana.

*Un postulato è un enunciato della geometria che si assume identicamente vero senza che venga richiesta una verifica diretta.*

Attraverso i postulati

1. elenchiamo le proprietà degli enti primitivi (non definiti esplicitamente), per cui alcuni postulati costituiscono *delle definizioni implicite* degli enti primitivi stessi; oppure
2. esprimiamo regole precise che ci aiuteranno a sviluppare la nostra teoria in modo rigoroso;
3. deduciamo le proprietà delle altre figure geometriche, ponendo altresì delle intrinseche limitazioni alle costruzioni geometriche possibili.

Il numero e la scelta dei postulati devono soddisfare le seguenti proprietà:

1. **coerenza:** non si possono enunciare postulati in contraddizione tra loro; inoltre, se da essi si deduce la proposizione  $P$ , non si può dedurre anche la proposizione  $\bar{P}$ , cioè la negazione di  $P$ ;
2. **indipendenza:** un postulato non si deve dedurre da altri postulati.

Le proprietà delle figure geometriche definite esplicitamente andranno dedotte e verificate rigorosamente, dando vita ai **teoremi**.

*Un teorema è un enunciato la cui validità è sancita da una sequenza di deduzioni detta dimostrazione. Dall'enunciato di un teorema si distinguono*

1. **le ipotesi**, proposizioni vere che costituiscono le premesse da cui partire;

2. **le tesi**, le proposizioni che vogliamo dedurre a partire dalle ipotesi.

La dimostrazione di un teorema è una sequenza ordinata di proposizioni, l'ultima delle quali è proprio la tesi. Ciascuna proposizione della dimostrazione si deduce logicamente o dai postulati, o dalle definizioni, o da teoremi precedentemente dimostrati, o da righe precedenti della dimostrazione stessa.

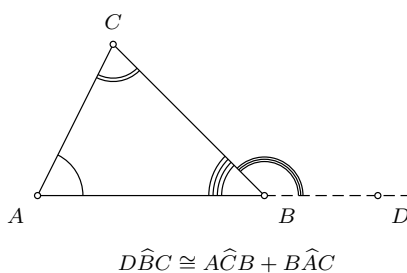
In questo corso le dimostrazioni verranno condotte come segue. Intanto verranno esplicitate ipotesi e tesi in modo preciso e completo, in relazione ad una figura costruita con estrema cura. Il blocco relativo alla vera e propria dimostrazione è suddiviso nelle seguenti tre colonne:

- la prima colonna riporterà un numero progressivo per ogni passo;
- la seconda colonna conterrà una certa proposizione;
- la terza colonna la giustificazione rigorosa della validità della proposizione, con eventuali riferimenti a righe precedenti, definizioni, assiomi, teoremi precedentemente dimostrati, regole pratiche.

Alle volte, però, le dimostrazioni verranno condotte in modo discorsivo perché non si prestano al tipo di esposizione descritto in precedenza.

Vediamo un esempio esplicativo, senza avere la pretesa di una immediata comprensione

**Teorema 8.3.1.** *In ogni triangolo, ciascun angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti.*



*Hp:*  $D\hat{B}C$  angolo esterno triangolo  $ABC$

*Th:*  $D\hat{B}C \cong A\hat{C}B + B\hat{A}C$

*Dimostrazione.* Prolunghiamo il lato  $AB$  dalla parte di  $B$ .

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 1. | $D\hat{B}C + A\hat{B}C \cong \pi$             | angoli adiacenti                           |
| 2. | $A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C \cong \pi$ | teorema degli angoli interni               |
| 3. | $D\hat{B}C \cong A\hat{C}B + B\hat{A}C$       | 1., 2., supplementari di uno stesso angolo |

□

Come si può notare la fine di una dimostrazione è indicata da un quadratino vuoto sulla destra.

La struttura della dimostrazione illustrata in precedenza è quella di una dimostrazione detta **diretta**: a partire dalle ipotesi, in modo diretto, attraverso tutti i passaggi descritti, si giunge alla verifica delle tesi.

Esiste, però, anche una dimostrazione indiretta, detta **dimostrazione per assurdo**, la quale si può descrivere nel modo seguente. Indichiamo con *Hp* le ipotesi e con *Th* la tesi del nostro teorema. Supponiamo ora di negare la validità della tesi e procediamo ad analizzare le conseguenze logiche di tale assunzione. In generale esse porteranno ad uno dei seguenti casi:

- un postulato risulta falso;

- le  $H_p$  risultano false;
- due righe sono logicamente incompatibili;
- un teorema precedentemente dimostrato risulta falso.

Evidentemente ciò non è possibile per il principio di non contraddizione, in quanto una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa. Pertanto le conseguenze dell'assunzione che  $Th$  è falsa ci portano ad una contraddizione, o come altrimenti si dice, ad un assurdo. L'assurdo è nato dall'aver supposto la tesi falsa, quindi, per il principio del terzo escluso, essa dovrà essere vera, concludendo in questo modo la dimostrazione del teorema.

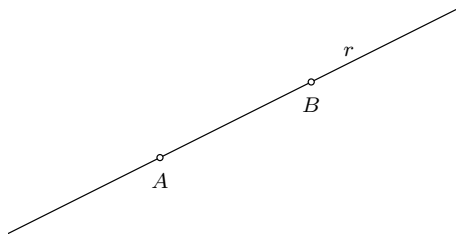
# Capitolo 9

## I Postulati della Geometria

In questo capitolo presenteremo la maggior parte dei postulati della Geometria euclidea, i rimanenti verranno enunciati più avanti quando si renderà necessario introdurli. Lo studio dei postulati è di fondamentale importanza per la comprensione dello sviluppo che daremo all'intero corso. Essi, come già sottolineato nel precedente capitolo, stabiliscono in modo preciso le proprietà degli enti primitivi, e, con le regole logiche elementari, permettono di dare un fondamento rigoroso alle proprietà delle figure geometriche che studieremo e dimostreremo. **Tutte le figure geometriche saranno sempre intese come insiemi di punti.**

### 9.1 Postulati di appartenenza

**Postulato 1** (Primo postulato di appartenenza della retta). *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*



Il postulato asserisce che una retta è univocamente determinata da due punti. Essa è, intuitivamente, come l'avete sempre immaginata, vale a dire come *un oggetto geometrico rappresentabile attraverso l'uso di un righello.*

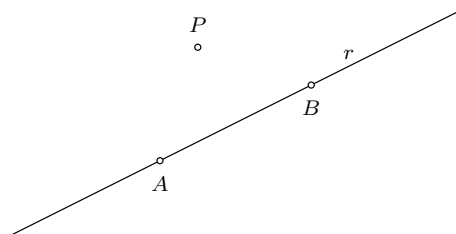
**Postulato 2** (Secondo postulato di appartenenza della retta). *Ogni retta contiene almeno due punti distinti.*

In effetti dedurremo che la retta contiene infiniti punti.

I punti che appartengono ad una retta si dicono *allineati*. Dal primo postulato si deduce che due punti sono sempre allineati.

**Postulato 3** (Terzo postulato di appartenenza della retta). *Esistono almeno tre punti non allineati.*

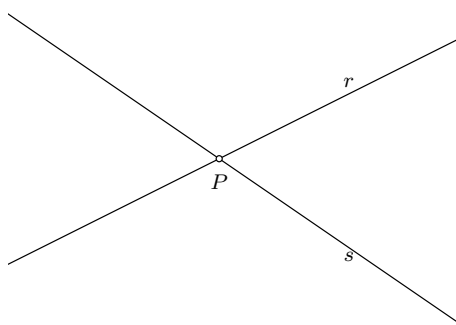
Pertanto, considerata una retta  $r$ , esiste sicuramente un punto  $P \notin r$ .



**Teorema 9.1.1.** *Due rette distinte  $r$  ed  $s$  hanno al massimo un punto in comune.*

*Hp:*  $r \neq s$

*Th:*  $r \cap s = \{P\} \vee r \cap s = \emptyset$



*Dimostrazione.* Se le due rette non hanno punti in comune, allora segue immediatamente la tesi. Supponiamo che  $r \cap s \neq \emptyset$ .

- |    |                                   |  |
|----|-----------------------------------|--|
| 1. | Per assurdo $r \cap s = \{P, Q\}$ |  |
| 2. | $P \in r \wedge P \in s$          | 1., definizione intersezione                     |
| 3. | $Q \in r \wedge Q \in s$          | 1., definizione intersezione                     |
| 4. | $r = s$                           | 2., 3., 1° postulato di appartenenza della retta |
| 5. | $r \neq s$                        | Hp   |
| 6. | Contraddizione                    | 4., 5.   |
| 7. | $r \cap s = \{P\}$                | 6.   |

□

**Definizione 9.1.1.** Due rette aventi un solo punto in comune si dicono **incidenti**.

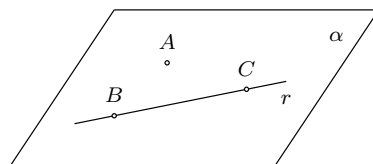
**Postulato 4** (Primo postulato di appartenenza del piano). *Per tre punti distinti e non allineati passa uno ed un solo piano.*

Il piano è, pertanto, univocamente determinato da tre punti distinti, purché non appartengano alla stessa retta.

**Postulato 5** (Secondo postulato di appartenenza del piano). *Se una retta ha due punti in comune col piano, allora è interamente contenuta nel piano.*

Dai postulati di appartenenza si deducono i seguenti risultati.

**Teorema 9.1.2.** *Una retta  $r$  ed un punto  $A \notin r$  individuano univocamente un piano  $\alpha$ .*



*Hp:*  $r, A$  tali che  $A \notin r$

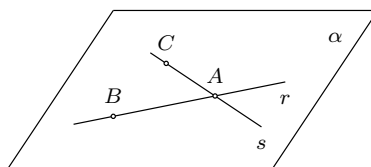
*Th:* esiste  $\alpha$  unico contenente  $r$  e  $A$

*Dimostrazione.* .

- |   |  |
|---|--|
| 1. $r, A$ tali che $A \notin r$                 | Hp   |
| 2. esistono $B, C \in r$ distinti               | postulato di appartenenza della retta      |
| 3. $A, B, C$ tre punti distinti e non allineati | 1., 2.                                     |
| 4. esiste $\alpha$ unico                        | 3., 1° postulato di appartenenza del piano |

□

**Teorema 9.1.3.** *Due rette incidenti  $r$  ed  $s$  individuano univocamente un piano  $\alpha$ .*



*Hp:*  $r \neq s \quad \wedge \quad r \cap s = \{A\}$

*Th:* esiste  $\alpha$  unico

*Dimostrazione.* .

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| 1. $r \cap s = \{A\}$             | Hp                                       |
| 2. esistono $B, A \in r$ distinti | 1° postulato di appartenenza della retta |
| 3. esistono $C, A \in s$ distinti | 1° postulato di appartenenza della retta |



4.  $A, B, C$  tre punti distinti e non allineati 2., 3.  
 5. esiste  $\alpha$  unico 3., 1° postulato di appartenenza del piano

□

## 9.2 Postulati dell'ordine

Da questo momento in poi supporremo di aver fissato una volta per tutte un piano, ragion per cui le figure che considereremo saranno contenute in tale piano.

Intuitivamente possiamo pensare di stabilire un verso di percorrenza sulla retta, in modo tale che resti definita una relazione di precedenza tra punti. Questa operazione ricorda quella di ordinamento dei numeri. Il seguente postulato chiarisce la situazione ed enuncia le proprietà della relazione così costruita.

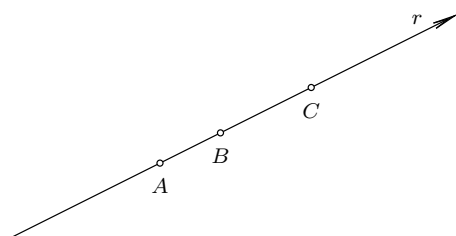
**Postulato 6** (Postulato della relazione di precedenza). *Su una retta è possibile prefissare due orientamenti opposti, detti versi. Una volta fissato uno dei due versi, resta definita una relazione di precedenza tra punti, denotata col simbolo  $\prec$  o col simbolo  $\succ$ , di modo che  $A \prec B$  significa  $A$  precede  $B$ , mentre  $B \succ A$  significa  $B$  segue  $A$ . La scelta del verso è arbitraria. La relazione di precedenza gode delle seguenti proprietà, qualunque siano i punti  $A, B$  e  $C$  della retta:*

1. **Proprietà di tricotomia:** una sola tra le seguenti proposizioni è vera

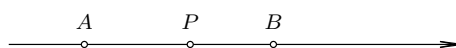
$$A = B \quad A \prec B \quad B \prec A$$

2. **Proprietà transitiva**

$$(A \prec B \quad \wedge \quad B \prec C) \quad \implies \quad A \prec C$$

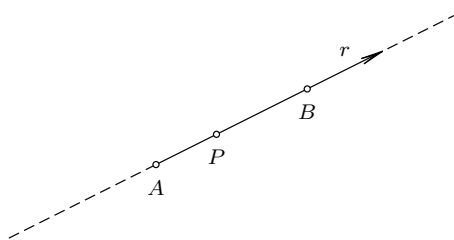


**Postulato 7** (Postulato di densità della retta). *Sia  $r$  una retta orientata e siano  $A$  e  $B$  due suoi punti distinti, con  $A \prec B$ . Allora esiste un punto  $P \in r$ , distinto da  $A$  e  $B$ , tale che  $A \prec P \prec B$ .*



**Postulato 8** (Postulato di illimitatezza della retta). *Sia  $r$  una retta orientata e sia  $P$  un suo qualsiasi punto. Allora esiste un punto  $A \in r$  tale che  $A \prec P$ , ed esiste un punto  $B \in r$  tale che  $P \prec B$ .*

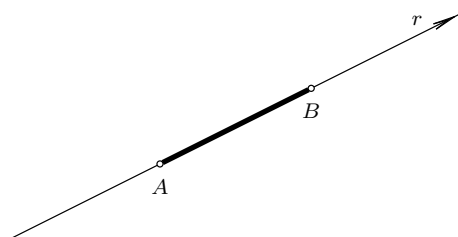
Il postulato di illimitatezza esprime la seguente idea intuitiva: *la retta non ha né un inizio né una fine*. Diremo che essa è un **insieme illimitato di punti**.



**Esercizio 9.2.1.** Dimostra che in una retta ci sono 4 punti, 5 punti, quindi un numero finito  $n$  di punti.

Cominciamo ora a definire i sottoinsiemi della retta.

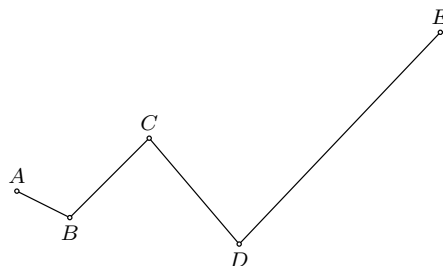
**Definizione 9.2.1.** Siano  $r$  una retta orientata,  $A \prec B$  due suoi punti. Si definisce **segmento di estremi  $A$  e  $B$**  la parte di retta costituita da tutti i punti  $P \in r$  tali che  $A \prec P \prec B$ , oppure  $P = A$ , oppure  $P = B$ . Se  $A = B$ , il segmento si dice **nullo**, ed è costituito da un unico punto.



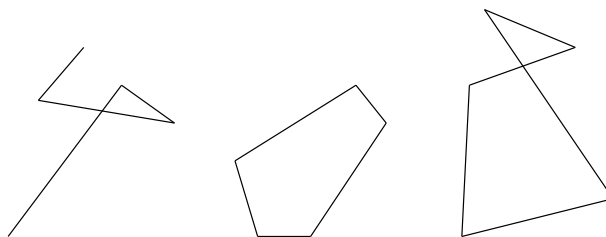
Il segmento di estremi  $A$  e  $B$  si denota coi simboli  $AB$  o  $BA$  indifferentemente. La retta che contiene il segmento si chiama **sostegno**. Poiché ogni segmento non nullo è chiaramente univocamente determinato dai suoi estremi, è sempre possibile individuare il suo sostegno in base al postulato di illimitatezza e al primo postulato di appartenenza della retta, che stabilisce che una retta è univocamente determinata da due punti distinti.

**Definizione 9.2.2.** Due segmenti si dicono **consecutivi** se hanno un estremo in comune. Due segmenti si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e se hanno lo stesso sostegno, cioè giacciono sulla stessa retta.

**Definizione 9.2.3.** Si definisce **poligonale** l'unione di due o più segmenti non nulli consecutivi. I segmenti che costituiscono la poligonale si chiamano **lati**, gli estremi si chiamano **vertici**.



**Definizione 9.2.4.** Una poligonale si dice **chiusa** se tutti i suoi vertici sono estremi di due lati consecutivi, altrimenti si dice **aperta**. Una poligonale si dice **intrecciata** se due suoi lati non consecutivi hanno intersezione non vuota, altrimenti si dice **semplice**.



La poligonale  $ABCDE$  è aperta semplice, mentre le poligonali della figura precedente sono rispettivamente aperta intrecciata, chiusa semplice e chiusa intrecciata. Nel seguito di questo corso considereremo esclusivamente poligonali chiuse semplici.

**Definizione 9.2.5.** Si definisce poligono la parte di piano individuata da una poligonale chiusa semplice. I lati e i vertici della spezzata sono rispettivamente i lati e i vertici del poligono. Si definisce *diagonale* del poligono ogni segmento individuato da due vertici non consecutivi.

Nel seguito, intenderemo *poligono di  $n$  lati* la parte di piano limitata i cui confini sono stabiliti dagli  $n$  lati del poligono, lati compresi. La parte del poligono che non include i punti dei lati sarà la sua *parte interna*.

**Esercizio 9.2.2.** Dimostra che nel piano esistono almeno 2 triangoli ed almeno un quadrilatero.

**Teorema 9.2.1.** Sia  $AB$  un segmento non nullo. Allora esso contiene infiniti punti.



*Dimostrazione.* Siano  $A$  e  $B$  gli estremi distinti del segmento con  $A \prec B$ . Dall'assioma di densità, esiste un punto  $C$  diverso dagli estremi tale che  $A \prec C \prec B$ ; applicando ancora l'assioma di densità, tra  $A$  e  $C$  esiste il punto  $D$ , distinto da essi, tale che  $A \prec D \prec C$ ; e così via, applicando ripetutamente il postulato di densità.  $\square$

Pertanto, un segmento o contiene un unico punto (segmento nullo) o contiene infiniti punti. Inoltre, il fatto che ogni segmento ha sempre una retta come sostegno conduce al seguente

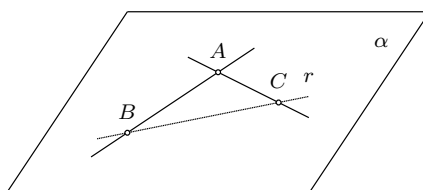
**Corollario 9.2.1.** La retta è un insieme infinito di punti.

*Dimostrazione.* Ogni segmento non nullo è un sottoinsieme di una retta (sostegno). Poiché il segmento è un insieme infinito di punti, segue la tesi.  $\square$

Osserviamo che la proprietà di essere un insieme illimitato è più forte di quella di essere un insieme infinito. Schematicamente

$$\begin{aligned} \text{illimitato} &\implies \text{infinito} \\ \text{infinito} &\implies \text{illimitato} \end{aligned}$$

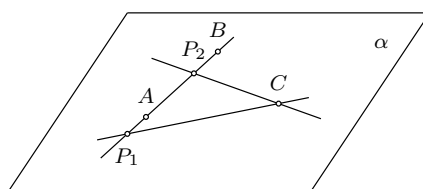
**Teorema 9.2.2.** *Per un punto  $A$  del piano passano infinite rette.*



*Dimostrazione.* Il piano è univocamente determinato da un punto  $A$  e da una retta  $r$  tale che  $A \notin r$ . La retta  $r$  contiene infiniti punti tutti distinti da  $A$ , per cui è possibile costruire infinite rette passanti per  $A$  e per ciascun punto di  $r$ , in base al postulato di appartenenza della retta.  $\square$

**Definizione 9.2.6.** Sia  $C$  un punto del piano, l'insieme di tutte le infinite rette passanti per  $C$  si dice **fascio proprio di rette di centro  $C$** .

**Teorema 9.2.3.** *Il piano contiene infiniti punti e infinite rette.*



*Dimostrazione.* Basterà dimostrare che il piano contiene infinite rette. Il piano è univocamente determinato da tre punti distinti e non allineati  $A$ ,  $B$  e  $C$ , in base al 1° postulato di appartenenza del piano. I punti  $A$  e  $B$  individuano univocamente la retta  $AB$ , la quale giace completamente sul piano perché ha i punti  $A$  e  $B$  in comune con esso. Ciascuna retta (sono infinite) individuata da un qualunque punto  $P \in AB$  e dal punto  $C$  giace completamente nel piano perché ha in comune con esso i punti  $P$  e  $C$ . Contendendo il piano infinite rette, esso contiene anche infiniti punti in quanto ogni retta contiene infiniti punti.  $\square$

Introduciamo ora un altro sottoinsieme della retta.

**Definizione 9.2.7.** Sia  $r$  una retta orientata e sia  $P$  un suo punto. Si definisce **semiretta di origine  $P$**  ciascuna parte in cui il punto  $P$  suddivide la retta. L'origine  $P$  appartiene ad entrambe le semirette, le quali si dicono **semirette opposte**.



Le semirette verranno denotate con le lettere minuscole dell'alfabeto; altre volte si indicheranno come  $AB$  dove la prima lettera  $A$  indica l'origine della semiretta, mentre la seconda indica un qualunque punto della semiretta diverso dall'origine.

**Corollario 9.2.2.** *La semiretta è un insieme infinito di punti.*

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

### 9.3 Postulato di partizione del piano

**Postulato 9.** *Siano dati il piano  $\alpha$  e la retta  $r$  contenuta in esso. Allora la retta  $r$  suddivide il piano  $\alpha$  in due parti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  aventi le seguenti proprietà:*

- per ogni coppia di punti  $A, B \in \alpha_1$  tali che  $A, B \notin r$ , il segmento  $AB$  è interamente contenuto in  $\alpha_1$  e  $AB \cap r = \emptyset$ ;
- per ogni coppia di punti  $A \in \alpha_1$  e  $B \in \alpha_2$  tali che  $A, B \notin r$ , il segmento  $AB$  ha intersezione ridotta ad un unico punto con la retta  $r$ .

**Definizione 9.3.1.** Le parti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dell'assioma precedente si dicono **semipiani**. La retta  $r$ , parte comune dei due semipiani, si dice **origine** dei semipiani.

Si deduce facilmente che anche i semipiani sono insiemi infiniti di punti. Inoltre, essi sono da una parte limitati dalla propria origine, mentre dall'altra sono illimitati.

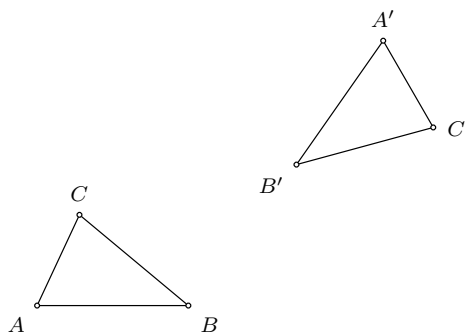
### 9.4 Postulati di congruenza

In matematica è opportuno utilizzare il simbolo di uguaglianza "=" con molta attenzione. Abbiamo in precedenza convenuto di pensare le figure geometriche come insiemi di punti, ragion per cui bisogna essere coerenti col linguaggio della teoria degli insiemi. In particolare, richiamiamo la seguente definizione.

**Definizione 9.4.1.** Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono **uguali** se hanno gli stessi elementi.

Nella geometria intuitiva si è soliti considerare uguali due figure che hanno le stesse dimensioni, anche se sono costituite da punti diversi del piano. Tutto ciò non è in accordo con la definizione data in precedenza, se vogliamo procedere con rigore.

**Definizione 9.4.2.** Un **movimento rigido** è una procedura ideale che porta una figura geometrica da una posizione del piano ad un'altra senza che ne vengano modificate le dimensioni. Due figure  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  che si sovrappongono perfettamente mediante un movimento rigido sono dette **congruenti** o **isometriche** e si scrive  $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$ .

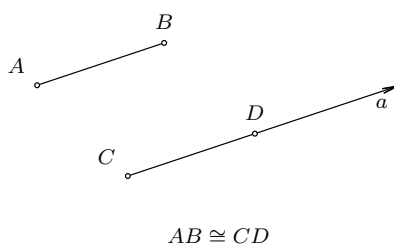


Si deduce che due figure geometriche uguali sono congruenti, ma due figure congruenti non sono necessariamente uguali. Tutto ciò è riassunto dallo schema

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{F}' &\implies \mathcal{F} \cong \mathcal{F}' \\ \mathcal{F} \cong \mathcal{F}' &\not\implies \mathcal{F} = \mathcal{F}' \end{aligned}$$

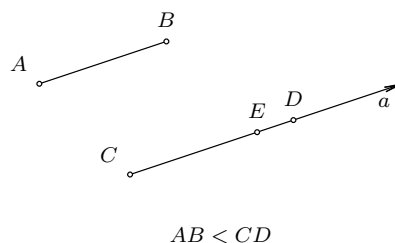
I postulati di congruenza sanciscono le proprietà della relazione di congruenza, nonché stabiliscono regole sul confronto di figure geometriche di base, quali segmenti e angoli.

**Postulato 10.** *Siano dati un segmento  $AB$  ed una semiretta orientata  $a$  di origine  $C$ . Allora esiste un unico punto  $D \in a$  tale che  $AB \cong CD$ .*

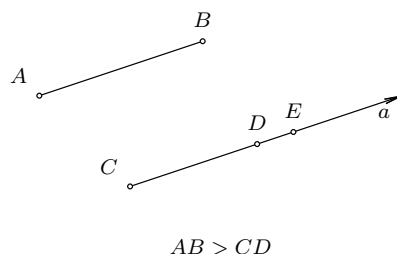


Il postulato stabilisce una regola per il confronto tra segmenti. Si conviene quanto segue.

1. Se il punto  $E$  è tale che  $C \prec E \prec D$ , allora  $CE$  è **minore** di  $AB$ , notazione  $CE < AB$ ;



2. se il punto  $E$  è tale che  $C \prec D \prec E$ , allora  $CE$  è **maggiore** di  $AB$ , notazione  $CE > AB$ .

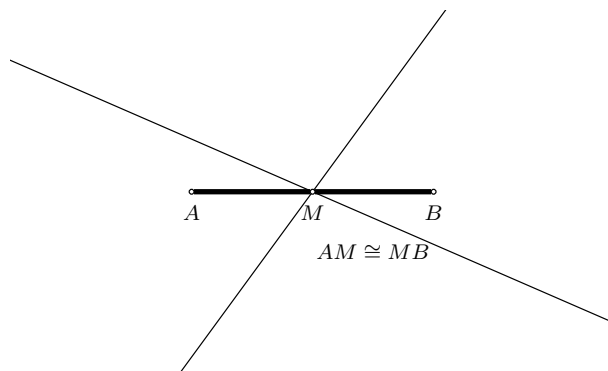


**Postulato 11.** Siano  $AB, CD, EF$  tre segmenti, allora valgono le seguenti proprietà.

1.  $AB \cong AB$ ;
2.  $AB \cong CD$  se, e solo se,  $CD \cong AB$ ;
3. se  $AB \cong CD$  e  $CD \cong EF$ , allora  $AB \cong EF$ .

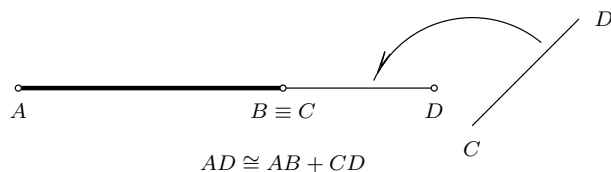
Il postulato asserisce semplicemente che la relazione di congruenza tra segmenti gode delle proprietà **riflessiva, simmetrica e transitiva**.

**Definizione 9.4.3.** Si definisce **punto medio** di un segmento non nullo il punto interno  $M$  tale  $AM \cong MB$ . Ogni retta del fascio proprio di centro  $M$  diversa dal sostegno  $AB$  si dice **mediana** del segmento  $AB$ .



Possiamo ora esporre come costruire in modo effettivo l'unione o somma di due segmenti, in sintonia con i postulati di congruenza enunciati in precedenza.

Siano  $AB$  e  $CD$  due segmenti. Con un movimento rigido trasportiamo il secondo segmento in modo tale che  $C \equiv B$  e si ottengano due segmenti adiacenti. Il segmento  $AD$  così ottenuto si dice il **segmento somma** di  $AB$  e  $CD$ . Resta così definita l'operazione di **addizione** tra segmenti, la quale gode delle usuali proprietà, vale a dire associativa, commutativa, dell'elemento neutro (il segmento nullo).



La differenza  $AB - CD$  di segmenti verrà definita a patto che non si verifichi la condizione  $AB < CD$ . Consideriamo, pertanto, tali segmenti con la condizione posta:

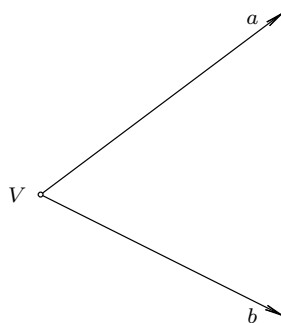
- se  $AB \cong CD$ , allora si conviene di assumere che la differenza  $AB - CD$  sia il segmento nullo;
- se  $AB > CD$ , allora con un movimento rigido trasportiamo il secondo segmento in modo tale che  $C \equiv A$  e i due segmenti abbiano lo stesso sostegno; per l'ipotesi fatta risulta  $A \prec D \prec B$ . Il segmento  $DB$  è il **segmento differenza** di  $AB$  e  $CD$ .

Resta così definita un'operazione di **sottrazione** tra segmenti, con la ipotizzata limitazione. Ovviamente  $AB \cong CD + DB$ .

**Postulato 12.** Siano  $A, B,$  e  $C$  tre punti della retta orientata  $r$  tali che  $A \prec B \prec C$ , e siano  $D, E,$  e  $F$  tre punti della retta orientata  $s$  tali che  $D \prec E \prec F$ . Se  $AB \cong DE$  e  $BC \cong EF$ , allora  $AC \cong DF$ . Inoltre, se  $AC \cong DF$  e  $AB \cong DE$ , allora  $BC \cong EF$ .

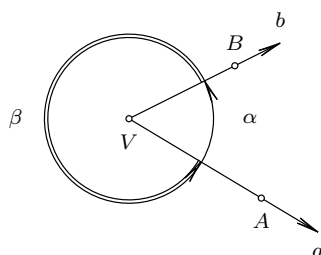
Il postulato asserisce che segmenti che sono somma o differenza di segmenti congruenti sono a loro volta congruenti.

**Definizione 9.4.4.** Siano  $a$  e  $b$  due semirette orientate aventi la stessa origine  $V$ . Si definisce **angolo** ciascuna parte in cui le semirette dividono il piano. Il punto  $V$  si chiama **vertice** e le semirette **lati** dell'angolo, i cui punti sono comuni alle due parti.



Con riferimento alla definizione precedente, siano dati i punti  $A \in a$  e  $B \in b$ . Si converrà di orientare i due angoli individuati in *senso antiorario*.

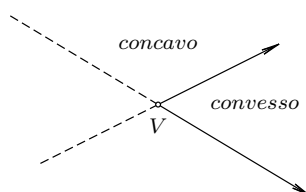




In base alla figura, l'angolo  $\alpha$  avrà come primo lato  $a$  e come secondo lato  $b$ , di contro l'angolo  $\beta$  avrà come primo lato  $b$  e come secondo lato  $a$ . Essi verranno denotati entrambi con  $\widehat{AVB}$ , purché non sorgano dubbi, dal contesto, a quale angolo ci si riferisca.

Per **parte interna** di un angolo intenderemo i punti dell'angolo che non appartengono ai suoi lati. Per **parte esterna** dell'angolo intenderemo i punti che non appartengono all'angolo.

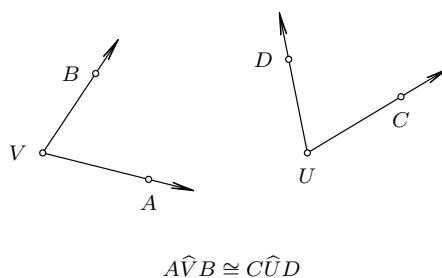
**Definizione 9.4.5.** Si definisce **angolo convesso** l'angolo che verifica la seguente proprietà: per ogni coppia di punti interni  $A$  e  $B$ , l'intero segmento  $AB$  è interno ad esso. Altrimenti si dice **angolo concavo**.



**Definizione 9.4.6.** Si definisce **angolo interno** di un poligono ciascun angolo avente come lati le semirette che contengono due suoi lati consecutivi.

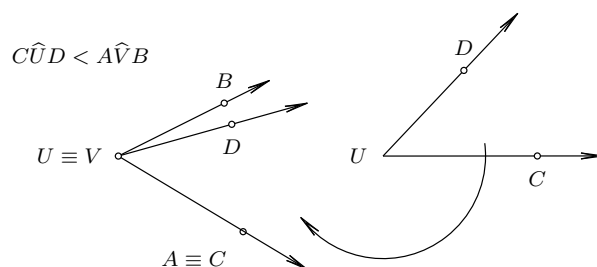
**Definizione 9.4.7.** Un poligono si dice **convesso** se i suoi angoli interni sono tutti convessi, altrimenti si dice **concavo**.

**Postulato 13.** Siano dati un angolo  $\widehat{AVB}$  ed una semiretta orientata  $UD$  di origine  $U$ . Allora esiste, in ciascuno dei due semipiani di origine  $UD$ , un'unica semiretta orientata  $UC$  di origine  $U$  tale che  $\widehat{AVB} \cong \widehat{CUD}$ .

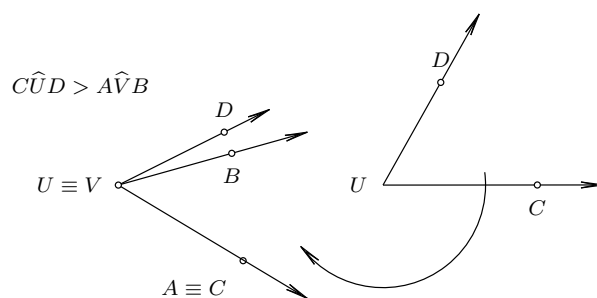


Il postulato suggerisce una regola per il confronto tra angoli. Si conviene quanto segue.

1. Se la semiretta  $UD$  è interna all'angolo  $A\hat{V}B$ , allora l'angolo  $C\hat{U}D$  è **minore** dell'angolo  $A\hat{V}B$ , notazione  $C\hat{U}D < A\hat{V}B$ ;



2. se la semiretta  $UD$  è esterna all'angolo  $A\hat{V}B$ , allora l'angolo  $C\hat{U}D$  è **maggiore** dell'angolo  $A\hat{V}B$ , notazione  $C\hat{U}D > A\hat{V}B$



**Postulato 14.** Siano dati tre angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , allora valgono le seguenti proprietà.

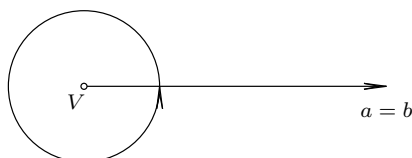
1.  $\alpha \cong \alpha$ ;
2.  $\alpha \cong \beta$  se, e solo se,  $\beta \cong \alpha$ ;
3. se  $\alpha \cong \beta$  e  $\beta \cong \gamma$ , allora  $\alpha \cong \gamma$ .

Il postulato asserisce semplicemente che la relazione di congruenza tra angoli gode delle proprietà **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**.

**Definizione 9.4.8.** Due angoli si dicono **consecutivi** se hanno il vertice ed un solo lato in comune.

Cominciamo ora a definire alcuni angoli particolari.

**Definizione 9.4.9.** Si definisce **angolo giro** l'angolo avente come lati due semirette coincidenti e costituito da tutti i punti del piano.



I punti delle due semirette sovrapposte individuano il cosiddetto **angolo nullo**, il quale è l'unico angolo che ha parte interna vuota.

Possiamo ora esporre come costruire in modo effettivo l'unione o somma di due angoli, in sintonia con i postulati di congruenza enunciati in precedenza.

Siano  $\alpha$  un angolo di primo lato  $a$  e secondo lato  $b$  con vertice  $V$  (indicato con  $a\widehat{V}b$ ),  $\beta$  un angolo di primo lato  $c$  e secondo lato  $d$  con vertice  $W$  (indicato con  $c\widehat{W}d$ ). Con un movimento rigido trasportiamo il secondo angolo in modo tale che  $V = W$  e  $c = b$ ; si ottiene così un angolo  $\gamma$  di vertice  $V$ , primo lato  $a$  e secondo lato  $b$  (indicato con  $a\widehat{V}d$ ), detto **angolo somma** di  $\alpha$  e  $\beta$ . **Conveniamo che sia possibile ottenere angoli somma di altri angoli che siano maggiori di un angolo giro.** Resta così definita un'operazione di **addizione** tra angoli per cui valgono le usuali proprietà, vale a dire associativa, commutativa, proprietà dell'elemento neutro (angolo nullo). Si scriverà  $\gamma = \alpha + \beta$ .

La **differenza**  $\alpha - \beta$  di angoli verrà definita a patto che non si verifichi la condizione  $\alpha < \beta$ . Facendo riferimento alle notazioni precedenti

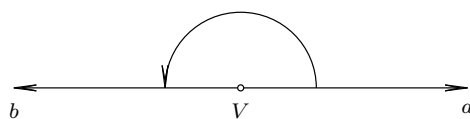
- se  $\alpha \cong \beta$ , allora  $\alpha - \beta$  è congruente all'angolo nullo;
- se  $\alpha > \beta$ , allora con un movimento rigido trasportiamo il secondo angolo in modo tale che  $V \equiv W$  e  $c \equiv a$ , per cui sicuramente la semiretta  $d$  è interna all'angolo  $\alpha$ ; si considera così l'angolo  $\delta$  di vertice  $V$ , primo lato  $c$  e secondo lato  $b$  (indicato con  $d\widehat{V}b$ ), detto **angolo differenza** di  $\alpha$  e  $\beta$ .

Resta così definita un'operazione di **sottrazione** tra angoli, con la ipotizzata limitazione.

**Postulato 15.** *Dati gli angoli  $\alpha, \beta, \alpha'$  e  $\beta'$ , se  $\alpha \cong \alpha'$  e  $\beta \cong \beta'$ , allora  $\alpha + \beta \cong \alpha' + \beta'$ . Se  $\alpha \not\cong \beta$  e  $\alpha' \not\cong \beta'$  e se  $\alpha \cong \alpha'$  e  $\beta \cong \beta'$ , allora  $\alpha - \beta \cong \alpha' - \beta'$ .*

Il postulato asserisce che angoli che sono somma o differenza di angoli congruenti sono a loro volta congruenti.

**Definizione 9.4.10.** Si definisce **angolo piatto** l'angolo avente come lati due semirette opposte, cioè l'una il prolungamento dell'altra.

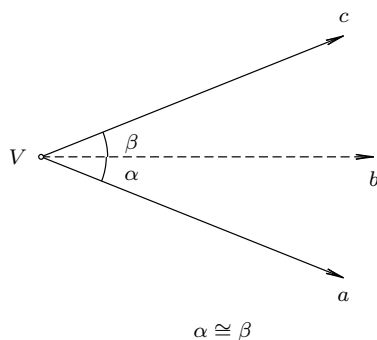


In base alla definizione ciascun angolo piatto è un semipiano, per cui si ottiene immediatamente il seguente

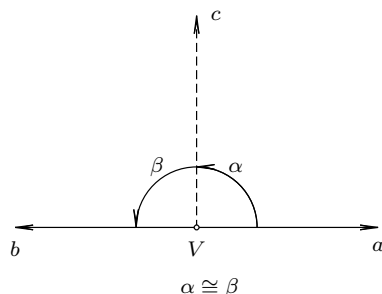
**Corollario 9.4.1.** *Ciascun angolo piatto è congruente alla metà di un angolo giro. Pertanto tutti gli angoli piatti sono congruenti.*

*Dimostrazione.* Infatti, con un movimento rigido si ottiene che i due semipiani sono perfettamente sovrapponibili.  $\square$

**Definizione 9.4.11.** Sia dato un angolo di vertice  $V$ . Si definisce **bisettrice dell'angolo** la semiretta di origine  $V$  che divide l'angolo in due parti congruenti.



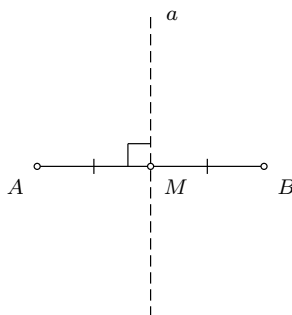
**Definizione 9.4.12.** Dato un angolo piatto e condotta la sua bisettrice, ciascun angolo che si viene a determinare si dice **angolo retto**.



Pertanto, ciascun angolo retto è congruente alla metà di un angolo piatto. Per estensione, due rette incidenti che formano quattro angoli retti si dicono **perpendicolari**. Studieremo in maggior dettaglio la relazione di perpendicolarità tra rette in un prossimo capitolo.

Conveniamo di utilizzare le seguenti notazioni. Un qualunque angolo piatto verrà indicato con la lettera greca  $\pi$ ; di conseguenza l'angolo giro verrà denotato con  $2\pi$ , mentre ogni angolo retto verrà denotato con  $\frac{\pi}{2}$ .

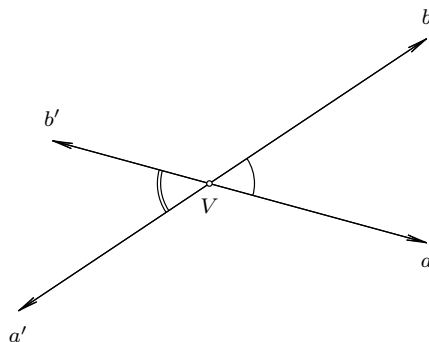
**Definizione 9.4.13.** Si definisce **asse** del segmento  $AB$  la retta  $a$  che è perpendicolare al segmento nel suo punto medio.



Vediamo ora di definire particolari relazioni su coppie di angoli.

**Definizione 9.4.14.** Due angoli si dicono **complementari** se la loro somma è congruente ad un angolo retto; due angoli si dicono **supplementari** se la loro somma è congruente ad un angolo piatto.

**Definizione 9.4.15.** Due angoli si dicono **opposti al vertice** se hanno il vertice in comune e i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.



È evidente che due rette incidenti individuano due coppie di angoli opposti al vertice. Stabiliamo le seguenti notevoli proprietà.

**Teorema 9.4.1.** Angoli complementari di uno stesso angolo sono congruenti.

$$Hp: \alpha + \beta \cong \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad \alpha + \gamma \cong \frac{\pi}{2}$$

$$Th: \beta \cong \gamma$$

*Dimostrazione.* .

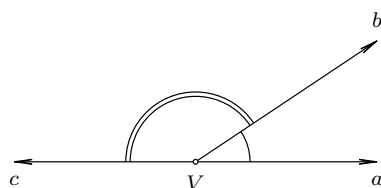
- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1. $\alpha + \beta \cong \frac{\pi}{2}$   | Hp                                  |
| 2. $\alpha + \gamma \cong \frac{\pi}{2}$  | Hp                                  |
| 3. $\alpha + \beta \cong \alpha + \gamma$ | 1., 2., proprietà transitiva        |
| 4. $\beta \cong \gamma$                   | 3., differenza di angoli congruenti |

□

Allo stesso modo si dimostra

**Teorema 9.4.2.** *Angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti.*

**Definizione 9.4.16.** Due angoli consecutivi si dicono **adiacenti** se sono anche supplementati.



La relazione di consecutività tra due angoli è più generale della relazione di adiacenza, come illustrato dal seguente schema

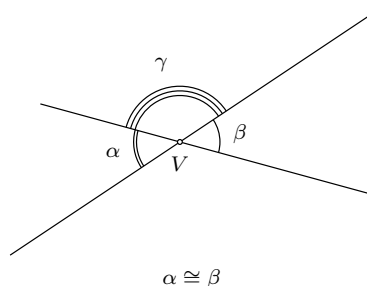
$$\begin{aligned} \alpha \text{ e } \beta \text{ adiacenti} &\implies \alpha \text{ e } \beta \text{ consecutivi} \\ \alpha \text{ e } \beta \text{ consecutivi} &\implies \alpha \text{ e } \beta \text{ adiacenti} \end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\begin{aligned} \alpha \text{ e } \beta \text{ adiacenti} &\implies \alpha \text{ e } \beta \text{ supplementari} \\ \alpha \text{ e } \beta \text{ supplementari} &\implies \alpha \text{ e } \beta \text{ adiacenti} \end{aligned}$$

in quanto due angoli supplementari possono occupare parti di piano arbitrarie.

**Teorema 9.4.3.** *Angoli opposti al vertice sono congruenti.*



*Hp:*  $\alpha$  e  $\beta$  angoli opposti al vertice

*Th:*  $\alpha \cong \beta$

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $\gamma$  l'angolo adiacente sia ad  $\alpha$  che a  $\beta$ .

- |    |  |  |
|----|--|--|
| 1. | $\alpha + \gamma \cong \pi$            | angoli adiacenti                       |
| 2. | $\beta + \gamma \cong \pi$             | angoli adiacenti                       |
| 3. | $\alpha + \gamma \cong \beta + \gamma$ | 1., 2., proprietà transitiva           |
| 4. | $\alpha \cong \beta$                   | 3., supplementari di uno stesso angolo |

□

### Esercizi

- Disegnare un segmento  $AB$  noti l'estremo  $A$  ed il suo punto medio  $M$ .
- Siano  $AB$  e  $BC$  due segmenti adiacenti e congruenti; siano  $M$  e  $N$  i punti medi rispettivamente di  $AB$  e  $BC$ . Dimostrare che  $AB \cong MN$ .
- Siano  $AB$  e  $BC$  due segmenti adiacenti tali che  $AB < BC$ , e siano  $M$  e  $N$  i loro rispettivi punti medi. Dimostrare che  $AB < MN$  e che  $MN < BC$ .
- Sia  $AB$  un segmento,  $M$  il suo punto medio e  $C$  un punto qualsiasi della retta  $AB$ , esterno al segmento; dimostrare che il segmento  $MC$  è congruente alla metà della somma dei due segmenti  $CA$  e  $CB$ .
- Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due angoli adiacenti. Dimostrare che le loro bisettrici sono lati di un angolo retto.
- Disegnare un angolo  $\widehat{AOB}$  e la sua bisettrice  $OC$ , quindi disegnare un secondo angolo  $\widehat{BOD}$ , consecutivo al primo, e la sua bisettrice  $OE$ . Dimostrare che  $\widehat{AOD} \cong 2\widehat{COE}$ .
- Dimostrare che le bisettrici di due angoli opposti al vertice hanno lo stesso sostegno, cioè sono semirette opposte.
- Disegnare un angolo concavo  $\widehat{bOa}$  e la sua bisettrice  $d$ . Dimostrare che la semiretta opposta a  $d$  è la bisettrice dell'angolo convesso  $\widehat{aOb}$ .
- Disegnare due angoli consecutivi  $\widehat{aVb}$  e  $\widehat{bVc}$  e le loro bisettrici  $d$  ed  $e$ . Supposto che le bisettrici siano perpendicolari, dimostrare che, presi due punti qualunque rispettivamente sulle semirette  $a$  e  $c$ , essi sono allineati con  $V$ .
- Sia  $OC$  la bisettrice dell'angolo  $\widehat{AOB}$  e  $OD$  una semiretta qualsiasi ad esso esterna; dimostrare che la somma di angoli  $\widehat{AOD} + \widehat{BOD}$  è congruente al doppio dell'angolo  $\widehat{COD}$ .

## Capitolo 10

# I criteri di congruenza per i triangoli

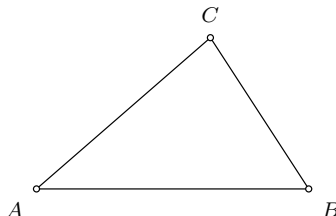
In questo capitolo studieremo una delle figure geometriche più importanti: il triangolo. La conoscenza delle definizioni e delle proprietà che riguardano i triangoli sono fondamentali per lo studio delle figure geometriche più complesse. In particolare, i criteri di congruenza dei triangoli costituiranno una tecnica determinante nella conduzione delle dimostrazioni nel seguito di questo corso.

### 10.1 Definizione e classificazione dei triangoli

**Definizione 10.1.1.** Si definisce **triangolo** un poligono avente tre lati.

Ogni triangolo ha tre vertici e tre angoli interni ed è evidentemente un poligono convesso. Sulla base di caratteristiche particolari di lati e angoli è possibile classificare i triangoli.

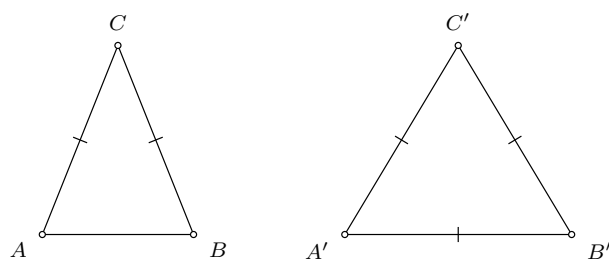
**Definizione 10.1.2.** Si definisce **triangolo scaleno** un triangolo in cui non ci sono lati congruenti.



Il triangolo scaleno è il triangolo più generale e ogni proprietà valida per esso sarà ereditata da ogni altro triangolo particolare, con gli opportuni aggiustamenti. Si vedrà più avanti che in un triangolo scaleno non ci sono angoli congruenti.

**Definizione 10.1.3.** Si dice **triangolo isoscele** un triangolo avente almeno due lati congruenti. Un triangolo isoscele in cui tutti e tre i lati sono congruenti è detto **triangolo equilatero**.

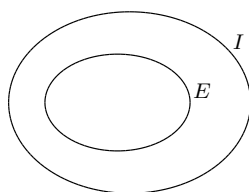




**Osservazione:** Risulta evidente che la deduzione

$$ABC \text{ equilatero} \implies ABC \text{ isoscele}$$

risulta corretta, mentre quella inversa no. La situazione può essere illustrata attraverso il seguente diagramma di Eulero-Venn, nel quale  $E$  rappresenta l'insieme dei triangoli equilateri,  $I$  quello dei triangoli isosceli.

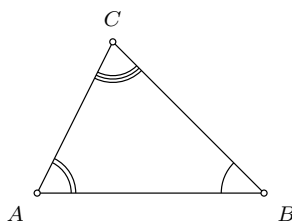


In un triangolo isoscele, l'angolo formato dai due lati congruenti è detto *angolo al vertice*, il lato che si oppone all'angolo al vertice *base canonica* o semplicemente *base*, gli angoli adiacenti alla base canonica *angoli alla base*.

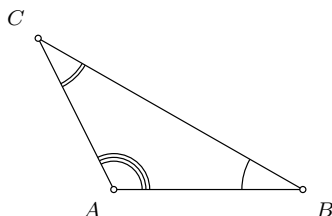
In un triangolo equilatero, ciascun angolo può essere riguardato sia come angolo alla base, sia come angolo al vertice.

Classifichiamo, ora, i triangoli sulla base degli angoli.

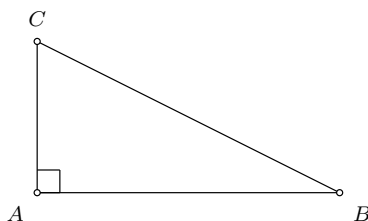
**Definizione 10.1.4.** Si definisce **triangolo acutangolo** un triangolo in cui tutti gli angoli sono acuti, cioè minori di un angolo retto.



**Definizione 10.1.5.** Si definisce **triangolo ottusangolo** un triangolo avente un angolo ottuso, cioè maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto.

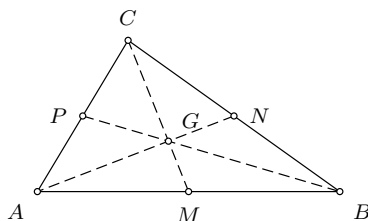


**Definizione 10.1.6.** Un triangolo con un angolo retto si dice **triangolo rettangolo**. I lati dell'angolo retto sono denominati **cateti**, il terzo lato **ipotenusa**.



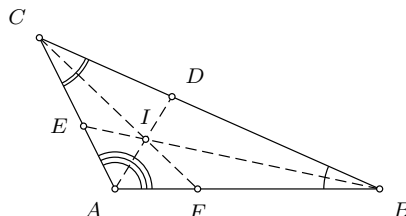
**Definizione 10.1.7.** In un triangolo, si definisce **mediana** di un lato, il segmento avente per estremi il punto medio del lato e il vertice ad esso opposto.

Le mediane di un triangolo sono tre; proveremo che si incontrano in un punto detto **baricentro**, che per ogni triangolo è un punto interno.



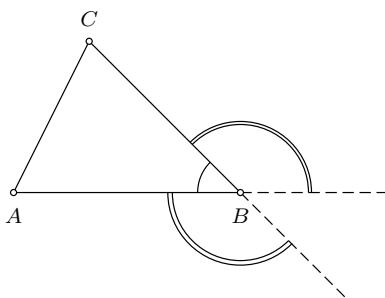
**Definizione 10.1.8.** In un triangolo si definisce **bisettrice** di un angolo interno il segmento di bisettrice dell'angolo stesso condotto dal suo vertice e avente come secondo estremo un punto del lato opposto.

Le bisettrici di un triangolo sono tre; proveremo che si incontrano in un punto detto **incentro**, che per ogni triangolo è un punto interno.



A ciascun angolo interno di un triangolo si associa una coppia di angoli, come segue.

**Definizione 10.1.9.** In un triangolo si definisce **angolo esterno** associato ad un angolo interno ciascuno dei due angoli adiacenti ad esso, formati da uno dei suoi lati e dal prolungamento dell'altro.



Angoli esterni associati all'angolo interno  $\widehat{ABC}$

Il fatto che gli angoli esterni associati ad un angolo interno siano due può sembrare una complicazione, ma essa viene immediatamente fugata dalla figura precedente che ispira il seguente

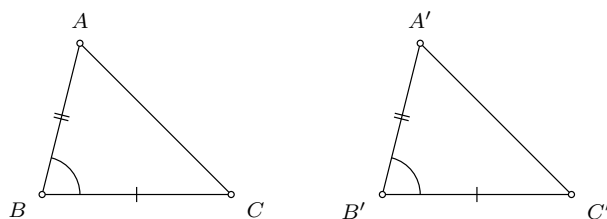
**Teorema 10.1.1.** *Gli angoli esterni associati ad un angolo interno sono congruenti.*

*Dimostrazione.* Sono opposti al vertice. □

## 10.2 I criteri di congruenza dei triangoli

La congruenza conserva sia le dimensioni che la forma delle figure geometriche. In particolare, due triangoli sono congruenti se ciascun lato del primo è congruente al lato corrispondente del secondo, e così anche per gli angoli. Occorre pertanto confrontare tra loro sei informazioni per ciascun triangolo. I criteri di congruenza dei triangoli ci assicurano, invece, che sono sufficienti tre informazioni per ciascun triangolo, a patto che siano opportune.

**Teorema 10.2.1** (Primo criterio di congruenza). *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo da essi formato, allora essi sono congruenti.*

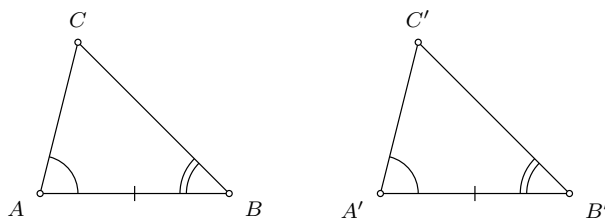


$$Hp: AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge \widehat{B} \cong \widehat{B'}$$

$$Th: ABC \cong A'B'C'$$

*Dimostrazione.* Con un movimento rigido trasportiamo il triangolo  $A'B'C'$  come segue. Poiché  $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ , trasportiamo l'angolo  $\widehat{B'}$  sopra l'angolo  $\widehat{B}$ , in modo che  $B'$  vada su  $B$ . Siccome  $AB \cong A'B'$  e  $BC \cong B'C'$ , anche  $A'$  cade su  $A$  e  $C'$  su  $C$ . Avendo i tre vertici coincidenti i due triangoli risultano congruenti.  $\square$

**Teorema 10.2.2** (Secondo criterio di congruenza). *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli e il lato tra essi compreso, allora essi sono congruenti.*



$$Hp: AB \cong A'B' \wedge \widehat{A} \cong \widehat{A'} \wedge \widehat{B} \cong \widehat{B'}$$

$$Th: ABC \cong A'B'C'$$

*Dimostrazione.* Con un movimento rigido trasportiamo il triangolo  $A'B'C'$  come segue. Poiché  $AB \cong A'B'$ ,  $A'B'$  si sovrappone a  $AB$ ; siccome  $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$  e  $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ , la retta  $A'C'$  si sovrappone ad  $AC$ , il lato  $B'C'$  si sovrappone a  $BC$ ; sapendo che due rette incidenti s'incontrano in un solo punto, si deduce che anche il vertice  $C'$  si sovrappone a  $C$ . Avendo i tre vertici coincidenti i due triangoli risultano congruenti.  $\square$

Nel prossimo capitolo enunceremo e dimostreremo il terzo criterio di congruenza.

Come già accennato, i criteri di congruenza dei triangoli saranno uno strumento potente per condurre una parte considerevole delle dimostrazioni di questo corso. In particolare, diamo le seguenti regole pratiche, delle quali alcune sono un'immediata conseguenza dei postulati di congruenza.

**Regola pratica 1.** *Se si desidera dimostrare che due segmenti sono congruenti, allora si considerano due triangoli che hanno quei segmenti come lati, si dimostra che i due triangoli sono congruenti, quindi si applica la seguente*

**Regola pratica 2.** *In triangoli congruenti, ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti.*

**Regola pratica 3.** *Se si desidera dimostrare che due angoli sono congruenti, allora si considerano due triangoli che hanno quegli angoli come angoli interni, si dimostra che i due triangoli sono congruenti, quindi si applica la seguente*

**Regola pratica 4.** *In triangoli congruenti, a lati congruenti si oppongono angoli congruenti.*

**Regola pratica 5.** *Se  $AB \cong CD$  e  $EF \cong GH$ , allora  $AB + EF \cong CD + GH$  e  $AB - EF \cong CD - GH$ , allorquando la differenza tra segmenti ha significato in base alle regole in merito già stabilite.*

**Regola pratica 6.** *Se  $\hat{A} \cong \hat{B}$  e  $\hat{C} \cong \hat{D}$ , allora  $\hat{A} + \hat{C} \cong \hat{B} + \hat{D}$  e  $\hat{A} - \hat{C} \cong \hat{B} - \hat{D}$ , allorquando la somma e la differenza tra angoli hanno significato, in base alle regole in merito già stabilite.*

Nelle dimostrazioni dei teoremi, l'applicazione dei criteri di congruenza sarà evidenziata con le diciture abbreviate **1° c.c.**, **2° c.c.**; nei prossimi capitoli introdurremo il terzo criterio di congruenza e il secondo criterio generalizzato di congruenza che verranno abbreviati come **3° c.c.**, **2° c.c.g.**.

### Esercizi

1. Sia  $C$  un punto della bisettrice dell'angolo convesso  $X\hat{O}Y$  e  $A$  e  $B$  due punti dei lati  $OX$  e  $OY$  dell'angolo tali che  $OA \cong OB$ . Dimostra che i triangoli  $BCO$  e  $ACO$  sono congruenti.
2. Sia  $ABC$  un triangolo. Sulla bisettrice dell'angolo  $B\hat{A}C$  considera due punti  $D$  ed  $E$  tali che  $AD \cong AB$  e  $AE \cong AC$ . Dimostra che  $BE \cong DC$ .
3. Si disegni due triangoli congruenti  $ABC$  e  $A'B'C'$ . Sui lati congruenti  $AB$  e  $A'B'$ , si considerino i punti  $D$  e  $D'$  in modo che  $AD \cong A'D'$ . Dimostrare che gli angoli  $C\hat{D}B$  e  $C'\hat{D}'B'$  sono congruenti.
4. Si disegni un angolo  $A\hat{V}B$  e la sua bisettrice  $VC$ . Da un punto  $E$  della bisettrice si tracci una retta che forma con la bisettrice due angoli retti. Questa retta interseca i lati dell'angolo nei punti  $A$  e  $B$ . Dimostrare che  $AO \cong BO$ .
5. Disegna il triangolo  $ABC$ , con  $AB > AC$ . Traccia la bisettrice  $AD$  dell'angolo  $\hat{A}$ . Dal punto  $D$  traccia una semiretta che formi con la bisettrice stessa un angolo congruente all'angolo  $A\hat{D}C$ . Tale semiretta incontra  $AB$  nel punto  $E$ . Dimostra che  $CD$  e  $DE$  sono congruenti.
6. Si disegni i triangoli congruenti  $ABC$  e  $A'B'C'$ . Dimostrare che le bisettrici di due angoli congruenti sono congruenti.
7. Sia  $ABC$  un triangolo, e sia  $AK$  la bisettrice dell'angolo  $\hat{A}$ . Da  $K$  si conduca una retta che formi due angoli retti con  $AK$  e che incontri la retta  $AB$  in  $D$  e la retta  $AC$  in  $E$ . Dimostra che il triangolo  $ADE$  è isoscele.
8. Si consideri il triangolo  $ABC$ . Si prolunghi il lato  $AB$ , dalla parte di  $B$ , di un segmento  $BE \cong AB$  e il lato  $BC$ , dalla parte di  $B$ , di un segmento  $BF \cong BC$ ; si congiunga  $E$  con  $F$ . Considerati il punto medio  $M$  di  $AC$  e il punto medio  $N$  di  $EF$ , dimostrare che  $B$  è sul segmento  $MN$ .
9. Siano  $AB$  un segmento ed  $M$  il suo punto medio. Si disegni la retta  $r$  tale che  $M \in r$ , e su di essa si individuino i segmenti congruenti  $MC$  ed  $MD$ , in semipiani opposti rispetto alla retta  $AB$ . Congiunti  $A$  con  $D$  e  $B$  con  $C$ , si dimostri  $AMD \cong MBC$ .

10. Si disegnino due angoli consecuti e congruenti  $\widehat{aVb}$  e  $\widehat{bVc}$  e le rispettive bisettrici  $d$  ed  $e$ . Sulle semirette  $a$  e  $b$  si scelgano rispettivamente i punti  $A$  e  $B$  tali che  $VA \cong VB$ . Sulle bisettrici  $d$  e  $e$  si scelgano rispettivamente i punti  $C$  e  $D$  tali che  $VC \cong VD$ . Si congiungano  $A$  con  $C$  e  $B$  con  $D$ . Dimostrare che  $V\widehat{AC} \cong V\widehat{BC} \cong V\widehat{BD}$ .
11. Si disegni il triangolo  $ABC$ , con  $AB > AC$ , e si conduca la bisettrice  $AD$  dell'angolo  $\widehat{A}$ . Da  $D$  si conduca la semiretta  $a$  che forma con la bisettrice  $b$  un angolo congruente a  $\widehat{ADC}$ , e la semiretta  $a$  interseca il lato  $AB$  in  $E$ . Si dimostri che  $CD \cong DE$ .
12. Sia  $ABC$  un triangolo isoscele di vertice  $C$ ; si prolunghino i lati  $AC$  e  $BC$ , dalla parte della base  $AB$ , di due segmenti  $AD$  e  $BE$  tali che  $AD \cong BE$ . Si dimostri che il punto  $\{F\} = AE \cap BD$  appartiene alla bisettrice dell'angolo  $\widehat{ACB}$ .
13. Due triangolo isosceli e rettangoli in  $C$   $ABC$  e  $CED$  sono tali che  $ABC \cap CED = \{C\}$ . Sapendo che l'angolo  $\widehat{BCD}$  è acuto, si dimostri che  $AD \cong BE$ .

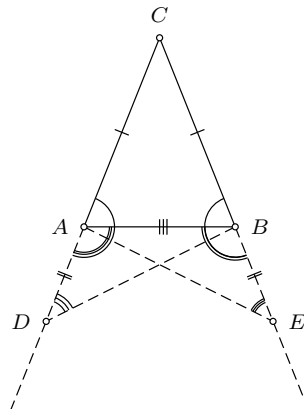
# Capitolo 11

## Proprietà fondamentali dei triangoli

### 11.1 Prime proprietà dei triangoli isosceli

In questo paragrafo enunceremo e dimostreremo importanti proprietà che caratterizzano i triangoli isosceli. Cominciamo col notissimo

**Teorema 11.1.1** (Teorema diretto per i triangoli isosceli). *In ogni triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti.*



*Hp:*  $AC \cong BC$

*Th:*  $\widehat{ABC} \cong \widehat{BAC}$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è quella proposta da Euclide negli Elementi. Costruzione: prolunghiamo i lati AC e BC, dalla parte di A e di B, e scegliamo rispettivamente su tali prolungamenti due punti D ed E tali che  $AD \cong BE$ ; congiungiamo, quindi, B con D, A con E.

1. Consideriamo i triangoli  $BCD$  e  $ACE$

- |     |  |  |
|-----|--|--|
| 2.  | $AC \cong BC$                          | Hp                                       |
| 3.  | $AD \cong BE$                          | costruzione                              |
| 4.  | $CD \cong CE$                          | 2., 3., somma di segmenti congruenti     |
| 5.  | $\widehat{C}$ in comune                | figura                                   |
| 6.  | $BCD \cong ACE$                        | 2., 4., 5., 1° c.c.                      |
| 7.  | $AE \cong BD$                          | 6., si oppongono ad angoli congruenti    |
| 8.  | $\widehat{ADB} \cong \widehat{AEB}$    | 6., si oppongono a lati congruenti       |
| 9.  | $\widehat{CAE} \cong \widehat{CBD}$    | 6., si oppongono a lati congruenti       |
| 10. | Consideriamo i triangoli $ABD$ e $ABE$ |  |
| 11. | $ABD \cong ABE$                        | 3., 7., 8., 1° c.c.                      |
| 12. | $\widehat{BAE} \cong \widehat{ABD}$    | 11., si oppongono a lati congruenti      |
| 13. | $\widehat{ABC} \cong \widehat{BAC}$    | 8., 12., differenza di angoli congruenti |

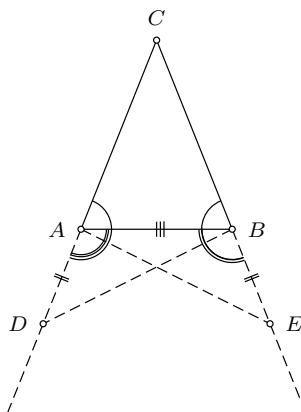
□

**Corollario 11.1.1.** *I triangoli equilateri sono equiangoli, cioè hanno tutti e tre gli angoli congruenti.*

*Dimostrazione.* Semplice esercizio. □

Vale anche il viceversa del teorema diretto.

**Teorema 11.1.2** (Teorema inverso per i triangoli isosceli). *Ogni triangolo con due angoli congruenti è isoscele.*



*Hp:*  $\widehat{ABC} \cong \widehat{BAC}$

*Th:*  $ABC$  isoscele

*Dimostrazione.* Si utilizza la stessa costruzione del teorema diretto.

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 1. | Consideriamo $ABD$ e $ABE$                    |  |
| 2. | $\widehat{CAD} \cong \widehat{CBE} \cong \pi$ | figura                                     |
| 3. | $\widehat{ABC} \cong \widehat{BAC}$           | Hp   |
| 4. | $\widehat{BAD} \cong \widehat{ABE}$           | 2., 3., supplementari di angoli congruenti |



5.	$AD \cong BE$	costruzione
6.	$AB$ in comune	figura
7.	$ABD \cong ABE$	4., 5., 6., 1° c.c.
8.	$AE \cong BD$	7., si oppongono ad angoli congruenti
9.	$\widehat{AEB} \cong \widehat{ADB}$	7., si oppongono a lati congruenti
10.	$\widehat{ABD} \cong \widehat{BAE}$	7., si oppongono a lati congruenti
11.	$\widehat{CAE} \cong \widehat{CBD}$	3., 10., somma di angoli congruenti
12.	Consideriamo $CDB$ e $CAE$	
13.	$CDB \cong CAE$	8., 9., 11., 2° c.c.
14.	$AC \cong BC$	13., si oppongono ad angoli congruenti
15.	$ABC$ isoscele	14., definizione triangolo isoscele

□

**Corollario 11.1.2.** *Un triangolo equiangolo è anche equilatero.*

*Dimostrazione.* Esercizio.

□

**Osservazione:** I teoremi diretto e inverso per i triangoli isosceli si possono riassumere dicendo che: *un triangolo è isoscele se, e solo se, gli angoli alla base sono congruenti.* Pertanto, fermo restando che la definizione di triangolo isoscele è quella già data, possiamo esprimerla in maniera alternativa come: *triangolo isoscele è quel triangolo che ha almeno due angoli congruenti.* L'estensione ai triangoli equilateri è evidente.

Siamo ora in grado di esplicitare la dimostrazione del terzo criterio di congruenza.

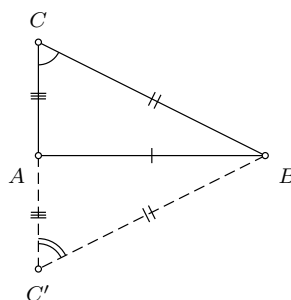
**Teorema 11.1.3** (Terzo criterio di congruenza). *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre lati, allora essi sono congruenti.*

$$\text{Hp: } AB \cong A'B' \quad \wedge \quad BC \cong B'C' \quad \wedge \quad AC \cong A'C'$$

$$\text{Th: } ABC \cong A'B'C'$$

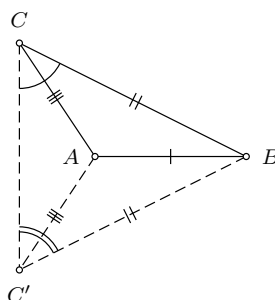
*Dimostrazione.* La dimostrazione analizza tre casi distinti.

1. Con un movimento rigido, trasportiamo il triangolo  $A'B'C'$  in modo tale che  $A'B'$  si sovrapponga ad  $AB$ , in quanto  $AB \cong A'B'$ , i punti  $C$  e  $C'$  siano in semipiani opposti rispetto ad  $AB$ , e  $C, A, C'$  siano allineati.



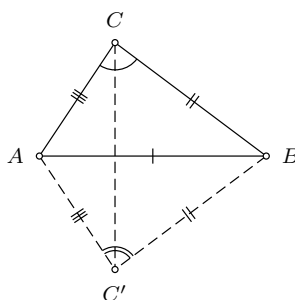
$$1. \quad AC \cong A'C' \quad \wedge \quad BC \cong B'C' \quad \text{Hp}$$

2. Consideriamo il triangolo  $CC'B$
  3.  $CC'B$  triangolo isoscele                      2., def. triangolo isoscele
  4.  $\widehat{ACB} \cong \widehat{AC'B}$                                       3., teorema diretto triangoli isosceli
  5.  $ABC \cong ABC'$                                       1., 4., 1° c.c.
2. Con un movimento rigido, trasportiamo il triangolo  $A'B'C'$  in modo tale che  $A'B'$  si sovrapponga ad  $AB$ , in quanto  $AB \cong A'B'$ , i punti  $C$  e  $C'$  siano in semipiani opposti rispetto ad  $AB$ , e  $CC'$  intersechi  $AB$  in un punto sul prolungamento di  $AB$  stesso, dalla parte di  $A$ .



1.  $AC \cong AC' \wedge BC \cong BC'$                       Hp
2. Consideriamo il triangolo  $CC'B$
3.  $CC'B$  triangolo isoscele                      1., def. triangolo isoscele
4.  $\widehat{CC'B} \cong \widehat{C'CB}$                                       3., teorema diretto triangoli isosceli
5. Consideriamo  $CC'A$
6.  $CC'A$  triangolo isoscele                      1., def. triangolo isoscele
7.  $\widehat{CC'A} \cong \widehat{C'CA}$                                       3., teorema diretto triangoli isosceli
8.  $\widehat{ACB} \cong \widehat{AC'B}$                                       4., 7., differenza di angoli congruenti
9.  $ABC \cong ABC'$                                       1., 8., 1° c.c.

3. Con un movimento rigido, trasportiamo il triangolo  $A'B'C'$  in modo tale che  $A'B'$  si sovrapponga ad  $AB$ , in quanto  $AB \cong A'B'$ , i punti  $C$  e  $C'$  siano in semipiani opposti rispetto ad  $AB$ ,  $CC'$  intersechi  $AB$  in un punto interno ad  $AB$  stesso.



- |    |                                       |  |
|----|---------------------------------------|--|
| 1. | $AC \cong AC' \wedge BC \cong BC'$    | Hp                                     |
| 2. | Consideriamo il triangolo $CC'B$      |  |
| 3. | $CC'B$ triangolo isoscele             | 1., def. triangolo isoscele            |
| 4. | $\widehat{CC'B} \cong \widehat{C'CB}$ | 3., teorema diretto triangoli isosceli |
| 5. | Consideriamo $C'CA$                   |  |
| 6. | $C'CA$ triangolo isoscele             | 1., def. triangolo isoscele            |
| 7. | $\widehat{CC'A} \cong \widehat{C'CA}$ | 3., teorema diretto triangoli isosceli |
| 8. | $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'CB}$  | 4., 7., somma di angoli congruenti     |
| 9. | $ABC \cong ABC'$                      | 1., 8., 1° c.c.                        |

□

**Esercizi**

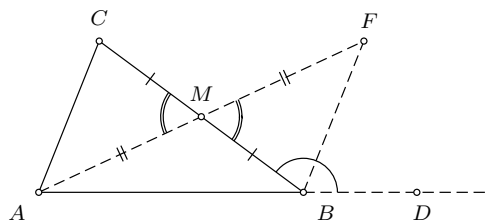
1. Dimostrare che due triangoli che hanno congruenti due lati e la mediana relativa ad uno dei due sono congruenti.
2. Disegnare due segmenti congruenti  $AB$  e  $DE$ . Costruire su essi due triangoli equilateri  $ABC$  e  $DEF$ . Si dimostri che i triangoli sono congruenti. Si può dimostrare ancora la congruenza se si costruiscono sui due segmenti due triangoli isosceli?
3. Nel triangolo isoscele  $ABC$ , di base  $AB$ , prolunga i lati  $CA$  e  $CB$  dalla parte della base. La bisettrice dell'angolo supplementare di  $\widehat{A}$  incontra il prolungamento del lato  $BC$  nel punto  $E$ . La bisettrice dell'angolo supplementare di  $\widehat{B}$  incontra il prolungamento del lato  $AC$  nel punto  $F$ . Dimostra che  $ABF \cong ABE$ .
4. Nel triangolo isoscele  $ABC$  si congiunga il vertice  $A$  con due punti  $D$  ed  $E$  interni alla base  $BC$  ed equidistanti da  $B$  e da  $C$  rispettivamente. Dimostrare che  $AD \cong AE$ .
5. Dato un triangolo isoscele. si congiungano i punti medi dei suoi lati; dimostrare che si ottiene ancora un triangolo isoscele.
6. Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti:
  - a) l'angolo al vertice e uno dei suoi lati;
  - b) la base e uno degli altri lati;
  - c) la base e uno degli angoli adiacenti ad essa.
7. Dimostrare che i punti medi dei lati di un triangolo equilatero sono vertici di un triangolo anche esso equilatero.
8. Sui lati di un triangolo equilatero  $ABC$  si prendano, nello stesso senso, tre segmenti congruenti  $AA', BB', CC'$ . Dimostrare che anche il triangolo di vertici  $A', B', C'$  è equilatero.
9. Si prolunghino di segmenti congruenti, nello stesso verso, i tre lati di un triangolo equilatero; dimostrare che il triangolo avente i vertici negli estremi dei tre segmenti così ottenuti è equilatero.
10. Presi sul piano tre punti  $A, B, C$  non allineati e un punto  $O$ , non appartenente ad alcuna delle rette che i punti dati individuano a due a due, si considerino i segmenti  $AA', BB', CC'$  aventi  $O$  come punto medio. Dimostrare che  $AB \cong A'B', BC \cong B'C', AC \cong A'C'$ .

11. Le bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.
12. In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base incontrano i lati opposti in punti equidistanti dal vertice.
13. In due triangoli isosceli aventi la base in comune, la retta che unisce i vertici contiene le bisettrici degli angoli al vertice.
14. Disegna un triangolo isoscele  $ABC$  in modo che la base  $AB$  sia minore del lato obliquo. Prolunga il lato  $CA$ , dalla parte di  $A$ , di un segmento  $AE$  congruente alla differenza fra il lato obliquo e la base. Prolunga poi la base  $AB$ , dalla parte di  $B$ , di un segmento  $BF \cong AE$ . Congiungi  $F$  con  $C$  ed  $E$ . Dimostra che  $CF \cong EF$ .
15. Sia  $ABC$  un triangolo isoscele di vertice  $C$ ; si prendano sui prolungamenti di  $AB$  due punti  $D$  ed  $E$  tali che  $AD \cong BE$ . Si dimostri che  $ADC \cong BEC$  e  $AEC \cong BDC$ .
16. Sui lati congruenti del triangolo isoscele  $ABC$ , di vertice  $C$ , disegna due segmenti congruenti  $CE$  e  $CF$ . Congiungi  $E$  con  $B$ , poi  $A$  con  $F$ ; indica con  $D$  il loro punto d'intersezione. Dimostra che anche il triangolo  $ABD$  è isoscele.
17. Sia  $ABC$  un triangolo isoscele di base  $AB$ . Si conducano le bisettrici degli angoli alla base e sia  $E$  il loro punto d'incontro. Dimostrare che il triangolo  $ABE$  è isoscele.
18. Sui due lati obliqui del triangolo isoscele  $ABC$ , di base  $AB$ , disegna, esternamente al triangolo, i triangoli equilateri  $BCD$  e  $ACE$ . Congiungi  $A$  con  $D$  e  $B$  con  $E$ , poi indica con  $F$  il punto intersezione dei segmenti ottenuti. Dimostra che
  - a)  $AD \cong BE$
  - b)  $CF$  è bisettrice di  $\widehat{ACB}$ .
19. Disegna un triangolo isoscele  $ABC$ , di base  $BC$  e l'angolo  $\widehat{A}$  acuto. Traccia le altezze  $BH$  e  $CK$  relative, rispettivamente, ai lati  $AC$  e  $AB$  e prolunga tali altezze, dalla parte di  $H$  e  $K$ , dei segmenti  $HB' \cong BH$  e  $KC' \cong CK$ . Sia  $A'$  il punto d'intersezione della retta  $BC'$  con la retta  $B'C$ . Dimostra che
  - a)  $ABC \cong AC'B \cong AB'C$
  - b) il triangolo  $A'B'C'$  è isoscele.
20. Siano dati due triangoli isosceli aventi ordinatamente congruenti un lato e la base. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti.
21. Si consideri un angolo  $a\widehat{Ob}$ ; siano  $A, B$  due punti del lato  $a$  e siano  $C, D$  due punti del lato  $b$  tali che  $OA \cong OC$  e  $OB \cong OD$ . Si congiungano  $A$  con  $D$  e  $B$  con  $C$  e sia  $\{E\} = AD \cap BC$ . Si dimostri che il punto  $E$  appartiene alla bisettrice dell'angolo  $a\widehat{Ob}$ .

## 11.2 Il primo teorema dell'angolo esterno

Nel paragrafo 10.1 abbiamo introdotto il concetto di angolo esterno di un triangolo. Conosciamo già la relazione che sussiste tra un angolo interno e la coppia di angoli esterni ad esso associati: l'angolo interno e ognuno degli angoli esterni sono adiacenti. Ci chiediamo ora se sussistono relazioni tra ciascun angolo esterno e gli angoli interni ad esso non adiacenti. La risposta è affermativa ed è stabilita dai due teoremi dell'angolo esterno, e, in questo paragrafo, enunciamo e dimostriamo solo il primo.

**Teorema 11.2.1** (Primo teorema dell'angolo esterno). *In ogni triangolo, un angolo esterno è maggiore di ciascun angolo interno ad esso non adiacente.*

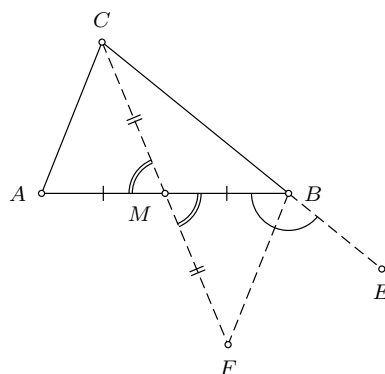


*Hp:*  $\widehat{ABC} + \widehat{CBD} \cong \pi$

*Th:*  $\widehat{CBD} > \widehat{ACB}$

*Dimostrazione.* Dimostriamo dapprima che  $\widehat{CBD} > \widehat{ACB}$ . Costruzione: Consideriamo il punto medio  $M$  del lato  $BC$ , conduciamo la semiretta  $AM$ , di origine  $A$ , e su di essa individuiamo il punto  $F$  tale che  $AM \cong MF$ , per cui  $F$  è interno all'angolo esterno  $\widehat{CBD}$ . Congiungiamo  $F$  con  $B$ .

- |    |  |                                    |
|----|--|------------------------------------|
| 1. | $\widehat{CBD} > \widehat{CBF}$        | $F$ interno a $\widehat{CBD}$      |
| 2. | Consideriamo i triangoli $ACM$ e $BFM$ |                                    |
| 3. | $CM \cong MB$                          | per costruzione                    |
| 4. | $AM \cong MF$                          | per costruzione                    |
| 5. | $\widehat{AMC} \cong \widehat{BMF}$    | angoli opposti al vertice          |
| 6. | $ACM \cong BFM$                        | 3., 4., 5., 1° c. c.               |
| 7. | $\widehat{MBF} \cong \widehat{ACB}$    | 6., si oppongono a lati congruenti |
| 8. | $\widehat{CBD} > \widehat{ACB}$        | 1., 7.                             |



Dimostriamo, infine, che  $\widehat{ABE} > \widehat{CAB}$ . Costruzione: Consideriamo il punto medio  $M$  del lato  $AB$ , conduciamo la semiretta  $CM$ , di origine  $C$ , e su di essa individuiamo il punto  $F$  tale che  $CM \cong MF$ , per cui  $F$  è interno all'angolo esterno  $\widehat{ABE}$ . Congiungiamo  $F$  con  $B$ .

$$Hp: \widehat{ABC} + \widehat{ABE} \cong \pi$$

$$Th: \widehat{ABE} > \widehat{CAB}$$

- |     |  |                                     |
|-----|--|-------------------------------------|
| 9.  | $\widehat{ABE} > \widehat{ABF}$        | $F$ interno a $\widehat{ABE}$       |
| 10. | Consideriamo i triangoli $ACM$ e $BFM$ |                                     |
| 11. | $AM \cong MB$                          | per costruzione                     |
| 12. | $CM \cong MF$                          | per costruzione                     |
| 13. | $\widehat{AMC} \cong \widehat{BMF}$    | angoli opposti al vertice           |
| 14. | $ACM \cong BFM$                        | 11., 12., 13., 1° c. c.             |
| 15. | $\widehat{MBF} \cong \widehat{CAB}$    | 14., si oppongono a lati congruenti |
| 16. | $\widehat{ABE} > \widehat{CAB}$        | 9., 15.                             |

□

**Teorema 11.2.2** (Secondo criterio di congruenza generalizzato). *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli e un lato qualunque, allora essi sono congruenti.*

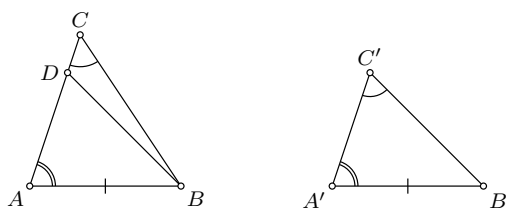
$$Hp: \widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'} \quad \wedge \quad \widehat{CAB} \cong \widehat{C'A'B'} \quad \wedge \quad AB \cong A'B'$$

$$Th: ABC \cong A'B'C'$$

*Dimostrazione.* Dimostreremo il teorema per assurdo.

1. Per assurdo  $ABC \not\cong A'B'C'$
2.  $AC \not\cong A'C'$  1.
3.  $A'C' < AC$  2., primo caso

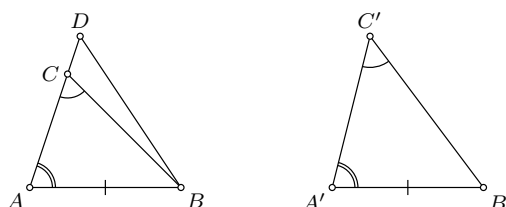
Costruzione: scegliamo all'interno del lato  $AC$  un punto  $D$  tale che  $AD \cong A'C'$ .



4. Consideriamo i triangoli  $ABD$  e  $A'B'C'$
5.  $AB \cong A'B'$  Hp
6.  $AD \cong A'C'$  costruzione

- |     |   |                                     |
|-----|---|-------------------------------------|
| 7.  | $\widehat{DAB} \cong \widehat{C'A'B'}$            | Hp                                  |
| 8.  | $ABD \cong A'B'C'$                                | 5., 6., 7., 1° c.c.                 |
| 9.  | $\widehat{ADB} \cong \widehat{A'C'B'}$            | 8., si oppongono a lati congruenti  |
| 10. | $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$            | Hp                                  |
| 11. | $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$               | 9., 10., proprietà transitiva       |
| 12. | Consideriamo il triangolo $BCD$                   |                                     |
| 13. | $\widehat{ADB}$ angolo esterno al triangolo $BCD$ | figura                              |
| 14. | $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$                   | 13., 1° teorema dell'angolo esterno |
| 15. | Contraddizione                                    |                                     |
| 16. | $A'C' > AC$                                       | 2., secondo caso                    |

Costruzione: scegliamo sul prolungamento del lato  $AC$ , dalla parte di  $C$ , un punto  $D$  tale che  $AD \cong A'C'$



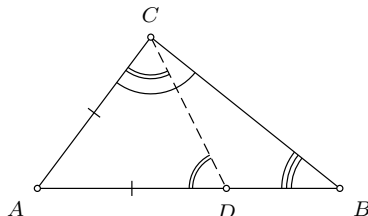
- |     |   |                                     |
|-----|---|-------------------------------------|
| 17. | Consideriamo i triangoli $ABD$ e $A'B'C'$         |                                     |
| 18. | $AB \cong A'B'$                                   | Hp                                  |
| 19. | $AD \cong A'C'$                                   | costruzione                         |
| 20. | $\widehat{DAB} \cong \widehat{C'A'B'}$            | Hp                                  |
| 21. | $ABD \cong A'B'C'$                                | 18., 19., 20., 1° c.c.              |
| 22. | $\widehat{ADB} \cong \widehat{A'C'B'}$            | 21., si oppongono a lati congruenti |
| 23. | $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$            | Hp                                  |
| 24. | $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$               | 22., 23., proprietà transitiva      |
| 25. | Consideriamo il triangolo $BCD$                   |                                     |
| 26. | $\widehat{ACB}$ angolo esterno al triangolo $BCD$ | figura                              |
| 27. | $\widehat{ACB} > \widehat{ADB}$                   | 26., 1° teorema dell'angolo esterno |
| 28. | Contraddizione                                    |                                     |
| 29. | $ABC \cong A'B'C'$                                | 15., 28.                            |

□

## 11.3 Teoremi delle disuguaglianze triangolari

Nel precedente paragrafo abbiamo dedotto che in un triangolo isoscele a lati congruenti si oppongono angoli congruenti, e viceversa. Ci chiediamo ora se è possibile determinare una relazione tra un lato e l'angolo opposto in un triangolo scaleno. La risposta è affermativa ed è stabilita dai seguenti teoremi.

**Teorema 11.3.1.** Consideriamo un triangolo che non sia equilatero. Allora a lato maggiore si oppone angolo maggiore.



*Hp:*  $AC < AB$

*Th:*  $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$

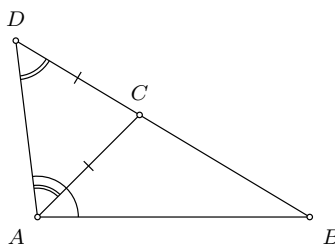
*Dimostrazione.* Poiché  $AC < AB$ , si consideri un punto  $D$  interno al segmento  $AB$  tale che  $AC \cong AD$ .

- |    |                                     |   |
|----|-------------------------------------|---|
| 1. | $\widehat{ACD} < \widehat{ACB}$     | $CD$ interno all'angolo $\widehat{ACB}$ , per costruzione |
| 2. | Consideriamo il triangolo $ACD$     |   |
| 3. | $AC \cong AD$                       | costruzione   |
| 4. | $ACD$ isoscele                      | 3., def. triangolo isoscele                               |
| 5. | $\widehat{ACD} \cong \widehat{ADC}$ | 4., teorema diretto triangoli isosceli                    |
| 6. | $\widehat{ADC} < \widehat{ACB}$     | 1., 5.  |
| 7. | Consideriamo il triangolo $BCD$     |   |
| 8. | $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$     | 1° teorema dell'angolo esterno                            |
| 9. | $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$     | 6., 8., proprietà transitiva del $<$                      |

□

Le proprietà che seguono sono i noti teoremi della disuguaglianza triangolare, già studiati in maniera intuitiva durante la scuola media.

**Teorema 11.3.2** (Primo Teorema della disuguaglianza triangolare). *In ogni triangolo, un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*





*Hp:*  $ABC$  triangolo,  $AB$  lato qualunque

*Th:*  $AB < AC + BC$

*Dimostrazione.* Costruzione: prolunghiamo il lato  $BC$ , dalla parte di  $C$ , di un segmento  $CD \cong AC$ ; congiungiamo  $D$  con  $A$ .

- |     |   |   |
|-----|---|---|
| 1.  | Per assurdo $AB > AC + BC$                          |   |
| 2.  | $AC \cong CD$                                       | costruzione                                   |
| 3.  | $ACD$ isoscele                                      | 2., definizione triangolo isoscele            |
| 4.  | $\widehat{ADC} \cong \widehat{DAC}$                 | 3., teorema diretto triangoli isosceli        |
| 5.  | $AB > CD + BC$                                      | 1., 2.  |
| 6.  | $AB > BD$   | 5., somma segmenti adiacenti                  |
| 7.  | Consideriamo $ABD$                                  |   |
| 8.  | $\widehat{ADB} > \widehat{DAB}$                     | 6., a lato maggiore si oppone angolo maggiore |
| 9.  | $\widehat{DAB} \cong \widehat{DAC} + \widehat{CAB}$ | unione di angoli consecutivi                  |
| 10. | $\widehat{ADB} < \widehat{DAB}$                     | 9.  |
| 11. | Contraddizione                                      | 8., 10.                                       |
| 12. | Per assurdo $AB \cong AC + BC$                      |   |
| 13. | $ABD$ triangolo isoscele di base $AD$               | 12., def. triangolo isoscele                  |
| 14. | $\widehat{DAB} \cong \widehat{ADB}$                 | 13., teorema diretto triangoli isosceli       |
| 15. | Contraddizione                                      | 10., 14.                                      |
| 16. | $AB < AC + BC$                                      | 11., 15.                                      |

□

**Teorema 11.3.3** (Secondo Teorema della disuguaglianza triangolare). *In ogni triangolo, un lato è maggiore della differenza degli altri due, qualora quest'ultima abbia significato.*

*Hp:*  $ABC$  triangolo,  $AB$  lato qualunque,  $BC > AC \quad \hat{v} \quad BC \cong AC$

*Th:*  $AB > BC - AC$

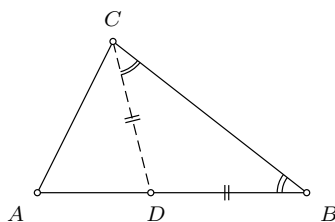
*Dimostrazione.* Con riferimento alla dimostrazione e alla figura del primo teorema della disuguaglianza triangolare

- |    |                          |  |
|----|--------------------------|--|
| 1. | $BC < AB + AC$           | primo teorema disuguaglianza triangolare |
| 2. | $AC \cong AC$            | proprietà riflessiva                     |
| 3. | $BC - AC < AB + AC - AC$ | compatibilità di $<$ con $-$             |
| 4. | $BC - AC < AB$           | 3.                                       |

□

Vale anche il viceversa del teorema 11.3.1

**Teorema 11.3.4.** *Consideriamo un triangolo che non sia equiangolo. Allora ad angolo maggiore si oppone lato maggiore.*



*Hp:*  $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$

*Th:*  $AC < AB$

*Dimostrazione.* Costruzione: Poiché  $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$ , conduciamo la semiretta di origine  $C$ , che incontra  $AB$  in  $D$ , tale che  $\widehat{DCB} \cong \widehat{ABC}$ .

- |  |  |
|--|--|
| 1. Consideriamo $BCD$                  |  |
| 2. $\widehat{DCB} \cong \widehat{ABC}$ | costruzione                              |
| 3. $BCD$ isoscele                      | 2., teorema inverso triangoli isosceli   |
| 4. $CD \cong BD$                       | 3., definizione triangolo isoscele       |
| 5. Consideriamo $ADC$                  |  |
| 6. $AC < AD + CD$                      | primo teorema disuguaglianza triangolare |
| 7. $AB \cong AD + DB$                  | somma segmenti adiacenti                 |
| 8. $AB \cong AD + CD$                  | 4., 7.,                                  |
| 9. $AC < AB$                           | 6., 8.                                   |

□

### Esercizi

1. Dimostrare che in ogni triangolo la somma dei tre lati è sempre maggiore del doppio di un lato.
2. Disegnare un triangolo  $ABC$  tale che  $AB > AC$  e la mediana  $AM$  di  $BC$ . Dimostrare che  $\widehat{AMC} < \widehat{AMB}$ .
3. Sia  $ABC$  un triangolo isoscele di base  $AB$ . Fissare sul lato  $AC$  un punto  $E$ . Dimostrare che  $AE < BE$ .
4. Consideriamo il triangolo  $ABC$  isoscele sulla base  $AB$  e un punto  $D$  sul prolungamento di  $BC$  dalla parte di  $B$ . Dimostrare che  $\widehat{CAB} > \widehat{BDA}$ .
5. Disegnare un triangolo  $ABC$  e un punto  $E$  interno al triangolo. Si congiunga  $E$  con i vertici  $B$  e  $C$ . Dimostrare che  $\widehat{BEC} > \widehat{BAC}$ .
6. Dati i triangoli  $ABC$  e  $DEF$  con  $AC > DE$ ,  $\widehat{A} > \widehat{B}$  e  $\widehat{F} > \widehat{D}$ , dimostrare che  $BC > FE$ .
7. Nel triangolo  $ABC$  scegliere a caso tre punti,  $D$  su  $AB$ ,  $E$  su  $BC$  e  $F$  su  $AC$ . Dimostrare che la somma dei lati del triangolo  $DEF$  è minore della somma dei lati del triangolo  $ABC$ .

8. Il triangolo  $ABC$ , isoscele e acutangolo, ha il lato obliquo congruente a quello di un triangolo rettangolo isoscele  $A'B'C'$ .. Dimostrare che le basi di detti triangoli sono diverse. Si può eseguire la dimostrazione anche nel caso in cui il primo triangolo sia ottusangolo?
9. Nel triangolo  $ABC$  si unisca il vertice  $A$  con il punto medio  $M$  del lato  $BC$ ; provare che  $AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$ .
10. Con riferimento all'esercizio precedente, supposto  $AB > AC$ , provare che  $AM > \frac{1}{2}(AB - AC)$ .
11. La somma dei segmenti con estremi un punto interno di un triangolo e gli estremi di un lato è minore della somma dei lati rimanenti.
12. Un triangolo ha i vertici posti sui lati di un altro triangolo; dimostrare che il perimetro del primo è minore del perimetro del secondo.
13. In un triangolo ciascuno dei lati è minore del semiperimetro.
14. La somma dei segmenti che vanno da un punto interno di un triangolo ai vertici è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.
15. La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in due parti, ciascuna minore del lato rispettivamente consecutivo.

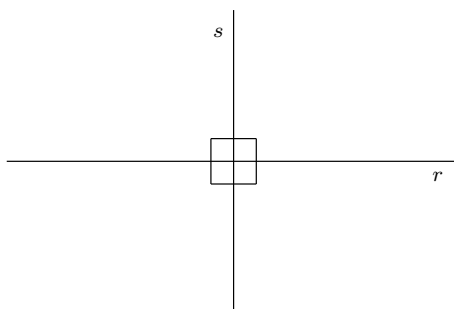
# Capitolo 12

## Perpendicolarità

### 12.1 Definizioni e prime applicazioni

In questa sezione definiremo la relazione di perpendicolarità tra rette. Essa è fondamentale per le procedure di costruzione con riga e compasso, quindi per la costruzione di una vasta categoria di figure geometriche.

**Definizione 12.1.1.** Due rette incidenti  $r$  ed  $s$  si dicono **perpendicolari** se dividono il piano in quattro angoli congruenti. Notazione:  $r \perp s$ . Il punto d'intersezione si chiama **piede**.



Si deduce immediatamente che i quattro angoli congruenti sono retti.

La relazione di perpendicolarità tra rette gode solo della seguente proprietà:

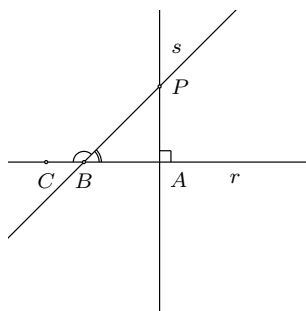
$$r \perp s \iff s \perp r$$

vale a dire la **proprietà simmetrica**, essendo  $r$  ed  $s$  rette del piano.

Estendiamo ora il concetto di perpendicolarità a semirette e segmenti.

**Definizione 12.1.2.** Due semiretetterette si dicono **perpendicolari** se le loro rette sostegno sono perpendicolari. Allo stesso modo, due segmenti si dicono **perpendicolari** se le loro rette sostegno sono perpendicolari.

**Teorema 12.1.1.** *Sia data una retta  $r$  e sia  $P$  un punto, su di essa o esterno; allora è unica la retta  $s$  passante per  $P$  e perpendicolare a  $r$ .*



*Hp:*  $P \notin r \wedge P \in s \wedge r \perp s$

*Th:*  $s$  unica

*Dimostrazione.* Dimostreremo il teorema solo nel caso specificato nelle ipotesi, cioè  $P \notin r$ . Costruzione: sia  $A$  il punto d'incontro della retta  $s$  con la retta  $r$ . Tracciamo per  $P$  una retta  $t$  che incontra  $r$  in  $B$ .

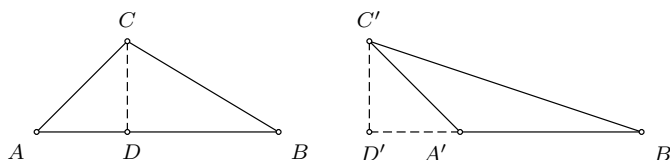
1. Per assurdo  $t \neq s$  con  $t \perp r$
2.  $\widehat{PAB} \cong \pi/2$  Hp
3.  $\widehat{PBC} \cong \pi/2$  1.
4.  $\widehat{PAB} \cong \widehat{PBC}$  2., 3., proprietà transitiva
5. Consideriamo il triangolo  $BAP$
6.  $\widehat{PBC} > \widehat{PAB}$  1° teorema dell'angolo esterno
7. Contraddizione 3., 6.
8.  $s$  unica

□

Ciascun lato di un triangolo può essere riguardato come base del triangolo stesso. Ha senso, pertanto, la seguente

**Definizione 12.1.3.** In un triangolo, si definisce **altezza relativa ad un lato (base)**, il segmento perpendicolare alla base condotto ad essa dal vertice opposto, il cui secondo estremo è il piede della perpendicolare stessa.

Ogni triangolo ha tre altezze, ciascuna relativa ad un lato. Solo nel caso dei triangoli ottusangoli le altezze relative ai due lati dell'angolo ottuso si costruiscono esternamente ad esso, utilizzando i prolungamenti dei lati stessi. Inoltre, proveremo che le tre altezze si incontrano in un punto, esterno al triangolo solo per i triangoli ottusangoli, interno per i triangoli acutangoli. coincidente con il vertice dell'angolo retto per i triangoli rettangoli.



In un triangolo rettangolo, i cateti sono perpendicolari e ciascuno di essi è altezza relativa dell'altro. La terza altezza è denominata **altezza relativa all'ipotenusa**.

Per i triangoli rettangoli è possibile enunciare i criteri di congruenza in modo semplificato, poiché essi hanno la caratteristica di avere un angolo retto.

**Teorema 12.1.2. (Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli)** *Se due triangoli rettangoli hanno ordinatamente congruenti due lati qualunque, oppure un lato qualunque e un angolo diverso da quello retto, allora essi sono congruenti.*

*Dimostrazione.* Esplicitarla come esercizio nei seguenti semplici casi: due cateti ordinatamente congruenti, un lato qualunque ed un angolo acuto ordinatamente congruenti.  $\square$

## 12.2 Le simmetrie centrale e assiale

Lo studio delle simmetrie è molto importante in Geometria. In questo paragrafo studieremo le rappresentazioni delle simmetrie centrale e assiale e le definizioni che daremo saranno *operative*, vale a dire stabiliranno una procedura precisa per cui, a partire da una data figura, sarà possibile costruire, con riga e compasso, la figura simmetrica. Proveremo che le simmetrie centrale e assiale sono isometrie, cioè conservano le dimensioni.

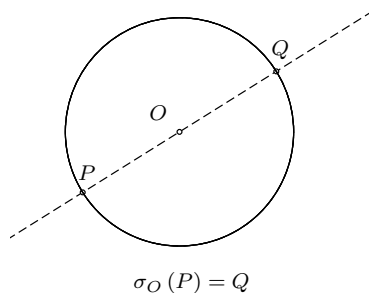
Diamo intanto la seguente

**Definizione 12.2.1.** Sia  $O$  un punto del piano; si definisce **circonferenza di centro  $O$**  l'insieme dei punti del piano  $P$  equidistanti da  $O$ . Ciascuno dei segmenti  $OP$ , al variare di  $P$  sulla circonferenza, si chiama **raggio** della circonferenza.

Studieremo in modo approfondito la circonferenza nel secondo anno di corso.

**Definizione 12.2.2.** Siano dati un punto  $O$ , detto *centro di simmetria*, ed un punto qualsiasi  $P$  del piano. Si definisce *simmetrico di  $P$  rispetto a  $O$*  il punto  $Q$  ottenuto come segue:

- 1° si traccia la retta  $OP$
- 2° si descrive la circonferenza di centro  $O$  e raggio  $OP$
- 3° si individua l'intersezione  $Q$  della circonferenza con la retta  $OP$ , dalla parte opposta a  $P$  rispetto a  $O$ .



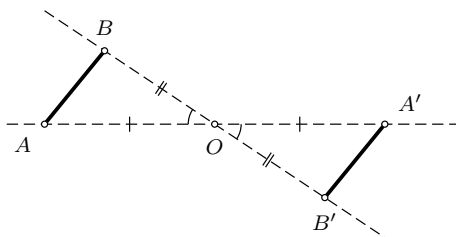
In una simmetria centrale, il centro di simmetria è l'unico punto del piano che ha come simmetrico sé stesso.

**Osservazione:** Per costruire il simmetrico di un segmento  $AB$  si determinano i simmetrici dei due estremi  $A$  e  $B$  ottenendo, rispettivamente,  $A'$  e  $B'$ , quindi  $A'B'$  è il simmetrico del segmento dato. Per un qualunque poligono di  $n$  lati si procede in modo analogo determinando il simmetrico di ogni singolo vertice ottenendo così il poligono simmetrico.

Stabiliamo la seguente notazione. In generale, per denotare che la figura geometrica  $G$  è simmetrica della figura  $F$  rispetto al centro di simmetria  $O$ , si scrive  $\sigma_O(F) = G$ . È evidente che, in base alla definizione operativa, risulta  $\sigma_O(G) = F$ , cioè la figura simmetrica di  $G$  rispetto ad  $O$  è la figura  $F$ .

È fondamentale la seguente proprietà.

**Teorema 12.2.1.** *La simmetria centrale è un'isometria, cioè il simmetrico di un segmento è un segmento congruente al primo.*



*Hp:*  $O, A, A'$  allineati  $\wedge O, B, B'$  allineati  $\wedge AO \cong OA' \wedge BO \cong OB'$

*Th:*  $AB \cong A'B'$

*Dimostrazione.* La figura precedente illustra la costruzione del simmetrico di  $AB$  rispetto ad  $O$ .

1. Consideriamo i triangoli  $AOB$  e  $A'OB'$
2.  $AO \cong OA'$  Hp
3.  $BO \cong OB'$  Hp
4.  $\widehat{AOB} \cong \widehat{A'OB'}$  angoli opposti al vertice
5.  $AOB \cong A'OB'$  2., 3., 4., 1° c. c.
6.  $AB \cong A'B'$  5., si oppongono ad angoli congruenti

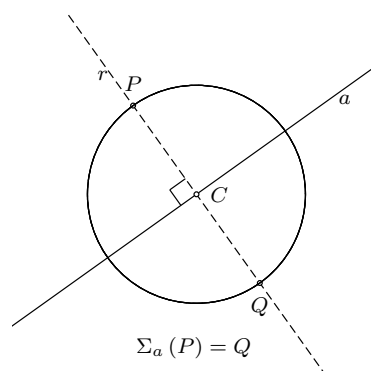
□

Nel capitolo sul parallelismo dimostreremo che i due segmenti sono anche paralleli. In generale, *in una simmetria centrale ad ogni retta corrisponde una retta parallela alla prima.*

Vediamo ora la definizione operativa di simmetria assiale.

**Definizione 12.2.3.** Siano dati una retta  $a$ , detta *asse di simmetria*, ed un punto qualsiasi  $P$  del piano. Si definisce *simmetrico di  $P$  rispetto ad  $a$*  il punto  $Q$  ottenuto come segue:

- 1° si traccia la retta  $r$  perpendicolare ad  $a$  e passante per  $P$
- 2° si individua l'intersezione  $a \cap r = \{C\}$
- 3° si determina il simmetrico  $Q$  di  $P$  rispetto a  $C$ .

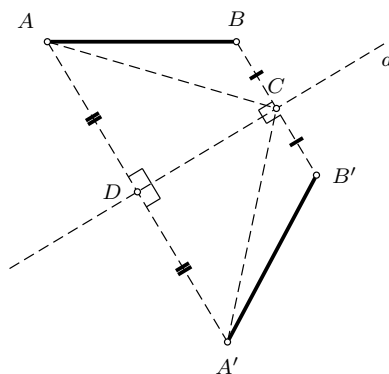


In una simmetria assiale, ogni punto dell'asse di simmetria ha come simmetrico sé stesso.

Le argomentazioni dell'osservazione precedente valgono anche per la simmetria assiale.

Stabiliamo la seguente notazione. In generale, per denotare che la figura geometrica  $G$  è simmetrica della figura  $F$  rispetto all'asse di simmetria  $a$ , si scrive  $\Sigma_a(F) = G$ . È evidente che, in base alla definizione operativa, risulta  $\Sigma_a(G) = F$ , cioè la figura simmetrica di  $G$  rispetto ad  $a$  è la figura  $F$ .

**Teorema 12.2.2.** *La simmetria assiale è un'isometria, cioè il simmetrico di un segmento è un segmento congruente al primo.*



*Hp:*  $AD \cong DA' \wedge BC \cong CB'$

*Th:*  $AB \cong A'B'$

*Dimostrazione.* Costruiamo il simmetrico  $A'B'$  di  $AB$  rispetto all'asse  $a$ . Siano  $C$  e  $D$  i punti d'intersezione rispettivamente con le perpendicolari per  $B$  e  $A$  all'asse. Tracciamo i segmenti  $AC$  e  $A'C$ .



1. Consideriamo i triangoli  $ACD$  e  $A'CD$
2.  $CD$  in comune
3.  $AD \cong DA'$  Hp
4.  $\widehat{ADC} \cong \widehat{A'DC} \cong \frac{\pi}{2}$  Hp
5.  $ACD \cong A'CD$  2., 3., 4., 1° c. c.
6.  $AC \cong A'C$  5., si oppongono ad angoli congruenti
7.  $\widehat{ACD} \cong \widehat{A'CD}$  5., si oppongono a lati congruenti
8. Consideriamo i triangoli  $ACB$  e  $A'CB'$
9.  $BC \cong CB'$  Hp
10.  $\widehat{BCD} \cong \widehat{B'CD} \cong \frac{\pi}{2}$  Hp
11.  $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'CB'}$  10., 7., differenza di angoli congruenti
12.  $ACB \cong A'CB'$  6., 9., 11., 1° c. c.
13.  $AB \cong A'B'$  12., si oppongono ad angoli congruenti

□

**Definizione 12.2.4.** Una figura geometrica  $F$  è dotata di centro di simmetria  $O$  se risulta  $\sigma_O(F) = F$ , cioè la figura simmetrica rispetto ad  $O$  di  $F$  è  $F$  stessa.

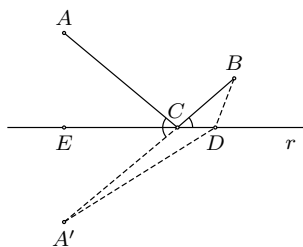
**Definizione 12.2.5.** Una figura geometrica  $F$  è dotata di asse di simmetria  $a$  se risulta  $\Sigma_a(F) = F$ , cioè la figura simmetrica rispetto ad  $a$  di  $F$  è  $F$  stessa.

Vediamo ora un esempio di applicazione della simmetria assiale ponendo il seguente problema, detto problema di Erone.

**Problema 12.2.1.** Determinare il percorso più breve che bisogna compiere per andare da un punto  $A$  ad un punto  $B$  toccando un punto  $C$  di una data retta  $r$  che non contiene  $A$  e  $B$ .

In definitiva bisogna individuare una opportuna condizione (ipotesi) per la quale risulta minima la somma di segmenti  $AC + CB$ . Il problema fu brillantemente risolto intorno al I secolo a.C. dal seguente

**Teorema 12.2.3** (Teorema di Erone). *Siano dati una retta  $r$  e due punti qualunque ad essa esterni  $A$  e  $B$ . Sia  $C$  un punto di  $r$  tale che i segmenti  $AC$  e  $BC$  formino angoli congruenti con la retta  $r$ . Allora la somma di segmenti  $AC + BC$  è minima.*

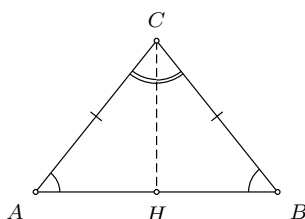


*Dimostrazione.* Con riferimento alla figura precedente, sia  $A' = \Sigma_r(A)$ , allora  $\widehat{ACE} \cong \widehat{A'CE}$  e  $AC \cong A'C$  in quanto la simmetria assiale è un'isometria. Poiché per ipotesi  $\widehat{ACE} \cong \widehat{BCD}$  segue che  $\widehat{A'CE} \cong \widehat{BCD}$  per la proprietà transitiva della relazione di congruenza. Pertanto i punti  $A', C, B$  risultano allineati in quanto  $\widehat{A'CB} \cong \pi$ . Per provare la tesi dimostreremo ora che, considerato un qualunque punto  $D \in r$  distinto da  $C$ , la somma di segmenti  $A'D + DB$  risulta maggiore della somma di segmenti  $A'C + CB \cong A'B$ . Infatti nel triangolo  $A'DB$ , risulta  $A'B < A'D + DB$  per il 1° teorema della disuguaglianza triangolare. □

## 12.3 Ulteriori proprietà dei triangoli isosceli

Ritorniamo ad occuparci dei triangoli isosceli, enunciando proprietà che giustificano diverse costruzioni geometriche.

**Teorema 12.3.1.** *In ogni triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base, la mediana della base e la bisettrice dell'angolo al vertice coincidono.*



*Hp:*  $AC \cong BC \wedge CH \perp AB$

*Th:*  $AH \cong HB \wedge \widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$

*Dimostrazione.* .

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. Consideriamo i triangoli $AHC$ e $BHC$          |   |   |
| 2. $\widehat{AHC} \cong \widehat{BHC} \cong \pi/2$ | Hp  |   |
| 3. $CH$ in comune                                  | figura  |   |
| 4. $AC \cong BC$                                   | Hp  |   |
| 5. $AHC \cong BHC$                                 | 2., 3., 4., criterio di congruenza dei triangoli rettangoli | □ |
| 6. $AH \cong HB$                                   | 5., terzi lati  |   |
| 7. $\widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$             | 5., 6., si oppongono a lati congruenti                      |   |

*Hp:*  $AC \cong BC \wedge AH \cong HB$

*Th:*  $CH \perp AB \wedge \widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$

*Dimostrazione.* .

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| 1. Consideriamo i triangoli $AHC$ e $BHC$    |                                    |
| 2. $AH \cong HB$                             | Hp                                 |
| 3. $CH$ in comune                            | figura                             |
| 4. $AC \cong BC$                             | Hp                                 |
| 5. $AHC \cong BHC$                           | 2., 3., 4., 3° c.c.                |
| 6. $\widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$       | 5., si oppongono a lati congruenti |
| 7. $\widehat{AHC} \cong \widehat{BHC}$       | 5., si oppongono a lati congruenti |
| 8. $\widehat{AHC} + \widehat{BHC} \cong \pi$ | angoli adiacenti                   |

9.  $\widehat{AHC} \cong \widehat{BHC} \cong \pi/2$                       7., 8.  
 10.  $CH \perp AB$                                       9.

□

*Hp:*  $AC \cong BC \wedge \widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$

*Th:*  $CH \perp AB \wedge AH \cong HB$

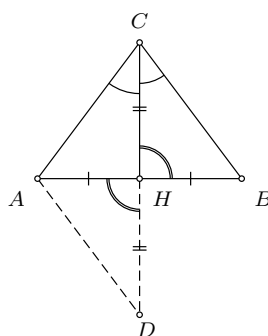
*Dimostrazione.* .

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. Consideriamo i triangoli $AHC$ e $BHC$          |                                       |
| 2. $CH$ in comune                                  | figura                                |
| 3. $AC \cong BC$                                   | Hp                                    |
| 4. $\widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$             | Hp                                    |
| 5. $AHC \cong BHC$                                 | 2., 3., 4., 1° c.c.                   |
| 6. $AH \cong HB$                                   | 5., si oppongono ad angoli congruenti |
| 7. $\widehat{AHC} \cong \widehat{BHC}$             | 5., si oppongono a lati congruenti    |
| 8. $\widehat{AHC} + \widehat{BHC} \cong \pi$       | angoli adiacenti                      |
| 9. $\widehat{AHC} \cong \widehat{BHC} \cong \pi/2$ | 7., 8.                                |
| 10. $CH \perp AB$                                  | 9.                                    |

□

Vale anche il viceversa.

**Teorema 12.3.2.** *Se in un triangolo  $ABC$  l'altezza relativa ad  $AB$  e la mediana di  $AB$  coincidono, oppure l'altezza relativa ad  $AB$  e la bisettrice dell'angolo  $\widehat{C}$  coincidono, oppure la bisettrice dell'angolo  $\widehat{C}$  e la mediana di  $AB$  coincidono, allora il triangolo è isoscele di base  $AB$ .*



*Hp:*  $AH \cong HB \wedge \widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$

*Th:*  $ABC$  triangolo isoscele

*Dimostrazione.* Le dimostrazioni dei primi due asserti sono semplici esercizi, ragion per cui dimostreremo solo il terzo. Costruzione: con riferimento alla figura precedente, prolunghiamo la bisettrice  $CH$ , dalla parte di  $H$ , di un segmento  $HD \cong CH$ , quindi congiungiamo  $A$  con  $D$ .

- |     |  |  |
|-----|--|--|
| 1.  | Consideriamo i triangoli $AHD$ e $BHC$ |  |
| 2.  | $AH \cong HB$                          | Hp                                     |
| 3.  | $CH \cong HD$                          | costruzione                            |
| 4.  | $\widehat{AHD} \cong \widehat{BHC}$    | angoli opposti al vertice              |
| 5.  | $AHD \cong BHC$                        | 2., 3., 4., 1° c.c.                    |
| 6.  | $\widehat{ADH} \cong \widehat{BCH}$    | 5., si oppongono a lati congruenti     |
| 7.  | $BC \cong AD$                          | 5., si oppongono ad angoli congruenti  |
| 8.  | $\widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$    | Hp                                     |
| 9.  | $\widehat{ADH} \cong \widehat{ACH}$    | 6., 8., proprietà transitiva           |
| 10. | $ADC$ triangolo isoscele               | 9., teorema inverso triangoli isosceli |
| 11. | $AC \cong AD$                          | 10., def. triangolo isoscele           |
| 12. | $AC \cong BC$                          | 7., 11., proprietà transitiva          |
| 13. | $ABC$ triangolo isoscele               | 12., def. triangolo isoscele           |

□

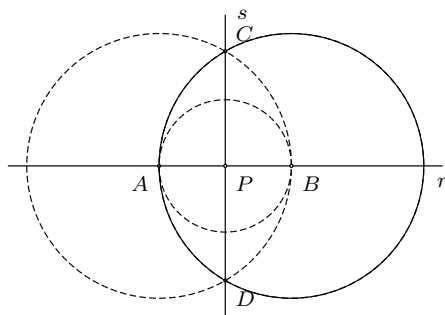
Da queste caratterizzazioni dei triangoli isosceli discende immediatamente che gli unici triangoli dotati di asse di simmetria sono proprio i triangoli isosceli. In particolare, i triangoli equilateri sono dotati di tre assi di simmetria.

## 12.4 Costruzioni con riga e compasso

In questo paragrafo esporremo le procedure operative per effettuare alcune costruzioni con **riga e compasso**. Con la riga sarà consentito solo tracciare linee, ma non effettuare misure.

**Esercizio 12.4.1.** Data la retta  $r$  e dato il punto  $P$ , costruire la retta  $s$  perpendicolare ad  $r$  e passante per  $P$ .

- 1° caso:  $P \in r$ 
  1. Si punta il compasso in  $P$  e con apertura arbitraria si descrive una circonferenza;
  2. si individuano i punti d'intersezione  $A$  e  $B$  della retta  $r$  con la circonferenza;
  3. si punta il compasso in  $A$  e con apertura  $AB$  si descrive una circonferenza;
  4. si punta il compasso in  $B$  e con apertura  $BA$  si descrive una circonferenza;
  5. si individuano i punti d'intersezione  $C$  e  $D$  delle due circonferenze;
  6. si conduce la retta  $CD$ : essa è la retta  $s$  perpendicolare ad  $r$  e passante per  $P$ .



- 2° caso:  $P \notin r$

1. Si punta il compasso in  $P$  e si descrive una circonferenza che incontra la retta  $r$  nei punti  $A$  e  $B$ ;  
si ripetono i passi 3., 4., 5., 6., del caso precedente.

Nel prossimo capitolo studieremo il parallelismo tra rette. Anticipiamo la seguente

**Definizione 12.4.1.** Due rette  $r$  e  $s$  si dicono **parallele** se si verifica una delle seguenti condizioni

$$r = s$$

$$r \cap s = \emptyset$$

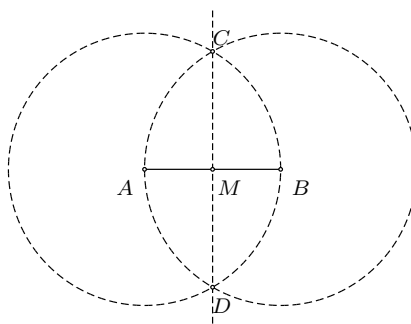
**Esercizio 12.4.2.** Data la retta  $r$  e dato il punto  $P$ , costruire la retta  $s$  parallela ad  $r$  e passante per  $P$ .

- 1° caso:  $P \in r$ . Non si descrive alcuna costruzione in quanto  $s = r$ .
- 2° caso:  $P \notin r$ 
  1. Si costruisce la retta  $t$  perpendicolare ad  $r$  utilizzando la costruzione del problema precedente (2° caso);
  2. si costruisce la retta  $s$  perpendicolare ad  $t$  utilizzando la costruzione del problema precedente (1° caso);  
la retta  $s$  così costruita è parallela alla retta  $r$  di partenza.

Dimostreremo nel capitolo sul parallelismo la proprietà: *due rette perpendicolari ad una stessa retta sono tra loro parallele*, da cui si deduce che *esiste la retta parallela ad una retta data passante per un determinato punto*.

**Esercizio 12.4.3.** Dato il segmento non nullo  $AB$ , costruire il suo punto medio  $M$ .

1. Si punta il compasso in  $A$  con apertura  $AB$  e si descrive una circonferenza;
2. si punta il compasso in  $B$  con apertura  $BA$  e si descrive una circonferenza;
3. siano  $C$  e  $D$  i punti d'intersezione delle due circonferenze;
4. si conduce la retta  $CD$ ;
5. si determina il punto d'intersezione  $M$  tra il segmento  $AB$  e la retta  $CD$ : esso è il punto medio del segmento.



Nella costruzione precedente, la retta  $CD$  è anche asse del segmento  $AB$ . Pertanto è già risolto il seguente

**Esercizio 12.4.4.** Dato il segmento non nullo  $AB$ , costruire il suo asse.

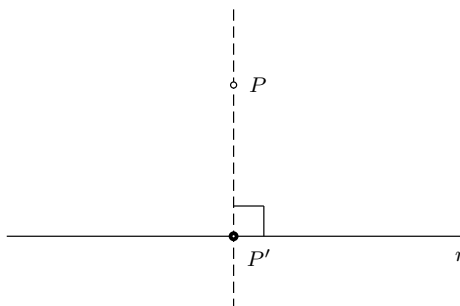
Infine, analizziamo una costruzione che riguarda gli angoli.

**Esercizio 12.4.5.** Dato l'angolo  $a\widehat{V}b$ , costruire la sua bisettrice.

1. Si punta il compasso nel vertice  $V$  e si descrive una circonferenza di raggio arbitrario;
2. si individuano i punti d'intersezione  $A$  e  $B$  della circonferenza rispettivamente con i lati dell'angolo  $a$  e  $b$ ;
3. si conduce il segmento  $AB$ ;
4. si costruisce il punto medio  $M$  del segmento  $AB$ ;
5. si conduce la semiretta  $VM$  di origine  $V$ : essa è la bisettrice dell'angolo  $a\widehat{V}b$ .

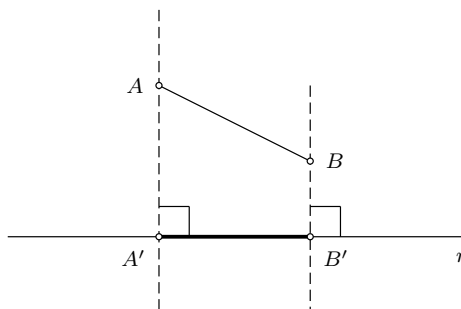
Siamo ora in grado di definire il concetto di proiezione ortogonale.

**Definizione 12.4.2.** Siano assegnati un punto  $P$  ed una retta  $r$ . Si definisce **proiezione ortogonale** di  $P$  su  $r$  il piede della retta perpendicolare ad  $r$  condotta da  $P$ .

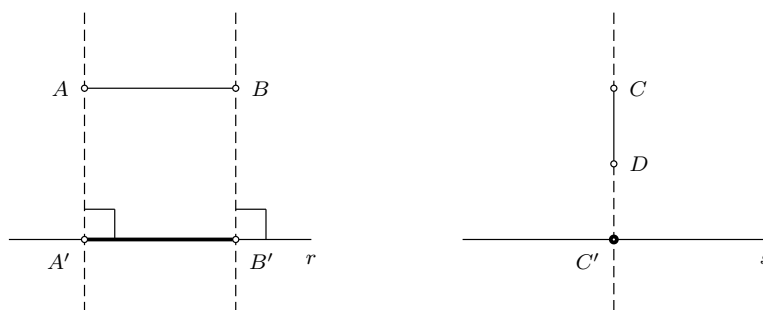


La proiezione ortogonale di un punto è sempre un punto. Se  $P \in r$ , allora la proiezione ortogonale di  $P$  è il punto stesso.

**Definizione 12.4.3.** Siano assegnati un segmento  $AB$  ed una retta  $r$ . Si definisce **proiezione ortogonale** di  $AB$  su  $r$  il segmento contenuto in  $r$  i cui estremi sono i piedi delle rette perpendicolari ad  $r$  condotte da  $A$  e  $B$ .



Se il segmento è tale che il suo sostegno non è incidente la retta, allora la sua proiezione ortogonale è un segmento ad esso congruente. Se il segmento è perpendicolare alla retta, allora la sua proiezione ortogonale è un punto della retta. Se il segmento è contenuto nella retta, allora esso e la sua proiezione coincidono.



## 12.5 Luoghi geometrici

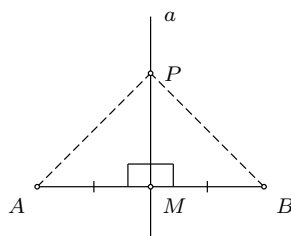
Esistono figure geometriche che si possono descrivere attraverso una proprietà comune a tutti i loro punti.

**Definizione 12.5.1.** Si definisce **luogo geometrico** l'insieme di tutti e soli i punti del piano che soddisfano una data proprietà.

I luoghi geometrici che caratterizzeremo in questo paragrafo sono l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo.

**Teorema 12.5.1.** *Siano  $AB$  un segmento e  $a$  il suo asse. Allora un punto  $P$  è sull'asse  $a$  se, e solo se, è equidistante dagli estremi  $A$  e  $B$  del segmento.*

In altre parole: *l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.*



$\Rightarrow$ )

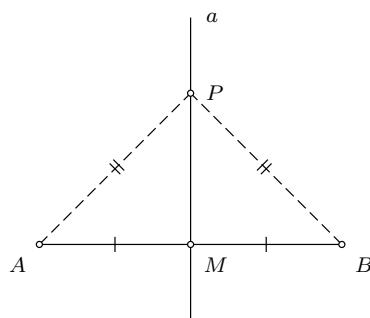
*Hp:*  $a$  asse di  $AB \quad \wedge \quad P \in a$

*Th:*  $PA \cong PB$

*Dimostrazione.* Sia  $M$  il punto medio di  $AB$ .

- |  |  |
|--|--|
| 1. Consideriamo il triangolo $ABP$       |  |
| 2. $PM$ mediana di $AB$                  | <i>Hp</i> , $a$ asse di $AB$                               |
| 3. $PM \perp AB$                         | <i>Hp</i> , $a$ asse di $AB$                               |
| 4. $PM$ altezza relativa ad $AB$         | 3.   |
| 5. $ABP$ triangolo isoscele di base $AB$ | 2., 4., teorema di caratterizzazione<br>triangoli isosceli |
| 6. $PA \cong PB$                         | 5., def. triangolo isoscele                                |

□



$\Leftarrow$ )

*Hp:*  $P \in a \quad \wedge \quad PA \cong PB$

*Th:*  $a$  asse di  $AB$

*Dimostrazione.* Sia  $M$  il punto medio di  $AB$ .

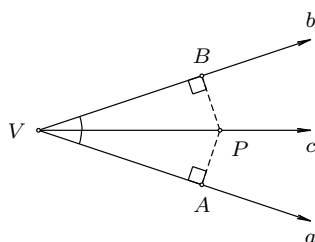


- |  |  |
|--|--|
| 1. Consideriamo il triangolo $ABP$       |  |
| 2. $PA \cong PB$                         | Hp   |
| 3. $ABP$ triangolo isoscele di base $AB$ | 2., def. triangolo isoscele                          |
| 4. $PM$ mediana di $AB$                  | $M$ punto medio di $AB$                              |
| 5. $PM$ altezza relativa ad $AB$         | 3., 4., teorema caratterizzazione triangoli isosceli |
| 6. $PM \perp AB$                         | Hp, 5.   |
| 7. $a$ asse di $AB$                      | 4., 6., def. di asse di un segmento                  |

□

**Teorema 12.5.2.** Siano  $a\widehat{V}b$  un angolo e  $c$  la sua bisettrice. Allora un punto  $P$  è sulla bisettrice  $c$  se, e solo se esso è equidistante dai lati  $a$  e  $b$  dell'angolo.

In altre parole: la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.



$\implies$ )

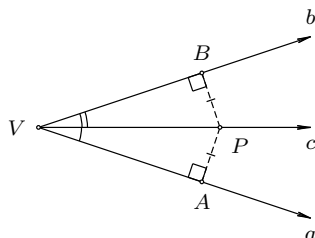
Hp:  $c$  bisettrice di  $a\widehat{V}b \quad \wedge \quad P \in c$

Th:  $P$  equidistante da  $a$  e  $b$

*Dimostrazione.* Costruzione: Da  $P \in c$  conduciamo le perpendicoari ai lati  $a$  e  $b$  dell'angolo rispettivamente in  $A$  e in  $B$ .

- |  |   |
|--|---|
| 1. Consideriamo i triangoli $AVP$ e $BVP$                  |   |
| 2. $\widehat{BVP} \cong \widehat{AVP} \cong \frac{\pi}{2}$ | costruzione   |
| 3. $AVP$ e $BVP$ triangoli rettangoli                      | 2., def. triangolo rettangolo                           |
| 4. $VP$ in comune  | figura  |
| 5. $\widehat{AVP} \cong \widehat{BVP}$                     | Hp, $c$ bisettrice di $A\widehat{V}B$                   |
| 6. $AVP \cong BVP$   | 3., 4., 5., criterio di congruenza triangoli rettangoli |
| 7. $AP \cong BP$   | 6., si oppongono ad angoli congruenti                   |
| 8. $P$ equidistante da $a$ e $b$                           | 7.  |

□



$\Leftarrow$ )

*Hp:*  $P \in c$  equidistante da  $a$  e  $b$

*Th:*  $c$  bisettrice di  $\widehat{a}b$

*Dimostrazione.* Costruzione: identica alla prima parte della dimostrazione.

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 1. | Consideriamo i triangoli $AVP$ e $BVP$                  |   |
| 2. | $\widehat{VBP} \cong \widehat{VAP} \cong \frac{\pi}{2}$ | costruzione   |
| 3. | $AVP$ e $BVP$ triangoli rettangoli                      | 2., def. triangolo rettangolo                           |
| 4. | $AP \cong BP$   | <i>Hp</i>   |
| 5. | $VP$ in comune  | figura  |
| 6. | $AVP \cong BVP$   | 3., 4., 5., criterio di congruenza triangoli rettangoli |
| 7. | $\widehat{AVP} \cong \widehat{BVP}$                     | 6., si oppongono a lati congruenti                      |
| 8. | $c$ bisettrice di $\widehat{AVP}$                       | 7., def. bisettrice di un angolo                        |

□

### Esercizi

1. Dimostrare che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.
2. Sia  $ABC$  un triangolo qualunque e sia  $CH$  l'altezza relativa ad  $AB$ . Si prolunghi l'altezza  $CH$ , dalla parte di  $H$ , di un segmento  $HD \cong CH$  e si congiunga  $D$  con  $A$  e  $B$ . Dimostrare che i triangoli  $ADC$  e  $DBC$  sono isosceli.
3. In un triangolo equilatero le tre mediane sono congruenti.
4. Dimostrare che in un triangolo isoscele le mediane relative ai lati congruenti sono congruenti.
5. Sia  $ABC$  un triangolo isoscele di base  $AB$ . Prolunghiamo il lato  $AC$ , dalla parte di  $C$ , di un segmento  $CD \cong AC$ , quindi congiungiamo  $D$  con  $B$ . Sia, ora,  $M$  il punto medio del segmento  $BD$ . dimostrare che  $CM \perp BD$ .
6. Sia  $ABC$  un triangolo isoscele di vertice  $C$ . Si consideri l'angolo esterno relativo all'angolo interno  $\widehat{C}$  e si dimostri che la sua bisettrice è perpendicolare all'altezza relativa alla base  $AB$ .
7. Dimostrare che in triangolo equilatero le bisettrici degli angoli interni coincidono con le mediane e le altezze.
8. Dal punto  $P$  della bisettrice dell'angolo  $\widehat{aOb}$  condurre due semirette che formano angoli congruenti con la bisettrice, in semipiani opposti rispetto ad essa. La prima semiretta incontra il lato  $a$  in  $A$  mentre la seconda incontra il lato  $b$  in  $B$ . Dimostrare che la bisettrice  $OP$  è asse del segmento  $AB$ .
9. Sui lati  $a$  e  $b$  dell'angolo convesso  $\widehat{aOb}$  si scelgano rispettivamente due punti  $A$  e  $B$  tali che  $OA \cong OB$ . Da  $A$  si conduca il segmento perpendicolare a  $b$  in  $C$ , e da  $B$  il segmento perpendicolare ad  $a$  in  $D$ . I segmenti  $AC$  e  $BD$  s'incontrano in  $E$ . Dimostrare che  $OE$  è bisettrice dell'angolo  $\widehat{aOb}$ .

10. Dimostrare che un triangolo è isoscele se, e solo se, è dotato almeno di un asse di simmetria. In particolare, dimostrare che un triangolo è equilatero se, e solo se, è dotato di tre assi di simmetria.
11. Sia  $ABC$  un triangolo qualunque e sia  $CH$  l'altezza relativa ad  $AB$ . Si prolunghi l'altezza  $CH$ , dalla parte di  $H$ , di un segmento  $HD \cong CH$  e si congiunga  $D$  con  $A$  e  $B$ . Dimostrare che il quadrilatero  $ADBC$  è dotato di asse di simmetria.
12. Dimostrare che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un cateto e l'ipotenusa.
13. Di tre segmenti congruenti uscenti da uno stesso punto due hanno lo stesso sostegno; dimostrare che i loro estremi sono vertici di un triangolo rettangolo.
14. Dimostrare che in un triangolo isoscele una retta perpendicolare alla base incontra uno dei lati congruenti e il prolungamento dell'altro in due punti equidistanti dal vertice.
15. Presi sui lati di un angolo di vertice  $O$  due segmenti congruenti  $OA$  e  $OB$ , si conducano per  $A$  e per  $B$  le perpendicolari ai lati; dimostrare che esse s'incontrano sulla bisettrice dell'angolo.
16. Dimostrare che ogni retta, perpendicolare alla bisettrice di un angolo, ne incontra i lati in due punti che, insieme al vertice dell'angolo dato, individuano un triangolo isoscele.
17. Nel triangolo isoscele  $ABC$  si conducano le perpendicolari ai lati congruenti  $AB$  e  $AC$  nei punti medi, fino ad incontrare la retta della base  $BC$ . Dimostrare che i segmenti di perpendicolare ottenuti sono congruenti.
18. Dimostrare che due triangoli isosceli aventi congruenti gli angoli al vertice e le relative bisettrici sono congruenti.

# Capitolo 13

## Parallelismo

In questa sezione studieremo uno dei concetti più affascinanti e controversi della geometria: il parallelismo. Esso ci introduce allo studio di figure geometriche di grande interesse come ad esempio i quadrilateri notevoli.

### 13.1 Definizioni e Postulato delle parallele

**Definizione 13.1.1.** Due rette  $r$  e  $s$  si dicono *parallele* se si verifica una delle seguenti condizioni

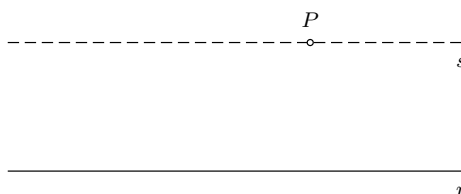
$$\begin{aligned}r &= s \\ r \cap s &= \emptyset\end{aligned}$$

Se  $r$  e  $s$  sono parallele, allora si scrive  $r \parallel s$ .

*Osservazione.* Dalla definizione si intuisce che due rette parallele o sono coincidenti, oppure non hanno alcun punto in comune.

Euclide introdusse nei suoi *Elementi* un postulato alquanto misterioso e tutt'altro che ovvio. Esso verrà enunciato nella sua forma originale nel paragrafo sui criteri di parallelismo; è noto come **V postulato di Euclide** in quanto negli *Elementi* appariva come il quinto postulato in ordine cronologico. Nel XVIII secolo il fisico e matematico scozzese John Playfair introdusse un postulato meno enigmatico e più intuitivo rispetto al V postulato di Euclide, che da allora in poi è stato assunto come equivalente al postulato di Euclide, anche se, in effetti, esprime una proprietà più forte, cioè lo implica ma non vale il viceversa. Esso è denominato **postulato delle parallele** o **postulato di Playfair**.

**Postulato 16** (Postulato delle parallele). *Siano  $r$  una retta e  $P$  un punto esterno ad essa; allora è unica la retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per il punto  $P$ .*



Il postulato di Playfair esprime unicità: ogni altra retta passante per  $P$  sarà incidente la retta  $r$ .  
Il seguente teorema esprime le proprietà della relazione di parallelismo tra rette.

**Teorema 13.1.1** (Proprietà del parallelismo). *La relazione di parallelismo tra rette gode delle seguenti proprietà:*

$R)$ $r \parallel r$	<i>proprietà riflessiva</i>
$S)$ $r \parallel s \iff s \parallel r$	<i>proprietà simmetrica</i>
$T)$ $(r \parallel s \wedge s \parallel t) \implies r \parallel t$	<i>proprietà transitiva</i>

*Dimostrazione.* R) La proprietà riflessiva discende direttamente dalla definizione di rette parallele, vale a dire: una retta è parallela a sé stessa.

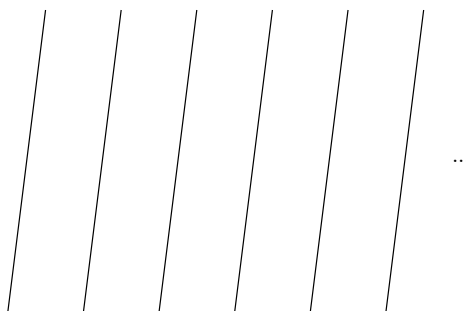
S) Supponiamo che le due rette siano distinte. Allora

$$r \parallel s \iff r \cap s = \emptyset \iff s \cap r = \emptyset \iff s \parallel r$$

in quanto l'intersezione tra insiemi gode della proprietà commutativa.

T) Supponiamo che le tre rette siano distinte. Per assurdo, sia  $r \cap t = \{P\}$ ; allora risulta sia  $P \in r$  che  $P \in t$ . Pertanto per il punto  $P$  esterno alla retta  $s$  passano due rette distinte  $r$  e  $t$  parallele ad essa, in contraddizione con il postulato delle parallele. Si conclude che  $r \cap t = \emptyset$ , e quindi  $r \parallel s$ .  $\square$

**Definizione 13.1.2.** Si definisce **fascio improprio di rette** l'insieme di tutte le rette parallele tra loro.

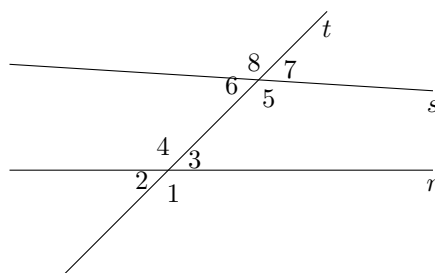


É possibile estendere la nozione di parallelismo a semirette e segmenti, con la dovuta attenzione.

**Definizione 13.1.3.** Due semirette si dicono parallele se le rette sostegno sono parallele. Due segmenti si dicono paralleli se le rette sostegno sono parallele.

## 13.2 Criteri di parallelismo

In questo paragrafo vogliamo studiare le figure che vengono a determinarsi quando consideriamo una coppia di rette qualsiasi  $r$  ed  $s$  che incontrano entrambe una terza retta  $t$ . Si parla di *coppie di rette tagliate da una trasversale*. Come è facile immaginare, tali rette individuano una serie di angoli i cui vertici sono i punti d'intersezione della trasversale con ciascuna delle altre due rette. Tali angoli, a coppie, assumono una precisa denominazione. Osserviamo attentamente la seguente figura.

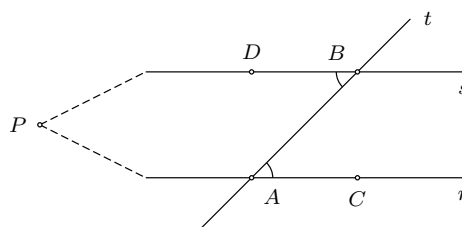


**Definizione 13.2.1.** Siano date le rette  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$  come in figura. Esse individuano otto angoli che, a coppie, vengono denominati come segue (tra parentesi gli acronimi relativi):

1. le coppie di angoli  $(3, 6)$  e  $(4, 5)$  si dicono **angoli alterni interni (a.a.i.)**;
2. le coppie di angoli  $(1, 8)$  e  $(2, 7)$  si dicono **angoli alterni esterni (a.a.e.)**;
3. le coppie di angoli  $(3, 5)$  e  $(4, 6)$  si dicono **angoli coniugati interni (a.c.i.)**;
4. le coppie di angoli  $(1, 7)$  e  $(2, 8)$  si dicono **angoli coniugati esterni (a.c.e.)**;
5. le coppie di angoli  $(1, 5)$ ,  $(3, 7)$ ,  $(2, 6)$  e  $(4, 8)$  si dicono **angoli corrispondenti (a.c.)**.

Il nostro studio ora si concentra sull'analisi del seguente problema. Considerate due rette  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$  ci chiediamo quali sono le condizioni sulle coppie di angoli della definizione 1.4. affinché  $r$  ed  $s$  siano parallele, e viceversa. La risposta a tale quesito risiede nei seguenti teoremi.

**Teorema 13.2.1** (Teorema fondamentale). *Siano date due rette  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ . Se coppie di angoli alterni interni sono congruenti, allora le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele.*



$$H_p: \widehat{BAC} \cong \widehat{ABD}$$

$$Th: r \parallel s$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema per assurdo.

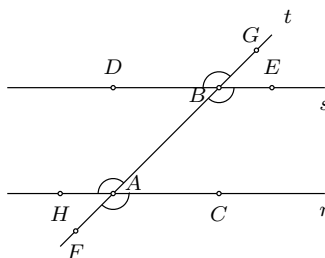
1. Per assurdo  $r \cap s = \{P\}$
2. Consideriamo il triangolo  $ABP$

- |    |                                     |                           |
|----|-------------------------------------|---------------------------|
| 3. | $\widehat{BAC} \cong \widehat{ABD}$ | Hp                        |
| 4. | $\widehat{BAC} > \widehat{ABD}$     | 1° teorema angolo esterno |
| 5. | Contraddizione                      | 3., 4.                    |
| 6. | $r \parallel s$                     | 5.                        |

□

Dal teorema fondamentale seguono immediatamente i seguenti teoremi.

**Corollario 13.2.1.** *Siano date due rette  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ . Se coppie di angoli alterni esterni sono congruenti, allora le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele.*



$$\text{Hp: } \widehat{FAC} \cong \widehat{DBG}$$

$$\text{Th: } r \parallel s$$

*Dimostrazione.* .

- |    |                                     |                                 |
|----|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1. | $\widehat{FAC} \cong \widehat{DBG}$ | Hp                              |
| 2. | $\widehat{FAC} \cong \widehat{HAB}$ | angoli opposti al vertice       |
| 3. | $\widehat{DBG} \cong \widehat{EBA}$ | angoli opposti al vertice       |
| 4. | $\widehat{HAB} \cong \widehat{EBA}$ | 2., 3., transitività congruenza |
| 5. | $r \parallel s$                     | 4., teorema fondamentale        |

□

**Corollario 13.2.2.** *Siano date due rette  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ . Se coppie di angoli coniugati interni (rispettivamente esterni) sono supplementari, allora le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele.*

$$\text{Hp: } \widehat{CAB} + \widehat{ABE} \cong \pi$$

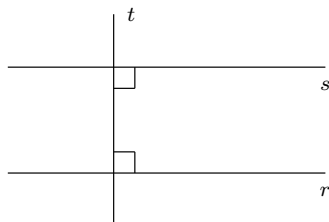
$$\text{Th: } r \parallel s$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema utilizzando come ipotesi solo una coppia di angoli coniugati interni, riferendoci alla figura precedente.

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 1. | $\widehat{CAB} + \widehat{ABE} \cong \pi$ | Hp                                      |
| 2. | $\widehat{HAB} + \widehat{CAB} \cong \pi$ | angoli adiacenti                        |
| 4. | $\widehat{HAB} \cong \widehat{EBA}$       | 1., 2., differenza di angoli congruenti |
| 5. | $r \parallel s$                           | 4., teorema fondamentale                |

□

**Corollario 13.2.3.** *Se le rette  $r$  ed  $s$  sono entrambe perpendicolari ad una retta  $t$ , allora esse sono parallele.*



*Dimostrazione.* Gli angoli coniugati interni formati dalle rette  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$  sono entrambi retti, quindi supplementari. □

Enunciamo, ora, la versione originale del V postulato di Euclide.

**Postulato 17** (V postulato di Euclide). *Se due rette  $r$  ed  $s$  formano con una trasversale  $t$  angoli coniugati interni non supplementari, allora esse s'incontrano nel semipiano di origine  $t$  che contiene gli angoli coniugati interni la cui somma è minore di un angolo piatto.*

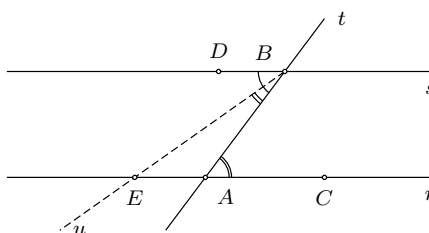
Per circa duemila anni si è pensato che tale proprietà si potesse dedurre dagli altri postulati, ma a cavallo dei secoli XVIII e XIX si è finalmente provato che il postulato delle parallele è indipendente dagli altri assiomi. Si possono, però, costruire geometrie in cui questo postulato non vale, o per quanto attiene l'esistenza della retta parallela  $s$  o per la sua unicità. Queste geometrie vengono denominate **geometrie non-euclidee**. Di contro, la geometria che studiate in questo corso, per cui vale il postulato di Playfair, e quindi il V postulato di Euclide, è denominata **geometria euclidea**.

**Corollario 13.2.4.** *Siano date due rette  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ . Se coppie di angoli corrispondenti sono congruenti, allora le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele.*

La dimostrazione è un semplice esercizio.

Il fatto notevole è che vale il viceversa delle proposizioni precedentemente dimostrate.

**Teorema 13.2.2** (Teorema inverso del fondamentale). *Siano date due rette parallele  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ ; allora coppie di angoli alterni interni sono congruenti.*



*Hp:*  $r \parallel s$

*Th:*  $\widehat{BAC} \cong \widehat{ABD}$



*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo di negare la tesi, per cui possiamo pensare  $\widehat{BAC} < \widehat{ABD}$ . Si conduca per  $B$  la semiretta  $u$  in modo che  $\widehat{BAC} \cong \widehat{EBA}$ . In virtù del postulato delle parallele la semiretta  $u$  non può essere parallela a  $r$ , per cui sia  $E$  il punto d'intersezione tra  $r$  e  $u$ . Considerato il triangolo  $ABE$ , risulta che  $\widehat{BAC}$  è un suo angolo esterno. La condizione  $\widehat{BAC} \cong \widehat{EBA}$  contraddice il 1° teorema dell'angolo esterno. Conclusione:  $\widehat{BAC} \cong \widehat{ABD}$ .  $\square$

**Corollario 13.2.5.** *Siano date due rette parallele  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ ; allora coppie di angoli alterni esterni sono congruenti.*

**Corollario 13.2.6.** *Siano date due rette parallele  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ ; allora coppie di angoli coniugati interni ed esterni sono supplementari.*

**Corollario 13.2.7.** *Siano date due rette parallele  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ ; allora coppie di angoli corrispondenti sono congruenti.*

Le dimostrazioni dei corollari sono semplici esercizi.

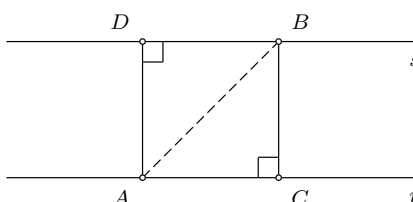
Possiamo riassumere le proprietà viste nel modo seguente.

**Teorema 13.2.3** (Criteri di parallelismo). *Siano date due rette  $r$  ed  $s$  tagliate dalla trasversale  $t$ ; allora  $r \parallel s$  se, e solo se, si verifica una delle seguenti condizioni*

1. coppie di angoli alterni interni sono congruenti;
2. coppie di angoli alterni esterni sono congruenti;
3. coppie di angoli coniugati interni ed esterni sono supplementari;
4. coppie di angoli corrispondenti sono congruenti.

**Teorema 13.2.4.** *Siano date due rette parallele  $r$  ed  $s$ . Allora tutti i segmenti aventi estremi sulle rette e ad esse perpendicolari sono congruenti.*

In altre parole, due rette parallele hanno tra loro distanza costante.



*Hp:*  $r \parallel s, \quad AD \perp r, s \quad BC \perp r, s$

*Th:*  $AD \cong BC$

*Dimostrazione.* Con riferimento alla figura precedente

1. Conduciamo il segmento  $AB$

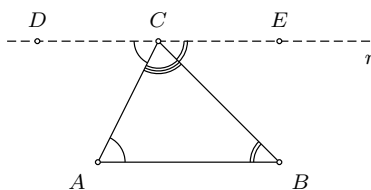
2. Consideriamo i triangoli  $ABC$  e  $ABD$
3.  $r \parallel s$  Hp
4.  $AD \perp r, s \quad BC \perp r, s$  Hp
5.  $ABC$  e  $ABD$  triangoli rettangoli 4.
6.  $AB$  in comune
7.  $\widehat{CAB} \cong \widehat{DBA}$  a.a.i. formati da  $r \parallel s$  e  $AB$
8.  $ABC \cong ABD$  5., 6., 7., 2° c.c.g.
9.  $AD \cong BC$  8., si oppongono ad angoli congruenti

□

### 13.3 Teorema degli angoli interni di un triangolo

Vedremo in questo paragrafo diverse applicazioni importanti dei criteri di parallelismo. Cominciamo subito con uno dei più noti teoremi sui triangoli.

**Teorema 13.3.1.** *In ogni triangolo, la somma degli angoli interni è congruente ad un angolo piatto.*



Hp:  $ABC$  triangolo qualunque

Th:  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} \cong \pi$

*Dimostrazione.* Conduciamo per  $C$  la retta  $r$  parallela al lato  $AB$ , che per il V postulato di Euclide è unica.

1.  $AB \parallel r$  costruzione
2.  $\widehat{BAC} \cong \widehat{DCA}$  a.a.i. formati da  $AB \parallel r$  e  $AC$
3.  $\widehat{ABC} \cong \widehat{ECB}$  a.a.i. formati da  $AB \parallel r$  e  $BC$
4.  $\widehat{DCA} + \widehat{ECB} + \widehat{ACB} \cong \pi$  figura
5.  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} \cong \pi$  2., 3., 4.

□

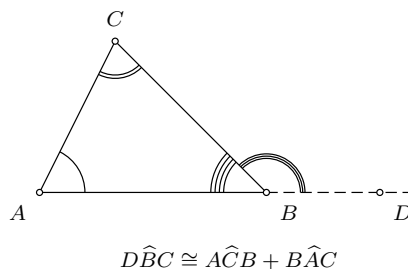
Pertanto, la conoscenza di due angoli di un triangolo individua univocamente il terzo angolo.

Conseguenze immediate sono i seguenti corollari. Il primo corollario è il secondo criterio di congruenza generalizzato che abbiamo già dimostrato in un precedente capitolo.

**Corollario 13.3.1** (Secondo criterio di congruenza generalizzato). *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli e un lato qualunque, allora essi sono congruenti.*

*Dimostrazione.* In base al teorema degli angoli interni si può applicare il secondo criterio di congruenza.  $\square$

**Corollario 13.3.2** (Secondo teorema dell'angolo esterno). *In ogni triangolo, ciascun angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti.*



*Hp:*  $D\hat{B}C$  angolo esterno triangolo  $ABC$

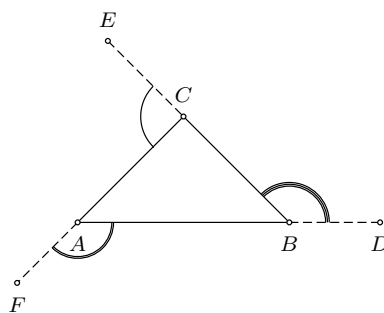
*Th:*  $D\hat{B}C \cong A\hat{C}B + B\hat{A}C$

*Dimostrazione.* Prolunghiamo il lato  $AB$  dalla parte di  $B$ .

1.  $D\hat{B}C + A\hat{B}C \cong \pi$  angoli adiacenti
2.  $A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C \cong \pi$  teorema degli angoli interni
3.  $D\hat{B}C \cong A\hat{C}B + B\hat{A}C$  1., 2., differenza di angoli congruenti

$\square$

**Corollario 13.3.3.** *In ogni triangolo, la somma degli angoli esterni è congruente a due angoli piatti.*



*Hp:*  $D\hat{B}C, A\hat{C}E, B\hat{A}F$  angoli esterni triangolo  $ABC$

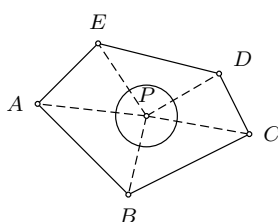
*Th:*  $D\hat{B}C + A\hat{C}E + B\hat{A}F \cong 2\pi$

*Dimostrazione.* Prolunghiamo i lati  $AB$ , dalla parte di  $B$ ,  $BC$ , dalla parte di  $C$ ,  $CA$ , dalla parte di  $A$ .

- |    |  |   |
|----|--|---|
| 1. | $\widehat{DBC} + \widehat{ABC} \cong \pi$  | angoli adiacenti                        |
| 2. | $\widehat{ACE} + \widehat{ACB} \cong \pi$  | angoli adiacenti                        |
| 3. | $\widehat{BAF} + \widehat{CAB} \cong \pi$  | angoli adiacenti                        |
| 4. | $\widehat{DBC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACE} + \widehat{ACB} + \widehat{BAF} + \widehat{CAB} \cong 3\pi$ | 1., 2., 3., somma membro a membro       |
| 5. | $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{CAB} \cong \pi$  | teorema degli angoli interni            |
| 6. | $\widehat{DBC} + \widehat{ACE} + \widehat{BAF} \cong 2\pi$   | 4., 5., differenza di angoli congruenti |

□

**Teorema 13.3.2.** *La somma degli angoli interni di un poligono convesso di  $n$  lati è congruente a  $n - 2$  angoli piatti.*



*Hp:*  $ABCDE\dots$  poligono convesso di  $n$  lati

*Th:*  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \dots \cong (n - 2)\pi$

*Dimostrazione.* La figura precedente rappresenta un pentagono per fissare le idee, noi ragioniamo pensando che esso abbia  $n$  lati, con  $n > 3$ . Conguiamo il punto interno  $P$  con i vertici del poligono, si vengono a determinare  $n$  triangoli. La somma degli angoli interni di tutti i triangoli è congruente a  $n\pi$ ; per ottenere la somma degli angoli interni del poligono dobbiamo sottrarre alla somma precedente l'angolo giro di vertice  $P$ . Si ottiene, pertanto,  $n\pi - 2\pi$ , da cui la tesi.

□

Applicando il teorema precedente, si ottiene che la somma degli angoli interni di un qualunque quadrilatero è congruente a  $(4 - 2)\pi \cong 2\pi$ , mentre per un ottagono convesso  $(8 - 2)\pi \cong 6\pi$ .

**Corollario 13.3.4.** *La somma degli angoli esterni di un qualunque poligono convesso è congruente a due angoli piatti.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

### Esercizi

1. Dimostrare che in triangolo rettangolo gli angoli diversi dall'angolo retto sono acuti. Dimostrare, inoltre, che non può esistere un triangolo rettangolo equilatero.
2. Due rette parallele formano con una trasversale due angoli coniugati interni che sono l'uno doppio dell'altro; a quale frazione dell'angolo retto equivale ciascuno degli angoli?

3. Sia  $ABC$  un triangolo e sia  $CH$  la bisettrice dell'angolo  $\widehat{C}$ . Da un punto  $D \neq H$  del lato  $AB$  si conduca la retta  $r$  parallela alla bisettrice  $CH$ . Si dimostri che la retta  $r$  interseca le rette  $AC$  e  $BC$  in due punti che hanno la stessa distanza dal vertice  $C$ .
4. Dato il triangolo  $ABC$ , sia  $P$  il punto d'intersezione delle bisettrici degli angoli  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$ . Condurre per  $P$  la retta parallela al lato  $AB$ , che incontra i lati  $AC$  e  $BC$  nei punti  $E$  ed  $F$  rispettivamente. Dimostrare che  $EF \cong AE + BF$ .
5. Due segmenti  $AB$  e  $CD$  hanno il punto medio  $M$  in comune. Dimostrare che le rette  $AC$  e  $BD$  sono parallele.
6. Dagli estremi di un segmento  $AB$ , nello stesso semipiano rispetto alla retta  $AB$ , condurre due segmenti  $AC$  e  $BD$  paralleli. Dimostrare che, se  $CD \parallel AB$ , allora  $AC \cong BD$ .
7. Sia  $ABC$  un triangolo equilatero e sia  $r$  la retta bisettrice degli angoli esterni di vertice  $A$ . Dimostrare che  $r \parallel BC$ .
8. In un triangolo isoscele  $ABC$  di base  $AB$ , siano  $M$  e  $N$  rispettivamente i punti medi di  $AC$  e  $BC$ . Dimostrare che  $MN \parallel AB$ .
9. Dimostrare che, in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa lo divide in due triangoli che hanno tra loro e col triangolo di partenza gli angoli ordinatamente congruenti.
10. Sulle rette parallele  $r$  e  $s$  scegliere rispettivamente due segmenti congruenti  $AB$  e  $CD$ , congiungere  $A$  con  $C$  e  $B$  con  $D$ . Provare che i segmenti  $AC$  e  $BD$  sono sia paralleli che congruenti.
11. Sia  $ABC$  un triangolo isoscele di base  $AB$ . Dimostrare che la bisettrice dell'angolo esterno di vertice  $C$  è parallela alla base  $AB$ .
12. Preso un punto  $P$  sulla bisettrice di un angolo  $\widehat{AOB}$ , si conducano per  $P$  le parallele ai lati  $OA$  e  $OB$  fino ad incontrare in  $C$  e  $D$  rispettivamente i lati  $OB$  e  $OA$ . Dimostrare che i segmenti  $OC, OD, PC, PD$  sono congruenti.
13. Dal vertice di un angolo si conduca una semiretta perpendicolare alla sua bisettrice, dimostrare che essa è a sua volta bisettrice di uno degli angoli adiacenti all'angolo dato.
14. Dimostrare che, se la bisettrice d'un angolo esterno di un triangolo risulta parallela al lato opposto, il triangolo è isoscele con base canonica questo lato.
15. Nel triangolo  $ABC$  si conducano le bisettrici degli angoli  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  e sia  $D$  il loro punto d'incontro; da  $D$  si mandi poi la parallela a  $BC$  fino ad incontrare i lati  $AC$  e  $AB$  nei punti  $N$  e  $M$  rispettivamente; dimostrare che  $BM + CN \cong MN$ .

# Capitolo 14

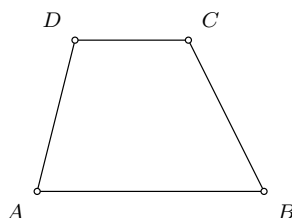
## Quadrilateri notevoli

In questa sezione affronteremo lo studio dei trapezi e dei parallelogrammi. Le proprietà di tali figure, note come *quadrilateri notevoli*, si deducono facilmente applicando i criteri di parallelismo studiati nel capitolo precedente.

In particolare studieremo i parallelogrammi speciali, vale a dire rombo, rettangolo e quadrato. Classificheremo i parallelogrammi in base alla cosiddetta *gerarchia dei parallelogrammi*, procedendo dal generale al particolare nello spirito del sistema ipotetico-deduttivo.

### 14.1 Il trapezio

**Definizione 14.1.1.** Si definisce trapezio ogni quadrilatero avente due soli lati opposti paralleli. I due lati paralleli si dicono rispettivamente base minore e base maggiore, gli altri due si dicono lati obliqui.



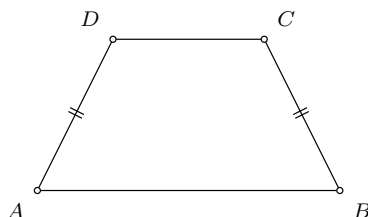
**Teorema 14.1.1.** *In ogni trapezio, gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono supplementari.*

*Dimostrazione.* Semplice esercizio

□

Come per i triangoli, esistono trapezi speciali, i quali hanno proprietà più interessanti dei trapezi generali.

**Definizione 14.1.2.** Un trapezio si dice **isoscele** se ha i lati obliqui congruenti.

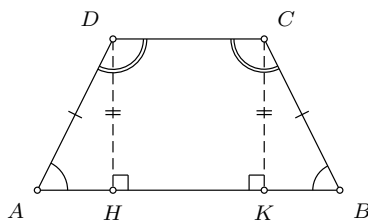


Le proprietà sugli angoli interni che enunceremo ricordano quelle relative ad un triangolo isoscele, con le ovvie differenze determinate dalla diversa forma geometrica.

**Teorema 14.1.2.** *In ogni trapezio isoscele, gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.*

*Hp:*  $AB \parallel CD$   $AD \cong BC$

*Th:*  $\widehat{DAB} \cong \widehat{ABC}$   $\widehat{ADC} \cong \widehat{BCD}$



*Dimostrazione.* Costruzione: si conduca da  $D$  il segmento  $DH \perp AB$  e da  $C$  il segmento  $CK \perp AB$ .

1. Consideriamo  $AHD$  e  $CKB$
2.  $AD \cong BC$
3.  $DH \cong CK$

Hp

costruzione, distanza tra rette parallele costante

4.  $\widehat{AHD} \cong \widehat{BKC} \cong \frac{\pi}{2}$
5.  $AHD \cong CKB$
6.  $\widehat{DAB} \cong \widehat{ABC}$
7.  $\widehat{DAB} + \widehat{ADC} \cong \pi$
8.  $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} \cong \pi$
9.  $\widehat{ADC} \cong \widehat{BCD}$

costruzione

2., 3., 4., c.c. triangoli rettangoli

5., si oppongono a lati congruenti

Hp, adiacenti ad  $AD$

Hp, adiacenti a  $BC$

6., 7., 8., supplementari di angoli congruenti

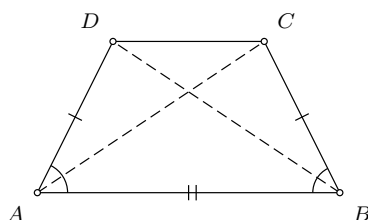
□

Dal precedente teorema si deduce il seguente

**Corollario 14.1.1.** *In ogni trapezio isoscele, le diagonali sono congruenti.*

*Hp:*  $AB \parallel CD$   $AD \cong BC$

*Th:*  $AC \cong BD$



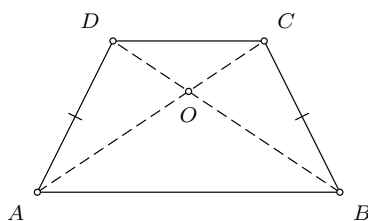
*Dimostrazione.* Tracciamo le diagonali  $AC$  e  $BD$ .

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. Consideriamo $ABD$ e $ABC$          |                                       |
| 2. $AB$ in comune                      | figura                                |
| 3. $AD \cong BC$                       | Hp                                    |
| 4. $\widehat{DAB} \cong \widehat{ABC}$ | Hp, angoli alla base maggiore         |
| 5. $ABD \cong ABC$                     | 2., 3., 4., 1° c.c.                   |
| 6. $AC \cong BD$                       | 5., si oppongono ad angoli congruenti |

□

Le diagonali incontrandosi, supponiamo nel punto  $O$ , dividono il trapezio in quattro triangoli, a due a due opposti rispetto ad  $O$ , che soddisfano le seguenti proprietà.

**Teorema 14.1.3.** *Le diagonali di un trapezio isoscele, incontrandosi nel punto  $O$ , lo dividono in quattro triangoli, dei quali due triangoli sono isosceli e aventi gli angoli ordinatamente congruenti, mentre gli altri due triangoli sono congruenti.*



Più precisamente, osservando la figura, i triangoli  $AOB$  e  $COD$  sono isosceli e hanno gli angoli ordinatamente congruenti, mentre i triangoli  $AOD$  e  $BOC$  sono congruenti.

*Dimostrazione.* Lasciata come esercizio.

□

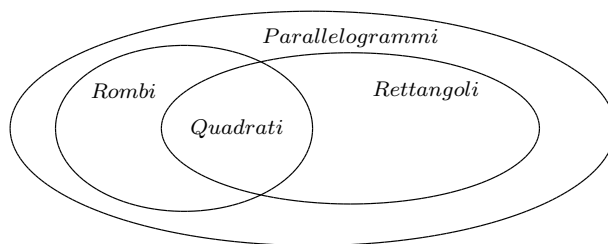
Con riferimento all'ultima figura, s'intuisce che un trapezio isoscele non è dotato di centro di simmetria, perché, in caso contrario, il punto  $O$  sarebbe punto medio di entrambe le diagonali. Però ci chiediamo se esso non sia dotato di asse di simmetria.



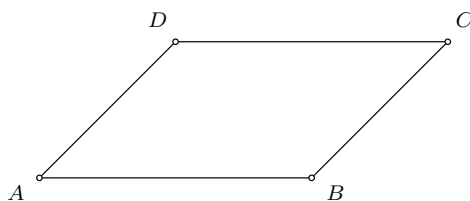
**Teorema 14.1.4.** *In ogni trapezio isoscele, l'asse comune delle due basi è asse di simmetria del trapezio. Tale asse passa per il punto d'intersezione delle diagonali.*

## 14.2 Il parallelogramma

Lo studio dei parallelogrammi è importante perché costituisce una solida premessa allo studio dei rombi, dei rettangoli e dei quadrati, figure geometriche dotate di forti proprietà che trovano applicazione in numerosi problemi di grande interesse. I rombi, i rettangoli e i quadrati sono dei particolari parallelogrammi, come sintetizzato dal seguente diagramma, che riproduce la cosiddetta gerarchia dei parallelogrammi.

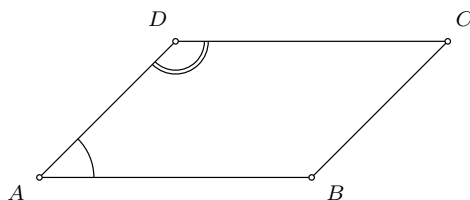


**Definizione 14.2.1.** Si definisce parallelogramma un quadrilatero avente i lati opposti a due a due paralleli.



Le proprietà dei parallelogrammi si deducono facilmente utilizzando i criteri di parallelismo.

**Teorema 14.2.1.** *In ogni parallelogramma, gli angoli adiacenti ad un lato sono supplementari.*



$$Hp: AB \parallel CD \quad BC \parallel AD$$

$$Th: \widehat{A} + \widehat{D} \cong \pi$$

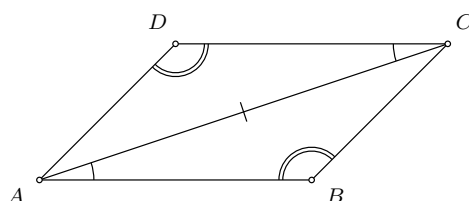
*Dimostrazione.* Sono coppie di angoli coniugati interni. □

**Esercizio 14.2.1.** Sia  $ABCD$  un parallelogramma; si conducano le bisettrici degli angoli  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$ , adiacenti al lato  $AB$ , che s'incontrano nel punto  $E$ . Dimostrare che il triangolo  $ABE$  è rettangolo.

**Corollario 14.2.1.** In ogni parallelogramma, gli angoli opposti sono congruenti.

*Dimostrazione.* Esercizio. □

**Teorema 14.2.2.** In ogni parallelogramma, ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti.



$$Hp: AB \parallel CD \quad BC \parallel AD$$

$$Th: \triangle ABC \cong \triangle ADC$$

*Dimostrazione.* .

1. Consideriamo  $ABC$  e  $ADC$
2.  $AC$  in comune
3.  $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADC}$
4.  $\widehat{BAC} \cong \widehat{ACD}$
5.  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

figura

angoli opposti parallelogramma

a.a.i. formati da  $AB \parallel CD$  e  $AC$

2., 3., 4., 2° c.c.g.

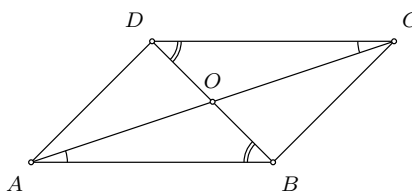
□

**Corollario 14.2.2.** I lati opposti di un parallelogramma sono congruenti.

*Dimostrazione.* Esercizio. □

Il teorema che segue è di fondamentale importanza nella deduzione di una proprietà notevole dei parallelogrammi.

**Teorema 14.2.3** (Teorema delle diagonali). In ogni parallelogramma, le diagonali hanno lo stesso punto medio.



$$Hp: AB \parallel CD \quad BC \parallel AD$$

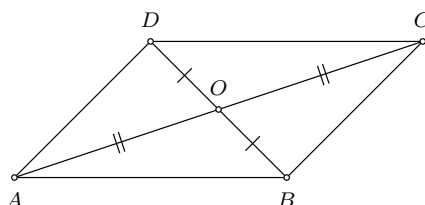
$$Th: AO \cong OC \quad \wedge \quad BO \cong OD$$

*Dimostrazione.* .

- |   |  |
|---|--|
| 1. Consideriamo $ABO$ e $CDO$                   |  |
| 2. $AB \cong CD$                                | lati opposti parallelogramma               |
| 3. $\widehat{ABO} \cong \widehat{CDO}$          | a.a.i. formati da $AB \parallel CD$ e $BD$ |
| 4. $\widehat{BAO} \cong \widehat{DCO}$          | a.a.i. formati da $AB \parallel CD$ e $AC$ |
| 5. $ABO \cong CDO$                              | 2., 3., 4., 2° c.c.                        |
| 6. $AO \cong OC \quad \wedge \quad BO \cong OD$ | 5., si oppongono ad angoli congruenti      |

□

**Corollario 14.2.3.** *Ogni parallelogramma è dotato di centro di simmetria, esso è il punto d'incontro delle diagonali.*



$$Hp: AB \parallel CD \quad BC \parallel AD \quad AC \cap BD = \{O\}$$

$$Th: O \text{ centro di simmetria } ABCD$$

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione che segue si farà riferimento alla figura relativa al Teorema delle diagonali.

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1. Consideriamo $ABCD$             |  |
| 2. $AC \cap BD = \{O\}$            | Hp   |
| 3. $O \in AC$                      | 2.   |
| 4. $AO \cong OC$                   | Teorema delle diagonali                            |
| 5. $\sigma_O(A) = C$               | def. operativa simmetria centrale                  |
| 6. $O \in BD$                      | 2.   |
| 7. $BO \cong OD$                   | Teorema delle diagonali                            |
| 8. $\sigma_O(B) = D$               | def. operativa simmetria centrale                  |
| 9. $\sigma_O(ABCD) = ABCD$         | 4., 7., i parallelogrammi hanno gli stessi vertici |
| 10. $O$ centro di simmetria $ABCD$ | 9.   |

□

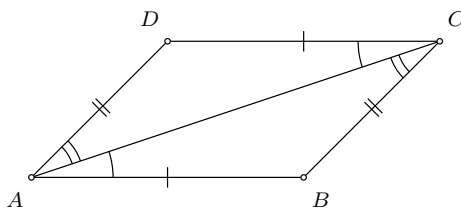
Ci chiediamo, ora, quali sono le condizioni sufficienti affinché un quadrilatero sia un parallelogramma. Vedremo che le condizioni necessarie enunciate in precedenza sono anche condizioni sufficienti.

**Teorema 14.2.4.** *Un quadrilatero avente gli angoli adiacenti ad uno stesso lato supplementari è un parallelogramma.*

**Teorema 14.2.5.** *Un quadrilatero avente coppie di angoli opposti congruenti è un parallelogramma.*

Le dimostrazioni dei due precedenti teoremi sono lasciate come esercizi.

**Teorema 14.2.6.** *Un quadrilatero avente coppie di lati opposti congruenti è un parallelogramma.*



*Hp:*  $AB \cong CD$   $AD \cong BC$

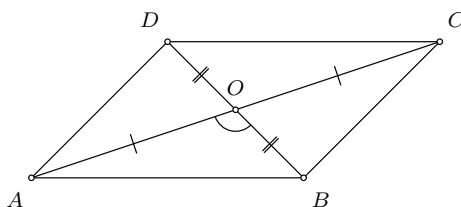
*Th:*  $ABCD$  parallelogramma

*Dimostrazione.* Conduciamo la diagonale  $AC$ .

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| 1. Consideriamo $ABC$ e $ACD$          |                                    |
| 2. $AB \cong CD$                       | Hp                                 |
| 3. $AC$ in comune                      | figura                             |
| 4. $AD \cong BC$                       | Hp                                 |
| 5. $ABC \cong ACD$                     | 2., 3., 4., 3° c.c.                |
| 6. $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADC}$ | 5., si oppongono a lati congruenti |
| 7. $AD \parallel BC$                   | 6., criterio di parallelismo       |
| 8. $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$ | 5., si oppongono a lati congruenti |
| 9. $AB \parallel CD$                   | 8., criterio di parallelismo       |
| 10. $ABCD$ parallelogramma             | 7., 9., def. parallelogramma       |

□

**Teorema 14.2.7.** *Sia  $ABCD$  un quadrilatero con le diagonali aventi lo stesso punto medio. Allora esso è un parallelogramma.*



*Hp:*  $AO \cong OC \quad \wedge \quad BO \cong OD$

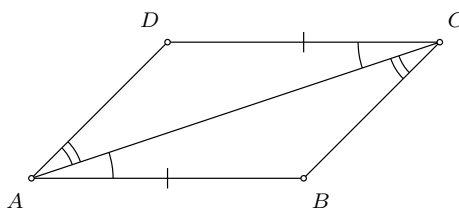
*Th:*  $ABCD$  parallelogramma

*Dimostrazione.* Tracciamo le diagonali  $AC$  e  $BD$  che si incontrano in  $O$ .

- |    |                                     |   |
|----|-------------------------------------|---|
| 1. | Consideriamo $ABO$ e $OCD$          |   |
| 2. | $AO \cong CO$                       | Hp  |
| 3. | $DO \cong BO$                       | Hp  |
| 4. | $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$ | angoli opposti al vertice                       |
| 5. | $ABO \cong OCD$                     | 2., 3., 4., 1° c.c.                             |
| 6. | $\widehat{ODC} \cong \widehat{OBA}$ | 5., si oppongono a lati congruenti              |
| 7. | $AB \parallel CD$                   | 6., criterio di parallelismo                    |
| 8. | $AB \cong CD$                       | 5., si oppongono ad angoli congruenti           |
| 9. | $ABCD$ parallelogramma              | 6., 7., due lati opposti paralleli e congruenti |

□

**Teorema 14.2.8.** *Un quadrilatero avente due lati opposti sia paralleli che congruenti è un parallelogramma.*



*Hp:*  $AB \parallel CD \quad AB \cong CD$

*Th:*  $ABCD$  parallelogramma

*Dimostrazione.* Conduciamo la diagonale  $AC$ .

- |    |                                     |  |
|----|-------------------------------------|--|
| 1. | Consideriamo $ABC$ e $ACD$          |  |
| 2. | $AB \cong CD$                       | Hp   |
| 3. | $AC$ in comune                      | figura   |
| 4. | $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$ | ang. alt. int. formati da $AB \parallel CD$ e $AC$ |
| 5. | $ABC \cong ACD$                     | 2., 3., 4., 1° c.c.                                |
| 6. | $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADC}$ | 5., si oppongono a lati congruenti                 |
| 7. | $AD \parallel BC$                   | 6., criterio di parallelismo                       |
| 8. | $ABCD$ parallelogramma              | Hp, 7., def. parallelogramma                       |

□

**Corollario 14.2.4.** *Se un quadrilatero è dotato di centro di simmetria, allora è un parallelogramma.*

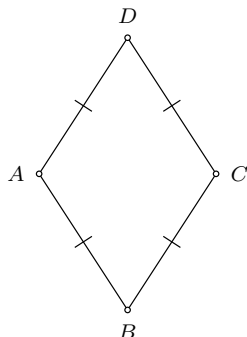
*Dimostrazione.* Esercizio.

□

## 14.3 Il rombo

**Definizione 14.3.1.** Si definisce rombo ogni quadrilatero equilatero.

Pertanto il rombo è un quadrilatero con tutti i lati congruenti.



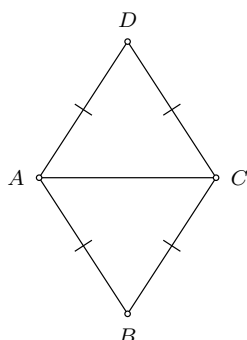
Si deduce immediatamente il seguente

**Corollario 14.3.1.** *Il rombo è un parallelogramma.*

*Dimostrazione.* Banale. □

Il rombo ha, pertanto, tutte le proprietà dei parallelogrammi.

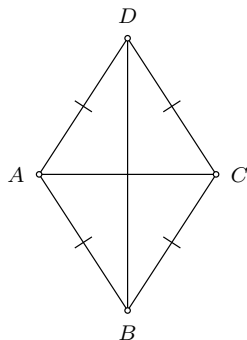
**Corollario 14.3.2.** *In ogni rombo, ciascuna diagonale lo divide in due triangoli isosceli congruenti.*



*Dimostrazione.* Esercizio. □

Segue la seguente importante proprietà.

**Teorema 14.3.1.** *Le diagonali di un rombo sono perpendicolari e bisettrici degli angoli opposti.*



*Hp:*  $AB \cong BC \cong CD \cong DA$

*Th:*  $AC \perp BD$ ,  $AC$  bisettrice  $\widehat{A}$  e  $\widehat{C}$ ,  $BD$  bisettrice  $\widehat{B}$  e  $\widehat{D}$

*Dimostrazione.* Tracciamo le diagonali  $AC$  e  $BD$  che si incontrano in  $O$ .

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| 1. Consideriamo $ACD$            |   |
| 2. $AD \cong CD$                 | Hp  |
| 3. $ACD$ triangolo isoscele      | 2.  |
| 4. $AO \cong CO$                 | Teorema delle diagonali                             |
| 5. $DO$ mediana $AC$             | 4.  |
| 6. $DO$ altezza relativa $AC$    | teorema di caratterizzazione dei triangoli isosceli |
| 7. $AC \perp BD$                 | 6.  |
| 8. $DO$ bisettrice $\widehat{D}$ | teorema di caratterizzazione dei triangoli isosceli |

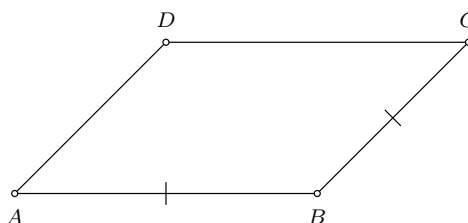
Il completamento della dimostrazione è un semplice esercizio. □

Analizziamo la dimostrazione precedente. I triangoli isosceli congruenti  $ACD$  e  $ABC$  hanno la base  $AC$  in comune; tenuto conto che le rispettive altezze  $AO$  e  $BO$  sono contenute nella retta  $BD$ , i due triangoli hanno lo stesso asse di simmetria. Un ragionamento analogo può essere ripetuto per i triangoli isosceli congruenti  $ABD$  e  $BCD$ . Pertanto possiamo enunciare il seguente

**Corollario 14.3.3.** *Le diagonali di un rombo sono suoi assi di simmetria.*

Vediamo quali sono le condizioni sufficienti affinché un quadrilatero sia un rombo.

**Teorema 14.3.2.** *Un parallelogramma con due lati consecutivi congruenti è un rombo.*



*Hp:*  $ABCD$  parallelogramma,  $AB \cong BC$

*Th:*  $ABCD$  rombo

*Dimostrazione.* .

- |                                     |                                  |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $AB \cong CD \wedge BC \cong AD$ | Hp, lati opposti parallelogramma |
| 2. $AB \cong BC$                    | Hp                               |
| 3. $AB \cong BC \cong CD \cong DA$  | 1., 2., proprietà transitiva     |

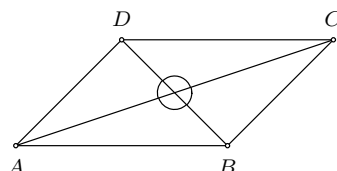
4.  $ABCD$  rombo

3., definizione rombo

□

**Esercizio 14.3.1.** Dimostrare che un quadrilatero con le diagonali perpendicolari non è necessariamente un rombo.

**Teorema 14.3.3.** *Un parallelogramma con le diagonali perpendicolari è un rombo.*



*Hp:*  $ABCD$  parallelogramma,  $AC \perp BD$

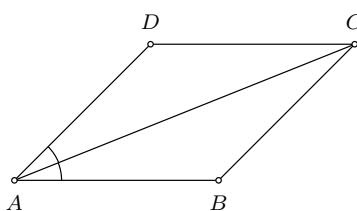
*Th:*  $ABCD$  rombo

*Dimostrazione.* Tracciamo le diagonali  $AC$  e  $BD$  che si incontrano in  $O$ .

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. Consideriamo $AOB$ e $AOD$                              |                                       |
| 2. $\widehat{AOB} \cong \widehat{AOD} \cong \frac{\pi}{2}$ | Hp                                    |
| 3. $AO$ in comune  | figura                                |
| 4. $BO \cong DO$   | Hp, Teorema delle diagonali           |
| 5. $AOB \cong AOD$   | 2., 3., 4., 1° c.c.                   |
| 6. $AB \cong AD$   | 5., si oppongono ad angoli congruenti |
| 7. $ABCD$ rombo  | 5., Hp, lati consecutivi congruenti   |

□

**Teorema 14.3.4.** *Un parallelogramma avente una diagonale bisettrice di un angolo è un rombo.*



*Hp:*  $ABCD$  parallelogramma,  $\widehat{DAC} \cong \widehat{CAB}$

*Th:*  $ABCD$  rombo

*Dimostrazione.* Tracciamo la diagonale  $AC$ .



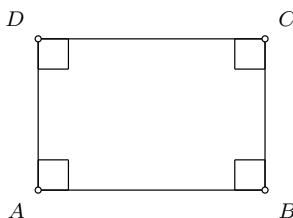
- |  |  |
|--|--|
| 1. Consideriamo $ACD$                  |  |
| 2. $\widehat{DAC} \cong \widehat{CAB}$ | Hp   |
| 3. $\widehat{DAB} \cong \widehat{DCB}$ | Hp, angoli opposti parallelogramma             |
| 4. $\widehat{BAC} \cong \widehat{DCA}$ | Hp, a.a.i. formati da $AB \parallel CD$ e $AC$ |
| 5. $\widehat{DAC} \cong \widehat{DCA}$ | 2.,4., proprietà transitiva                    |
| 6. $ACD$ isoscele                      | 5., teorema inverso triangoli isosceli         |
| 7. $AD \cong DC$                       | 6., definizione triangolo isoscele             |
| 8. $ABCD$ rombo                        | 7., Hp, lati consecutivi congruenti            |

□

## 14.4 Il rettangolo

**Definizione 14.4.1.** Si definisce rettangolo ogni quadrilatero equiangolo.

Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente ad un angolo giro, gli angoli di un rettangolo sono tutti retti.

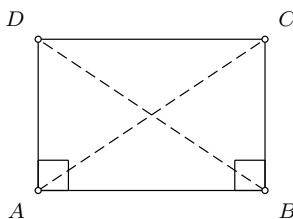


Si deduce immediatamente il seguente

**Corollario 14.4.1.** *Il rettangolo è un parallelogramma.*

Il rettangolo ha, pertanto, tutte le proprietà dei parallelogrammi.

**Teorema 14.4.1.** *Le diagonali di un rettangolo sono congruenti.*



Hp:  $ABCD$  rettangolo

Th:  $AC \cong BD$

*Dimostrazione.* Tracciamo le diagonali  $AC$  e  $BD$ .

- |    |                                     |                                       |
|----|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. | Consideriamo $DAB$ e $ABC$          |                                       |
| 2. | $\widehat{DAB} \cong \widehat{ABC}$ | Hp, definizione rettangolo            |
| 3. | $AD \cong BC$                       | lati opposti rettangolo               |
| 4. | $AB$ in comune                      | figura                                |
| 5. | $DAB \cong ABC$                     | 2., 3., 4., 1° c.c.                   |
| 6. | $AC \cong BD$                       | 5., si oppongono ad angoli congruenti |

□

Consideriamo un rettangolo  $ABCD$ , le sue diagonali  $AC$  e  $BD$  s'incontrano nel punto  $O$ , centro di simmetria. L'asse del lato  $AB$  coincide ovviamente con l'asse del lato  $CD$ . Poiché un rettangolo è un parallelogramma, le diagonali si tagliano scambievolmente a metà, pertanto, per il teorema precedente, si ha che  $AO \cong BO$ . Si deduce che i due triangoli isosceli congruenti  $ABO$  e  $DOC$  hanno lo stesso asse di simmetria, che è l'asse di simmetria comune ai lati opposti del rettangolo  $AB$  e  $CD$ . Ripetendo argomentazione analoga per i lati opposti  $AD$  e  $BC$ , e i triangoli isosceli congruenti  $DAO$  e  $COB$ , si deducono le seguenti proprietà.

**Teorema 14.4.2.** *Siano  $ABCD$  un rettangolo,  $AC$  e  $BD$  le diagonali che s'incontrano nel punto  $O$ ; siano, inoltre,  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  rispettivamente i punti medi dei lati  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$ ; allora*

1. *i triangoli  $ABO$  e  $DOC$  sono triangoli isosceli congruenti;*
2. *i triangoli  $DAO$  e  $COB$  sono triangoli isosceli congruenti;*
3.  *$MP \cap NQ = \{O\}$ ;*
4. *le rette  $MP$  e  $NQ$  sono assi di simmetria del rettangolo.*

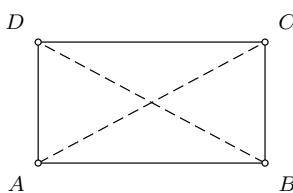
Un quadrilatero avente le diagonali congruenti non è necessariamente un rettangolo. L'alunno diligente non mancherà di verificarlo.

**Teorema 14.4.3.** *Se un parallelogramma ha almeno un angolo retto, allora è un rettangolo.*

*Dimostrazione.* Semplice esercizio.

□

**Teorema 14.4.4.** *Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo.*



*Hp:*  $ABCD$  parallelogramma,  $AC \cong BD$

*Th:*  $ABCD$  rettangolo

*Dimostrazione.* Tracciamo le diagonali  $AC$  e  $BD$ .

- |  |  |
|--|--|
| 1. Consideriamo $DAB$ e $ABC$                              |  |
| 2. $AD \cong BC$   | lati opposti parallelogramma                   |
| 3. $AB$ in comune  | figura   |
| 4. $AC \cong BD$   | Hp   |
| 5. $DAB \cong ABC$   | 2., 3., 4., 3° c.c.                            |
| 6. $\widehat{DAB} \cong \widehat{ABC}$                     | 5. Si oppongono a lati congruenti              |
| 7. $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} \cong \pi$               | Hp, a.c.i. formati da $AD \parallel BC$ e $AB$ |
| 8. $\widehat{DAB} \cong \widehat{ABC} \cong \frac{\pi}{2}$ | 6., 7.   |
| 9. $ABCD$ rettangolo                                       | 8., parallelogramma con almeno un angolo retto |

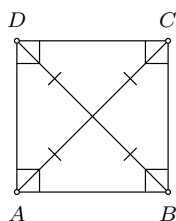
□

**Teorema 14.4.5.** *In un triangolo rettangolo, la mediana dell'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.*

## 14.5 Il quadrato

**Definizione 14.5.1.** Si definisce quadrato ogni quadrilatero sia equilatero che equiangolo.

Il quadrato è, pertanto, l'unico poligono regolare di quattro lati. Le sue proprietà sono il compendio di tutte le proprietà dei parallelogrammi studiati finora, con l'aggiunta di caratteristiche ancora più esclusive.



**Teorema 14.5.1.** *Il quadrato è sia parallelogramma, sia rombo, sia rettangolo.*

*Dimostrazione.* Semplice esercizio. □

Facendo tesoro di quanto studiato nei precedenti tre paragrafi, i teoremi che enunceremo sono immediata conseguenza di proprietà già dimostrate. Pertanto, lo studente diligente non mancherà di esplicitarne completamente le dimostrazioni, lasciate per esercizio.

**Corollario 14.5.1.** *Siano  $ABCD$  un quadrato,  $AC$  e  $BD$  le diagonali che s'incontrano nel punto  $O$ ; siano, inoltre,  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  rispettivamente i punti medi dei lati  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$ ; allora*

1. *le diagonali dividono il quadrato in quattro triangoli rettangoli isosceli congruenti;*
2. *il quadrato ha quattro assi di simmetria; essi sono le diagonali e le rette  $MP$  e  $NQ$ .*

**Corollario 14.5.2.** *Un parallelogramma è un quadrato se ha*

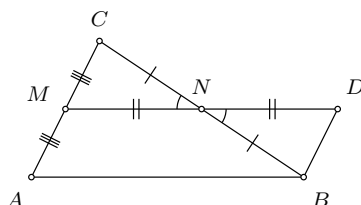
1. *le diagonali congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo;*
2. *le diagonali perpendicolari e congruenti.*

Le dimostrazioni sono interessanti esercizi per l'alunno diligente.

## 14.6 I teoremi dei punti medi

In questo paragrafo dimostreremo importanti proprietà che riguardano i triangoli e i quadrilateri. Esse si deducono utilizzando le proprietà dei parallelogrammi.

**Teorema 14.6.1** (Primo teorema dei punti medi per i triangoli). *In ogni triangolo, la retta passante per i punti medi di due lati è parallela al terzo lato. Inoltre, il segmento staccato su di essa da tali punti medi è congruente alla metà del terzo lato.*



*Hp:*  $ABC$  triangolo  $\wedge AM \cong CM \wedge CN \cong BN$

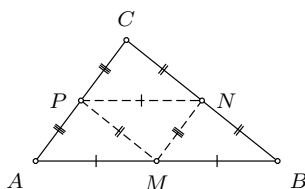
*Th:*  $MN \parallel AB \wedge MN \cong \frac{1}{2}AB$

*Dimostrazione.* Costruzione: condotta la retta  $MN$ , si individua su di essa un punto  $D$  tale che  $MN \cong ND$ ; si congiunge, quindi,  $D$  con  $B$ .

- |     |  |  |
|-----|--|--|
| 1.  | Consideriamo i triangoli $MNC$ e $BND$ |  |
| 2.  | $CN \cong BN$                          | Hp   |
| 3.  | $MN \cong ND$                          | costruzione                                  |
| 4.  | $\widehat{MNC} \cong \widehat{BND}$    | angoli opposti al vertice                    |
| 5.  | $MNC \cong BND$                        | 2., 3., 4., 1° c.c.                          |
| 6.  | $\widehat{CMN} \cong \widehat{BDN}$    | 5., si oppongono a lati congruenti           |
| 7.  | $AM \parallel BD$                      | 6., criteri parallelismo                     |
| 8.  | $CM \cong BD$                          | 5., si oppongono ad angoli congruenti        |
| 9.  | $AM \cong CM$                          | Hp   |
| 10. | $AM \cong BD$                          | 8., 9., proprietà transitiva                 |
| 11. | $ABDM$ parallelogramma                 | 7., 10., lati opposti paralleli e congruenti |
| 12. | $MN \parallel AB$                      | 11., definizione di parallelogramma          |
| 13. | $MD \cong AB$                          | 11., lati opposti parallelogramma            |
| 14. | $MN \cong \frac{1}{2}MD$               | costruzione                                  |
| 15. | $MN \cong \frac{1}{2}AB$               | 13., 14., proprietà transitiva               |

□

**Corollario 14.6.1** (Secondo teorema dei punti medi per i triangoli). *Siano  $ABC$  un triangolo e  $M, N, P$  i punti medi rispettivamente di  $AB, BC, AC$ . allora i quattro triangoli  $MNP, AMP, MBN, NCP$  sono tutti congruenti tra loro.*



*Hp:*  $ABC$  triangolo  $\wedge AM \cong BM \wedge BN \cong CN \wedge CP \cong PA$

*Th:*  $MNP \cong AMP \cong MBN \cong NCP$

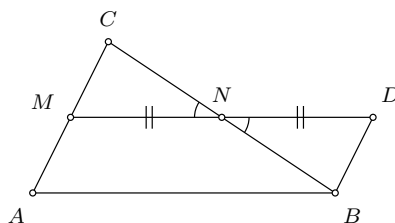
*Dimostrazione.* Dal teorema dei punti medi per i triangoli segue che i quattro triangoli hanno i lati ordinatamente congruenti; pertanto, per il 3° c.c., essi sono congruenti.  $\square$

I lati dei quattro triangoli sono ordinatamente congruenti alla metà dei lati del triangolo  $ABC$ ; inoltre i cinque triangoli hanno gli angoli ordinatamente congruenti. Ha senso, pertanto, dare la seguente

**Definizione 14.6.1.** Il triangolo  $ABC$  si dice **congruente al doppio** del triangolo  $DEF$  se i lati di  $ABC$  sono ordinatamente congruenti al doppio dei lati di  $DEF$ , e gli angoli di  $ABC$  sono ordinatamente congruenti agli angoli di  $DEF$ . Notazione:  $ABC \cong 2DEF$ .

Vale anche il viceversa del primo teorema dei punti medi.

**Teorema 14.6.2.** In ogni triangolo  $ABC$ , se la retta parallela al lato  $AB$  che incontra i lati  $AC$  in  $M$  e  $BC$  in  $N$  stacca il segmento  $MN \cong \frac{1}{2}AB$ , allora  $M$  è punto medio di  $AC$  e  $N$  è punto medio di  $BC$ .



*Hp:*  $MN \parallel AB \wedge MN \cong \frac{1}{2}AB$

*Th:*  $AM \cong MC \wedge BN \cong NC$

*Dimostrazione.* Costruzione: si individui sulla retta  $MN$  il punto  $D$  tale che  $MN \cong ND$ ; quindi si congiunga  $D$  con  $B$ .

- |   |   |
|---|---|
| 1. Consideriamo $ABDM$                  |   |
| 2. $MN \cong ND$                        | costruzione                                 |
| 3. $MN \cong \frac{1}{2}AB$             | Hp  |
| 4. $AB \cong MD$                        | 2., 3.                                      |
| 5. $MN \parallel AB$                    | Hp  |
| 6. $ABDM$ parallelogramma               | 4., 5., lati opposti paralleli e congruenti |
| 7. $AM \parallel BD \wedge AM \cong BD$ | 6., lati opposti parallelogramma            |
| 8. Consideriamo $MNC$ e $BDN$           |   |
| 9. $\widehat{MNC} \cong \widehat{DNB}$  | angoli opposti al vertice                   |
| 10. $\widehat{CMN} \cong \widehat{NDB}$ | a.a.i. formati da $AM \parallel BD$ e $MD$  |
| 11. $MNC \cong BDN$                     | 2., 9., 10., 2° c.c.                        |
| 12. $BN \cong NC$                       | 11., si oppongono ad angoli congruenti      |
| 13. $MC \cong BD$                       | 11., si oppongono ad angoli congruenti      |
| 14. $AM \cong MC$                       | 7., 13., proprietà transitiva               |

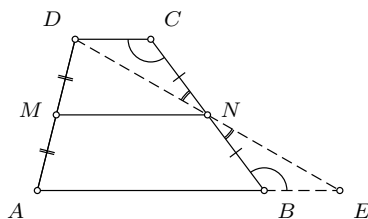
$\square$

In modo analogo si dimostra la seguente proprietà:

**Teorema 14.6.3.** *In un triangolo se la parallela ad un lato è condotta per il punto medio di un secondo lato, allora essa incontra il terzo lato nel suo punto medio.*

*Dimostrazione.* Esercizio. □

**Teorema 14.6.4.** *In ogni trapezio, la retta passante per i punti medi dei lati obliqui è parallela alle basi.*



*Hp:*  $ABCD$  trapezio  $\wedge AM \cong MD \wedge BN \cong NC$

*Th:*  $MN \parallel AB \wedge MN \parallel CD$

*Dimostrazione.* Costruzione: conduciamo la semiretta  $DN$  che incontra la retta  $AB$  in  $E$ .

- |     |  |  |
|-----|--|--|
| 1.  | Consideriamo i triangoli $CDN$ e $BEN$ |  |
| 2.  | $BN \cong NC$                          | Hp   |
| 3.  | $\widehat{CND} \cong \widehat{BNE}$    | angoli opposti al vertice                                  |
| 4.  | $AB \parallel CD$                      | Hp, basi del trapezio                                      |
| 5.  | $\widehat{DCN} \cong \widehat{NBE}$    | angoli alterni interni formati da $AB \parallel CD$ e $BC$ |
| 6.  | $CDN \cong BEN$                        | 2., 3., 5., 2° c.c.  |
| 7.  | $DN \cong NE$                          | 6., si oppongono ad angoli congruenti                      |
| 8.  | Consideriamo il triangolo $AED$        |  |
| 9.  | $AM \cong MD$                          | Hp   |
| 10. | $MN \parallel AB$                      | 2., 9., teorema dei punti medi per i triangoli             |
| 11. | $AB \parallel CD$                      | def. trapezio  |
| 12. | $MN \parallel CD$                      | 10., 11., proprietà transitiva                             |

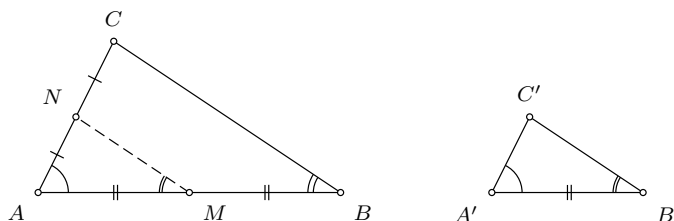
□

Allo stesso modo è possibile provare il seguente

**Teorema 14.6.5.** *In ogni parallelogramma, la retta passante per i punti medi di due lati opposti è parallela agli altri due lati.*

Abbiamo già accennato in un precedente capitolo che le mediane di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto, detto **baricentro**. Per dimostrare tale proprietà utilizzeremo il seguente teorema che costituisce una condizione sufficiente affinché un triangolo sia congruente al doppio di un altro triangolo.

**Teorema 14.6.6** (Criterio del triangolo doppio). *Siano  $ABC$  e  $A'B'C'$  due triangoli tali che  $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ ,  $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$  e  $AB \cong 2A'B'$ . allora il triangolo  $ABC$  è congruente al doppio del triangolo  $A'B'C'$ .*



$$\text{Hp: } \widehat{A} \cong \widehat{A'} \quad \wedge \quad \widehat{B} \cong \widehat{B'} \quad \wedge \quad AB \cong 2A'B'$$

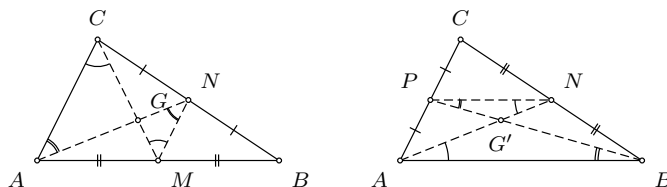
$$\text{Th: } ABC \cong 2A'B'C'$$

*Dimostrazione.* Costruzione: siano  $M$  ed  $N$  rispettivamente i punti medi di  $AB$  e  $AC$ ; si congiunga, quindi,  $M$  con  $N$ .

- |  |   |
|--|---|
| 1. Consideriamo il triangolo $ABC$                   |   |
| 2. $AB \cong 2AM$                                    | costruzione, $M$ punto medio di $AB$                          |
| 3. $AC \cong 2AN$                                    | costruzione, $N$ punto medio di $AC$                          |
| 4. $MN \parallel BC \quad \wedge \quad BC \cong 2MN$ | 2., 3., primo teorema dei punti medi                          |
| 5. $ABC \cong 2AMN$                                  | 2., 3., 4.  |
| 6. $\widehat{AMN} \cong \widehat{B}$                 | 4., angoli corrispondenti formati da $BC \parallel MN$ e $AB$ |
| 7. Consideriamo i triangoli $AMN$ e $A'B'C'$         |   |
| 8. $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$                  | Hp  |
| 9. $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$                  | Hp  |
| 10. $\widehat{B'} \cong \widehat{AMN}$               | 6., 9., proprietà transitiva                                  |
| 11. $AB \cong 2A'B'$                                 | Hp  |
| 12. $AM \cong A'B'$                                  | 2., 11., metà stesso segmento $AB$                            |
| 13. $AMN \cong 2A'B'C'$                              | 8., 10., 12., 2° c.c.   |
| 14. $ABC \cong 2A'B'C'$                              | 5., 13.   |

□

**Teorema 14.6.7** (Teorema del baricentro). *Le mediane di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto  $G$ . Inoltre il punto  $G$  divide ciascuna mediana in due parti tali che quella che contiene il vertice del triangolo è congruente al doppio dell'altra.*



$$Hp: AM \cong MB \quad \wedge \quad BN \cong NC \quad \wedge \quad AP \cong PC$$

$$Th: AN \cap BP \cap CM = \{G\}$$

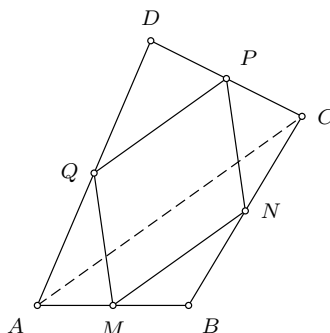
*Dimostrazione.* Costruzione: dapprima si considerino le mediane  $AN$  e  $CM$  che s'incontrano nel punto  $G$ , poi le mediane  $AN$  e  $BP$  che s'incontrano in  $G'$ .

1.  $AM \cong MB \wedge BN \cong NC$  Hp
2.  $MN \parallel AC \wedge AC \cong 2MN$  1., primo teorema dei punti medi
3. Consideriamo i triangoli  $AGC$  e  $MNG$
4.  $\widehat{ACG} \cong \widehat{GMN}$  2., angoli alterni interni formati da  $MN \parallel AC$  e  $CM$
5.  $\widehat{CAG} \cong \widehat{GNM}$  2., angoli alterni interni formati da  $MN \parallel AC$  e  $AN$
6.  $AGC \cong 2MNG$  2., 4., 5.
7.  $AG \cong 2GN \wedge CG \cong 2GM$  6.
8.  $AP \cong PC \wedge BN \cong NC$  Hp
9. consideriamo i triangoli  $AG'B$  e  $NPG'$
10.  $NP \parallel AB \wedge AB \cong 2NP$  8., primo teorema dei punti medi
11.  $\widehat{ABG'} \cong \widehat{G'PN}$  8., angoli alterni interni formati da  $MN \parallel AC$  e  $CM$
12.  $\widehat{BAN} \cong \widehat{G'NP}$  8., angoli alterni interni formati da  $MN \parallel AC$  e  $AN$
13.  $AG'B \cong 2NPG'$  8., 11., 12.
14.  $AG' \cong 2G'N \wedge BG' \cong 2G'P$  13.
15.  $G = G'$  7., 14.
16.  $AN \cap BP \cap CM = \{G\}$  15.

□

Dimostriamo ora una proprietà dei quadrilateri alquanto sorprendente.

**Teorema 14.6.8** (Dei punti medi per i quadrilateri). *Il quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un quadrilatero qualunque è un parallelogramma.*



$$Hp: ABCD \text{ quadrilatero} \wedge AM \cong MB \wedge BN \cong NC \wedge CP \cong PD \wedge DQ \cong QA$$

$$Th: MNPQ \text{ parallelogramma}$$



*Dimostrazione.* Costruzione: si conduca la diagonale  $AC$  del quadrilatero  $ABCD$ .

- |     |   |  |
|-----|---|--|
| 1.  | Consideriamo il triangolo $ABC$                 |  |
| 2.  | $AM \cong MB$                                   | Hp   |
| 3.  | $BN \cong NC$                                   | Hp   |
| 4.  | $MN \parallel AC \wedge MN \cong \frac{1}{2}AC$ | 1.,2., 3., teorema dei punti medi                        |
| 5.  | Consideriamo il triangolo $ACD$                 |  |
| 6.  | $AQ \cong QD$                                   | Hp   |
| 7.  | $CP \cong PD$                                   | Hp   |
| 8.  | $QP \parallel AC \wedge QP \cong \frac{1}{2}AC$ | 5.,6.,7., teorema dei punti medi per i triangoli         |
| 9.  | $MN \parallel QP \wedge MN \cong QP$            | 4.,8., proprietà transitiva di parallelismo e congruenza |
| 10. | $MNPQ$ parallelogramma                          | 9., lati opposti paralleli e congruenti                  |

□

**Esercizio 14.6.1.** Dimostrare che il parallelogramma che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un rombo (rispettivamente un rettangolo) è un rettangolo (rispettivamente un rombo). Estendere il risultato ai quadrati.

### Esercizi

1. Dato un parallelogramma  $ABCD$ , dimostrare che i vertici opposti  $B$  e  $D$  sono equidistanti dalla diagonale  $AC$ .
2. Sia  $ABCD$  un parallelogramma ed  $E$  il punto medio del lato  $AB$ . Le rette  $DE$  e  $BC$  si incontrano in  $T$ . Dimostrare che  $DBTA$  è un parallelogramma.
3. Dato un parallelogramma  $ABCD$ , si prendano sui lati opposti  $AB$  e  $CD$  due segmenti congruenti  $AE$  e  $CF$ . Dimostrare che  $DEBF$  è un parallelogramma.
4. Sia  $ABCD$  un parallelogramma; le bisettrici degli angoli  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  s'incontrano nel punto  $F \in CD$ . Dimostrare che  $AB \cong 2BC$ .
5. Nel trapezio  $ABCD$  le bisettrici degli angoli alla base maggiore si incontrano nel punto  $E$  della base minore. Dimostrare che la base minore è congruente alla somma dei lati obliqui. Supposto, infine, che il trapezio sia isoscele, dimostrare che  $E$  è punto medio della base minore.
6. Sulla diagonale  $AC$  del parallelogramma  $ABCD$  si riportino due segmenti congruenti  $AM$ ,  $CN$ ; dimostrare che il quadrilatero di vertici  $B, N, D, M$  è pure un parallelogramma.
7. Dimostrare che, se un parallelogramma ha le altezze relative a due lati consecutivi congruenti, allora esso è un rombo.
8. Dimostrare che, se in un trapezio le bisettrici degli angoli adiacenti alla base minore s'intersecano in un punto della base maggiore, allora la base maggiore è congruente alla somma dei lati obliqui.
9. Da un punto interno di un triangolo equilatero si conducano le parallele ai lati. Dimostrare che la somma dei segmenti di tali parallele, compresi fra i lati, è congruente al doppio del lato del triangolo.

10. In un trapezio la somma delle basi è minore della somma delle diagonali.
11. In un triangolo si considerino i punti medi dei lati e il piede di un'altezza. Dimostrare che essi sono i vertici di un trapezio isoscele.
12. Sia dato un rombo  $ABCD$  e sia  $O$  il punto d'intersezione delle diagonali. Prendiamo un punto  $E$  appartenente al segmento  $AO$  ed un punto  $F$  appartenente al segmento  $CO$  tali che i segmenti  $AE$  e  $CF$  siano congruenti. Dimostrare che il quadrilatero  $EBFD$  è un rombo.
13. Dimostrare che le bisettrici degli angoli interni di un parallelogramma determinano un rettangolo.
14. Sui cateti di un triangolo rettangolo ed esternamente ad esso, si costruiscano due quadrati. Dimostrare che
  - le due diagonali di essi uscenti dal vertice comune sono sulla stessa retta;
  - le altre due diagonali risultano parallele alla bisettrice dell'angolo retto del triangolo considerato.
15. Dato un trapezio isoscele  $ABCD$  con le diagonali perpendicolari, dimostrare che il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati del trapezio è un quadrato.
16. Sia dato un triangolo  $ABC$  e sia  $AL$  la bisettrice dell'angolo  $\hat{A}$ . Sia  $P$  il punto d'intersezione con il lato  $AC$  della retta per  $L$  parallela al lato  $AB$  e sia  $Q$  il punto d'intersezione con il lato  $AB$  della retta per  $L$  parallela al lato  $AC$ . dimostrare che il quadrilatero  $LPAQ$  è un rombo.
17. Disegna un triangolo isoscele  $FAD$  di base  $FA$ . Prolunga il lato  $FD$  di un segmento  $DC$  congruente a  $FD$ , congiungi  $C$  con  $A$ .
  - Dimostra che il triangolo  $FAC$  è rettangolo.
  - Indica con  $M$  il punto medio di  $AC$  e congiungi  $M$  con  $D$ . Dimostra che  $DM$  è contenuto nell'asse del segmento  $AC$ .
  - Con centro in  $A$  e raggio  $AD$  traccia un arco che incontra il prolungamento di  $DM$  nel punto  $B$ . Dimostra che il quadrilatero  $ABCD$  è un rombo.
18. Dimostrare che gli assi dei lati di un trapezio isoscele passano per uno stesso punto.
19. Dal punto d'incontro delle diagonali di un rombo si conducano le perpendicolari ai lati; dimostrare che i piedi delle perpendicolari sono vertici di un rettangolo.
20. Dato il triangolo  $ABC$ , si unisca il vertice  $A$  con il punto medio  $M$  della mediana condotta da  $B$ . Dimostrare che tale retta divide il lato  $BC$  in due parti, l'una doppia dell'altra.

**Parte III**

**Contributi**

# Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Algebra Li- neare - Integrazione - Matematica 5 - Statistica descrittiva - Sistemi dinamici
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II - Teoria della probabilità III
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

## STUDENTI

Matteo Alessandrini classe VA 2012-2013	Algebra Lineare
Simone Simonella classe IVA 2014-2015	Sistemi dinamici

La presente opera è distribuita secondo le attribuzioni della [Creative Commons](#).

La versione corrente è la 

In particolare chi vuole redistribuire in qualsiasi modo l'opera, deve garantire la presenza della prima di copertina e della intera Parte Contributi composta dai paragrafi: Contributi e licenza.

---

Dipartimento di Matematica  
ITIS V. Volterra  
San Donà di Piave