La base naturale dell'esponenziale

Beniamino Bortelli

17 aprile 2007

1 Il problema

In matematica, ci è stato detto, la base naturale della funzione esponenziale è il *numero irrazionale*:

$$e = 2,7182818...$$

Restano, però, da chiarire le seguenti questioni:

Problema 1.

Primo*: quand'è che una base è naturale?*

Secondo*: perché la base naturale degli esponenziali è proprio il numero irrazionale e?*

Terzo*: nel formulare una risposta al quesito, è possibile utilizzare esclusivamente matematica semplice - aritmetica, geometria e geometria analitica, evitando invece, ad esempio, le derivate - in modo che il lavoro sia comprensibile ad una persona con un livello di alfabetizzazione matematica medio?*

Il primo quesito non viene chiarito, se non intuitivamente, perché, in termini formalmente rigorosi, coinvolge la nozione di derivata.

Il secondo, invece, perché il numero di Nepero viene definito mediante il concetto di limite. Infatti, preso un numero naturale n grande a piacere, si dimostra che:

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

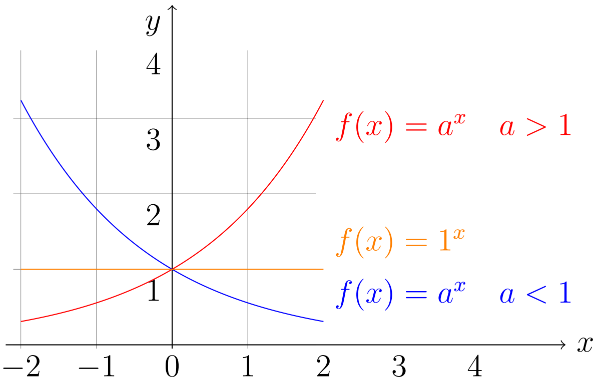
L'approssimazione è tanto più buona quanto più n è grande, cioè nel limite di n tendente all'infinito.

Ciò non toglie che, con un po' di pazienza, non si riesca a formulare una risposta, anche se non rigorosamente formalizzata, limitandosi all'uso della geometria analitiva, evitando il ricorso esplicito al concetto di derivata. Ed è ciò che ho provato a fare qui.

1.1 Quando una base è naturale?

Normalmente io inizio esplorando il problema, vado un po' a ruota libera, lasciandomi guidare dalle cose che a un dato momento attirano la mia attenzione. Questa parte, infatti, è la meno formalizzata.

Prendo in considerazione la possibilità di più basi, limitandomi però a basi comunque positive e guardo come l'andamento dell'esponenziale è influenzato dalla base:



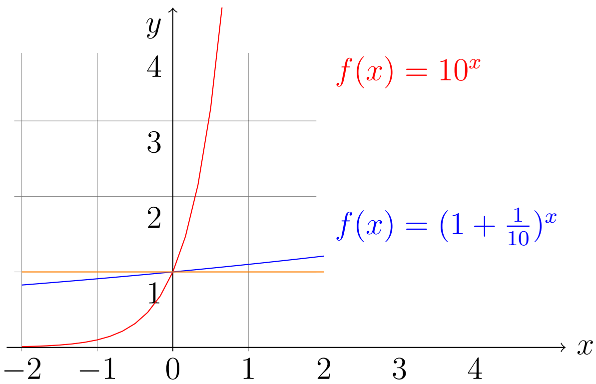
Registro una prima proprietà:

Proprietà 1. *A seconda che risulti $a > 1$, oppure $a < 1$, l'andamento è strettamente crescente o decrescente.*

Se però, come in figura, si prendono due basi l'una il reciproco dell'altra, i due andamenti sono simmetrici, essendo infatti, con $b = \frac{1}{a}$:

$$b^{-x} = a^x$$

Allora posso restringere ulteriomente il campo e considerare $a > 1$.
A questo punto metto a confronto due esponenziali con basi molto diverse:



Posso confrontare i loro andamenti in corrispondenza del punto $P_0 = (0, 1)$, comune a qualsiasi esponenziale, e vedo che, con base molto grande, anche la funzione è molto ripida, mentre con base piccola, la funzione cresce poco.

Il grado di crescita della funzione lo posso stabilire in due maniere: il valore di raddoppiamento, oppure la pendenza.

1.1.1 Il valore di raddoppiamento

Il valore di raddoppiamento[1] è quel valore che, aggiunto alla variabile, determina il raddoppio della funzione.
Registro una seconda proprietà:

Proprietà 2. *Per la funzione esponenziale il valore di raddoppiamento è costante.*

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} & a^{x+\chi} = a^{\chi} \cdot a^{x} = 2 \cdot a^{x} \\ \textit{con} \quad & \chi = \log_a 2 \end{aligned}$$

Il valore dipende dalla base ed è compreso nell'intervallo $0 \div +\infty$, dove il valore $+\infty$ corrisponde ad una base unitaria (non si raddoppia mai) ed il valore zero ad una base infinita.

Allora una base *naturale* avrà necessariamente un valore di raddoppiamento intermedio tra questi due estremi.

Purtroppo non ho alcun elemento per decidere un valore piuttosto che un'altro! Secondo logica, mi verrebbe da ritenere intermedio un valore di raddoppiamento unitario.

Mi accorgo, però, che esso corrisponde alla base 2 e non alla base e.
Per la base 2, detto n un naturale, $n \geq 1$, si ha infatti:

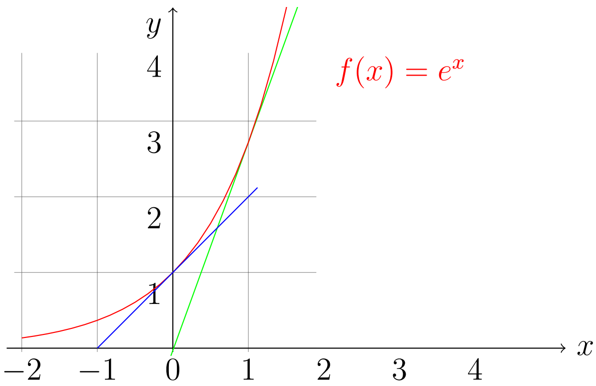
$$\begin{aligned} & 2^0 = 1 \\ & 2^{n+1} = 2 * 2^n \end{aligned}$$

Il valore di raddoppio della base e è invece $\log_e 2 = 0,693147...$ e non ho alcun elemento per considerare *naturale* questo valore.

1.1.2 La pendenza

La pendenza della funzione esponenziale in un punto dato la posso valutare attraverso l'inclinazione della retta tangente l'esponenziale in quel punto: la tangente dell'angolo che la retta forma nell'intersezione con l'asse x.

[1] Questo paragrafo non è strettamete necessario e può essere saltato dal lettore.



La pendenza non è affatto costante, ma cambia da punto a punto, diventando sempre più grande.
Registro una terza proprietà:

Proprietà 3. *La pendenza della funzione esponenziale in un punto dato è direttamente proporzionale al valore della funzione in quel punto.*

Infatti, se nel punto $P_0 = (0, 1)$ l'equazione della tangente è:

$$y = mx + q$$

allora nel punto $P' = (c, a^c)$ la ricavo facendo il seguente cambio di variabile:

$$X = x - c$$
$$Y = a^X = a^{-c} \cdot y$$

Nelle nuove variabili il punto P' ha le coordinate $(0, 1)$ per cui l'equazione della tangente è:

$$Y = mX + q'$$

Svolgendo si trova:

$$y = a^c \cdot mx + q''$$

e quindi si conferma la proprietà.

A questo punto mi limito a considerare la pendenza in un punto prescelto e scelgo il punto $P_0 = (0, 1)$.

Osservo che anche la pendenza dipende dalla base ed è compresa nell'intervallo $0 \div +\infty$, dove il valore zero corrisponde ad una base unitaria (non sale mai) ed il valore $+\infty$ ad una base infinita.

Ma allora la base *naturale* avrà nel punto P_0 una pendenza intermedia tra questi due estremi.

Devo solo escogitare un criterio ragionevole con il quale discriminare un dato valore dagli altri, cercando qualche proprietà particolare.

Siccome la pendenza è in proporzione con la funzione stessa, il criterio ragionevole è quello di fare in modo che la costante di proporzionalità sia unitaria.

E poiché nell'origine la funzione esponenziale è essa stessa unitaria, allora, secondo questo criterio, anche la pendenza della tangente nell'origine è unitaria.

Registro, infatti, questa proprietà interessante:

Proprietà 4. *Per l'esponenziale a base naturale, la pendenza della retta tangente l'esponenziale in un suo qualsiasi punto, coincide con il valore della funzione nello stesso punto.*

1.2 Perché la *base naturale* degli esponenziali è proprio il numero irrazionale e?

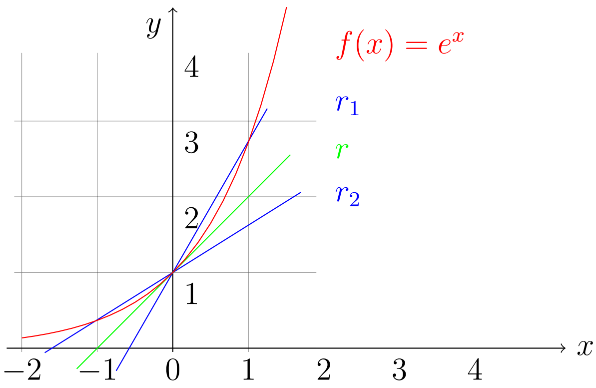
Per rispondere a questa domanda devo calcolare la pendenza della retta tangente l'esponenziale nel punto P_0.

Purtroppo, con la semplice geometria analitica, si riesce a trovare l'equazione della tangente solo per alcune curve molto semplici, quali la circonferenza e l'iperbole, ma non per l'esponenziale, per il quale bisogna per forza fare un calcolo approssimato. Devo dire che ho fatto diversi tentativi ed alla fine ho trovato più produttivo approssimare la tangente con la secante.

1.2.1 Approssimazione della tangente con la secante

L'idea è questa: prendo tre punti dell'esponenziale e ci faccio passare due secanti: l'una con pendenza leggermente maggiore e l'altra leggermente minore.

Come punti prendo: $P_0 = (0, 1), \quad P_1 = (1, a), \quad P_2 = (-1, \frac{1}{a})$.



Come rette secanti prendo:

- r_1: retta passante per P_0 e per P_1, con coefficiente angolare:

$$m_1 = a - 1$$

- r_2: retta passante per P_0 e per P_2, con coefficiente angolare:

$$m_2 = \frac{a-1}{a}$$

Dal confronto tra m_1 ed m_2, osservo che il primo ha valore maggiore, quindi ottengo:

$$m_1 \geq m \geq m_2$$

Ma so che m è unitario, quindi deduco che deve essere: $a > 2$
Ho un primo risultato che, però, devo migliorare.

Il lettore dimostri che r_1 è anche la retta tangente un'iperbole passante per i punti P_0 e P_2, e per il punto improprio $(-\infty, 0)$; mentre r_2 è anche la retta tangente un'iperbole passante per i punti P_0 e P_1, e per il punto improprio $(+\infty, 0)$.
Calcoli, inoltre, l'equazione della circonferenza passante per i tre punti dati e l'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto P_0.

1.2.2 Approssimazione con P_2 più vicino a P_1

Intendo, ora, ripetere lo stesso procedimento, ma con il punto P_2 più vicino a P_1.

Per far questo diminuisco il valore dell'ascissa del punto, portandola da 1 a $\frac{1}{2}$, e poi a $\frac{1}{3}$ e così via. Pongo cioè: $x_1 = \frac{1}{n}$, con n naturale maggiore di 1.

I punti diventano: $P_0 = (0, 1)$, $\quad P_1 = (x_1, a^{x_1})$, $\quad P_2 = (-x_1, \frac{1}{a^{x_1}})$.

- La retta r_1 ha ora coefficiente angolare:

$$m_1 = \frac{a^{x_1} - 1}{x_1}$$

- La retta r_2, invece, ha coefficiente angolare:

$$m_2 = \frac{a^{x_1} - 1}{x_1 \cdot a^{x_1}}$$

Ottengo ancora:

$$m_1 \geq m \geq m_2$$

Il lettore dimostri che, ora, r_1 è la retta tangente l'iperbole passante per i punti P_0 e P_2, e per il punto improprio $(-\infty, 0)$; mentre r_2 è la retta tangente l'iperbole passante per i punti P_0 e P_1, e per il punto improprio $(+\infty, 0)$.

So che: $m = 1$, quindi deduco che:

$$\frac{a^{x_1} - 1}{x_1} > 1$$
$$\frac{a^{x_1} - 1}{x_1 \cdot a^{x_1}} < 1$$

Svolgo i passaggi e trovo:

$$a > (x_1 + 1)^{\frac{1}{x_1}}$$
$$a < \left(\frac{1}{x_1 - 1}\right)^{\frac{1}{x_1}}$$

Ma essendo $x_1 = \frac{1}{n}$, la prima equazione diventa:

$$a > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

La seconda equazione, invece diventa:

$$a < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

e poiché queste equazioni valgono per qualsisi valore di n, concludo che, per ogni naturale maggiore di 1 deve essere:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < a < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Più grande è n, allora, più si ha:

$$a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ma questo significa che la base naturale dell'esponenziale è proprio il numero di Neper.