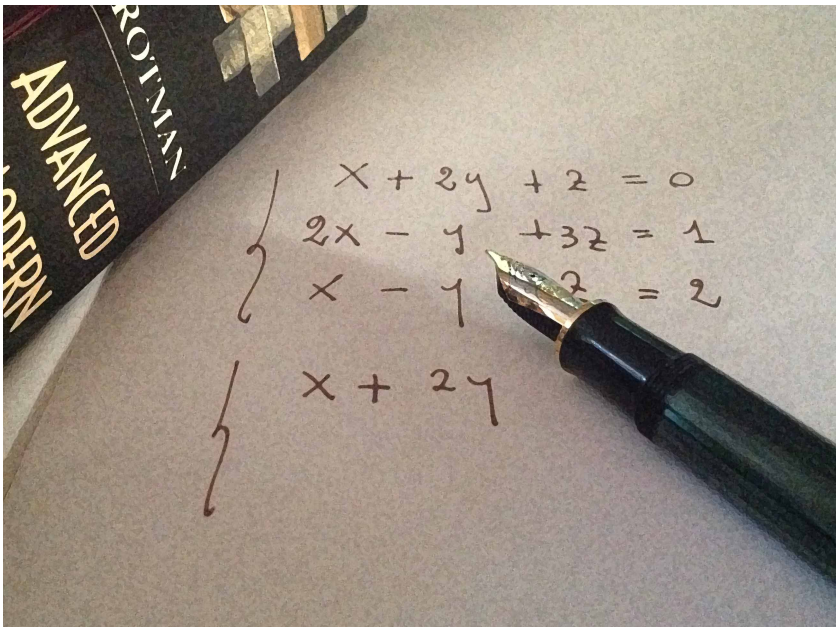
Algebra Lineare

Dipartimento di Matematica

α_5 ottobre 2015



ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [2015-16]

Indice

I ALGEBRA LINEARE **1**

1 Vettori **2**
1.1 Vettori nel piano e nello spazio . . . 2
1.2 Definizioni . . . 2
1.3 Operazioni . . . 4
1.4 Spazi e sottospazi . . . 8
1.5 Indipendenza lineare . . . 11
1.6 Basi . . . 13
1.7 Prodotto scalare . . . 14
1.8 Parallelismo e perpendicolarità. Angoli. . . . 16
1.9 Basi ortonormali . . . 17
1.10 Esercizi . . . 18

2 Sistemi lineari **25**
2.1 Richiami . . . 25
2.2 Definizioni . . . 28
2.3 Metodo di Gauss . . . 30

3 Matrici **31**
3.1 Definizioni . . . 31
3.2 Operazioni . . . 33
3.3 Determinanti . . . 35
3.4 Matrice inversa . . . 39
3.5 Matrici e sistemi lineari . . . 41
3.6 Esercizi . . . 48

4 Trasformazioni **53**
4.1 Applicazioni fra spazi $\mathbb{R}^n$ . . . 53
4.2 Trasformazioni lineari e matrici . . . 57
4.2.1 Matrice associata ad una applicazione lineare . . . 57
4.2.2 Applicazione lineare associata ad una matrice . . . 60
4.3 Composizione di applicazioni . . . 62
4.4 Rotazioni . . . 64

4.5 Coordinate omogenee nel piano . . . 66
4.6 Trasformazioni del piano in coordinate omogenee . . . 69
4.7 Applicazione: braccio robotico . . . 71
4.8 Coordinate omogenee nello spazio . . . 74
4.9 Trasformazioni dello spazio in coordinate omogenee . . . 74
4.9.1 Traslazioni . . . 74
4.9.2 Rotazioni . . . 75
4.9.3 Rotazioni di asse arbitrario . . . 78
4.10 Esercizi . . . 82

5 Matrici e rotazioni **91**
5.1 Introduzione . . . 91
5.2 Equazione caratteristica, autovalori e autovettori . . . 93
5.3 Rotazioni in $\mathbb{R}^3$ . . . 96

6 Quaternioni **99**
6.1 Numeri complessi . . . 99
6.2 Quaternioni . . . 100
6.3 Algebra dei quaternioni . . . 100
6.4 Geometria dei quaternioni . . . 102
6.5 Operatore di rotazione . . . 104
6.6 Formule . . . 106
6.6.1 Prodotto . . . 106
6.6.2 Operatore di rotazione . . . 107
6.6.3 Angolo e asse di rotazione . . . 107
6.6.4 Angoli di Eulero . . . 108
6.7 Esercizi . . . 108

7 Esercizi riassuntivi **109**
7.1 Somma tra matrici . . . 109
7.2 Prodotto di una matrice per uno scalare . . . 109
7.3 Prodotto tra matrici . . . 110
7.4 Sistemi lineari . . . 110

II Contributi **112**

Parte I

ALGEBRA LINEARE

Capitolo 1

Vettori

1.1 Vettori nel piano e nello spazio

Durante il corso di studi del Biennio, in Fisica, si è studiato come si rappresenta, in un sistema di assi cartesiani, uno spostamento di un corpo oppure la forza che agisce su un determinato oggetto. L'oggetto matematico che ben rappresenta una grandezza come quelle citate è il vettore. Un vettore, che genericamente indichiamo con $\vec{v}$, ha tre caratteristiche:

1. *modulo*: rappresenta la lunghezza del vettore ed è un numero reale;
2. *direzione*: è individuata dalla retta su cui giace il vettore;
3. *verso*: il verso è descritto dall'orientamento del vettore stesso, uno dei due possibili sulla retta;

In Fisica si definiva il vettore come l'insieme di tutti i possibili segmenti orientati paralleli, dello stesso verso e stesso modulo; quindi un vettore è l'insieme di infiniti segmenti orientati. Uno di essi sarà un rappresentante del vettore e lo si chiamerà vettore applicato.

Noi vogliamo dare una definizione molto più flessibile di vettore, che ci permetta di fare i calcoli in modo semplice, pur mantenendo tutte le proprietà che sono state utili nelle applicazioni.

1.2 Definizioni

Diamo qui di seguito, le definizioni di *vettore* in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e, più in generale, in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.2.1. Un vettore di $\mathbb{R}^2$ è una coppia orientata di numeri $a, b \in \mathbb{R}$ e scriviamo:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Un vettore di $\mathbb{R}^3$ è una terna di numeri $a, b, c \in \mathbb{R}$ e scriviamo:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Analogamente una n-upla di numeri $(a_1, a_2, \cdots a_n) \in \mathbb{R}^n$ sarà un vettore di $\mathbb{R}^n$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Un vettore del piano è quindi rappresentato da una coppia di numeri reali. Se pensiamo alla coppia come un ad un punto di $\mathbb{R}^2$, allora possiamo immaginare il vettore come un segmento che parte dall'origine degli assi e termina nel punto; in questo caso il vettore si dirà *applicato* nell'origine.

Nella figura il vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ è applicato nell'origine e applicato nel punto C, le sue coordinate non cambiano ma hanno significato diverso: nel primo caso sono le coordinate del punto B mentre nel secondo caso sono le differenze fra le coordinate dei punti D e C: $\begin{bmatrix} 7-4 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$:

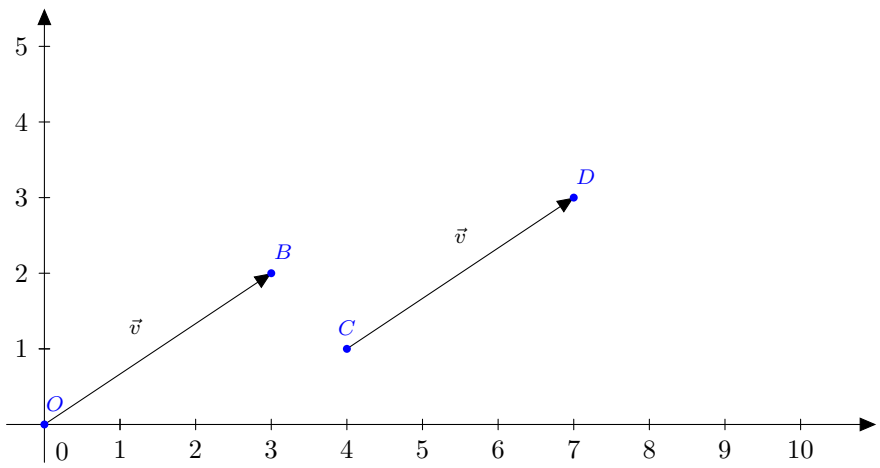


Figura 1.1: Il vettore $\vec{v}$ applicato nell'origine; il vettore $\vec{v}$ applicato nel punto C.

Nel caso invece si pensi alle coordinate del vettore come ad una differenza di coordinate di due punti, cioè coordinate della punta meno coordinate della coda, allora il vettore sarà applicato nel punto coda. Ovviamente cambiando la coda, cambierà anche la punta ma la differenza resterà la stessa e questo ci permette di spostare il vettore in qualsiasi punto

del piano mantenendo la sua propria identità (cioè direzione, verso e modulo). Se il punto P è la coda e il punto Q la punta, allora si ha:

$$a = x_Q - x_P \qquad b = y_Q - x_P$$

e cioè

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - x_P \end{bmatrix}$$

Esempio 1.2.1. Come scrivere il vettore $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ applicato nel punto $A(2,2)$ con un'unica notazione:

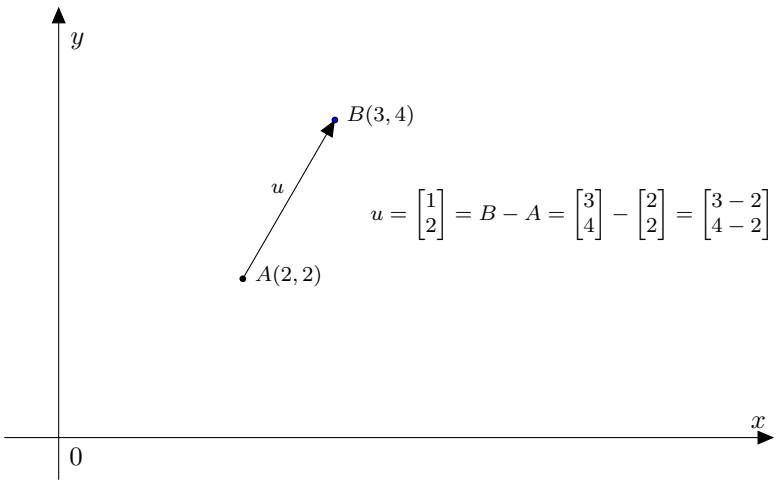


Figura 1.2: Il vettore $\vec{u}$ applicato nel punto $A(2,2)$; scritto come differenza di punti.

Analogamente nel caso $\mathbb{R}^3$, cioè nello spazio. Il caso $\mathbb{R}^n$ è del tutto analogo anche se non possiamo più disegnare i vettori perchè le dimensioni sono troppe; in ogni caso possiamo fare i calcoli con i vettori indipendentemente da quante coordinate abbiano. Vedremo più avanti esempi di vettori in molte dimensioni.

1.3 Operazioni

Definizione 1.3.1. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ due vettori in $\mathbb{R}^2$, si definisce *somma dei due vettori* $\vec{v}$ e $\vec{u}$ il vettore $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}$$

Esempio 1.3.1. Siano $\vec{v} = (1,3)$ e $\vec{u} = (3,1)$; il vettore somma sarà:

$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

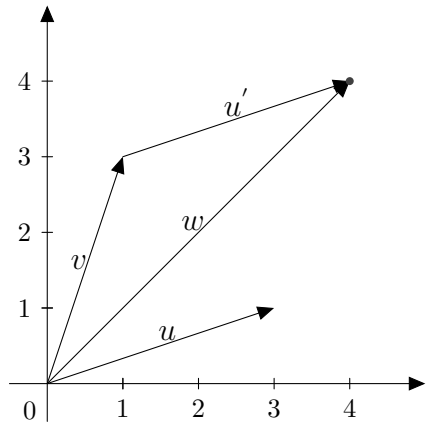


Figura 1.3: Il vettore $\vec{w}$ somma tra il vettore $\vec{v}$ e il vettore $\vec{u}$.

Analoga è la somma per i vettori in $\mathbb{R}^3, \cdots, \mathbb{R}^n$.

Esempio 1.3.2. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$; il vettore somma $\vec{w}$ sarà:

$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4+1 \\ 6+5+8 \\ 7+2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 19 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Esempio 1.3.3. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$; il vettore somma $\vec{w}$ sarà:

$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Osservazione. La somma formale appena definita corrisponde alla regola del parallelogramma studiata in Fisica.

Definizione 1.3.2. Sia $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ vettore in $\mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$ (che si dice anche *scalare*); si definisce *prodotto del vettore per uno scalare* il vettore $\vec{w}$:

$$\vec{w} = k \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$$

Esempio 1.3.4. Sia $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e lo scalare $k = 2$; il vettore $\vec{w}$ ottenuto moltiplicando il vettore $\vec{v}$ per lo scalare k è:

$$\vec{w} = k\vec{v} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Analogamente nelle altre dimensioni.

Definizione 1.3.3. Sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ qualsiasi; si dice *vettore opposto* il vettore $\vec{u} = -1(\vec{v}) = -\vec{v}$.

Osservazione. La differenza di due vettori non è necessario definirla, poichè $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$.

Esempio 1.3.5. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2 \end{bmatrix}$; il vettore $\vec{w}$ ottenuto come differenza tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$ è:

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \vec{-v} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1 \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 - 3.5 \\ 2 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

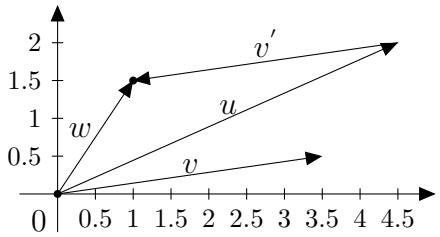


Figura 1.4: Il vettore $\vec{w}$ differenza tra il vettore $\vec{u}$ e il vettore $\vec{v}$.

Definizione 1.3.4. Il vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ si dice *vettore nullo* ed è rappresentato da un singolo punto di $\mathbb{R}^n$.

Le operazioni di somma e prodotto per un scalare godono delle seguenti proprietà:

Teorema 1.3.1 (Proprietà delle operazioni)**.** *Siano $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ e $k, h \in \mathbb{R}$:*

1. $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{t}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{t}$ *associativa;*
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ *commutativa;*
3. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v}$ *esiste l'elemento neutro;*
4. $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad \forall \vec{v}$ *esiste il vettore simmetrico;*
5. $(k + h)\vec{v} = k\vec{v} + h\vec{v}$ *distributiva;*
6. $k(\vec{v} + \vec{u}) = k\vec{v} + k\vec{u}$*;*

7. $k(h\vec{v}) = (kh)\vec{v} = k(h\vec{u})$;

8. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \qquad \forall \vec{v}, 1 \in \mathbb{R}$.

Queste proprietà si dimostrano facilmente: come esempio, dimostriamo la *5* e, per semplicità, lo facciamo in $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Sia $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $k, h \in \mathbb{R}$; allora si ha: $(k+h)\vec{v} = (k+h)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k+h)a \\ (k+h)b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka+ha \\ kb+hb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ha \\ hb \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = k\vec{v} + h\vec{v}$ □

Definizione 1.3.5. Dati k vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$ di $\mathbb{R}^n$, la somma

$$\vec{w} = h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \cdots + h_k\vec{v_k} \quad \text{con } h_1, h_2, \cdots, h_k \in \mathbb{R}$$

per le proprietà appena elencate, in particolare per la proprietà associativa, la somma è un vettore di $\mathbb{R}^n$ che si dice *combinazione lineare* dei vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$ con gli scalari $h_1, h_2, \cdots, h_k \in \mathbb{R}$.

Il concetto di combinazione lineare è decisivo per quanto dobbiamo apprendere nel seguito e per tutta l'algebra lineare. Evidentemente il nome tradisce la sua centralità in questa disciplina. In effetti quello che studieremo nel seguito saranno solo le possibili conseguenze delle due operazioni che abbiamo appena definito: applicando la somma e il prodotto per uno scalare a più vettori otteniamo appunto una *combinazione lineare*.

Esempio 1.3.6. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; allora abbiamo le combinazioni lineari dei due vettori:

- $3\vec{v} + 2\vec{u} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-4 \\ 15+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \end{bmatrix}$
- $-\vec{v} + 0\vec{u} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ notiamo che uno degli scalari può essere 0
- $0\vec{v} + 0\vec{u} = 0\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$ se entrambi gli scalari sono 0 allora otteniamo *sempre* il vettore $\vec{0}$

Esempio 1.3.7. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; allora abbiamo le combinazioni lineari dei due vettori:

- $3\vec{v} + 2\vec{u} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $-1\vec{v} + 5\vec{u} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Esempio 1.3.8. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$; allora le seguenti sono combinazioni lineari dei due vettori:

- $3\vec{v} + 2\vec{u} + 5\vec{w} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$ abbiamo ottenuto il vettore formato dai tre scalari

Gli ultimi tre esempi mostrano come, in alcuni casi, sia possibile ottenere un qualsiasi vettore come combinazione lineare di vettori che hanno una forma particolare. Chiariamo meglio con un esempio.

Esempio 1.3.9. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$; ottenere il vettore $\vec{z} = \begin{bmatrix}-3\\2\\7\end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori dati. E' del tutto evidente che

$$\vec{z} = \begin{bmatrix}-3\\2\\7\end{bmatrix} = -3\vec{v} + 2\vec{u} + 7\vec{w} = -3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\2\\7\end{bmatrix}$$

Naturalmente quanto visto dipende dai vettori che combiniamo linearmente; non con tutti i vettori ciò sarà possibile; in altre parole, potremmo evere dei vettori con i quali non è possibile ottenere un qualsivoglia vettore come combinazione lineare. Questa situazione è molto interessante è andrà investigata nel seguito.

1.4 Spazi e sottospazi

Chiariamo, almeno in una prima approssimazione, l'uso dei nomi che abbiamo introdotto e che introdurremo in seguito. Gli insiemi $\mathbb{R}^n$ dotati delle operazioni di somma e prodotto per uno scalare (che si dicono operazioni *lineari*) sono un esempio (peraltro importante) di *spazi vettoriali* , chiamati anche *spazi lineari*. Gli insiemi $\mathbb{R}^n$ considerati senza alcuna operazione si dicono *spazi affini* mentre gli stessi insiemi dotati di una somma fra *punti* e vettori (come abbiamo visto in qualche esempio) si dicono *spazi euclidei*. Noi non manterremo queste sottili distinzioni poiché, per i nostri scopi, sono troppo dettagliate e astratte. E' da ricordare che per sviluppare una vera teoria *geometrica*, cioè per fare veramente geometria, è necessario riferirsi agli spazi euclidei. Nel seguito di questo testo ogni volta che parleremo di *spazi* $\mathbb{R}^n$ intenderemo spazi vettoriali.

Definizione 1.4.1. Un sottoinsieme (non vuoto) W di $\mathbb{R}^n$ si dice *sottospazio* se è chiuso rispetto alle operazioni lineari (somma e prodotto per uno scalare). In altre parole, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori qualsiasi di W e k è uno scalare qualunque di R allora sia $\vec{v} + \vec{w}$ che $k \cdot \vec{v}$ appartengono a W. In modo del tutto equivalente si può dire che W è sottospazio se ogni combinazione lineare di vettori di W appartiene a W

Esempio 1.4.1. Un esempio banale può essere l'insieme $O = \{\vec{0}\}$ composto dal solo vettore nullo $\vec{0}$ (visto come sottoinsieme di qualsiasi spazio $\mathbb{R}^n$). E' facile verificare che è un sottospazio. Basta considerare che una qualunque combinazione lineare di $\vec{0}$ con se stesso da sempre e solo $\vec{0}$.

Esempio 1.4.2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottoinsieme W dei vettori che hanno la terza coordinata nulla, cioè $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Una combinazione lineare di vettori di W fornisce solo vettori ancora appartenenti a W; infatti:

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 + hx_2 \\ ky_1 + hy_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$$

e si vede che il vettore risultante è della forma richiesta dai vettori di W.

In effetti si può notare che la terza coordinata dei vettori di W è superflua poichè tutte le possibili combinazioni lineari non la possono mai cambiare; se eliminassimo la terza coordinata o la pensassimo come sottointesa, nulla cambierebbe. Allora possiamo vedere che lo spazio W in realtà non è che una copia dello spazio $\mathbb{R}^2$ diciamo *immerso* in $\mathbb{R}^3$ e quindi non è niente di nuovo.

Esempio 1.4.3. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottoinsieme $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid 2x - 3y + z = 0 \right\}$. Osserviamo che le coordinate degli elementi di W, dovendo soddisfare l'equazione, non sono del tutto indipendenti e quindi W non può essere tutto $\mathbb{R}^3$. Dimostriamo però che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo di prendere $\vec{v}, \vec{w} \in W$, vettori qualsiasi e dimostrimo che $\vec{v} + \vec{w} \in W$. Dato che $\vec{v} \in W$ le sue coordinate devono soddisfare l'equazione, cioè $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}$ con $2x_v - 3y_v + z_v = 0$; analogamente $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix}$ con $2x_w - 3_y w + z_w = 0$; sommando si ha: $\vec{v} + \vec{w} = 2x_v - 3y_v + z_v + 2x_w - 3_y w + z_w = 0$; cioè $2(x_v + x_w) - 3(y_v + y_w) + (z_v + z_w) = 0$; da ciò si deduce che il vettore $\vec{v} + \vec{w}$, le cui coordinate soddisfano all'equazione, appartiene all'insieme W. Inoltre se $k \in \mathbb{R}$ è uno scalare qualsiasi, il vettore $k\vec{v}$ appartiene anch'esso a W poichè $2(kx_v) - 3(ky_v) + kz_v = k(2x_v - 3y_v + z_v) = 0$ e quindi soddisfa l'equazione.

Abbiamo dimostrato che una qualsiasi combinazione lineare di vettori di W appartiene a W e quindi W è sottospazio.

Esempio 1.4.4. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e consideriamo l'insieme W di tutti i vettori multipli di $\vec{v}$, cioè

$$W = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{w} = k\vec{v}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

è facile vedere che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ (per esercizio).

L'ultimo esempio ci dice che non è difficile ottenere sottospazi: basta considerare i multipli di un qualsiasi vettore; è possibile anche considerare tutte le combinazioni lineari di più vettori e vedere che costituiscono un sottospazio. Allora è conveniente dare la seguente:

Definizione 1.4.2. Sia S un'insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$. Si definisce *spazio generato* dall'insieme S e si indica con $< S >$, l'insieme di tutti i vettori combinazione lineare dei vettori di S. I vettori di S si dicono *generatori* dello spazio.

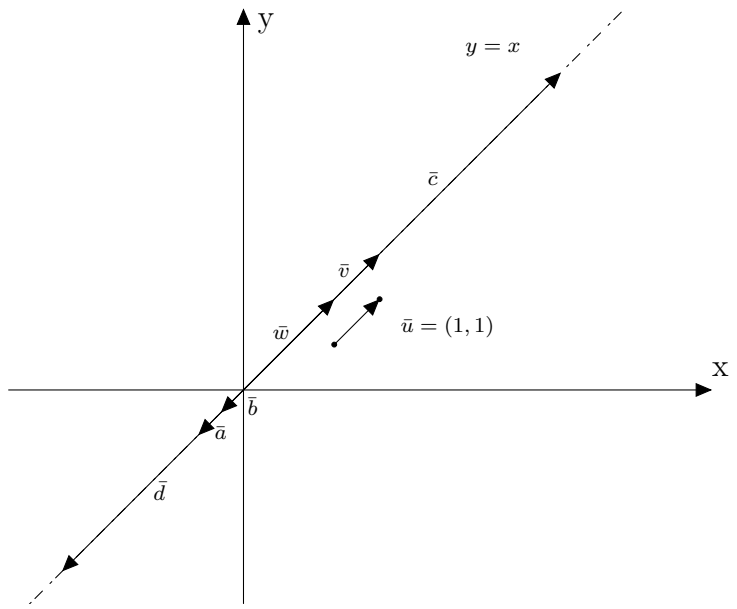


Figura 1.5: Esempio di *spazio generato*

In altre parole, se $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ è un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$, allora si avrà

$$< S >= \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k \mid a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

ed è facile verificare che $< S >$ è effettivamente un sottospazio. Lo facciamo su qualche esempio.

Esempio 1.4.5. Sia $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; lo spazio generato dal vettore $\vec{u}$ (vedi figura 1.5) in $\mathbb{R}^2$ sarà:

$$< S >= \{k\vec{u} \mid k \in \mathbb{R}\}$$

Come si può notare dalla figura, il vettore $\vec{u}$, rappresentato come un vettore applicato in un punto indefinito del piano, è moltiplicato per vari scalari k e i risultanti vettori sono rappresentati, per comodità, come applicati tutti nell'origine. Si vede facilmente che sono tutti appartenenti alla retta di equazione $y = x$ che rappresenta quindi lo spazio generato dal vettore $\vec{u}$.

Esempio 1.4.6. Sia $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; lo spazio generato dai vettori $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ in $\mathbb{R}^3$ sarà:

$$< S >= \{k\vec{u} + h\vec{v} \mid k, h \in \mathbb{R}\} = \left\{ k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k, h \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} k \\ k+h \\ h \end{bmatrix} \mid k, h \in \mathbb{R} \right\}$$

Per vedere che $< S >$ è un sottospazio basterà dimostrare che una combinazione lineare di due vettori generici di $< S >$ appartiene ancora a $< S >$. Siano $\vec{w} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 + h_1 \\ h_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{j} = \begin{bmatrix} k_2 \\ k_2 + h_2 \\ h_2 \end{bmatrix}$ due vettori generici

di $< S >$ e $a, b \in \mathbb{R}$ due scalari qualsiasi, allora si ha :

$$\vec{z} = a\vec{w} + b\vec{j} = a \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 + h_1 \\ h_1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} k_2 \\ k_2 + h_2 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ak_1 + bk_2 \\ a(k_1 + h_1) + b(k_2 + h_2) \\ ah_1 + bh_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ak_1 + bk_2 \\ (ak_1 + bk_2) + (ah_1 + bh_2) \\ ah_1 + bh_2 \end{bmatrix}$$

da cui si vede che la combinazione lineare ha la stessa forma di tutti i vettori di $< S >$.

1.5 Indipendenza lineare

Definizione 1.5.1. Siano $\vec{v}$ e $\vec{u}$ due vettori generici e $k, h \in \mathbb{R}^n$; $\vec{v}$ e $\vec{u}$ si dicono *linearmente indipendenti*, se:

$$k\vec{v} + h\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow k, h = 0$$

vale a dire, due vettori sono linearmente indipendenti se una qualsiasi loro combinazione lineare è nulla se e solo se entrambi i coefficienti sono nulli.

Definizione 1.5.2. Siano $\vec{v}$ e $\vec{u}$ due vettori generici e $k, h \in \mathbb{R}^n$; $\vec{v}$ e $\vec{u}$ si dicono *linearmente dipendenti*, se:

$$k\vec{v} + h\vec{w} = \vec{0} \text{ con } k, h \text{ non entrambi nulli.}$$

vale a dire, due vettori sono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare nulla con coefficienti non nulli. Questo significa che, supponendo, per esempio, $h \neq 0$:

$$k\vec{v} + h\vec{w} = \vec{0} \qquad h\vec{w} = -k\vec{v} \qquad \vec{w} = -\frac{k}{h}\vec{v}$$

e quindi: due vettori sono linearmente dipendenti se uno è multiplo dell'altro.

Nel caso di tre vettori o più vale una proprietà analoga come vedremo negli esempi che seguono.

Esempio 1.5.1. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$; allora:

$$h\vec{v} + k\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow h \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

combinando linearmente, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} h \\ 2h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2k \\ 3k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} h - 2k \\ 2h + 3k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dunque

$$\begin{cases} h - 2k = 0 \\ 2h + 3k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 2k \\ 4k + 3k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 2k \\ 7k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 0 \\ k = 0 \end{cases}$$

in conclusione, siccome gli unici valori di h e k che rendono nulla la combinazione lineare sono nulli, i vettori sono indipendenti.

Esempio 1.5.2. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; allora:

$$h\vec{v} + k\vec{w} + t\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

combinando linearmente si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 2h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k+t \\ h+k \\ 2h+k+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dunque

$$\begin{cases} k+t=0 \\ h+k=0 \\ 2h+k+t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=-t \\ h=-k \\ 2(-k)-t+t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=-t \\ h=-k \\ -2k=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=0 \\ h=0 \\ k=0 \end{cases}$$

anche in questo caso i vettori risultano indipendenti.

Esempio 1.5.3. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; allora:

$$h\vec{v} + k\vec{w} + t\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

combinando linearmente si ottiene:

$$\begin{bmatrix} h \\ h \\ 2h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 3k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} h+k+t \\ h \\ 2h+3k+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dunque

$$\begin{cases} h+kt=0 \\ h=0 \\ 2h+3k+t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=-t \\ h=0 \\ 3(-t)+t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=-t \\ h=0 \\ -2t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=0 \\ h=0 \\ t=0 \end{cases}$$

i vettori risultano indipendenti anche in questo caso.

Esempio 1.5.4. Posso scrivere il vettore $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ e quindi provare che i tre vettori sono linearmente dipendenti? Dunque:

$$h\vec{v} + k\vec{w} = \vec{u} \Rightarrow h \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

combinando linearmente, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 3h \\ -h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k \\ 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3h+4k \\ -h+2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dunque

$$\begin{cases} 3h+4k=1 \\ -h+2k=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3h+4k=1 \\ -h=-2k+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3h+4k=1 \\ h=2k-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3(2k-2)+4k=1 \\ h=2k-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6k-6+4k=1 \\ h=2k-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=\frac{7}{10} \\ h=2(\frac{7}{10})-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=\frac{7}{10} \\ h=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

In questo esercizio si è visto che un vettore è combinazione lineare di altri due e si è concluso che i tre vettori sono dipendenti; vediamo come questa condizione corrisponda alla dipendenza lineare. Se tre vettori sono dipendenti allora significa che esiste una loro combinazione lineare nulla con scalari non tutti nulli:

$$h\vec{u}+k\vec{v}+t\vec{w}=\vec{0}$$

supponiamo che sia $h \neq 0$ e quindi possiamo scrivere:

$$\vec{u}=\frac{k\vec{v}+t\vec{w}}{-h}=\frac{k\vec{v}}{-h}+\frac{t\vec{w}}{-h}=\frac{k}{-h}\vec{v}+\frac{t}{-h}\vec{w}$$

da cui risulta che il vettore $\vec{u}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Viceversa, supponiamo che il vettore $\vec{u}$ sia combinazione lineare dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, allora

$$\vec{u}=h\vec{v}+k\vec{w} \qquad \text{con } h,k \text{ non entrambi nulli}$$

allora

$$\vec{u}-h\vec{v}+k\vec{w}=\vec{0} \qquad \text{con gli scalari non tutti nulli}$$

Il caso di due soli vettori analizzato all'inizio paragrafo non è in contrasto con queste conclusioni perchè dire che un vettore è multiplo di un altro è come dire che uno è combinazione lineare dell'altro. Possiamo riassumere questa osservazione in un teorema che ci consente di ricordare meglio le definizioni.

Teorema 1.5.1. *Un insieme di vettori è dipendente se e solo se uno di essi (almeno) è combinazione lineare degli altri.*

1.6 Basi

La definizione di spazio generato ci consente di dare questa nuova, importante:

Definizione 1.6.1. Dicesi *base* di $\mathbb{R}^n$ un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.6.1. Siano $\vec{v}=(1,-1,3)$, $\vec{u}=(2,1,2)$ e $\vec{w}=(3,0,1)$; verifichiamo che i tre vettori generano lo spazio di $\mathbb{R}^3$ ponendo la combinazione lineare dei tre vettori uguale a un vettore generico:

$$h\vec{v}+k\vec{u}+t\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow h(1,-1,3)+k(2,1,2)+t(3,0,1)=(a,b,c)$$

e, risolvendo, otteniamo:

$$\begin{cases} t = \dfrac{-3c + 5a - 4b}{12} \\ k = \dfrac{24b + 9c - 11a}{4} \\ h = \dfrac{12b + 9c - 3a}{4} \end{cases}$$

verifichiamo, poi, che i tre vettori sono indipendenti:

$$h\vec{v} + k\vec{u} + t\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow h(1, -1, 3) + k(2, 1, 2) + t(3, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

facendo la combinazione lineare, si ottiene:

$$(h, -h, 3h) + (2k, k, 2k) + (3t, 0, t) = (0, 0, 0)$$

dunque

$$\begin{cases} h + 2k + 3t = 0 \\ -h + k = 0 \\ 3h + 2k + t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h + 2k + 3t = 0 \\ h = k \\ 3k + 2k + t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h + 2k + 3t = 0 \\ h = k \\ 5k + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h + 2k + 3t = 0 \\ h = k \\ t = -5k \end{cases} \qquad \begin{cases} k + 2k - 15t = 0 \\ h = k \\ t = -5k \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 0 \\ h = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 1.6.1. Verificare che $\vec{v}$=(1,2,3), $\vec{u}$=(4,1,3) e $\vec{w}$=(5,0,1) formano una base dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.6.2. Dati $\vec{v}_1$=(-1,1,2,1,0), $\vec{v}_2$=(0,2,1,1,0) e $\vec{v}_3$=(1,1,-1,0,0), trovare una base di B.

Esercizio 1.6.3. Determinare per quali valori di k, i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -2) \quad \vec{v}_2 = (1, 1, -3) \quad \vec{v}_3 = (3, 7, k - 6).$$

Gli esempi ed esercizi precedenti illustrano il contenuto del teorema seguente, che non dimostriamo:

Teorema 1.6.1. *In uno spazio $\mathbb{R}^n$, ci sono al massimo n vettori indipendenti.*

1.7 Prodotto scalare

Occupiamoci ora della importante nozione di lunghezza di un vettore. In qualsiasi spazio $\mathbb{R}^n$ la lunghezza di un vettore si definisce:

Definizione 1.7.1. Sia $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ un vettore; diciamo *lunghezza* o *modulo* di $\vec{v}$ il numero

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

se $|\vec{v}| = 1$ allora $\vec{v}$ si dirà *versore*.

Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ allora $\vec{w} = \vec{v} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|}$ è un versore che ha la stessa direzione e verso del vettore $\vec{v}$.

Evidentemente in $\mathbb{R}$ la nozione di modulo di un vettore coincide con quella del solito modulo. Notate che si usa lo stesso simbolo $|\vec{v}|$ del vecchio valore assoluto di un numero reale, ma non si può far confusione poiché non esiste la nozione di valore assoluto di un vettore, mentre in $\mathbb{R}^2$ coincide con la distanza di un punto dall'origine (t. di Pitagora).

Esempio 1.7.1. Sia $\vec{v} = (1, -3, 5, 7)$; il modulo di $\vec{v}$ sarà:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 9 + 25 + 49} = \sqrt{84}$$

Esempio 1.7.2. Sia $\vec{u} = (2, 4)$; il modulo di $\vec{u}$ sarà:

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Esempio 1.7.3. Sia $\vec{w} = (0, 1)$; il modulo di $\vec{w}$ sarà:

$$|\vec{w}| = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1}$$

Siano $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$; il modulo di un vettore gode di queste proprietà:

1. $|\vec{v}| \geq 0$ (ovviamente, perchè l'argomento di una radice con indice pari è sempre positivo o nullo);
2. $|\vec{v}| = 0 \iff \vec{v} = (0, 0, \cdots, 0)$;
3. $|t\vec{v}| = |t||\vec{v}|$
4. $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{v}| + |\vec{u}|$ Disuguaglianza triangolare.

Definizione 1.7.2. Siano $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$; si dice *prodotto scalare* di $\vec{v}$ e $\vec{u}$ il numero n $\in \mathbb{R}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} (a_n b_n)$$

Esempio 1.7.4. Siano $\vec{v} = (2, 5)$ e $\vec{u} = (5, 2)$; il prodotto scalare di $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sarà:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (2 \cdot 5) + (5 \cdot 2) = 10 + 10 = 20$$

Esempio 1.7.5. Siano $\vec{v} = (2, 5, 3)$ e $\vec{u} = (5, 2, 4)$; il prodotto scalare di $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sarà:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \cdot \vec{w} = (2 \cdot 5) + (5 \cdot 2) + (3 \cdot 4) = 10 + 10 + 12 = 32$$

Osservazione. Sia $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $\vec{w}$ un vettore in $\mathbb{R}^2$; si ha dunque che:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\vec{v}| \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$$

In altre parole, il prodotto scalare di un vettore per se stesso è il quadrato del modulo del vettore.

Di seguito, diamo, senza dimostrazione, alcune proprietà che caratterizzano il prodotto scalare:

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos\gamma$ INTERPRETAZIONE GEOMETRICA;
2. $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$;
3. $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$;
4. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$;
5. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u}$;
6. $(k \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$;
7. $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ DISUGUAGLIANZA DI SWARTZ;
8. $\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$;

Le proprietà più importanti sono segnalate in maiuscoletto; commentiamo solo la prima: il prodotto scalare di due vettori uguaglia il prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo fra i due; in questo modo possiamo estendere la nozione di angolo e di perpendicolarità anche in spazi di dimensione maggiore di 3; basta infatti definire la funzione coseno a partire dal prodotto scalare e dal modulo dei vettori, poi assumendo che esista la funzione inversa *arccos* si può definire l'angolo. Osserviamo anche che la proprietà 8. segue immediatamente dalla 1.

Osservazione. La proprietà 8 stabilisce che la perpendicolarità dipende strettamente dal prodotto scalare il quale, per l'osservazione precedente, serve a definire le lunghezze dei vettori; in altre parole la perpendicolarità è legata al modo in cui misuriamo le distanze. Invece il parallelismo dipende esclusivamente dalla somma e dal prodotto per uno scalare e dunque deve trattarsi di *una nozione del tutto diversa.*

1.8 Parallelismo e perpendicolarità. Angoli.

Le operazioni sui vettori sin qui introdotte ci permemttono di definire la nozione di parallelismo e di perpendicolarità, sempre tenendo bene a mente, come osservato nel paragrafo precedente, che le due nozioni sono del tutto separate.

Definizione 1.8.1. Due vettori $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, non nulli, si dicono *paralleli* se $\vec{v} = k\vec{w}$.

La definizione implica che due vettori sono paralleli se sono dipendenti. Ovviamente ciò vale per una coppia di vettori. Dire che tre o più vettori sono paralleli significa dire che sono tutti multipli di uno di essi. In ogni caso sono dipendenti. E' evidente che se $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = k\vec{w}$ allora $v_1 = kw_1, v_2 = kw_2, \cdots, v_n = kw_n$ e quindi

$k = \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \cdots = \frac{v_n}{w_n}$. In altre parole, due vettori sono paralleli se hanno le coordinate proporzionali.

La proprietà $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\gamma$ enunciata nel paragrafo precedente, ci dice che se $\vec{v} \perp \vec{w}$ allora $\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ e quindi $\vec{v} \perp \vec{w} = 0$ (proprietà 8). Viceversa se sappiamo che $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ e $\vec{v} \neq 0, \vec{w} \neq 0$ allora $|\vec{v}| \neq 0, |\vec{w}| \neq 0$ e quindi l'unica possibilità è che $\cos\gamma = 0$ e quindi $\gamma = \frac{\pi}{2}$, perciò i vettori sono perpendicolari. Osserviamo che $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0$ e quindi il vettore nullo si considera perpendicolare a *ogni* vettore.

Dalla proprietà deduciamo che $\cos\gamma = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$ e quindi

$$\gamma = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

questa formula permette di calcolare l'angolo formato da due vettori. Osserviamo che se $\cos\gamma = 1$, il suo massimo valore, allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|$ e quindi il prodotto scalare è massimo ed equivale al prodotto dei moduli.

1.9 Basi ortonormali

Ritorniamo alla nozione di base. Una base di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori indipendenti, generatori di tutto lo spazio. In altre parole, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ è una base se i v_i sono indipendenti e $< V >= \mathbb{R}^n$. Per le basi valgono le proprietà (che non dimostriamo per brevità):

1. Tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori
2. Una base di $\mathbb{R}^n$ è compposta da n vettori
3. Un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ composto da più di n vettori è dipendente

Le proprietà 1 e 2 consentono di dare la seguente:

Definizione 1.9.1. Il numero n di vettori di una base di $\mathbb{R}^n$ si dice *dimensione* dello spazio.

Osserviamo che $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ hanno rispettivamente dimensione $1, 2, 3$, come auspicabile.

Definizione 1.9.2. Una base composta da tutti versori si dice *normale*. Se composta da vettori, a due a due ortogonali, si dice *ortogonale*. Una base normale e ortogonale si dice *ortonormale*.

E' difficile sottovalutare l'importanza della nozione di base ortonormale. Noi ci limitiamo alle seguenti osservazioni su $\mathbb{R}^3$. Consideriamo i vettori

$$V = \left\{ \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è facile verificare che si tratta di una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo il vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$; cosa rappresentano le coordinate di $\vec{v}$? E' facile vedere che $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, quindi le coordinate di $\vec{v}$ sono i suoi coefficienti rispetto ad una base ortonormale. E' evidente che questa base è molto particolare e quindi le daremo un nome proprio:

Definizione 1.9.3. La base

$$\left\{ \vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \vec{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è ortonormale e si dice base *canonica* di $\mathbb{R}^n$.

Nella letteratura corrente è frequente l'uso delle lettere i, j, k per indicare i vettori della base canonica, almeno fino alla dimensione 3. Per gli altri spazi è comune l'uso delle lettere indicizzate $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

1.10 Esercizi

Combinazioni lineari:

Esercizio 1.10.1. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$: determinare le coordinate dei vettori:

- $\vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{v} - \vec{w}$
- $\vec{v} + \vec{w} - \vec{z}$
- $7\vec{v} - 3\vec{w} + 2\vec{z}$

Esercizio 1.10.2. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Sia $\vec{z} = \vec{v} + k\vec{w}, k \in \mathbb{R}$.

Disegnare i vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ per i seguenti valori di k: $k = 1, k = \frac{1}{3}, k = \frac{3}{4}, k = -1, k = -2$.

Esercizio 1.10.3. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $k = 5, h = 3 \in \mathbb{R}$.

Dimostrare la validità delle proprietà delle operazioni vettoriali utilizzando i dati forniti. Esempio: proprietà n.3

$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v} \qquad \vec{v}+\vec{0}=\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0\\5+0\\0+0\end{bmatrix}=\vec{v}$$

Esercizio 1.10.4. Siano $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \vec{w}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $k=1, h=-2$.

Calcolare la combinazione lineare $\vec{z}=k\vec{v}+h\vec{w}$.

Esercizio 1.10.5. Con riferimento all'esercizio precedente, far variare gli scalari k, h nella combinazione lineare $\vec{z}=k\vec{v}+h\vec{w}$. Stabilire se sia possibile ottenere $\vec{z}=\vec{0}$ per qualche valore degli scalari.

Esercizio 1.10.6. Dato il vettore $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, illustrare le combinazioni lineari $\vec{z}=k\vec{v}$ del solo vettore $\vec{v}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Fare un disegno per rappresentare la situazione.

Esercizio 1.10.7. Combinando linearmente un vettore con se stesso (anche più volte) cosa si ottiene? Utilizzare il vettore dell'esercizio precedente.

Sottospazi:

Esercizio 1.10.8. Dato il vettore $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, considerare l'insieme di tutti i vettori multipli di $\vec{v}$: $V=\{k\vec{v} \mid k \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.10.9. Dato l'insieme di vettori $V=\{\vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$, dimostrare che V è sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.10.10. Dato l'insieme di vettori $V=\left\{\vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=3\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$, dimostrare che V *non* è sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.10.11. Verificare che $V=\left\{\vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=0, x-z=0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che $V=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$, dimostrare cioè che ogni vettore

$\vec{v} \in V$ è della forma $k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e, viceversa, ogni vettore del tipo $k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}$ soddisfa le equazioni che definiscono V.

Esercizio 1.10.12. Dimostrare che $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

Indipendenza/dipendenza lineare:

Esercizio 1.10.13. Verificare se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti:

1. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;
2. $\vec{t} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

Esercizio 1.10.14. Dimostrare che i seguenti vettori sono linearmente indipendenti:

1. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;
2. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

Esercizio 1.10.15. Dimostrare che i seguenti vettori sono linearmente indipendenti:

1. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;
2. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;
3. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

Esercizio 1.10.16. Sia $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Scrivere un vettore $\vec{w}$ linearmente dipendente da $\vec{v}$ e un vettore $\vec{z}$ linearmente indipendente da $\vec{v}$.

Esercizio 1.10.17. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Stabilire se sono linearmente dipendenti. Esprimere, quando possibile, ciascuno dei vettori come combinazione lineare dei rimanenti due.

Esercizio 1.10.18. Come nell'esercizio precedente con i vettori:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 1.10.19. Come nell'esercizio precedente con i vettori:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 1.10.20. Verificare se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti e, successivamente, stabilire se è possibile scrivere $\vec{v}$ come combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{w}$:

- $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix};$
- $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$
- $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$
- $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

Esercizio 1.10.21. Esprimere il vettore $\vec{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{w}, \vec{z}, \vec{t}$, nei seguenti casi:

1. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$
2. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix};$
3. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$
4. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$

Esercizio 1.10.22. Verificare se, al variare di $k \in \mathbb{R}$, i vettori sono linearmente indipendenti o dipendenti:

- $\vec{v} = (k, 1) \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$;
- $\vec{t} = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ k1 \end{bmatrix} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

Esercizio 1.10.23. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e sia $\vec{x} = k\vec{v} + h\vec{w} + t\vec{z}$ una loro combinazione lineare.

1. Dimostrare che se $\vec{x} = \vec{0}$ allora $k = h = t = 0$.
2. Determinare h, k, t in modo tale che $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Esercizio 1.10.24. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e sia $\vec{x} = k\vec{v} + h\vec{w} + t\vec{z}$ una loro combinazione lineare.

1. Trovare le coordinate di $\vec{x}$
2. Dimostrare che se $\vec{x} = \vec{0}$ allora $k = h = t = 0$.
3. Determinare h, k, t in modo tale che $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
4. Dimostrare che per nessun valore di h, k, t può essere $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Prodotto scalare

Esercizio 1.10.25. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Calcolare i seguenti prodotti scalari:

1. $\vec{v} \cdot \vec{w}$
2. $\vec{w} \cdot \vec{z}$
3. $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{z})$
4. $(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{z}$

Esercizio 1.10.26. Se $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w}$, allora è vero che $\vec{v} = \vec{0}$?

Esercizio 1.10.27. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Determinare un vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ non nullo, tale che $\vec{v} \cdot \vec{x} = 0, \vec{w} \cdot \vec{x} = 0$.

Parallelismo e perpendicolarità:

Esercizio 1.10.28. Siano $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v_4} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v_5} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v_6} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Stabilire quali sono paralleli
2. Stabilire quali sono perpendicolari
3. Calcolarne il modulo

Esercizio 1.10.29. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Calcolare $|\vec{v}|$ e $|\vec{w}|$
2. Trovare tutti i vettori $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che $|\vec{x}| = 1$ e che siano ortogonali sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$

Esercizio 1.10.30. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Calcolare l'angolo formato dai due vettori.

Esercizio 1.10.31. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Determinare per ciascun vettore, un vettore parallelo e uno perpendicolare. Determinare anche i tre versori dei vettori dati.

Esercizio 1.10.32. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Determinare due vettori $\vec{x}, \vec{y}$ tali che $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$ in modo che $\vec{x}$ sia parallelo a $\vec{w}$ e $\vec{y}$ sia ortogonale a $\vec{w}$ (decomposizione di $\vec{v}$ in direzioni parallele e perpendicolari a $\vec{w}$).

Esercizio 1.10.33. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Trovare tutti i vettori $\vec{x} = k\vec{w} + h\vec{z}$ tali che $\vec{x}$ sia un versore ortogonale a $\vec{v}$.

Esercizio 1.10.34. Siano $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Trovare due basi distinte di $\mathbb{R}^3$ che contengano $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Capitolo 2

Sistemi lineari

2.1 Richiami

Già nel biennio si è avuta occasione di risolvere un *sistema di equazioni in più incognite* tutte di *primo grado*; tali sistemi si dicono *lineari*[1].

Per esempio:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - \ y \ = 1 \end{cases}$$

è un sistema di equazioni lineari di 2 equazioni in 2 incognite. Per *soluzione* di un sistema lineare si intende un'insieme di numeri reali - tanti quanti le incognite - che sostituiti al posto delle incognite stesse soddisfano *tutte* le equazioni del sistema.

Si è già visto che un sistema lineare può avere o non avere soluzioni e, quando ne ha, possono essere in numero finito o infinito. In questo capitolo ci poniamo il problema di *trovare le soluzioni* e successivamente indagheremo più a fondo sul problema di determinarne il numero.

Osservazione. Per indicare le incognite in un sistema lineare si usano comunemente le lettere $x, y, z, \ldots$ ma in questo testo useremo una lettera con indici; ad esempio: $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Richiamiamo due metodi noti di risoluzione dei sistemi lineari.

Metodo di sostituzione: dato il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - \ \ x_2 \qquad\quad = 1 \end{cases}$$

ricaviamo x_1 dalla prima equazione e sostituiamolo nelle altre due:

[1] Nel caso di due incognite, è noto che l'equazione rappresenta una *retta* del piano, mentre il sistema rappresenta le coordinate dei possibili punti di intersezione delle due rette.

$$\begin{cases} x_1 & = -x_2 + x_3 + 5 \\ -x_2 + x_3 + 5 + 3x_2 + 2x_3 & = 3 \\ 5(-x_2 + x_3 + 5) - x_2 & = 1 \end{cases}$$

semplificando:

$$\begin{cases} x_1 & = -\ x_2 + x_3 + 5 \\ 2x_2 + 3x_3 & = -\ 2 \\ -\ 6x_2 + 5x_3 & = -\ 24 \end{cases}$$

vediamo che le due ultime equazioni hanno 2 sole incognite; il sistema è stato *ridotto*. Ricaviamo x_2 dalla seconda equazione e sostituiamolo nella terza:

$$\begin{cases} x_1 & = -x_2 + x_3 + 5 \\ x_2 & = -\dfrac{3}{2}x_3 - 1 \\ -6(-\dfrac{3}{2}x_3 - 1) + 5x_3 & = -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = -x_2 + x_3 + 5 \\ x_2 & = -\frac{3}{2}x_3 - 1 \\ 14x_3 & = -30 \end{cases} \begin{cases} x_1 & = -x_2 + x_3 + 5 \\ x_2 & = -\frac{3}{2}x_3 - 1 \\ x_3 & = -\frac{15}{7} \end{cases}$$

sostituendo il valore ottenuto per x_3 e risalendo otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 & = -x_2 + x_3 + 5 \\ x_2 & = -\frac{3}{2}(-\frac{15}{7}) - 1 \\ x_3 & = -\frac{15}{7} \end{cases} \begin{cases} x_1 & = \frac{9}{14} \\ x_2 & = \frac{31}{14} \\ x_3 & = -\frac{15}{7} \end{cases}$$

La soluzione è costituita dalla terna $\{(\frac{9}{14}, \frac{31}{14}, -\frac{15}{7})\}$ [2]; è preferibile però mantenere la disposizione verticale dei numeri per ricordare la loro provenienza; l'insieme delle soluzioni del sistema sarà quindi indicato con:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{9}{14} \\ \frac{31}{14} \\ -\frac{15}{7} \end{bmatrix} \right\}$$

Metodo di riduzione (o addizione o combinazione lineare): dato il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -\ 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

[2] Osserviamo che l'insieme delle soluzioni contiene *l'unica* soluzione $(\frac{9}{14}, \frac{31}{14}, -\frac{15}{7})$

sostituiamo la seconda equazione con la somma della seconda e della prima moltiplicata per -1:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

sostituiamo la terza con la somma di se stessa con la prima moltiplicata per -2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_2 + 4x_3 = 23 \end{cases}$$

le ultime due equazioni contengono solo x_1 e x_3, il sistema è ridotto; sostituiamo la seconda equazione con la somma di se stessa e della terza moltiplicata per 3 e poi scambiamo di posto la seconda e la terza:

$$\xrightarrow{r_2+3r_3} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_2 + 4x_3 = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 + 4x_3 = 23 \\ +16x_3 = 80 \end{cases}$$

procedendo a ritroso come nell'esempio precedente, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

l'insieme delle soluzioni sarà quindi:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

I sistemi lineari con pari equazioni e incognite possono anche non avere soluzioni[3] come il seguente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

la somma di due numeri è sempre *unica*

oppure possono avere *infinite*[4] soluzioni come ad esempio:

[3] Nel caso $2X2$ le rette sono parallele.

[4] In questo caso le rette coincidono.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 = 9 \end{cases}$$

la seconda equazione è la prima moltiplicata per 3

In questo caso sappiamo che le infinite soluzioni si trovano attribuendo un valore arbitrario ad una delle incognite e calcolando l'altro.

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_2 \\ x_1 = 3 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} x_2 = 0 & x_1 = 3 & \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_2 = 1 & x_1 = 4 & \Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vdots & & \end{array}$$

possiamo allora indicare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 3 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

che fornisce tutte le soluzioni in funzione del parametro x_2.

Ma cosa succede se le equazioni sono molte oppure sono in numero maggiore delle incognite o - al contrario - le incognite sono in numero maggiore delle equazioni?

La situazione è complicata e merita una trattazione approfondita alla ricerca di una soluzione completa e omogenea che risolva tutti i casi possibili. Inizieremo nel prossimo paragrafo.

2.2 Definizioni

Definizione 2.2.1. Diciamo *Sistema lineare di m equazioni in n incognite* il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_1 \end{cases}$$

Definizione 2.2.2. Un sistema lineare si dice *a scala* se il primo termine di ogni equazione, esclusa la prima, che ha coefficente diverso da 0 si trova a destra dell'analogo nell'equazione precedente.

Esempio 2.2.1. Un sistema a scala

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_4 + 2x_5 = 3 \\ 4x_5 = 1 \end{cases}$$

i coefficienti non nulli non sono necessariamente successivi a quelli della riga precedente (vedi x_4 nella riga 3)

Definizione 2.2.3. In un sistema a scala il primo coefficiente non nullo di ogni riga si dice *pivot*.

Osservazione. Osserviamo che in un sistema a scala l'ultima riga non deve necessariamente terminare con pivot sull'ultima incognita; è possibile che il pivot cada su una incognita precedente o sia 0; vedremo quale significato attribuire a questi eventi.

Esempio 2.2.2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

ultima riga con pivot sulla penultima incognita

Esempio 2.2.3.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

il pivot sull'ultima riga non c'è; la riga è una impossibilità: il sistema non ha soluzioni.

Esempio 2.2.4.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

il pivot sull'ultima riga non c'è; la riga è un'identità: per le soluzioni bisogna riferirsi alla riga precedente; in questo caso le soluzioni sono infinite.

Osservazione. Un sistema in forma a scala può essere risolto facilmente tenendo conto di tutti i casi che si possono presentare. Il compito di indagare sulla possibilità e sul modo di trasformare un sistema qualsiasi in forma a scala sarà materia del prossimo paragrafo.

Definizione 2.2.4. Un sistema si definisce a *scala ridotta* se, oltre a soddisfare la precedente definizione di sistema a scala:

- ogni coefficiente iniziale è 1;
- ogni coefficiente iniziale è l'unico non nullo della sua colonna.

2.3 Metodo di Gauss

Definizione 2.3.1. In relazione ad un sistema lineare chiamiamo *operazioni di Gauss* o *operazioni gaussiane* le seguenti:

1. Scambio di posto di due equazioni
2. Sostituzione di una equazione con una combinazione lineare della stessa con un'altra.

Osservazione. Riconosciamo nelle operazioni gaussiane le tecniche che abbiamo usato per risolvere i sistemi lineari con il metodo di riduzione o di combinazione lineare. In questo paragrafo preciseremo meglio questo procedimento.

Le operazioni gaussiane permettono di trasformare un sistema in un altro del tutto *equivalente* cioè che ha *le stesse soluzioni* ma che ha una forma immediatamente risolubile.

Teorema 2.3.1. *Le operazioni gaussiane trasformano un sistema lineare in uno equivalente.*

Dim. Facciamo riferimento ad un sistema della forma 2.2.1
to be completed □

Capitolo 3

Matrici

3.1 Definizioni

Definizione 3.1.1. Una matrice (di numeri reali) è una tabella di m x n numeri disposti su m righe e n colonne. Le matrici si scrivono nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Osservazione. Quando usiamo le matrici nel contesto dei sistemi lineari i numeri che compongono la matrice sono i *coefficienti* delle equazioni che compongono il sistema.

I vettori, di per se, sono delle *matrici particolari*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

rispettivamente, la prima matrice viene definita *vettore riga*, con la dimensione 1x3; mentre la seconda matrice viene definita *vettore colonna*, con la dimensione 3x1. Quindi, le righe e le colonne di una matrice possono essere considerate vettori.

E' conveniente dare alcune definizioni in relazione ai tipi e alla struttura delle matrici.

Definizione 3.1.2. Una matrice si dice *nulla* se tutti gli elementi sono 0. Si scive $A = 0$. Ovviamente si capisce dal contesto se lo 0 è una matrice o il numero.

Esempio 3.1.1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definizione 3.1.3. Si dice *trasposta* di una matrice A, e si indica con A^T, la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne. Se A è di tipo mxn, A^T sarà di tipo nxm.

Esempio 3.1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Definizione 3.1.4. Matrici quadrate.

- Una matrice di tipo nxn si dirà *quadrata*.
- Gli elementi $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ di una matrice quadrata costituiscono la *diagonale principale*.
- Gli elementi $a_{1n}, a_{2n-1}, \cdots, a_{n1}$ costituiscono la *diagonale secondaria*. Gli elementi a_{ij} e a_{ji} si dicono *coniugati*.
- Una matrice quadrata si dice *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$ e si dice *emisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall i, j$. In quest'ultimo caso la diagonale principale è tutta nulla poichè $a_{ij} = -a_{ji}$ implica $a_{ii} = 0$.
- Una matrice quadrata si dirà *diagonale* se ha nulli tutti gli elementi non diagonali.
- Una matrice diagonale che abbia tutti 1 sulla diagonale principale di dice *identica*.

Esempio 3.1.3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{matrice quadrata}$$

2 e 4 sono coniugati.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{diagonale principale}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{diagonale secondaria}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & -2 \\ 7 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{matrice simmetrica}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{matrice emisimmetrica}$$

Notiamo che il tipo di A è diverso dal tipo di A^T salvo il caso che entrambe siano di tipo nxn cioè quadrate. Valgono le proprietà:

- $(A^T)^T = A$
- Se A è quadrata allora lo è anche A^T ma in generale $A \neq A^T$
- Se A è quadrata e $A = A^T$ allora A è simmetrica e viceversa.

3.2 Operazioni

Le matrici della stessa dimensione si sommano e si moltiplicano per uno scalare in modo ovvio e del tutto identico a quello dei vettori. Ecco un esempio:

Esempio 3.2.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 3.2.2.

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Possiamo, quindi, concludere che le matrici mxn hanno una *struttura lineare*.

L'esigenza di rappresentare i sistemi lineari attraverso le matrici ci conduce alla definizione di una nuova moltiplicazione che diremo moltiplicazione *righe per colonne*.

Possiamo pensare a questa moltiplicazione come ad una generalizzazione del prodotto scalare di due vettori: supponiamo che $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix}$ allora il prodotto scalare può essere definito come un particolare prodotto *riga per colonna*:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^T \cdot \vec{w} = [v_1, v_2, \cdots, v_n] \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

Generalizzando al caso di due matrici, il prodotto segue la seguente regola: nella posizione i, j-esima della matrice prodotto, va posizionata la somma dei prodotti degli elementi della i-esima riga della prima matrice con gli elementi della j-esima colonna della seconda matrice.

Esempio 3.2.3.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$$

da cui si vede, per esempio, che

$$3 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1$$

e

$$7 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2$$

e così via.

Da quanto detto, risulta che una matrice A di tipo mxn si può moltiplicare per una matrice B di tipo nxp, cioè il numero delle colonne di A deve coincidere con il numero delle righe di B e la matrice risultante avrà tipo mxp.

Esempio 3.2.4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix}$$

Questo esempio mostra che un singolo scalare può essere pensato come matrice 1x1.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -12 & -8 & 4 \\ 3 & 9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Il prodotto appena definito gode delle seguenti proprietà:

- $A(BC) = (AB)C$ associativa
- $A(B + C) = AB + AC$ distributiva a sinistra
- $(B + C)A = BA + CA$ distributiva a destra
- $(AB)^T = B^T A^T$

e se la matrice A è quadrata:

- $A0 = 0A = 0$
- $AI = IA = A$

Osserviamo che il prodotto righe per colonne *non è commutativo* e questo è evidente per matrici di tipo diverso, ma è vero anche in caso di matrici quadrate:

Esempio 3.2.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

come si vede chiaramente i due prodotti sono diversi.

Osserviamo anche che non vale la *legge di annullamento del prodotto* che tutti ricordano dall'algebra elementare: se $AB = 0$ allora o $A = 0$ o $B = 0$ o entrambi. Per le matrici invece può capitare come nel seguente:

Esempio 3.2.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \neq 0$$

ma

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Osserviamo che non vale neanche la legge di cancellazione:

$$\text{se } AB = AC \quad \text{non sempre è } B = C$$

come si dimostra facilmente usando l'osservazione precedente.

Esempio 3.2.7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si vede che $B \neq C$ ma risulta

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

3.3 Determinanti

Il presente paragrafo illustrerà una proprietà fondamentale delle matrici che è legata sia alla risoluzione dei sistemi lineari sia alle trasformazioni lineari, argomenti che studieremo in seguito.

Definizione 3.3.1. Ad ogni matrice quadrata resta associato un unico numero reale che si dice *determinante* della matrice e si indica con: $det(A)$ oppure con $|A|$ oppure, se la matrice è

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

il determinante si indica anche con

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Il determinante è quindi una funzione:

$$\begin{aligned} det: \quad & \mathbb{R}^{nxn} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & A \longmapsto det(A) \end{aligned}$$

La definizione concreta di determinante è ricorsiva, cioè si definisce per il caso $n = 1$ e poi, supposto che sia definito il caso $n - 1$, si definisce il caso n; ovviamente n è la dimensione della matrice cioè il numero delle righe e delle colonne.

Definizione 3.3.2. Il determinante della matrice $A = [a_{11}]$ di dimensione 1 è $|A| = a_{11}$, cioè il numero stesso.

Definizione 3.3.3. Il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ di dimensione 2 è

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definizione 3.3.4. Dato un elemento a_{ij} di una matrice quadrata A di dimensione n, diciamo *minore complementare* di a_{ij} il determinante della matrice di dimensione $n - 1$ ottenuta eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima dalla matrice $|A|$. Tale determinante si indicherà con M_{ij}. Diremo invece *complemento algebrico (o cofattore)* di a_{ij} il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Riassumendo: il complemento algebrico di ciascun elemento a_{ij} si ottiene calcolando il determinante della matrice ottenuta cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima e moltiplicandolo per -1 se $i + j$ è dispari.

Finalmente abbiamo:

Definizione 3.3.5. Diciamo *determinante* della matrice $|A|$ di dimensione n la somma dei prodotti degli elementi di una riga o una colonna qualsiasi della matrice per i corrispondenti complementi algebrici.

Per illustrare la definizione sviluppiamo il determinante di una matrice di dimensione 3.

Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Sviluppiamo i prodotti secondo la colonna 1. Abbiamo:

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

e sviluppando i determinanti di dimensione 2 si ha:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Vediamo qualche esempio numerico:

Esempio 3.3.1. Calcolare il determinante:

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

sviluppandolo secondo gli elementi della prima riga.

Svolgimento:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 2 \cdot 0 - 9 = -12$$

se sviluppiamo il determinante secondo gli elementi della prima colonna, abbiamo:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 8 - 1 = -12$$

stesso risultato.

Dalla definizione di determinante era evidente che il suo valore non poteva dipendere dalla scelta della riga o colonna lungo cui sviluppare; in caso contrario avremmo molti determinanti diversi per la stessa matrice e questo renderebbe inutile la sua definizione. In definitiva vale il:

Teorema 3.3.1. *Il determinante di una matrice quadrata è indipendente dalla linea lungo la quale viene sviluppato.*

Il calcolo dei determinanti di dimensione maggiore, come ci si può aspettare, è molto lungo. Per esempio, un determinante di ordine 4 implica il calcolo di 4 determinanti di ordine 3 ciascuno dei quali implica il calcolo di 3 determinanti di ordine 2 ciascuno dei quali esige 2 moltiplicazioni e una somma per un totale di almeno 72 moltiplicazioni e 36 somme senza i calcoli finali. In tempi non lontani il calcolo veniva effettuato a mano utilizzando alcuni teoremi che sintetizzano le molte proprietà dei determinanti.

Teorema 3.3.2. *I determinanti godono delle seguenti proprietà: data una matrice A quadrata*

- *Se gli elementi di una linea sono tutti nulli allora* $|A| = 0$
- *Se due linee parallele sono proporzionali allora allora* $|A| = 0$
- *Scambiando due linee il determinante cambia segno*
- *Moltiplicando gli elementi di una linea per un numero* $k \neq 0$ *il determinante risulta moltiplicato per* k
- *Il determinante non cambia se si sostituisce una linea con la stessa combinata con un'altra parallela*
- *La somma dei prodotti degli elementi di una linea per i complementi algebrici di una linea parallela è* 0 *(Laplace)*
- *Il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti (Binet)*

A titolo di esempio calcoliamo un determinante del 4 ordine applicando qualcuna delle regole sopraesposte. Ricordiamo comunque che attualmente i determinanti vengono calcolati usando opportuni programmi o librerie specifiche disponibili in rete; questi strumenti consentono il calcolo di determinanti molto grandi in tempi brevissimi.

Esempio 3.3.2. Calcolare il determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Svolgimento: Alla prima riga sommiamo l'ultima:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

ora alla terza riga sommiamo la quarta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 14 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

sviluppando secondo la seconda colonna abbiamo:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 14 & -1 \end{vmatrix}$$

il determinante di dimensione 3 si calcola sommando la seconda riga con la terza moltiplicata per -2:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -26 & 8 \\ 1 & 14 & -1 \end{vmatrix}$$

e sviluppando lungo la prima colonna:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -26 & 8 \end{vmatrix} = -16 - 26 = -42$$

3.4 Matrice inversa

Definizione 3.4.1. Si dice *matrice inversa* di una matrice quadrata A una matrice che moltiplicata a destra o a sinistra per A da per prodotto la matrice identica I. Tale matrice sarà indicata con A^{-1}.

In altre parole la matrice A^{-1} (se esiste) è tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Teorema 3.4.1. *La matrice inversa di A, se esiste, è unica.*

Dimostrazione. Infatti se le matrici inverse fossero due, A^{-1} e B allora si avrebbe

$$A^{-1} = A^{-1} \cdot I = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = I \cdot B = B$$

e quindi $A^{-1} = B$. □

Definizione 3.4.2. Una matrice quadrata si dice *singolare* se il suo determinante è 0. Se il suo determinante è diverso da 0 si dirà *non singolare.*

Teorema 3.4.2. *Una matrice quadrata non singolare ammette una matrice inversa. Una matrice singolare non ammette alcuna matrice inversa.*

Quest'ultimo teorema sottolinea l'importanza della nozione di determinante.

La nozione di matrice inversa avrà anche per noi alcune interessanti applicazioni nel seguito, resta solo da spiegare come la si calcola.

Teorema 3.4.3. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

una matrice quadrata con $|A| \neq 0$. *Allora la matrice inversa è*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

dove

$$\alpha_{ij} = \frac{A_{ij}}{|A|} \qquad \textit{con } A_{ij} = \textit{ complemento algebrico (v. 3.3.4) dell'elemento } a_{ij}.$$

Osservazione. E' evidente che il determinante di A deve essere non nullo trovandosi al denominatore delle frazioni. Si osservi anche che la matrice ha gli elementi trasposti rispetto a quelli originali.

Valgono anche le seguenti proprietà che ci saranno utili in seguito:

Teorema 3.4.4. *Siano A e B matrici quadrate della stessa dimensione. Allora:*

1. *Se A è non singolare allora $(A^{-1})^{-1} = A$*
2. *Se A e B sono non singolari allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*
3. *Se A è non singolare allora lo è anche A^T; inoltre $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*

Illustriamo le proprietà con qualche esempio.

Esempio 3.4.1. Data la matrice

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se sia l'inversa di qualcuna delle seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Svolgimento:

Osserviamo che le matrici C e D non vanno bene perchè non hanno la dimensione richiesta che è 2. Per la matrice B si ha:

$$GB = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

e quindi non è l'inversa. Per la matrice A si ha:

$$GA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

e quindi si tratta dell'inversa.

3.5 Matrici e sistemi lineari

Ogni sistema lineare è un prodotto di matrici $Ax = B$, dove A si dice *matrice incompleta*, x è la colonna delle incognite e B la colonna dei termini noti. La matrice composta dagli elementi di A a cui sono aggiunti, come ultima colonna, gli elementi di B si dice matrice *aumentata* o matrice *completa*.

Esempio 3.5.1. Considerato il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$$

possiamo scriverlo nella forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & -5 \\ 3 & -6 & -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

come si vede, moltiplicando righe per colonne la matrice incompleta dei coefficienti per la matrice (di una sola colonna) delle incognite e uguagliandole ai termini noti si riottengono le equazioni che compongono il sistema.

La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & -5 \\ 3 & -6 & -6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{è la incompleta}$$

mentre la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{è la completa}$$

Definizione 3.5.1. Una matrice si dice in *forma a scala* quando:

- tutte le righe non nulle sono sopra le righe nulle;
- il primo coefficente non nullo di una riga è in una colonna a destra del primo coefficente non nullo della riga soprastante;
- tutti i coefficenti nella colonna sotto il primo coefficiente non nullo, sono nulli.

Esempio 3.5.2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{forma a scala}$$

Definizione 3.5.2. Una matrice si dice in *forma a scala ridotta* quando:

- è una matrice a scala;
- ogni coefficente iniziale della riga è 1;
- il coefficente iniziale non nullo di una riga è l'unico non nullo nella sua colonna.

Esempio 3.5.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{forma a scala ridotta}$$

Per passare da una forma "normale" di matrice a una a scala o a scala ridotta, si introducono le *operazioni* sulle righe, che poi sono le operazioni gaussiane. Dunque:

- sostituzione di una riga con una combinazione lineare della stessa riga con un'altra;
- scambio tra due righe.

E' evidente che le precedenti operazioni sono giustificate dal teorema 2.3.1.
Vale il teorema:

Teorema 3.5.1. *Un sistema ha almeno una soluzione se e solo se la forma a scala della matrice completa corrispondente non ha righe del tipo* $[0 \cdots 0\, b]$ *con* $b \neq 0$*; un sistema che abbia una soluzione, ne ha una unica oppure infinite dipendenti da uno o più parametri.*

Osservazione. Quando le operazioni sulla matrice producono una forma a scala, le ulteriori operazioni sulle righe per ottenere una forma a scala ridotta non cambiano le posizioni dei coefficenti iniziali. Siccome la forma a scala ridotta è unica, *i coefficenti sono sempre nella stessa posizione in ogni forma a scala ottenuta da una data matrice.* Questi coefficenti iniziali corrispondono ai coefficenti iniziali 1 della forma a scala ridotta.

Definizione 3.5.3. In una matrice, una *posizione di pivot* è una posizione che corrisponde a un 1 iniziale nella forma a scala ridotta della matrice. Una *colonna di pivot* è una colonna della matrice che contiene una posizione pivot.

Teorema 3.5.2. *Sia* A *una matrice* $m * n$*; le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- $\forall B \in R^m$*, l'equazione* $Ax = B$ *ha una soluzione;*
- *ogni* $b \in R^m$ *è una combinazione lineare delle colonne di* A*;*
- *le colonne di* A *generano* R^n*;*
- A *ha un pivot per ogni riga.*

Per *soluzione* di un sistema lineare si intende un'insieme di numeri reali - tanti quanti le incognite - che sostituiti al posto delle incognite stesse soddisfano *tutte* le equazioni del sistema. Si è già visto che un sistema lineare può avere o non avere soluzioni e, quando ne ha, possono essere in numero finito o infinito. In questo paragrafo ci poniamo il problema di *trovare le soluzioni* e successivamente indagheremo più a fondo sul problema di determinarne il numero.

Esempio 3.5.4. Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$$

ridurlo in forma a scala e determinare se ha una soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione. Innanzitutto, scriviamo la *matrice completa*:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

1°PASSO: moltiplichiamo per 2 la prima riga e la sommiamo alla seconda riga; moltiplichiamo per -3 la prima riga e la sommiamo alla terza riga.

$$\xrightarrow{\rho_2+2\rho_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\rho_3-3\rho_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2°PASSO: sommiamo alla terza la seconda riga.

$$\xrightarrow{\rho_2+\rho_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

finalmente otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Riscrivendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 & = 0 \\ 3x_3 + x_4 & = 3 \\ 0 & = 5 \end{cases}$$

Dall'ultima *matrice completa*, possiamo dedurre che il sistema è *impossibile* e, quindi, *non ha soluzioni*.

Esempio 3.5.5. Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 3y - z = 5 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$$

ridurlo in forma a scala e determinare se ha una soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione. Innanzitutto, scriviamo la *matrice completa*:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1°PASSO: scambiamo seconda e terza riga.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2°PASSO: moltiplichiamo per -3 la seconda riga e la sommiamo alla terza riga.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -7 & -10 \end{bmatrix}$$

3°PASSO: moltiplichiamo per $-\frac{1}{2}$ la prima riga e la sommiamo alla terza riga.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -7 & -\frac{19}{2} \end{bmatrix}$$

4°PASSO: moltiplichiamo per 2 la terza riga.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -14 & -19 \end{bmatrix}$$

5°PASSO: moltiplichiamo per -1 la seconda riga e la sommiamo alla terza.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -16 & -24 \end{bmatrix}$$

Dalla *forma a scala* ottenuta, deduciamo che il sistema è *possibile* e, quindi, *ha una soluzione*. Proviamo a ricondurci alla *forma a scala ridotta* per poter trovare la soluzione del sistema:
6°PASSO: moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$ la prima riga; dividiamo per -16 la terza riga.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

7°PASSO: moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$ la seconda riga e la sommiamo alla prima.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

8°PASSO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

9°PASSO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

La soluzione, dunque, è $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Da questo esempio osserviamo che il sistema ha una unica soluzione solo se la matrice incompleta è quadrata e, se trasformata a scala, è triangolare superiore; oppure se trasformata a scala ridotta è una matrice identica.

Esempio 3.5.6. Dato il seguente sistema, scritto in forma di *matrice completa*:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

ridurlo in forma a scala e determinare se ha una soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

1°PASSO: moltiplichiamo per 2 la seconda riga e la sommiamo alla terza riga; sommiamo prima e seconda riga.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2°PASSO: scambiamo seconda e terza colonna.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

3°PASSO: moltiplichiamo per $\frac{1}{3}$ la seconda riga; sommiamo seconda e terza riga.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4°PASSO: moltiplichiamo per $\frac{1}{3}$ la seconda riga; sommiamo seconda e terza riga.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5°PASSO: moltiplichiamo per -5 la seconda riga e la sommiamo alla prima.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passiamo ora alla *forma a scala ridotta* per leggere eventuali soluzioni: 6°PASSO: dividiamo per $-\frac{1}{3}$ la prima riga.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per interpretare il risultato, scriviamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_2 & = -1 \\ x_3 & = 2 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che il valore di x_3 è determinato ma non è possibile determinare il valore di x_2 perchè non vi è pivot nella colonna corrispondente. In questo caso portiamo x_2 a destra e lo consideriamo come parametro arbitrario. In tal caso x_2 si dice *variabile libera.*

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{4}{3}x_2 - 1 \\ x_3 & = 2 \end{cases}$$

La matrice incompleta diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha una unica soluzione che però contiene x_2 come parametro. In conclusione le soluzioni sono infinite dipendenti da un parametro $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_2 \\ x_2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Da questo esempio deduciamo i seguenti fatti: se nella matrice a scala compaiono righe di soli zeri, queste possono essere eliminate. Se la matrice a scala non ha un pivot su ogni colonna (quindi per ogni variabile) allora le variabili senza pivot sono *libere* e possono essere considerate come parametri e portate sulla colonna dei termini noti. In questo caso il sistema ha infinite soluzioni.

Illustriamo il caso con un ulteriore esempio.

Esempio 3.5.7. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 & = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 & = 0 \\ x_5 - x_6 & = 2 \end{cases}$$

la matrice completa è:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

osserviamo che le colonne senza pivot sono relative alle variabili x_2, x_4, x_6 che quindi sono libere- Le portiamo dal lato del termine noto:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 & = x_2 + x_4 + x_6 + 1 \\ x_3 + x_5 & = 2x_4 - x_6 \\ x_5 & = x_6 + 2 \end{cases}$$

la matrice incompleta diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che è triangolare superiore e quindi esiste una soluzione dipendente dai parametri scelti.

Sostituendo a ritroso nel sistema si trova: $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 - x_4 + 2x_6 + 1 \\ x_2 \\ 2x_4 - 2x_6 + 2 \\ x_4 \\ x_6 + 2 \\ x_6 \end{bmatrix}$.

Riassumiamo i risultati ottenuti nell'esame degli ultimi esempi. In un sistema a scala:

1. se la matrice incompleta è quadrata e triangolare superiore allora vi è una unica soluzione.
2. se la matrice completa contiene una riga della forma $(0, 0, \cdots, 0, b)$ con $b \neq 0$ allora il sistema non ha soluzioni.
3. se la matrice incompleta non è quadrata allora vi sono colonne che non contengono pivot; le corrispondenti variabili si dicono libere e si considerano parametri; si hanno allora infinite soluzioni; portando le variabili libere a destra e sostituendo a ritroso (oppure riducendo la matrice a scala ridotta) si ricavano i valori delle variabili non libere in funzione dei parametri.

3.6 Esercizi

Esercizio 3.6.1. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Calcolare:

1. $A + B$
2. $\frac{1}{2}A$
3. A^T
4. $\frac{1}{2}(A^T + B^T)$

a. $2A^T - 3B^T$

b. $A + A^T$

c. $A^T + B$

Esercizio 3.6.2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $A^3 = AAA$

Esercizio 3.6.3. Date le matrici

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se P è combinazione lineare di M, N, O, vale a dire se esistono scalari k, h, t tali che $P = kM + hN + tO$.

Esercizio 3.6.4. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -12 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \\ 2 & 29 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolare:

1. $A + B$
2. $A - C$
3. $-2A$
4. $0B$
5. verificare che : $A + (B - C) = (A + B) - C$

a. Trovare una matrice X tale che $A + X = B$

b. Verificare che la matrice X del punto precedente è $X = (B - A) = -(A - B)$

Esercizio 3.6.5. Eseguire i seguenti prodotti fra matrici:

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3.6.6. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dimostrare che $AB = AC$ pur essendo $B \neq C$.

Esercizio 3.6.7. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$ dimostrare che $AB \neq BA$

Esercizio 3.6.8. Calcolare i determinanti:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Esercizio 3.6.9. Calcolare i determinanti (è consentito usare le proprietà descritte nel teorema 3.3.1) :

1. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 6 \\ 5 & -8 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -5 & -1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

Esercizio 3.6.10. Date le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolarne i determinanti e verificare che $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ e che $|C \cdot D| = |C| \cdot |D|$.

Esercizio 3.6.11. Calcolare i determinanti:

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad N = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad P = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 3.6.12. Calcolare i determinanti:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad N = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad P = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Esercizio 3.6.13. Trovare le inverse delle seguenti matrici (se possibile):

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
3. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Esercizio 3.6.14. Trovare le inverse delle seguenti matrici (se possibile):

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Esercizio 3.6.15. Calcolare l'inversa della matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Esercizio 3.6.16. Sia $M = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di t la matrice M è invertibile e calcolarla.

Esercizio 3.6.17. Risolvere i sistemi lineari:

$$1) \quad \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ 2x + 3y + 2z & = 0 \\ x + 2y - z & = 0 \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} 2x + 3y - z & = 1 \\ 4x + 6y - 2z & = 2 \\ 4x + 6y - z & = 2 \end{cases} \quad 3) \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 & = 1 \\ x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.6.18. Risolvere i sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 & = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 & = 1 \\ x_4 + x_5 & = 3 \end{cases}$$

Esercizio 3.6.19. Risolvere il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Esercizio 3.6.20. Nel sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dire per quali valori reali di $k \in \mathbb{R}$ ammette soluzioni e in tale caso trovarle.

Esercizio 3.6.21. Risolvere i sistemi lineari:

$$1) \quad \begin{cases} 2x + 4y + 4z &= 4 \\ x - z &= 1 \\ -x + 3y + 4z &= 3 \end{cases} \qquad 2) \quad \begin{cases} x + 2y + w &= 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w &= 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w &= 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.6.22. Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema:

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ kx + y + z &= 1 - k \\ y + (1-k)z &= 1 \end{cases}$$

ha una unica soluzione e trovarla.

Capitolo 4

Trasformazioni

4.1 Applicazioni fra spazi $\mathbb{R}^n$

Anche nello studio degli spazi $\mathbb{R}^n$ è importante la nozione di funzione. Abbiamo già studiato funzioni di varia natura che associano numeri a numeri; in altre parole abbiamo studiato funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si indicano con

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & y = f(x) \end{aligned}$$

dove $f(x)$ è la descrizione matematica della funzione; abbiamo studiato varie funzioni di natura algebrica e trascendente. Lo studente ricorderà ad esempio le funzioni algebriche:

- $f_1(x) = x^2 + 1$
- $f_2(x) = \sqrt{x-1}$
- $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

e le trascendenti:

- $g_1(x) = \sin x$
- $g_2(x) \ln x$
- $g_3(x) = e^x$

Allo stesso modo possiamo considerare funzioni che associano vettori a vettori. In generale queste verranno chiamate *applicazioni* o *mappe*.

Definizione 4.1.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Una corrispondenza che associa in modo univoco un vettore di A ad un vettore di B si dirà *applicazione* di A in B e si scriverà $T : A \longrightarrow B$. Nel caso che $n = m$ lapplicazione si dirà una *trasformazione* e il motivo di questa definizione sarà chiarito in seguito.

Esempio 4.1.1.

$$T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2(x+y) \end{bmatrix}$$

Osserviamo che non è possibile tracciare un grafico dell'applicazione come nel caso delle funzioni numeriche poichè una coppia di coordinate (dominio,codominio) prevede 5 coordinate numeriche. Ad esempio, il punto $T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ potrebbe essere rappresentato solo come *punto* di $\mathbb{R}^5$ e quindi non visualizzabile.

E' evidente che le uniche applicazioni rappresentabili in un grafico cartesiano sono

- $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (solite funzioni),
- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (il cui grafico è un sottoinsieme di di $\mathbb{R}^3$) ,
- $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (idem).

Il caso $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ è particolarmente importante e le relative applicazioni si chiamano *funzioni di due variabili* il cui grafico, in generale, è una *superficie* immersa nello spazio tridimensionale.

Il caso $T : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, sotto opportune ipotesi, ha un grafico che risulta essere una *curva* nel piano.

Esempio 4.1.2.

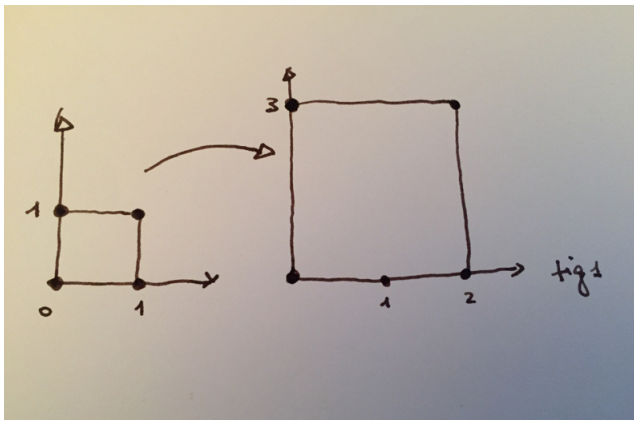
$$T: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$$
$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2 + x_3 \\ x_2^2 - x_4^2 \\ \sin x_4 \\ \sqrt{x_3 - x_4} \\ \ln(x_3 x_4) \end{bmatrix}$$

Questo esempio dimostra l'estrema generalità della nozione di applicazione sia come dimensione degli spazi coinvolti che nella composizione delle immagini.

Esempio 4.1.3.

$$T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$$

Calcoliamo alcune immagini: $T\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$. Se si rappresentano in un piano cartesiano i punti corrispondenti ai vettori del dominio e in un altro piano i corrispondenti punti delle immagini, si può pensare di rappresentare l'applicazione come una *trasformazione* da un piano all'altro.



Come si vede in figura, i vertici del quadrato di lato 1 vengono trasformati nei vertici del rettangolo di lato 2 e 3, ma anche i punti della retta $y = 1$, cioè i puntidi coordinate $\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}$ vengono trasformati nei punti $\begin{bmatrix}2x\\3\end{bmatrix}$ che appartengono alla retta $y = 3$ e quindi tutti i punti del quadrato vengono traformati nei punti del rettangolo. Possiamo pensare l'applicazione come *rimescolamento* dei punti di $\mathbb{R}^2$.

Quest'altimo esempio ci porta a dare la seguente:

Definizione 4.1.2. Sia $T: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ an'applicazione. Se $\forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ si ha:

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
- $T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$

allora l'applicazione si dice *lineare*.

Esempio 4.1.4. L'applicazione

$$T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\2y\\x-y\end{bmatrix}$$

è lineare. Infatti se $\vec{u} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$ si ha:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\begin{bmatrix}x_1 + x_2\\y_1 + y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 + x_2 + y_1 + y_2\\2(y_1 + y_2)\\x_1 + x_2 - y_1 - y_2\end{bmatrix} \qquad \text{e}$$

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} + T\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 + y_1\\2y_1\\x_1 - y_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_2 + y_2\\2y_2\\x_2 - y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 + y_1 + x_2 + y_2\\2(y_1 + y_2)\\x_1 + x_2 - y_1 - y_2\end{bmatrix}$$

che sono uguali. Inoltre

$$T(k\vec{u}) = T\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 + ky_1 \\ 2ky_1 \\ kx_1 - ky_1 \end{bmatrix}$$

e

$$kT(\vec{u}) = k\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ 2y_1 \\ x_1 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 + ky_1 \\ 2ky_1 \\ kx_1 - ky_1 \end{bmatrix}$$

uguali anche in questo caso.

Esempio 4.1.5. L'applicazione

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

non è lineare. Infatti se $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ si ha:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \qquad \text{mentre}$$

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

che sono chiaramente diversi. Inoltre, se $k \in \mathbb{R}$ si ha:

$$T(k\vec{u}) = T\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = (kx_1)^2 + (ky_1)^2$$

mentre

$$kT(\vec{u}) = kx_1^2 + ky_1^2$$

che sono diversi. Per dimostrare la non linearità sarebbe bastato anche un semplice controesempio. Sia $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ allora

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2^2 + 3^2 = 13 \qquad \text{mentre}$$

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1^2 + 1^2 1^2 + 2^2 = 5$$

e analogamente per $T(k\vec{u})$.

Esercizio 4.1.1. Data l'applicazione

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dimostrare che T è lineare.

Questa applicazione si chiama *proiezione* di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ e corrisponde all'*estrazione* delle prime due coordinate dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.1.2. Data l'applicazione

$$T: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$T\left[\vec{u}\right] = \vec{u}$$

dimostrare che T è lineare.

Questa applicazione (trasformazione) si chiama *applicazione (trasformazione) identica* e lascia tutti i punti al loro posto.

Esercizio 4.1.3. Dato il vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e data l'applicazione

$$T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$T\left[\vec{u}\right] = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

è il prodotto scalare per il vettore $\vec{v}$. Dimostrare che T è lineare.

L'esercizio 4.1.3 si può generalizzare ad ogni spazio e a ogni vettore nel senso che il prodotto scalare di tutti i vettori per un vettore prefissato è una applicazione lineare in $\mathbb{R}$.

4.2 Trasformazioni lineari e matrici

4.2.1 Matrice associata ad una applicazione lineare

Le applicazioni (trasformazioni) lineari sono importanti per molti motivi, uno dei quali è il seguente: ogni applicazione lineare è rappresentata da una matrice e viceversa. Iniziamo con la rappresentazione delle applicazioni lineari mediante matrici.

Esempio 4.2.1. Sia $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ una base di $\mathbb{R}^2$ e $D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo l'applicazione lineare T tale che:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè supponiamo di conoscere le immagini dei vettori della base di $\mathbb{R}^2$. Questi vettori saranno combinazione lineare dei vettori della base di $\mathbb{R}^3$, dunque

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b_1\begin{bmatrix}0\\-2\\-0\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = a_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix}0\\-2\\-0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

risolvendo come al solito il sistema, si ottiene:

$$a_1 = 0 \quad b_1 = -\frac{1}{2} \quad c_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad b_2 = -1 \quad c_2 = 0$$

Adesso, dato un qualsiasi vettore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^2$, possiamo calcolarne l'immagine utilizzando le immagini della base:

$$\vec{v} = a\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \qquad \text{allora}$$

$$\begin{aligned}
T(\vec{v}) &= T\left(a\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\right) = a\,T\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + b\,T\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\\
&= a\left(0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) + b\left(1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\\
&= (0a + 1b)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-\frac{1}{2}a - b)\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix} + (1a + 0b)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e quindi

$$T(\vec{v}) = T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\-\frac{1}{2}a - b\\a\end{bmatrix}$$

che è l'immagine del generico vettore tramite l'applicazione T.

Osserviamo che l'applicazione T può essere rappresentata anche dal seguente prodotto di matrici:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\-\frac{1}{2} & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\-\frac{1}{2}a - b\\a\end{bmatrix}$$

se poniamo $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\-\frac{1}{2} & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ allora possiamo scrivere $T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ e quindi possiamo dire che l'applicazione T è *rappresentata* dalla matrice A.

Osserviamo che la matrice A è stata ottenuta considerando le immagini dei vettori della base di $\mathbb{R}^2$ prescelta:

$$T\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

e poi giustapponendo gli scalari ottenuti $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

Osservazione. E' molto importante ricordare che la matrice di una applicazione lineare *dipende* strettamente dalle basi prescelte. Se cambiamo basi, cambia la matrice.

L'esercizio precedente illustra il seguente:

Teorema 4.2.1. *Ogni applicazione lineare T di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ (e quindi ogni trasformazione lineare) è rappresentata da una matrice A di dimensione $m \times n$ che dipende dalle basi prescelte per R^n e $\mathbb{R}^m$.*

La matrice A del teorema è composta dai vettori (colonna) che rappresentano le coordinate delle immagini dei vettori della base di $\mathbb{R}^n$ relativamente alla base di $\mathbb{R}^m$ tramite l'applicazione T. Se $\vec{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\cdots\\v_n\end{bmatrix}$ allora si ha :

$$T\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\cdots\\v_n\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\cdots\\v_n\end{bmatrix}$$

dove il prodotto è righe per colonne. Questo fatto ci conferma che la scelta di questo prodotto non era arbitraria.

Se $m = n$ allora la matrice A è quadrata.

Esempio 4.2.2. Sia

$$\begin{aligned} &T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &T(\vec{v_1}) = 3\vec{w_1} - \vec{w_2} + 17\vec{w_3} \\ &T(\vec{v_2}) = \vec{w_1} + \vec{w_2} - \vec{w_3} \end{aligned}$$

dove $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ e $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ sono basi di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

trovare la matrice dell'applicazione T.

Svolgimento: Dato che $T(\vec{v_1}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix}$ e $T(\vec{v_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ allora si ha che $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$

Esempio 4.2.3. Se $T: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è la *proiezione* cioè $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ allora la matrice rispetto alle basi canoniche $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ e $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ è $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Nel caso favorevole che le basi siano quelle canoniche, il calcolo della matrice associata è più semplice.

Esempio 4.2.4. Sia

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x-y \end{bmatrix}$$

allora calcoliamo le immagini della base canonica:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

inoltre si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

allora si vede che gli scalari che rappresentano le immagini della base di $\mathbb{R}^3$ nella base di $\mathbb{R}^2$ sono direttamente le immagini dei vettori di base e quindi la matrice di T sarà:

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Applicazione lineare associata ad una matrice

Quanto visto nella sezione precedente si può anche invertire: data una matrice A di dimensioni $m \times n$ esiste una applicazione lineare $T: \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathbb{R}^m$ e due opportune basi di R^n e $\mathbb{R}^m$ tali che:

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

verifichiamo la cosa su un esempio:

Esempio 4.2.5. Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; determinare l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A.

Svolgimento:

Evidentemente A è di tipo 2×4 e quindi $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Assumiamo che R^4 e $\mathbb{R}^2$ siano dotati delle basi canoniche. Allora se $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$, si ha

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - x_4 \\ x_3 - x_4 \end{bmatrix}$$

definiamo perciò

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - x_4 \\ x_3 - x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La dimostrazione che T è lineare è lasciata come esercizio.

L'esempio mostra che ad una matrice A di tipo $m \times n$ qualsiasi, viene associata una applicazione $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ma resta da dimostrare che T è *sempre lineare*. Cioè:

Teorema 4.2.2. *Sia $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definita da $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ dove A è una matrice di tipo $m \times n$. Allora T è lineare.*

Dimostrazione. Data una matrice A di tipo $m \times n$, basterà dimostrare che $A(k\vec{v}) = kA\vec{v}$ e che $A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. In tal caso si avrà automaticamente che $T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})$ e $T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$.

$$\begin{aligned} A(k\vec{v}) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}kx_1 + a_{12}kx_2 + \cdots + a_{1n}kx_n \\ \vdots \\ a_{m1}kx_1 + a_{m2}kx_2 + \cdots + a_{mn}kx_n \end{bmatrix} = \\ &= k \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = kA\vec{v} \end{aligned}$$

La dimostrazione che $A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w}$ è analoga e sarà omessa per brevità. $\square$

Possiamo concludere, mettendo assieme i risultati dei due ultimi paragrafi, con il seguente:

Teorema 4.2.3. *Una applicazione $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se può essere scritta come prodotto matrice·vettore.*

Esempio 4.2.6. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- trovare l'applicazione lineare T associata rispetto alle basi canoniche.
- trovare l'applicazione lineare T_1 associata alla stessa matrice rispetto alla base usuale nel dominio $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e alla base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ nel codominio.

Soluzione:

- Sia $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$; rispetto alla base usuale abbiamo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e quindi $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base usuale nel codominio; perciò $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$
- Analogamente si ha: $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ che rispetto alla base B significa $= x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$
  e quindi $T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$

Questo esempio illustra bene il concetto che abbiamo già sottolineato: una matrice rappresenta una applicazione lineare e viceversa ma rispetto a basi specifiche. Se cambiamo le basi cambiano le matrici o cambiano le applicazioni lineari. Non indaghiamo ulteriormente la questione ma facciamo la seguente:

Osservazione. Le basi degli spazi considerati nel seguito *sono sempre quelle canoniche* salvo esplicito avviso contrario.

4.3 Composizione di applicazioni

Lo studente saprà che le funzioni, studiate al terzo anno, si possono comporre, sotto certe condizioni, per ottenere nuove funzioni. La stessa cosa si può dire delle applicazioni e delle trasformazioni a condizione che il codominio della prima applicazione sia contenuto nel dominio della seconda. Per quanto ci riguarda siamo interessati alla composizione delle applicazioni lineari. Vale il seguente:

Teorema 4.3.1. *La composizione di applicazioni lineari è lineare.*

Dimostrazione. Siano $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $P : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lineari. Allora

$$\begin{aligned} P \circ T(k\vec{v} + h\vec{w}) &= P(T(k\vec{v} + h\vec{w})) = P(kT(\vec{v}) + hT(\vec{w})) = kP(T(\vec{v})) + hP(T(\vec{w})) = \\ &= k\,(P \circ T)\,(\vec{v}) + h\,(P \circ T)\,(\vec{w}) \end{aligned}$$

e questo dimostra che $P \circ T$ rispetta le operazioni vettoriali. □

Poichè le applicazioni lineari sono rappresentate da matrici, le applicazioni T, P e $P \circ T$ hanno tutte la rispettiva matrice. Quale sarà la relazione fra queste matrici? Se indichiamo con A_T, A_P e $A_{P\circ T}$ queste matrici, si ha:

$$A_{P\circ T} = A_P \cdot A_T \qquad \text{prodotto righe per colonne}$$

vale a dire:

Teorema 4.3.2. *La composizione di applicazioni lineari è rappresentata dal prodotto righe per colonne delle matrici che rappresentano le componenti.*

Questo giustifica la strana moltiplicazione righe per colonne. Non dimostriamo il teorema ma lo illustriamo con un esempio:

Esempio 4.3.1. Consideriamo le trasformazioni lineari

$$T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad\qquad P: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} \qquad\qquad P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$$

allora $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Inoltre $P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $A_P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Calcoliamo la matrice prodotto righe per colonne:

$$A_{P\circ T} = A_P \cdot A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

applichiamo la matrice al vettore generico: $A_{P\circ T}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 3x-3y \end{bmatrix}$

Verifichiamo che si ottiene lo stesso risultato componendo le trasformazioni:

$$P \circ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\left(T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = P\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 3x-3y \end{bmatrix}$$

Concludiamo che la matrice associata alla applicazione $P \circ T$ è la matrice $A_{P\circ T}$, prodotto righe per colonne delle matrici A_P e A_T.

Osserviamo anche che $P \circ T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 3x-3y \end{bmatrix}$ mentre $T \circ P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 2x-3y \end{bmatrix}$ e quindi $P \circ T \neq T \circ P$, cioè la composizione di applicazioni non è commutativa, come del resto già sapevamo per la non commutatività del prodotto righe per colonne (neanche nel caso di matrici quadrate).

Definizione 4.3.1. La trasformazione

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che manda ogni vettore in se stesso si dice *trasformazione identica*.

Esercizio 4.3.1. Trovare la matrice associata alla traformazione identica.

Definizione 4.3.2. Se S e T sono trasformazioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ allora S e T si dicono trasformazioni *inverse* se $S \circ T = I_n$ e $T \circ S = I_n$. In questo caso S e T si dicono *invertibili* e si scrive $T = S^{-1}$.

Per le trasformazioni invertibili vale il seguente, importante teorema che verrà usato molto nel seguito:

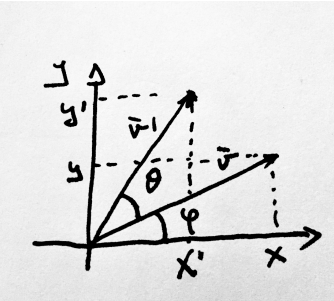
Teorema 4.3.3. *Sia $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare invertibile. Allora la sua matrice associata (basi usuali) A_T è una matrice invertibile (vedi 3.4) e $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$ dove $A_{T^{-1}}$ è la matrice della trasformazione inversa, cioè T^{-1} e $(A_T)^{-1}$ è l'inversa della matrice A_T. In altre parole:* la matrice dell'inversa è l'inversa della matrice.

4.4 Rotazioni

Applichiamo quanto visto ad una trasformazione del piano molto importante: una rotazione di angolo θ attorno all'origine degli assi. Sia

$$\begin{aligned} T_\theta: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

una trasformazione tale che il punto $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ sia il corrispondente vertice del vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dopo che questi sia stato ruotato di θ radianti attorno all'origine degli assi in senso antiorario (v. fig. 4.4)



Possiamo scrivere:

$$x' = |\vec{v'}| \cos(\theta + \phi)$$
$$y' = |\vec{v'}| \sin(\theta + \phi)$$

inoltre, da elementari formule goniometriche ricaviamo:

$$\cos\phi = \frac{x}{|\vec{v}|} \qquad \sin\theta = \frac{y}{|\vec{v}|}$$
$$\cos(\phi + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$
$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta$$

e sostituendo:

$$x' = |\vec{v}|(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)$$
$$y' = |\vec{v}|(\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta)$$
$$\frac{|\vec{v'}|}{|\vec{v}|} = 1 \qquad \text{poichè } |\vec{v'}| = |\vec{v}|$$
$$x' = |\vec{v}| \left(\frac{x}{|\vec{v}|}\cos\theta - \frac{y}{|\vec{v}|}\sin\theta \right) = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = |\vec{v}| \left(\frac{y}{|\vec{v}|}\cos\theta + \frac{x}{|\vec{v}|}\sin\theta \right) = y\cos\theta + x\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta$$

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La rotazione inversa $-\theta$, si ottiene sostituendo $-\theta$ al posto di θ. Allora se

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

si avrà

$$M_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

moltiplicando le due matrici:

$$M_\theta M_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M_{-\theta} M_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e in finale:

$$M_{-\theta} = M_{\theta}^{-1}$$

cioè la matrice di rotazione inversa è l'inversa della matrice di rotazione.

Osservazione. Le rotazioni attorno all'origine sono applicazioni *lineari*. Questo si deduce dal fatto che sono rappresentabili mediante matrici.

Una proprietà molto interessante delle rotazioni è che due di esse, successive, sono rappresentate dalla matrice prodotto (manco a dirlo) righe per colonne delle matrici delle singole.

Infatti, siano M_{θ_1} e M_{θ_2} due matrici rappresentanti le rispettive rotazioni θ_1 e θ_2 e $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un punto di $\mathbb{R}^2$, allora, applicando prima la rotazione θ_1 e poi la θ_2, si ha:

$$\begin{aligned} P' &= M_{\theta_1} P \\ P'' &= M_{\theta_2} P' = M_{\theta_2}\left(M_{\theta_1} P\right) = M_{\theta_2} M_{\theta_1} P \quad \text{applicando associatività del prodotto} \end{aligned}$$

ma si vede che

$$M_{\theta_2} M_{\theta_1} = M_{\theta_1+\theta_2}$$

infatti

$$\begin{aligned} M_{\theta_2} M_{\theta_1} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 & -\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = M_{\theta_1+\theta_2} \end{aligned}$$

Questa proprietà sottolinea, ancora una volta, che il prodotto righe per colonne non è una scelta arbitraria; inoltre essa ci permette di semplificare notevolmente i calcoli, come vedremo presto.

4.5 Coordinate omogenee nel piano

Dato il vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, consideriamo la trasformazione

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(\vec{x}) &= \vec{x} + \vec{v} \end{aligned}$$

cioè $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$. Notiamo che T non è lineare, infatti $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$. Quindi non possiamo rappresentare T attraverso una matrice. Se volessimo rappresentare una trasformazione di $\mathbb{R}^2$ composta da una rotazione e poi una traslazione dovremmo usare la moltiplicazione fra matrici (rotazione) e poi la somma (traslazione). Per ovviare a questa situazione scomoda, si può usare la tecnica seguente.

Definizione 4.5.1. Ad ogni punto $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ associamo tutte le terne $\begin{bmatrix} rx \\ ry \\ r \end{bmatrix}$ con $r \in \mathbb{R} \quad r \neq 0$ che si diranno *coordinate proiettive* o *coordinate omogenee* di P. L'insieme di tutte le terne $\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$ si dice *piano proiettivo* e si indica con $\mathbb{P}^2$. Normalmente le si indicano con lettere maiuscole $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ W \end{bmatrix}$ per non confonderle con le coordinate cartesiane normali $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (affini).

Osserviamo che ogni punto di $\mathbb{R}^2$ è rappresentato da infinite terne proprozionali. Ad esempio, se $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ allora le sue coordinate omogenee sono $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^2$ ma anche $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ oppure $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Per ottenere le coordinate omogenee basta aggiungere la coordinata 1 e poi moltiplicare per uno scalare qualsiasi.

Viceversa, se abbiamo un punto $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^2$ le sue coordinate cartesiane si trovano dividendo per l'ultima coordinata e prendendo le prime due, cioè $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

In sostanza possiamo dire che vi è una corrispondenza fra i punti $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e i punti $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ W \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^2$ con $W \neq 0$, $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ W \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ considerando identificati i punti che hanno coordinate proprozionali. In effetti la definizione formale di piano proiettivo è la seguente:

Definizione 4.5.2. Su $\mathbb{R}^3 \setminus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ cosideriamo la relazione $\sim$ così definita

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \iff x_1 = kx, y_1 = ky, z_1 = kz$$

La relazione $\sim$ è di equivalenza e quindi definisce un nuovo insieme

$$\mathbb{P}^2 = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) / \sim$$

L'insieme $\mathbb{P}^2$ si dice *piano proiettivo.*

Abbiamo visto che ad ogni punto $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ W \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^2$ con $W \neq 0$ corrisponde un punto di $\mathbb{R}^2$, ma se $W = 0$ cosa si ottiene? I punti di $\mathbb{P}^2$ con $W = 0$ si dicono *punti impropri* o *punti all'infinito* e possiamo farli corrispondere alle *direzioni* delle rette di $\mathbb{R}^2$. In altre parole, interpretiamo le coordinate omogenee $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ come punto all'infinito nella direzione di $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Esempio 4.5.1. Trovare il punto all'infinito nella direzione del vettore $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Soluzione

Si tratta del punto $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e di tutti i suoi multipli.

Esempio 4.5.2. Trovare il punto all'infinito sulla retta $4x - 3y + 1 = 0$.

Soluzione

Sappiamo che le rette parallele hanno tutte la stessa direzione e quindi lo stesso punto all'infinito; basterà allora trovare il punto all'infinito di $4x - 3y = 0$, parallela alla retta originale e passante per l'origine. Prendiamo, come estremo di un vettore parallelo alla retta, un punto qualsiasi della stessa, diverso dall'origine, per esempio $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Il punto all'infinito sarà $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Soluzione alternativa

Considerando che $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{W} \\ \frac{Y}{W} \end{bmatrix}$ e sostituendo si ha:

$$4\frac{X}{W} - 3\frac{Y}{W} + 1 = 0 \qquad \text{cioè } 4X - 3Y + W = 0$$

quella ottenuta è *l'equazione omogenea* della retta. Una qualsiasi soluzione con $W \neq 0$ è un punto proprio della retta mentre una soluzione con $W = 0$ è il punto improprio; per esempio $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ è il punto improprio.

4.6 Trasformazioni del piano in coordinate omogenee

Torniamo al nostro problema iniziale. Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v} = & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

T rapresenta una traslazione di vettore $\vec{v}$ ma non si può rappresentare mediante moltiplicazione di matrici, poichè non è lineare.

Se passiamo a coordinate omogenee e consideriamo la matrice: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ abbiamo:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}$$

che in coordinate omogenee rappresenta il punto traslato $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$. In altre parole: in coordinate omogenee anche la traslazione si realizza con una moltiplicazione matriciale e quindi diventa una trasformazione lineare che possiamo comporre con le altre trasformazioni mediante prodotto di matrici.

Le rotazioni in coordinate omogenee diventano: $A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e quindi:

$$\mathbb{R}_\phi \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ora possiamo concatenare le trasformazioni lineari e realizzarle con un'unica matrice. Consideriamo, ad esempio, la traslazione di vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e la rotazione $\mathbb{R}_\phi$; applicandole di seguito si ha:

$$\mathbb{R}_\phi T_{\vec{v}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R}_\phi \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+a)\cos\phi - (y+b)\sin\phi \\ (x+a)\sin\phi + (y+b)\cos\phi \\ 1 \end{bmatrix}$$

Moltiplicando le rispettive matrici si ha:

$$\mathbb{R}_\phi T_{\vec{v}} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a\cos\phi - b\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & a\sin\phi + b\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

applicando la matrice ottenuta al vettore $\vec{v}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_\phi T_{\vec{v}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a\cos\phi - b\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & a\sin\phi + b\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi + a\cos\phi - b\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi + a\sin\phi + b\cos\phi \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (x+a)\cos\phi - (y+b)\sin\phi \\ (x+a)\sin\phi + (y+b)\cos\phi \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

come si voleva.

Ricordiamo che la composizione di trasformazioni non è commutativa ed è anche ovvio che ruotare e traslare non è la stessa cosa che traslare e ruotare.

Esempio 4.6.1. Rotazione rispetto a un punto arbitrario.

Supponiamo di voler ruotare il piano rispetto al punto $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$; quindi una rotazione attorno ad un punto diverso dall'origine. La soluzione consiste nello spostare il punto $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ nell'origine, ruotare e poi rispostare il punto al suo posto. Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ indica il punto, R_ϕ la rotazione, allora si ha:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T_{\vec{v}} \cdot \mathbb{R}_\phi \cdot T_{-\vec{v}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Come abbiamo già visto, è indifferente applicare successivamente le trasformazioni al punto $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ oppure eseguire prima la moltiplicazione delle matrici. Usiamo quest'ultimo

metodo:

$$
\begin{aligned}
T_{\vec{v}} \cdot \mathbb{R}_{\phi} \cdot T_{-\vec{v}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & -a\cos\phi + b\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & -a\sin\phi - b\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a(1-\cos\phi) + b\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & b(1-\cos\phi) - a\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Applichiamo la trasformazione al punto $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a(1-\cos\phi) + b\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & b(1-\cos\phi) - a\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi + a(1-\cos\phi) + b\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi + b(1-\cos\phi) - a\sin\phi \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vogliamo, ad esempio, ruotare il piano di 30° rispetto al punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, si ha:

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\frac{\sqrt{3}}{2} - y\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

L'origine, ad esempio, viene spostata nel punto $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

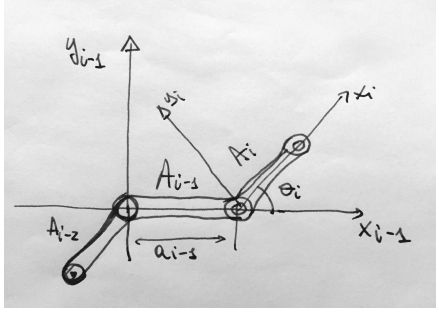
4.7 Applicazione: braccio robotico

Per realizzare un modello di braccio robotico[1](bidimensionale) associamo ad ogni braccio un body frame[2] e vediamo come un braccio si muove rispetto a quelli cui è connesso.

[1]Esempio tratto da: D.Poole, *Linear Algebra*, Brooks/Cole

[2]FRAME: un *sistema di riferimento* (brevemente *frame*) sono due assi ortogonali assieme a tre punti di coordinate $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in uno spazio $\mathbb{R}^2$. In altre parole, una base ortonormale in $\mathbb{R}^2$. Un frame

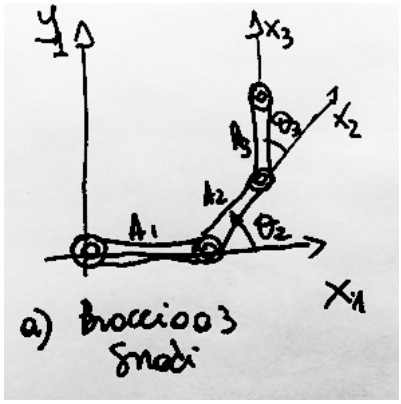
Per ogni braccio A_i siano $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ le coordinate associate al body frame, con x_i allineato al braccio. La lunghezza di A_i è indicata con a_i e l'angolo fra x_i e y_i è indicata con θ_i. La giunzione di A_i con A_{i-1} ha coordinate $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ rispetto al frame di A_i e $\begin{bmatrix} a_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ rispetto a quello di A_{i-1} (v. fig.4.7).

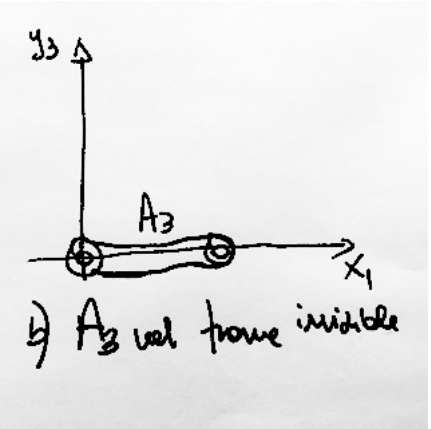


Rispetto al sistema A_{i-1}, il body frame di A_i è stato ruotato di un angolo θ_i e poi traslato di $\begin{bmatrix} a_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$. La trasformazione, in coordinate omogenee, è

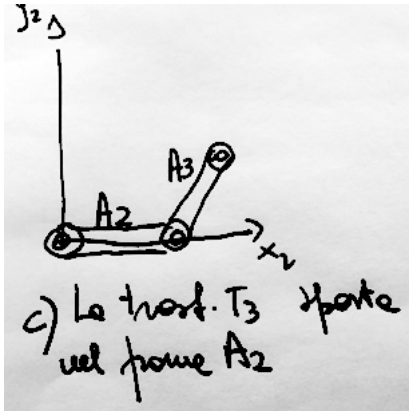
$$T_i = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i & a_{i-1} \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

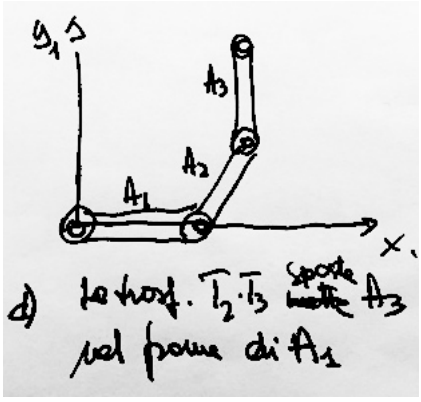
Per vedere un esempio pratico, consideriamo le prossime 4 figure:





inerziale è un frame globale che non cambia mai. Un *body frame* è un frame che può essere ruotato, traslato e, in generale, trasformato relativamente ad un frame inerziale e che può cambiare il suo stato nel tempo. I body frame sono utili quando associati alla modellizzazione di bracci robotici poichè si muovono assieme ai bracci cui sono associati. Se un vettore è descritto nel sistema di coordinate di un frame e si vuole descriverlo in un sistema di coordinate di un altro frame, basta ruotare e traslare il vettore con le stesse trasformazioni che portano un frame nell'altro.





Supponiamo che ciascun braccio abbia lunghezza $a = 2$ e che sia ruotato di 45° rispetto al precedente. La fig.4.7b) mostra il braccio A_3 nella posizione iniziale. La trasformazione

$$T_3 = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 2 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

provoca una rotazione di 45° e poi una traslazione di 2 unità. La Fig. 4.7 c) mostra come T_3 sposti A_3 nella giusta posizione relativamente al frame A_2.

Poi applichiamo

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 2 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

al risultato precedente; in questo modo sposteremo A_3 e A_2 nella posizione corretta relativamente ad A_1 come si vede in Fig. 4.7 d). Non occorre applicare altre trasformazioni perchè A_1 rimane nella posizione iniziale.

Se vogliamo conoscere le coordinate della posizione terminale (la "mano") del braccio robotico, dati i parametri di lunghezza e angolatura (quella che si chiama *cinematica diretta*) dobbiamo calcolare la posizione finale del punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ dopo aver applicato le trasformazioni T_3 e T_2; quindi:

$$T_2 T_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2+\sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le coordinate del punto terminale si confermano facilmente osservando la figura iniziale. Notiamo che le matrici di T_3 e T_2 sono la stessa e che il loro prodotto è stato indicato come potenza.

4.8 Coordinate omogenee nello spazio

In analogia con quanto visto per le coordinate omogenee nel piano, possiamo considerare le coordinate omogenee per i punti (vettori) di $\mathbb{R}^3$ ottenendo lo *spazio proiettivo* $\mathbb{P}^3$. Un punto dello spazio $\mathbb{R}^3$ di coordinate $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ è rappresentato in coordinate omogenee da un punto cartesiano $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ o da ogni multiplo $\begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \\ k \end{bmatrix}$ $k \in \mathbb{R} \quad k \neq 0$.

I punti $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix}$ con $W \neq 0$ rappresentano i punti *all'infinito* nella direzione del vettore tridimensionale $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$. L'insieme di tutte le coordinate omogenee $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix}$ è chiamato spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$.

Esempio 4.8.1. Le coordinate omogenee $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$ rappresentano tutte il punto $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

4.9 Trasformazioni dello spazio in coordinate omogenee

Come nel caso delle trasformazioni di $\mathbb{R}^2$, anche le trasformazioni di $\mathbb{R}^3$ che ci interessano, sono rappresentabili attraverso matrici.

4.9.1 Traslazioni

Una traslazione di vettore $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ si rappresenta attraverso la matrice $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Infatti

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+a\\y+b\\z+c\end{bmatrix}$$

e in coordinate omogenee

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+a\\y+b\\z+c\\1\end{bmatrix}$$

In due dimensioni le rotazioni avvengono attorno ad un punto che può essere l'origine o un altro punto. In 3 dimensioni le rotazioni avvengono attorno ad un asse cartesiano o attorno a qualche retta arbitraria.

4.9.2 Rotazioni

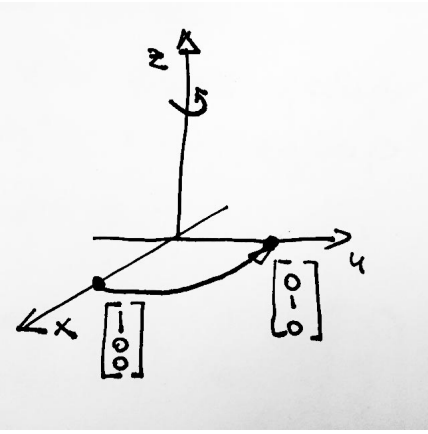
Vediamo le rotazioni attorno agli assi coordinati che sono dette *rotazioni di Eulero* o *rotazioni primarie*.

Una rotazione attorno all'asse z può essere pensata come una rotazione in cui un punto P ruota in un piano parallelo al piano XY. Utilizzando la stessa costruzione del caso bidimensionale, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}x' &= x\cos\beta - y\sin\beta\\ y' &= x\sin\beta + y\cos\beta\\ z' &= z\end{aligned}$$

e quindi la rotazione diventa:

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta&-\sin\beta&0&0\\\sin\beta&\cos\beta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$



Per una rotazione di 90° attorno all'asse z si ha:

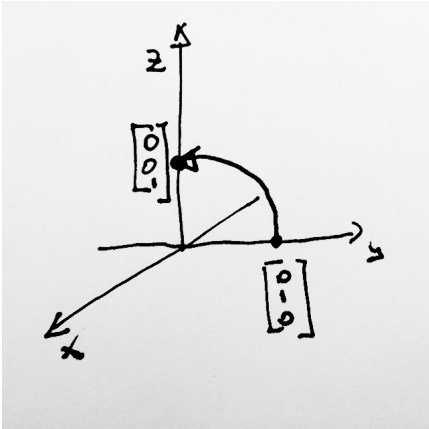
$$\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Analogamente, se ruotiamo attorno all'asse x si avrà:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos\beta - z\sin\beta \\ z' &= y\sin\beta + z\cos\beta \end{aligned}$$

e in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



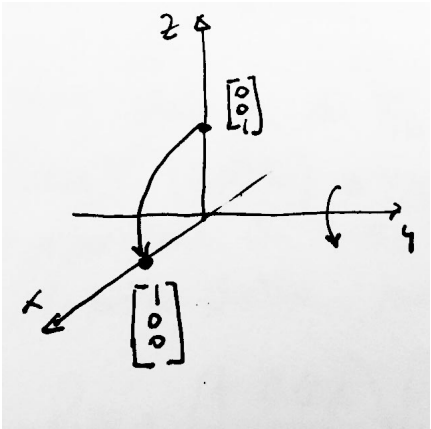
Per una rotazione di 90° attorno all'asse x si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ruotando attorno all'asse y si avrà:

$$\begin{aligned} x' &= z\sin\beta + x\cos\beta \\ y' &= y' \\ z' &= z\cos\beta - x\sin\beta \end{aligned}$$

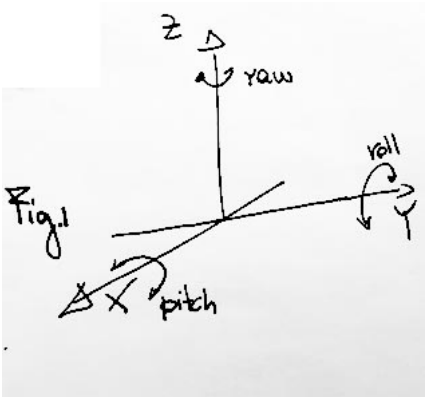
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Per una rotazione di 90° attorno all'asse y si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici ora considerate rappresentano rotazioni in senso *antiorario* se guardate dall'asse di rotazione che punta verso l'osservatore.



Tradizionalmente gli assi x, y e z sono indicati con i nomi

- roll = rollio = asse y
- pitch = beccheggio = asse x
- yaw = imbardata = asse z

e le rotazioni attorno a questi assi sono note come *rotazioni di Eulero.*

Esempio 4.9.1. Una rotazione di $\frac{\pi}{6}$ lungo l'asse y (rollio) seguita da una traslazione di vettore $T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ è realizzata dalla matrice:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come visto, le rotazioni più semplici sono attorno agli assi coordinati. Componendo rotazioni successive attorno agli assi possiamo ottenere una rotazione generica attorno ad una retta qualsiasi. E' importante decidere un ordine di rotazione consistente poichè l'ordine in cui sono eseguite le rotazioni è decisivo. Ordini diversi producono risultati diversi. Una sequenza abbastanza standardizzata è la seguente:

- Rotazione attorno all'asse z, R_ϕ
- Rotazione attorno all'asse y, R_θ
- Rotazione attorno all'asse x, R_ψ

La corrispondente equazione matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_\psi R_\theta R_\phi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

se scriviamo $R_{\psi\theta\phi} = R_\psi R_\theta R_\phi$ si ha :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{\psi\theta\phi} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Moltiplicando le singole matrici illustrate prima, si ottiene:

$$R_{\psi\theta\phi} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi & \sin\theta & 0 \\ \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi & \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\theta\sin\phi & -\sin\psi\cos\theta & 0 \\ \sin\psi\sin\phi - \cos\psi\sin\theta\cos\phi & \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\theta\sin\phi & \cos\psi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

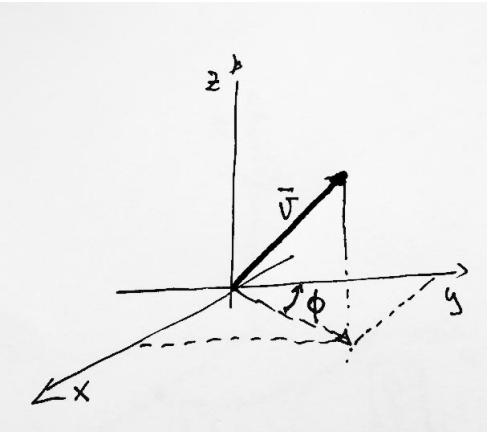
4.9.3 Rotazioni di asse arbitrario

E' semplice convincersi che una trasformazione come quella del paragrafo precedente è essa stessa una rotazione attorno ad una retta per l'origine diversa da uno degli assi. Si pone allora il problema - molto più interessante - data una retta qualsiasi, trovare la matrice di una rotazione di angolo ψ attorno a questa retta. Illustriamo la procedura:

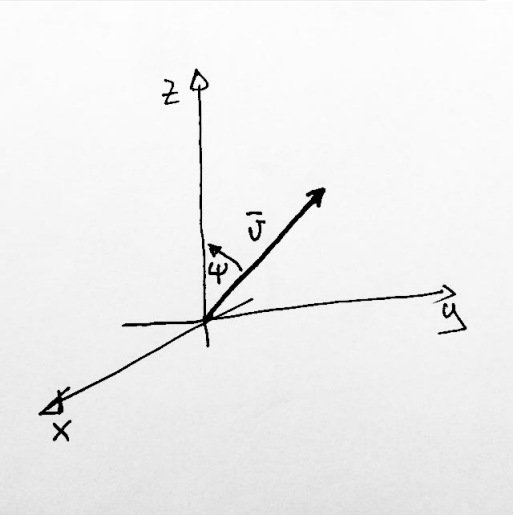
Per comodità, indichiamo con $R_{z,\psi}$ la rotazione attorno all'asse z in senso antiorario, guardando la punta dell'asse, di un angolo ψ. Analogamente per gli altri assi.

Ora, supponiamo di voler ruotare di un angolo θ attorno all'asse di versore $\vec{v}$, che, per semplicità, pensiamo passante per l'origine[3], di un angolo α nel senso antiorario:

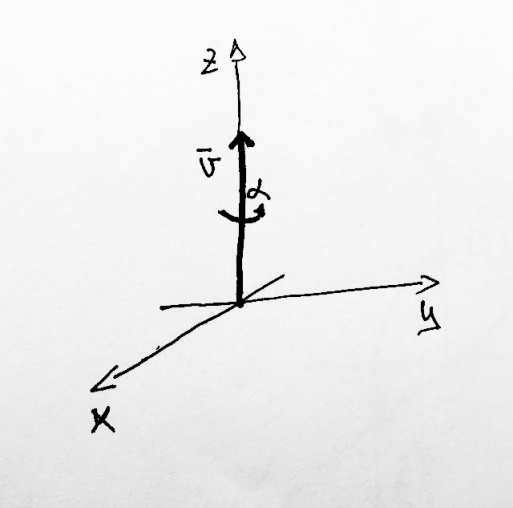
[3]Se non passasse per l'origine, potremmo, attraverso una traslazione, riportarci a questo caso e, alla fine, operare con la traslazione inversa.



Ruotiamo di un opportuno angolo ϕ attorno all'asse z in modo che $\vec{v}$ giaccia sul piano zy. $R_{z,\phi}$. Nella figura ϕ risulta positivo.



Ruotiamo attorno all'asse x di un angolo ψ in modo da far coincidere $\vec{v}$ con l'asse z. $R_{x,\psi}R_{z,\theta}$. Nella figura ψ risulta positivo.



Ruotiamo attorno all'asse z di un angolo α. $R_{z,\alpha}R_{x,\psi}R_{z,\theta}$. Nella figura α risulta positivo.

Ora invertiamo le rotazioni ausiliarie:
Invertiamo la rotazione attorno all'asse x di un angolo $-\psi$ che sarà negativo (orario).

$$R_{x,-\psi}R_{z,\alpha}R_{x,\psi}R_{z,\theta}$$

Invertiamo la rotazione attorno all'asse z di un angolo $-\theta$ che sarà negativo (orario).

$$R_{z,-\theta}R_{x,-\psi}R_{z,\alpha}R_{x,\psi}R_{z,\theta}$$

La trasformazione finale sarà:

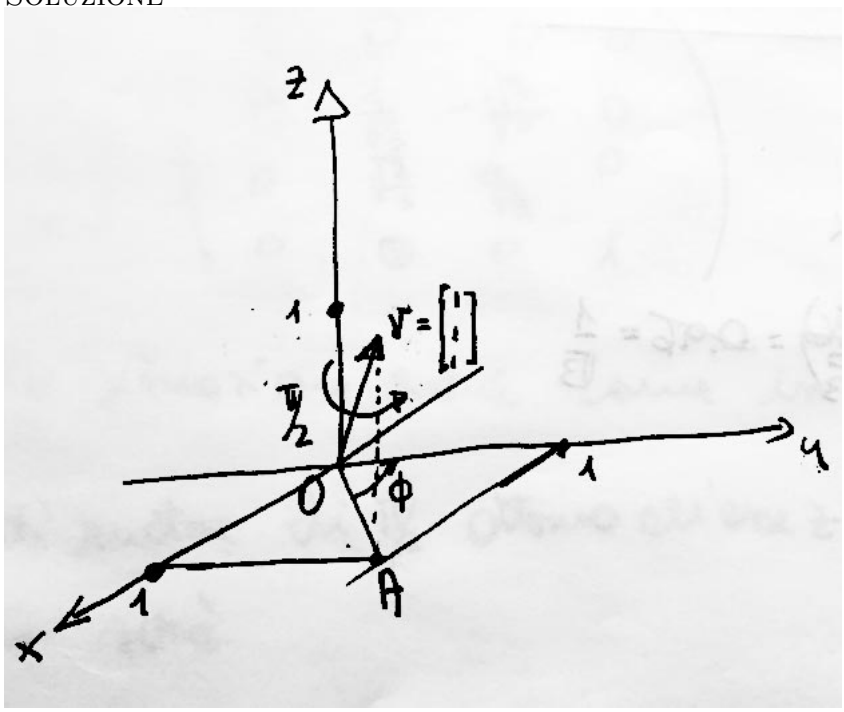
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{z,-\theta}R_{x,-\psi}R_{z,\alpha}R_{x,\psi}R_{z,\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

E' ovvio che la soluzione trovata non è unica. Infatti avremmo potuto dispore il vettore $\vec{v}$ lungo uno qualsiasi degli assi. La sequenza delle trasformazioni sarebbe diversa ma la matrice finale sarebbe la stessa.

Evitiamo di esplicitare la relazione ora descritta che sarebbe molto lunga. Piuttosto la usiamo per esplorare il seguente:

Esempio 4.9.2. Si voglia ruotare il sistema di coordinate di $\frac{\pi}{2}$ attorno alla retta per l'origine parallela al vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

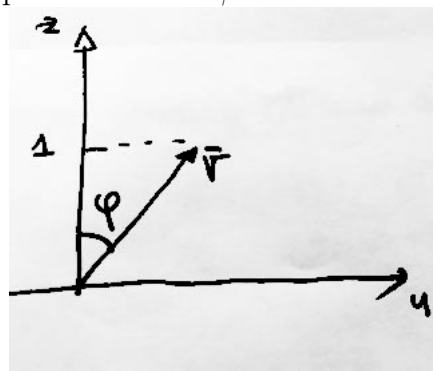
Soluzione



Dalla figura si deduce che l'angolo ϕ è di $\frac{\pi}{4}$. La matrice $R_{z,\frac{\pi}{4}}$ sarà:

$$R_{z,\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

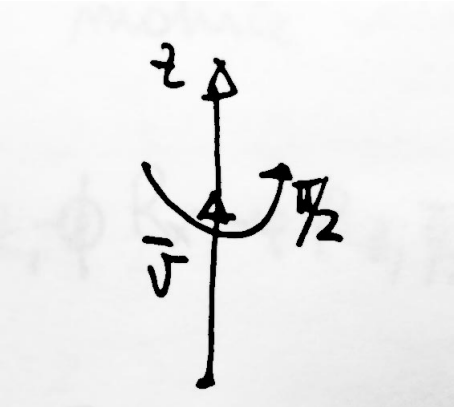
Dopo la rotazione ϕ la situazione è riassunta nella figura:



$\cos\psi = \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.96$. La matrice $R_{x,\psi}$ sarà:

$$R_{z,0.96} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cos 0.96 & -\sin 0.96 & 0 \\ 0 & \sin 0.96 & \cos 0.96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dopo la rotazione $R_{x,\psi}$ la situazione sarà come in figura:



Si tratta di ruotare di $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z, la matrice sarà:

$$R_{z,\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cerchiamo ora le rotazioni inverse. Rotazione oraria attorno all'asse x di -0.96:

$$R_{x,-0.96} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione oraria attorno all'asse z di $-\phi = -\frac{\pi}{4}$:

$$R_{z,-\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice complessiva risulta:

$$R_{z,-\phi}R_{x,-\psi}R_{z,\frac{\pi}{2}}R_{x,\psi}R_{z,\phi} = R_{z,-\frac{\pi}{4}}R_{x,-\psi}R_{z,\frac{\pi}{2}}R_{x,\psi}R_{z,-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+3\right) & -\frac{1}{9}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-3\right) & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+3\right) & \frac{1}{9}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-3\right) & 0 \\ -\frac{1}{9}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+3\right) & \frac{1}{9}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-3\right) & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.10 Esercizi

Linearità:

Esercizio 4.10.1. Stabilire quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

a) $T: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$

b) $T: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad T\left[\vec{u}\right] = -\vec{u}$

c) $T: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad T\left[\vec{u}\right] = \vec{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ y \end{bmatrix}$

e) $T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y-x \end{bmatrix}$

f) $T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

g) $T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = xy$

Esercizio 4.10.2. Stabilire se $T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

è lineare.

Esercizio 4.10.3. Determinare una trasformazione lineare $T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.10.4. Dimostrare che se $T: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare allora $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

Esercizio 4.10.5. Dimostrare che se $T: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare allora $T(-\vec{u}) = -T(\vec{u})$.

Matrici associate:

Esercizio 4.10.6. Determinare la matrice associata alle seguenti applicazioni lineari:

1. $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
2. $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
3. $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.7. Determinare la matrice associata alle seguenti applicazioni lineari:

1. $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad T(\vec{v}) = 7\vec{v}$
2. $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad T(\vec{v}) = -\vec{v}$
3. $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.8. Sia $A = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ svolgere l'esercizio come nell'esempio 4.2.6.

Esercizio 4.10.9. Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ svolgere l'esercizio come nell'esempio 4.2.6 ma assumendo $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ come base del codominio.

Esercizio 4.10.10. Sia $T_a : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con matrice associata $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Calcolare $T_a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T_a \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.11. Sia $T_a : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con matrice associata $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Calcolare $T_a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T_a \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.12. Negli esercizi successivi, dimostrare che le applicazioni sono lineari calcolando prima la loro matrice associata.

1. $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$
2. $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ -x \\ 3x-7y \end{bmatrix}$
3. $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ 2x+y-3z \end{bmatrix}$
4. $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.13. Sia

$$T : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x+y \end{bmatrix}$$

dimostrare che T non è lineare osservando che non è possibile trovare la matrice associata.

Esercizio 4.10.14. Per ciascuna delle matrici seguenti, trovare la trasformazione lineare associata e poi descrivere la trasformazione geometrica corrispondente determinando l'immagine del quadrato $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.15. Sia $T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(\vec{i}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad T(\vec{j}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dove $\vec{i}, \vec{j}$ sono la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

1. Trovare T
2. Trovare la matrice M_T
3. Stabilire se esiste $\vec{v}$ tale che $T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.16. Sia

$$T: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+z \\ 2y \\ x-2z \\ w \end{bmatrix}$$

1. Stabilire se T è invertibile
2. Trovare l'inversa T^{-1}

Esercizio 4.10.17. Sia

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y+z \end{bmatrix}$$

1. Dimostrare che T è lineare
2. Calcolare $T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Trovare M_T
4. Calcolare $M_T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
5. Verificare che $V = \left\{ \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$
6. Trovare la matrice M_{TV} associata alla applicazione T rispetto alla base V in $\mathbb{R}^3$ e alla canonica in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4.10.18. Sia

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 3y + z \\ 4z \end{bmatrix}$$

1. Determinare la matrice M_T rispetto alle basi canoniche
2. Trovare la matrice M_{TB} rispetto alla base $B = \left\{ \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ e la base canonica nel codominio
3. Determinare la matrice M_{TBB} rispetto alla base B sia nel dominio che nel codominio.

Esercizio 4.10.19. Per ciascuna delle matrici seguenti, trovare la trasformazione lineare associata e la dimensione dei relativi spazi; assumere che le basi siano le canoniche.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composizione di matrici e rotazioni:

Esercizio 4.10.20. Siano

$$T: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad\qquad S: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad S\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 3x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

1. Trovare $S \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
2. Dimostrare che S, T e $S \circ T$ sono applicazioni lineari.

Esercizio 4.10.21. Trovare la matrice di una rotazione di 60° in senso orario (inversa della rotazione in senso orario).

Esercizio 4.10.22. Trovare la matrice associata alle seguenti trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$:

1. Rotazione antioraria di 120°
2. Rotazione antioraria di 30°
3. Rotazione antioraria di 60°
4. Rotazione antioraria di 90°
5. Riflessione rispetto alla retta $y = x$
6. Riflessione rispetto alla retta $y = -x$

Esercizio 4.10.23. Stabilire se la proiezione sull'asse x $\left(T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ è invertibile e, se lo è, trovare l'inversa.

Esercizio 4.10.24. Negli esercizi che seguono, si trovi la matrice della applicazione composta $S \circ T$ sia direttamente che mediante il prodotto di matrici associate:

1. $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \qquad S\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$
2. $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix} \qquad S\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$
3. $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix} \qquad S\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.25. Trovare la matrice della composizione delle trasformazioni: rotazione antioraria di 60° seguita da una riflessione rispetto a $y = x$.

Esercizio 4.10.26. Come nell'esercizio precedente per una riflessione rispetto a $y = x$ seguita da una rotazione oraria di 30° e poi una riflessione rispetto a $y = -x$.

Coordinate omogenee nel piano:

Esercizio 4.10.27. Trovare il punto all'infinito nella direzione dei vettori:

$$a) \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.10.28. Trovare il punto all'infinito sulla retta $x - y + 3 = 0$

Esercizio 4.10.29. Trovare il punto di intersezione delle rette $2x - 9y = 5$ e $2x - 9y = 7$. E' un punto proprio?

Esercizio 4.10.30. Trovare il punto all'infinito delle rette $ax + by + c = 0$ al variare di $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Concludere che tutte le rette di direzione $\begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$ si incontrano in un unico punto improprio.

Trasformazioni in coordinate omogenee nel piano:

Esercizio 4.10.31. Scrivere la matrice, in coordinate omogenee, di una rotazione di angolo:

$$a)\frac{\pi}{2} \qquad b)\frac{\pi}{3} \qquad c)2\pi$$

Esercizio 4.10.32. Scrivere la matrice, in coordinate omogenee, di una rotazione oraria di angolo:

$$a)\frac{\pi}{2} \qquad b)\frac{\pi}{3} \qquad c)\pi \qquad d)2\pi$$

Esercizio 4.10.33. Trovare la matrice omogenea di $\mathbb{R}_{\phi}^{-1}$.

Esercizio 4.10.34. Trovare le matrici omogenee delle riflessioni rispetto all'asse x e all'asse y.

Esercizio 4.10.35. Determinare la matrice della trasformazione che realizza rispettivamente:

1. Traslazione di $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e rotazione di $\phi = 45°$

2. Rotazione di $\phi = 45°$ e traslazione di $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. Rotazione di $\phi = 90°$ rispetto al punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. Rotazione di $\phi = 180°$ rispetto al punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Esercizio 4.10.36. Un quadrato ha vertici $A(1,1), B(2,1), C(2,2)$ e $D(1,2)$. Trovare le coordinate dei vertici dopo che il quadrato è ruotato attorno al punto B di $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Esercizio 4.10.37. Dimostrare che la composizione di due rotazioni, la prima di angolo ϕ attorno al punto $P(x_0, y_0)$ e la seconda di angolo $-\phi$ attorno al punto $Q(x_1, y_1)$ diverso da P, è equivalente ad una traslazione.

Esercizio 4.10.38. Trovare la matrice di rotazione di un angolo di $\frac{\pi}{3}$ rispettivamente attorno:

1. asse z
2. asse y
3. asse x

Esercizio 4.10.39. Dato il vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ giacente sul piano xy, trovare la matrice di rotazione attorno alla retta per l'origine parallela al vettore $\vec{v}$, rispettivamente:

1. di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$
2. di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$
3. di un angolo $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Esercizio 4.10.40. Realizzare una funzione che ammetta in ingresso un vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ e un angolo α e che dia in uscita rispettivamente:

1. la sequenza delle matrici che realizza la rotazione attorno all'asse del vettore $\vec{v}$
2. la matrice della rotazione complessiva.

Esercizio 4.10.41. Realizzare un programma che accetta in ingresso un punto $p \in \mathbb{R}^3$, $p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e produce in uscita le coordinate del punto p' trasformato di p tramite la rotazione attorno a $\vec{v}$ di un angolo α.

Esercizio 4.10.42. Dati i punti $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo $\alpha = \pi$ trovare la matrice di rotazione di angolo α attorno alla retta passante per P e Q. Considerare il problema che la retta non passa per l'origine degli assi.

Capitolo 5

Matrici e rotazioni

5.1 Introduzione

In questo capitolo esaminiamo alcune proprietà delle matrici di rotazione che saranno utili nel seguito. Rinunciamo alla dimostrazione dei teoremi per ragioni di brevità.

Una rotazione attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$ di un angolo ϕ è rappresentata dalla matrice

$$M = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ è un vettore di $\mathbb{R}^2$, allora il prodotto

$$M\vec{v} = \vec{w} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\cos\phi - v_2\sin\phi \\ v_1\sin\phi + v_2\cos\phi \end{bmatrix}$$

fornisce le coordinate del vettore $\vec{w}$ trasformato dalla rotazione di matrice M. La trasformazione si pensa applicata al vettore $\vec{v}$ mentre gli assi si considerano fermi. In altre parole, è come se il vettore $\vec{v}$ ruotasse e assumesse la posizione $\vec{w}$. Si può pensare invece che gli assi ruotino in senso antiorario e il vettore $\vec{v}$ resti fermo. Ovviamente le sue coordinate cambierebbero. E' facile capire che, in questo caso, è come se ruotassimo il vettore in senso orario e quindi la rotazione fosse di angolo $-\phi$, di matrice

$$M^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

che risulta proprio essere la trasposta della matrice M.

Definizione 5.1.1. Una matrice quadrata M si dice *ortogonale* se

$$M^T M = M M^T = I$$

in pratica $M^T = M^{-1}$.

Teorema 5.1.1. *Una matrice* 2×2 *rappresenta una rotazione di* $\mathbb{R}^2$ *se e solo se è ortogonale e ha determinante* $= 1$

Come esempio facciamo vedere che la matrice

$$M = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

è ortogonale.

$$M^T M = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$M M^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ed è ovvio che $|M| = 1$, quindi la nostra solita matrice soddisfa le condizioni del teorema. Vogliamo sottolineare che dal teorema si può dedurre che *tutte* le matrici di rotazione sono necessariamente del tipo di M.

In $\mathbb{R}^3$ abbiamo visto che le rotazioni avvengono attorno ad un asse, per esempio per una rotazione attorno all'asse z si ha:

$$M_\phi^z = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in coordinate non omogenee e dove si è indicato l'asse di rotazione all'esponente e l'angolo al deponente.

Il teorema 5.1.1, nel caso $\mathbb{R}^3$, diventa:

Teorema 5.1.2. *Una matrice* 3×3 *rappresenta una rotazione di* $\mathbb{R}^3$ *attorno ad una retta opportuna se e solo se è ortogonale e ha determinante* $= 1$

Osserviamo che il teorema è del tutto analogo al caso $\mathbb{R}^2$ salvo il fatto che la rotazione è legata ad una retta che sarà l'asse di rotazione. Un problema interessante è trovare l'asse, data una matrice di rotazione qualsiasi di $\mathbb{R}^3$, problema che affrontiamo nel prossimo paragrafo.

Terminiamo facendo vedere che la nostra matrice di rotazione M_ϕ^z soddisfa il teorema, cioè ha $det(M_\phi^z) = 1$ ed è ortogonale. Che il determinante sia 1 è ovvio mentre si ha:

$$M_\phi^{zT} M_\phi^z = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$M_\phi^z M_\phi^{zT} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

E' facile verificare la stessa proprietà per le matrici M_ϕ^y e M_ϕ^x di rotazione attorno agli altri assi coordinati.

5.2 Equazione caratteristica, autovalori e autovettori

La teoria degli autovalori e autovettori di una matrice $n \times n$ (una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^n$) è un capitolo consistente e importante dell'algebra lineare. Essa riguarda il problema di determinare quelle proprietà delle trasformazioni che sono indipendenti dalla scelta delle basi. Noi svilupperemo solo una piccola parte della teoria che risulta importante per i nostri scopi.

In pratica se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare, questa sposta ogni vettore $\vec{v}$ in un altro $\vec{w}$: $\vec{w} = T(\vec{v})$. Il nostro interesse è trovare i vettori, se esistono, che trasformati, non cambiano la loro direzione. Sviluppiamo le argomentazioni in $\mathbb{R}^3$ per convenienzaa ma esse rimangono valide per qualsiasi spazio $\mathbb{R}^n$.

Definizione 5.2.1. Siam M una matrice 3×3. Se esiste un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ non nullo e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

allora $\vec{v}$ si dirà *autovettore* di M e λ *autovalore* di $\vec{v}$.

Esempio 5.2.1. Sia $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Consideriamo il vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Si ha

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi $\vec{v}$ è un autovettore con autovalore $\lambda = 1$.

Sia $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ allora

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e quindi $\vec{w}$ è un autovettore con autovalore $\lambda = 3$.

Mentre è ovvio che un autovettore ha un solo autovalore, [1] il viceversa non è vero[2]. Diamo quindi la seguente:

Definizione 5.2.2. Se $\vec{v}$ è un autovettore di autovalore λ della trasformazione T, diciamo *autospazio* V_λ *di peso* λ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$V_\lambda = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \right\}$$

[1] Infatti se $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} = \mu\vec{v}$ allora $\lambda = \mu$.

[2] Infatti se $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ e $\vec{w} = k\vec{v}$ allora $T(\vec{w}) = kT(\vec{v}) = k(\lambda\vec{v}) = \lambda(k\vec{v}) = \lambda\vec{w}$ e quindi $\vec{w}$ è autovettore di autovalore λ.

Esercizio 5.2.1. Dimostrare che V_λ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Non tutte le trasformazioni hanno autovettori.

Esempio 5.2.2. Sia $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione antioraria di $\phi = \frac{\pi}{4}$ di matrice $M_{T\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. Evidentemente tutti i vettori del piano vengono ruotati e quindi nessuno mantiene la propria direzione.

Esercizio 5.2.2. Verificare analiticamente che $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ non ha alcuna soluzione nel caso $M_{T\frac{\pi}{4}}$.

Il teorema pricipale sugli autovettori e autovalori è il seguente (ricordiamo che i nostri enunciati sono riferiti a $\mathbb{R}^3$ solo per semplicità):

Teorema 5.2.1. *Se $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora R^3 ha una base v_1, v_2, v_3 composta di autovettori di T con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se e solo se la matrice di T è la matrice diagonale composta dagli autovalori, cioè*

$$M_T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

In altre parole, una trasformazione ammette una matrice diagonale se e solo se lo spazio ammette una base di autovettori. Ma quali trasformazioni hanno questa caratteristica?

Non ci occuperemo di questa questione generale ma indagheremo il caso particolare delle rotazioni. Intanto chiediamoci come si trovano gli autovettori e autovalori?

Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare di matrice M_T; allora se $\vec{v}$ è un autovettore di autovalore λ si avrà: $M_T\vec{v} = \lambda\vec{v}$ che possiamo anche scrivere $M_T\vec{v} = \lambda I\vec{v}$ dove I è la matrice identica 3×3. Avremo quindi $M_T\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0$ e otteniamo perciò il sistema lineare:

$$(M_T - \lambda I)\vec{v} = 0$$

che esplicitato diventa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = 0$$

e quindi

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\vec{v_1} + a_{12}\vec{v_2} + \cdots + a_{1n}\vec{v_n} = 0 \\ a_{21}\vec{v_1} + (a_{22} - \lambda)\vec{v_2} + \cdots + a_{2n}\vec{v_n} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\vec{v_1} + a_{n2}\vec{v_2} + \cdots + (a_{nn} - \lambda)\vec{v_n} = 0 \end{cases}$$

nelle incognite $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Notiamo che il sistema è omogeneo, cioè i termini noti sono tutti nulli e quindi ci sarà sicuramente la soluzione banale $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$. Perchè ci sia una soluzione non banale sappiamo[3] che deve essere

$$det(M_T - \lambda I) = 0$$

Per valori di n elevati, il calcolo del determinante risulta complicato. In ogni caso si può dimostrare che l'equazione precedente si traduce in un polinomio di grado n in λ, che chiamiamo *polinomio caratteristico* della matrice M_T e che risulta essere del tipo:

$$p_{M_T}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + det(M_T)$$

le radici di $P_{M_T}(\lambda) = 0$ sono gli autovalori di M_T.

Applichiamo quanto visto alle rotazioni. Consideriamo la matrice

$$M^z_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di rotazione antioraria di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z. Calcoliamone gli autovalori e autovettori. Deve essere:

$$det(M^z_{\frac{\pi}{2}} - \lambda I) = 0 = det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

e sviluppando lungo la prima riga:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda(1-\lambda)) = \lambda^2(1-\lambda) = 0$$

Abbiamo le soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda^2 = 0$. Calcoliamo gli autovettori di $\lambda^2 = 0$ cioè $\lambda = 0$; prendiamo un vettore generico $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e dunque

[3] Poichè vale il teorema: un sistema lineare $x \times n$ ha una unica soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti ha determinante $\neq 0$.

$$\begin{cases} -y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi $\vec{v} = 0$ e perciò niente autovettori.

Se $\lambda = 1$ allora

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} -y = x \\ x = y \\ z = z \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

tutti i vettori del tipo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$ sono multipli di $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, versore dell'asse z. Allora l'autovettore dell'autovalore $\lambda = 1$ è $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e l'autospazio è $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

Il risultato ottenuto è ovvio poichè una rotazione attorno all'asse z lascia invariata la direzione dei vettori multipli del versore dell'asse z.

Osserviamo che la ricerca di autovalori dipende dalla capacità di risolvere equazioni polinomiali di grado n, $P_n(\lambda) = 0$; tali equazioni possono avere o non avere soluzioni reali e certamente hanno soluzioni complesse. Siamo interessati solo alle soluzioni reali perchè le trasformazioni che consideriamo riguardano gli spazi reali $\mathbb{R}^n$. Trovati gli autovalori basterà risolvere i corrispondenti sistemi lineari $M_T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ per trovare gli autovettori.

5.3 Rotazioni in $\mathbb{R}^3$

Vale il seguente teorema:

Teorema 5.3.1. *Una matrice M 3×3 rappresenta una rotazione in $\mathbb{R}^3$ se e solo se è ortogonale e $det(M) = 1$. Inoltre la rotazione ha l'unico autovalore reale $\lambda = 1$ e avviene attorno ad un asse fisso che è l'autospazio di $\lambda = 1$.*

Il teorema è del tutto analogo al caso $\mathbb{R}^2$. Per calcolare l'asse di rotazione, per il teorema, dobbiamo risolvere:

$$[M - I]\,\vec{v} = 0$$

che ci darà il sistema:

$$\begin{cases} (a_{11}-1)\vec{v_1} + a_{12}\vec{v_2} + a_{13}\vec{v_3} = 0 \\ a_{21}\vec{v_1} + (a_{22}-1)\vec{v_2} + a_{23}\vec{v_3} = 0 \\ a_{31}\vec{v_1} + a_{32}\vec{v_2} + (a_{33}-1)\vec{v_3} = 0 \end{cases}$$

E' consuetudine scegliere $\vec{v_3} = 1$ (ricordiamo che le soluzioni sono ∞ e proporzionali) e poi trovare $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ per sostituzione.

A questo punto dobbiamo solo trovare l'angolo di rotazione ϕ. Alcuni semplici ma lunghi calcoli portano alla seguente formula:

$$\phi = \arccos \frac{T_r(M) - 1}{2}$$

dove $T_r(M) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ si chiama *traccia* di M ed è la somma degli elementi della diagonale principale.

Esempio 5.3.1. Sia

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Facciamo vedere che si tratta di una rotazione. A tale scopo bisogna che $det(M) = 1$ e questo è immediato. Inoltre M deve essere ortogonale. Calcoliamo:

$$M^T M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

e quindi M è ortogonale. Allora si tratta di uan rotazione. Calcoliamo l'asse di rotazione. Siccome sappiamo che $\lambda = 1$, si risolve il sistema

$$M\vec{v} = \vec{v} \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} \vec{v_2} = \vec{v_1} \\ \vec{v_3} = \vec{v_2} \\ \vec{v_1} = \vec{v_3} \end{cases}$$

assumendo $\vec{v_3} = k$ come parametro, abbiamo $\begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$, cioè tutti i vettori paralleli al vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per calcolare l'angolo si ha $T_r(M) = 0 + 0 + 0 = 0$ e quindi

$$\phi = \arccos \frac{0-1}{2} = \frac{2}{3}\pi$$

I calcoli per ottenere l'asse di rotazione non sono sempre semplici. Esiste un algoritmo più rapido per questo calcolo che deriva dalla seguente formula:

Teorema 5.3.2. *Se una rotazione è definita dalla matrice*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

allora l'asse di rotazione è rappresentato dal vettore

$$\vec{v} = (a_{23} - a_{32})\vec{i} + (a_{31} - a_{13})\vec{j} + (a_{12} - a_{21})\vec{k}$$

dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *sono i vettori della base canonica.*

Capitolo 6

Quaternioni

6.1 Numeri complessi

Supponiamo che lo studente abbia familiarità con i numeri complessi come sono trattati nel volume Matematica 3. Riassumiamo qui le principali proprietà dei complessi a vantaggio dello studente.

Un numero complesso è un numero della forma $a+ib$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. a si dice parte reale, ib parte immaginaria e b coefficiente immaginario. Sono definite le operazioni:

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

per ricordare quest'ultima basta applicare le regole dell'algebra e ricordare che, per definizione, $i^2 = -1$.

Il reciproco è

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Ricordiamo che il reciproco è un numero che moltiplicato per $(a+ib)$ fornisce l'unità, cioè

$$(a + ib)\frac{1}{a + ib} = 1 + i0$$

Valgono, naturalmente, tutte le usuali proprietà delle operazioni, come associativa, commutativa, distributiva, ecc. Non è possibile definire per i complessi una relazione di disuguaglianza, e quindi non esistono complessi positivi o negativi, però si definisce il modulo di un comolesso: se $z = a + ib$ allora

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

che, nella rappresentazione dei numeri complessi come punti del piano, corrisponde alla distanza del punto dall'origine.

6.2 Quaternioni

I numeri complessi si possono pensare come coppie di numeri reali $\bar{z} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ e scrivere in forma algebrica come $\bar{z} = a + ib$ e quindi come somma dello scalare (reale) a con il vettore $\vec{i}b$ se pensiamo $\vec{i}$ come base dei vettori $\mathbb{R}^1$.

Per analogia pensiamo ai quaternioni come quaterne di reali $\bar{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$ e scrivere in forma algebrica come $\bar{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ e quindi somma dello scalare q_0 con il vettore $\vec{i}q_1 + \vec{j}q_2 + \vec{k}q_3$ dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

6.3 Algebra dei quaternioni

Due quaternioni sono uguali se hanno le stesse componenti. La somma è definita come somma per componenti e il prodotto per uno scalare è quello solito di $\mathbb{R}^4$. E' evidente che le proprietà delle operazioni restano valide poichè sono le stesse che definiscono lo spazio $\mathbb{R}^4$.

La vera differenza inizia (come già per i complessi) quando si vuole definire la moltiplicazione. Perchè la moltiplicazione abbai senso bisogna che siano postulate le seguenti regole:

1. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
2. $ij = k = -ji$
3. $jk = i = -kj$
4. $ki = j = -ik$

Utilizzando le regole dell'algebra e le regole appena descritte, abbiamo:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3 = p_0 + \vec{p} \\ q &= q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 = q_0 + \vec{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pq = r = r_0 + \vec{r} = p_0q_0 &- (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + \\ &+ p_0(iq_1 + jq_2 + kq_3) + q_0(ip_1 + jp_2 + kp_3) + \\ &+ i(p_2q_3 - p_3q_2) + j(p_3q_1 - p_1q_3) + k(p_1q_2 - p_2q_1) \end{aligned}$$

è evidente che la formula è difficile da memorizzare e quindi si applicano le regole algebriche e le formule ogni volta. E' anche possibile usare la notazione matriciale osservando che:

$$pq = r = r_0 + \vec{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Esempio 6.3.1. Siano $p = 3 + i - 2j + k \qquad q = 2 - i + 2j + 3k$

$$pq = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix} = 8 - 9i - 2j + 11k$$

Osserviamo che il quaternione nullo è $0 = 0 + \vec{0} = 0 + 0i + 0j + 0k$ e l'unità è $1 = 1 + \vec{0} = 1 + 0i + 0j + 0k$.

E' evidente che il prodotto *non è commutativo*: $pq \neq qp$.

Definizione 6.3.1. Se $p = p_0 + \vec{p}$ è un quaternione, diciamo *complesso coniugato* di p il quaternione $p^* = p_0 - \vec{p} = p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$.

Teorema 6.3.1. *Se p è un quaternione allora $(pq)^* = q^* p^*$ e $p + p^* = 2p_0 \in \mathbb{R}$ è uno scalare.*

Definizione 6.3.2. Diciamo *norma* o *lunghezza* del quaternione p il numero

$$|p| = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

Osserviamo che è la stessa dei vettori di $\mathbb{R}^4$.

Teorema 6.3.2. *Se p è un quaternione allora*

$$|p| = \sqrt{p^* p}$$

Definizione 6.3.3. Se $|p| = 1$ allora p si dirà *quaternione unitario* o *normalizzato.*

Teorema 6.3.3. *Se p e q sono quaternioni allora*

$$|pq| = |p||q|$$

Definizione 6.3.4. Se p è un quaternione allora diremo *inverso* di p e scriveremo p^{-1} il quaternione tale che

$$pp^{-1} = p^{-1} = 1$$

Teorema 6.3.4. *Si vede facilmente che*

$$p^{-1} = \frac{p^*}{|p|^2}$$

Se p è unitario allora $p^{-1} = p*$.

6.4 Geometria dei quaternioni

Nei capitoli precedenti abbiamo stabilito che una rotazione in $\mathbb{R}^3$ è rappresentata da una matrice 3×3 ortogonale con $det = 1$ e che ogni matrice di tale tipo rappresenta una rotazione in $\mathbb{R}^3$. Se indichiamo con M la matrice e con $\vec{v}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ allora $\vec{v}$ tramite la rotazione M diventa il vettore $\vec{w}$ che si calcola con $\vec{w} = M\vec{v}$, prodotto matrice vettore.

Il nostro obiettivo è far vedere che un quaternione è un possibile modo alternativo di vedere una rotazione in $\mathbb{R}^3$.

Il primo passo consiste nell'osservare che un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ può essere pensato come un quaternione p la cui parte reale si a0: $p_0 = 0$, cioè $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$.

In altre parole, è facile vedere che esiste una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}^3$ e $Q_0 = \{$ quaternioni con parte reale nulla $\}$ detti anche quaternioni *puri*. Per noi, quindi, un quaternione puro rappresenterà un vettore.

Sia p un quaternione $p = p_0 + \vec{p}$ normalizzato; allora

$$\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1 \quad \text{e} \quad p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

e perciò $p_0^2 + |\vec{p}|^2 = 1$. Ma noi sappiamo che per ogni angolo θ si ha

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

allora ci deve essere un qualche angolo θ per cui

$$\cos^2\theta = p_0^2 \qquad \sin^2\theta = |\vec{p}|^2$$

richiediamo che l'angolo θ soddisfi le restrizioni $-\pi < \theta < \pi$. Definiamo il vettore unitario

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{|p|} = \frac{\vec{p}}{\sin\theta}$$

che avrà la direzione del vettore $\vec{p}$ (attenzione $\vec{u}$ è un vettore unitario che non si deve confondere con p che è un quaternione unitario).

Ala fine possiamo scrivere il quaternione unitario p nella forma

$$p = p_0 + \vec{p} = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta$$

nei termini dell'angolo θ e del vettore unitario $\vec{u}$.

Osserviamo che se sostituiamo θ con $-\theta$ otteniamo il quaternione complesso coniugato

$$p = \cos(-\theta) + \vec{u}\sin(-\theta) = \cos\theta - \vec{u}\sin\theta = p^*$$

Supponiamo di avere 2 quaternioni unitari p e q che abbiano lo stesso vettore unitario $\vec{u}$. Sia α l'angolo associato a p e β l'angolo associato a q (ricordiamo che questo angolo dipende dal quaternione e non dal solo vettore $\vec{u}$). Possiamo scrivere

$$p = \cos\alpha + \vec{u}\sin\alpha \qquad q = \cos\beta + \vec{u}\sin\beta$$

ora moltiplichiamo i due quaternioni

$$r = pq = (\cos\alpha + \vec{u}\sin\alpha)(\cos\beta + \vec{u}\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \vec{u}\cos\alpha\sin\beta + \vec{u}\sin\alpha\cos\beta + \vec{u}\vec{u}\sin\alpha\sin\beta$$

e ricordando che $\vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$, si ha

$$r = pq = (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + \vec{u}(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = \cos(\alpha+\beta) + \vec{u}\sin(\alpha+\beta)$$

e anche il quaternione r ha associato lo stesso vettore unitario $\vec{u}$. In altre parole, se moltiplichiamo due quaternioni unitari che hanno lo stesso vettore unitario, otteniamo un vettore che ha lo stesso vettore unitario e come angolo la somma dei due angoli.

Risulta da considerazioni che omettiamo per brevità, che se p è un quaternione puro e q è un quaternione allora i prodotti $w_1 = qpq^*$ e $w_2 = q^*pq$ sono anch'essi quaternioni puri, cioè vettori.

Vediamo su un esempio questi ultimi concetti.

Esempio 6.4.1. Sia $q = \cos\theta + \vec{k}\sin\theta$ un quaternione unitario con angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$ e vettore unitario $\vec{u} = \vec{k}$ (versore dell'asse z). Allora si ha

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

Sia $v = \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ un quaternione puro, versore dell'asse x. Calcoliamo il prodotto

$$w = qvq^* = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\vec{k}\right)\left(\vec{i}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\vec{k}\right)$$

e ricordando le proprietà dei quaternioni

$$w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\vec{k}\right) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

Osserviamo che il risultato è ancora un quaternione puro, come previsto e che è un vettore unitario come $\vec{v}$.

Il risultato di questo esempio si può interpretare in due modi:

Primo modo:

E' la prospettiva di un osservatore posto nell'origine del sistema di coordinate $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e solidale con esso. All'osservatore sembra che l'operatore qvq^* abbia ruotato il vettore $\vec{v}$ attorno all'asse $\vec{k}$ di un angolo di $\frac{\pi}{3}$ e quindi in senso antiorario. In questa prospettiva è conveniente pensare il sistema di coordinate come fisso mentre il vettore ruota. Questa viene chiamata spesso *rotazione puntuale*.

Secondo modo:

In questo caso si pensa l'osservatore seduto e solidale col vettore $\vec{v}$. A questi sembrerà che l'operatore qvq^* abbia ruotato il sistema di coordinate $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ attorno all'asse $\vec{k}$ di

un angolo di $-\frac{\pi}{3}$ e quindi in senso orario. In questa prospettiva è conveniente pensare il vettore sia fisso mentre il sistema ruota. Questa viene chiamata spesso *rotazione di coordinate*.

La scelta del modo è del tutto arbitraria e noi sceglieremo la *prima*.

Riassumiamo in una formula generale quanto osservato sinora.

Se $q = q_0 + \vec{q}$ è un quaternione unitario e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ è un quaternione puro allora si ha la formula per il prodotto (che corrisponde ad una rotazione)

$$w = q\vec{v}q^* = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 - q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

e indicando la matrice grande con M:

$$w = q\vec{v}q^* = M\vec{v}$$

Si può anche dimostrare che il prodotto

$$w = q^*\vec{v}q = M^T\vec{v}$$

6.5 Operatore di rotazione

Abbiamo visto su esempi che, in qualche modo, la moltiplicazione per un quaternione può essere vista come una rotazione. Diamo le definizioni e i teoremi precisi in questo paragrafo.

Definizione 6.5.1. Se q è un quaternione unitario, chiamiamo *operatore di rotazione di q* e lo indichiamo con L_q, la trasformazione

$$\begin{aligned} L_q : \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & L_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^* \end{aligned}$$

con $\mathbb{R}^3$ pensato come insieme di quaternioni puri.

Teorema 6.5.1. *L'operatore L_q è lineare. Cioè*

$$L_q(\vec{v} + \vec{w}) = L_q(\vec{v}) + L_q(\vec{w}) \quad e \quad L_q(h\vec{v}) = hL_q(\vec{v})$$

$\forall \vec{v}, \vec{w}, \in \mathbb{R}^3$ *e* $\forall h \in \mathbb{R}$.

Teorema 6.5.2 (Invarianza della norma).

$$|L_q(\vec{v})| = |\vec{v}|$$

Teorema 6.5.3. *Per ogni quaternione unitario* $q_0 + \vec{q} = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta$ *ed ogni vettore* $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$*, l'azione dell'operatore* $L_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^*$ *su* $\vec{v}$ *si può interpretare geometricamente come una rotazione del vettore* $\vec{v}$ *di un angolo* 2θ *attorno alla parte vettoriale di* q *come asse.*

Vale un teorema analogo per l'operatore L_{q^*}.

Considerando che il prodotto di due quaternioni unitari è ancora unitario, abbiamo il seguente:

Teorema 6.5.4. *Se* p *e* q *sono quaternioni unitari che definiscono gli operatori di rotazione* L_p *e* L_q *allora il prodotto* qp *definisce un operatore di rotazione* L_{qp} *che rappresenta la composizione degli operatori* L_p *seguito da* L_q*. L'asse e l'angolo di rotazione di* L_{qp} *somo quelli definiti dal prodotto* qp*.*

Praticamente se

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \qquad L_p(\vec{u}) = p\vec{u}p^* = \vec{v} \qquad L_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^*$$

allora abbiamo

$$w = L_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^* = qL_P(\vec{u})q^* = q(p\vec{u}p^*)q^* = (qp)\vec{u}(qp)^* = L_{qp}(\vec{u})$$

analogamente per gli operatori L_{q^*}.

Esempio 6.5.1. Consideriamo una rotazione in $\mathbb{R}^3$ attorno all'asse rappresentato dal vettore $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Allora $\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ è un versore di $\vec{v}$. Sia $\theta = \frac{\pi}{3}$ che quindi fornisce $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il quaternione di rotazione da usare è

$$q = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta = \frac{1}{2} + \vec{u}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \vec{k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} = q_0 + \vec{q}$$

con $q_0 = \frac{1}{2}$ e $\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$.

Calcoliamo, per esempio, gli effetti della rotazione su un vettore della bse $\vec{v} = \vec{i}$. Dobbiamo calcolare $w = q\vec{v}q^* = q\vec{i}q^*$. Ricordiamo che la matrice di $q\vec{i}q^*$ è

$$M = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{4} - 1 + 2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} \\ 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{4} - 1 + 2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} \\ 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{4} - 1 + 2\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ perciò

$$w = M\vec{i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{j}$$

Il risultato si spiega considerando che la rotazione attorno al vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ fa generare, a ciascuno dei vettori della base, lo stesso cono e la rotazione antioraria di $2\theta = 2\frac{\pi}{3}$ porta l'asse x sull'asse y e quindi il versore $\vec{i}$ sul versore $\vec{j}$. Lo studente può fare i calcoli e verificare che il versore $\vec{j}$ andrà sul versore $\vec{k}$ e il versore $\vec{k}$ andrà sul versore $\vec{i}$.

Sottolineiamo ancora una volta che abbiamo usato la convenzione della rotazione puntuale. Se avessimo usato la convenzione della rotazione delle coordinate allora il versore $\vec{i}$ sarebbe finito su $\vec{k}$ poichè la rotazione sarebbe oraria ($q^*\vec{i}q$).

6.6 Formule

Riassumiamo, in questo paragrafo, tutte le formule, vecchie e nuove che possono essere di una qualche utilità nelle applicazioni.

6.6.1 Prodotto

Se

$$p = p_0 + \vec{i}p_1 + \vec{j}p_2 + \vec{k}p_3 \qquad q = q_0 + \vec{i}q_1 + \vec{j}q_2 + \vec{k}q_3$$

allora

$$pq = r = r_0 + r_0 + \vec{i}r_1 + \vec{j}r_2 + \vec{k}r_3$$

dove

$$\begin{aligned} r_0 &= p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \\ r_1 &= p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2 \\ r_2 &= p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1 \\ r_3 &= p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0 \end{aligned}$$

che possiamo scrivere in notazione matriciale come:

$$pq = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

oppure

$$pq = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

E' opportuno ricordare che $pq \neq qp$ e quindi bisognerà scambiare i p_i con i q_i per ottenere le formule analoghe per qp.

6.6.2 Operatore di rotazione

Ricordiamo che l'operatore di rotazione L_q rappresenta una rotazione di angolo α attorno ad un vettore $\vec{q}$ come asse se il quaternione unitario q è della forma

$$q = q_0 + \vec{q} = \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2}$$

dove $\vec{u}$ è un versore di $\vec{q}$. In questo caso l'operatore agisce sul vettore $\vec{v}$ in questo modo

$$L_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^*$$

nella interpretazione puntuale (rotazione antioraria) oppure

$$L_q(\vec{v}) = q^*\vec{v}q$$

nella interpretazione del sistema di coordinate (rotazione oraria o di angolo negativo).

Il prodotto $q\vec{v}q^*$ in termini matriciali diventa:

$$w = q\vec{v}q^* = M\vec{v} = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 - q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

analogamente per $q^*\vec{v}q$ che non riportiamo.

6.6.3 Angolo e asse di rotazione

In questo paragrafo rispondiamo a due domande:

1. data una matrice di rotazione, come si trovano l'angolo e l'asse di rotazione?
2. dati l'angolo e l'asse di rotazione, come si scrive la matrice di rotazione?

Riportiamo le risposte a queste domande, sia in termini matriciali che in termini di quaternioni, in modo da valutare i vantaggi dei due metodi.

Matrici

Sia M una matrice 3×3 di rotazione; sappiamo che essa è ortogonale e $|M| = 1$. Sappiamo inoltre che l'equazione $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ definisce un unico autovettore per l'autovalore $\lambda = 1$. L'autovettore definisce l'asse di rotazione e può essere trovato risolvendo l'equazione $M\vec{v} = \vec{v}$. L'angolo di rotazione si calcola con la formula

$$\theta = \arccos \frac{Tr(M) - 1}{2}$$

dove $Tr(M)$ è la traccia della matrice M.

Viceversa, e questo è argomento che non abbiamo visto in precedenza, se $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ è l'asse e θ è l'angolo di rotazione la matrice di rotazione corrispondente si calcola:

$$M = \begin{bmatrix} v_1^2 + (v_2^2 + v_3^2)\cos\theta & v_1v_2(1-\cos\theta) - v_3\sin\theta & v_1v_3(1-\cos\theta) + v_2\sin\theta \\ v_1v_2(1-\cos\theta) + v_3\sin\theta & v_2^2 + (v_3^2 + v_3^1)\cos\theta & v_2v_3(1-\cos\theta) - v_1\sin\theta \\ v_3v_1(1-\cos\theta) - v_2\sin\theta & v_2v_3(1-\cos\theta) + v_1\sin\theta & v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2)\cos\theta \end{bmatrix}$$

di cui non diamo dimostrazione.

Quaternioni

Se abbiamo un operatore di rotazione $L_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^*$ dove $q = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{u}\sin\frac{\theta}{2}$ allora $q = q_0 + \vec{q}$ e l'asse di rotazione è $\vec{u}$ mentre l'angolo si calcola osservando che $q_0 = \cos\frac{\theta}{2}$ e quindi $\theta = \arccos q_0$.

Viceversa se abbiamo una rotazione di asse il versore $\vec{u}$ e di angolo θ, allora basta scrivere l'operatore di rotazione nella forma $L_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^*$ dove q è dato da

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{u}\sin\frac{\theta}{2}$$

6.6.4 Angoli di Eulero

6.7 Esercizi

Esercizio 6.7.1. Verificare, mediante composizione di operatori di rotazione, che una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse $\vec{k}$ in senso antorario seguita da una rotazione attorno al (nuovo) asse $\vec{i}$ di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario corrisponde ad una rotazione in senso antiorario di $\frac{2\pi}{3}$ attorno all'asse di vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Capitolo 7

Esercizi riassuntivi

7.1 Somma tra matrici

Esercizio 7.1.1. Trovare la somma delle seguenti matrici:

- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \left[S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right]$$
- $$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & -7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -5 & -9 & 7 \end{bmatrix} \qquad \left[S_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 8 & 11 & -9 \end{bmatrix} \right]$$
- $$E = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & -7 \\ 4 & 3\sqrt{2}-5 \\ -1 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 2 & \sqrt{2}+4 \\ -6 & 9 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left[S_3 = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 7 \\ 6 & 4\sqrt{2}-1 \\ -7 & 12 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \right]$$

7.2 Prodotto di una matrice per uno scalare

Esercizio 7.2.1. Eseguire le moltiplicazioni tra uno scalare e una matrice:

- $$4 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$
- $$2 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 4 & 8 & 9 \\ -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- verificare che data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e lo scalare $k = 3$, risulta

$$kA = A + A + A$$

7.3 Prodotto tra matrici

Esercizio 7.3.1. Eseguire le moltiplicazioni tra matrici:

- $$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -9 & -4 \\ 6 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \left[P_1 = \begin{bmatrix} 47 & -5 & 52 \\ 70 & -26 & 16 \\ 47 & -62 & -51 \end{bmatrix} \right]$$
- $$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

7.4 Sistemi lineari

Esercizio 7.4.1. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, -2, -1)$$

Esercizio 7.4.2. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4, -2, -3, -1)$$

Esercizio 7.4.3. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = -2 \\ x - 2y + 3z - 4w = 0 \\ x + 2y - 3z - 4w = 10 \\ x - 2y - 3z + 4w = -4 \end{cases} \qquad (x, y, z, w) = (1, 1, -1, -1)$$

Esercizio 7.4.4. Risolvere il sistema dato in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right]$$

Esercizio 7.4.5. Risolvere il sistema dato in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}\right]$$

Esercizio 7.4.6. Risolvere il sistema dato in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}\right]$$

Esercizio 7.4.7. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 2 \\ 3y + z & = 7 \\ -x + 4y & = 9 \\ x + 5y - 3z & = 6 \end{cases}$$

riducendolo a scala ridotta.

Esercizio 7.4.8. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z & = -1 \\ 2x + y - z & = -3 \\ x - 4y + 7z & = 2 \end{cases}$$

riducendolo a scala ridotta.

Esercizio 7.4.9. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t & = 2 \\ 2x - 5y + 9z & = 5 \\ x - y + 3t & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

riducendolo a scala ridotta.

Parte II

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Algebra Lineare - Integrazione - Matematica 5 - Statistica descrittiva - Sistemi dinamici
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II - Teoria della probabilità III
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

STUDENTI

Matteo Alessandrini classe VA 2012-2013	Algebra Lineare
Simone Simonella classe IVA 2014-2015	Sistemi dinamici

La presente opera è distribuita secondo le attribuzioni della Creative Commons.
La versione corrente è la .
In particolare chi vuole redistribuire in qualsiasi modo l'opera, deve garantire la presenza della prima di copertina e della intera Parte Contributi composta dai paragrafi: Contributi e licenza.

Dipartimento di Matematica
$\alpha_{5\text{ ottobre 2015}}$
ITIS V.Volterra
San Donà di Piave