Matematica 5

Dipartimento di Matematica

ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [12/13][S-All]

Indice

Parte I

Integrazione

Capitolo 1

Integrazione impropria

1.1 Generalità

Abbiamo definito $\int_a^b f(x)\,dx$ nelle ipotesi di $f(x)$ continua in $[a,b]$. Viene spontaneo chiedersi se la definizione può essere generalizzata al caso di una funzione discontinua.

Definizione 1.1.1. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b-\epsilon] \quad \forall \epsilon > 0$; se

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \quad \text{esiste, finito}$$

allora si dice che $f(x)$ è *integrabile* in $[a,b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

Analogamente se $f(x)$ è continua in $[a+\epsilon, b] \quad \forall \epsilon > 0$

In questi casi si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge.*

Esempio 1.1.1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} [\arcsin(1-\epsilon)] = \frac{\pi}{2}$$

esiste finito e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 1.1.2 (Di importanza fondamentale)**.**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

Se $p = 1$ allora

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} [\ln|x|]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} [\ln 1 - \ln \epsilon] = +\infty$$

Quindi $\dfrac{1}{x}$ non è integrabile in $[0,1]$, si dice che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge a $+\infty$.
Se $p \neq 1$ allora

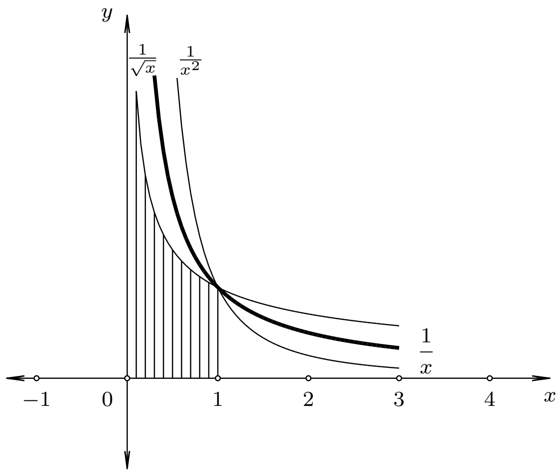
$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{1-p}-\frac{\epsilon^{1-p}}{1-p}\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{se } 1-p>0 \\ +\infty & \text{se } 1-p<0 \end{cases}$$

Nel primo caso ($p < 1$) si dice che l'integrale *converge* a $\dfrac{1}{1-p}$; nel secondo caso ($p > 1$) si dice che *diverge* a $+\infty$.
Concludendo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{se } p<1 \\ \text{non esiste e diverge a } +\infty & \text{se } p\geq 1 \end{cases}$$

Geometricamente



L'area compresa fra la funzione, l'asse y, la retta $x = 1$ e l'asse x è finita $\Leftrightarrow p < 1$.

Esempio 1.1.3. $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}[\cos\frac{1}{x}]_\epsilon^{\frac{2}{\pi}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}[-\cos\frac{1}{\epsilon}] = \text{ non esiste}$$

In questo caso la funzione non è integrabile in $[0, \dfrac{2}{\pi}]$; si dice anche che l'integrale *non converge*.

Generalizziamo ora al caso di un intervallo illimitato.

Definizione 1.1.2. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, M] \quad \forall M > a$; se

$$\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx \quad \text{esiste, finito}$$

allora si dice che $f(x)$ è *integrabile* in $[a, +\infty]$ e si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

In questi casi si dice che $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge*.
Analogamente se $f(x)$ è continua in $[N, a] \quad \forall N < a$.

Esempio 1.1.4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}[\arctan x]_0^M = \lim_{M\to+\infty}[\arctan M] = \frac{\pi}{2} \text{ esiste finito.}$$

Allora $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Esempio 1.1.5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

$$\lim_{N\to-\infty}\int_N^0 xe^{-x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_N^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M xe^{-x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^M = \frac{1}{2}$$

Quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$

Esempio 1.1.6 (Di importanza fondamentale)**.**

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$$

Se $p = 1$ allora

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}[\ln M - \ln 1] = +\infty$$

Quindi $\dfrac{1}{x}$ non è integrabile in $[1, +\infty]$; si dice che $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ diverge a $+\infty$.
Se $p \neq 1$ allora

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{1-p}M^{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{1-p} & \text{se } 1-p<0 \\ +\infty & \text{se } 1-p>0 \end{cases}$$

Nel primo caso ($p > 1$) si dice che l'integrale *converge* a $\dfrac{1}{1-p}$; nel secondo caso ($p < 1$) si dice che *diverge* a $+\infty$.
Concludendo

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{se } p>1 \\ \text{non esiste e diverge a } +\infty & \text{se } p\le 1 \end{cases}$$

1.2 Criteri di integrabilità

Teorema 1.2.1 (Primo criterio)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative e continue in $[a, b-\epsilon]\,\forall\epsilon > 0$ e e, inoltre, $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b-\epsilon]$ e se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ converge; se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge allora $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.*

Teorema 1.2.2 (Secondo criterio)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative e continue in $[a, b-\epsilon]\,\forall\epsilon > 0$ e se, inoltre, $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$ allora si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono* asintotiche *per $x \to b^-$ e $\int_a^b f(x)\,dx$ converge (o diverge) $\Longleftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ converge (o diverge).*

Analogamente per gli intervalli illimitati.

Teorema 1.2.3 (Terzo criterio)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b-\epsilon]\,\forall\epsilon > 0$; se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge allora $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.*

Attenzione: non vale il viceversa.

Esempio 1.2.1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{\frac{1}{x^3}} = 1 \quad \text{quindi } \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}} \sim \frac{1}{x^3} \quad \text{per } x \to +\infty$$

Poichè $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge ($p = 3 > 1$) allora $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$ converge.

Esempio 1.2.2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}}\,dx$

$$\frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}} \sim \frac{x}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{x^{\alpha-2}} \quad \text{per } x \to 0^+ \quad \alpha - 2 < 1 \Rightarrow \alpha < 3$$

$$\frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{3\alpha-1}} \quad \text{per } x \to +\infty \quad 3\alpha - 1 > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{2}{3}$$

L'integrale converge per $\frac{2}{3} < \alpha < 3$.

Esempio 1.2.3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx$

$$\lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}\ln^{1-\alpha} x\right]_2^M = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}\ln^{1-\alpha} M - \frac{1}{1-\alpha}\ln^{1-\alpha} 2\right]$$

tale limite esiste finito $\Longleftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Longleftrightarrow \alpha > 1$. In tal caso il limite vale $-\dfrac{1}{1-\alpha}\ln^{1-\alpha} 2$.

Esempio 1.2.4 (Importante)**.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^{1-p}\ln x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{p-1}}{\ln x} = \begin{cases} \infty & \text{se } p-1 < 0 \\ 0 & \text{se } p-1 \geq 0 \end{cases}$$

nel primo caso, applicando de Hopital si ha: $\lim_{x\to 0^+} \frac{(p-1)x^{p-2}}{\frac{1}{x}} = \infty$

$\frac{1}{x\ln x}$ è, per $x \to 0^+$, un infinito di ordine superiore a $\frac{1}{x^p}$ $\forall p < 1$, ma di ordine inferiore a $\frac{1}{x^p}$ $\forall p \geq 1$.
Quindi il criterio non ci permette di decidere. La questione si risolve integrando:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} [\ln|\ln\frac{1}{2}| - \ln|\ln\epsilon|] = -\infty$$

Quindi $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}\, dx$ diverge.

1.3 Esercizi riassuntivi

Esercizio 1.3.1. Studiare la convergenza o divergenza dei seguenti integrali e calcolarne il valore:

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x}$ [diverge]
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ [π]
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ [?]
4. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ [?]

Calcolare:

Esercizio 1.3.2.

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx \qquad a>0 \qquad \left[\frac{b}{a^2+b^2}\right]$$

Esercizio 1.3.3.

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx \qquad a>0 \qquad \left[\frac{b}{a^2+b^2}\right]$$

Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ convergono:

Esercizio 1.3.4.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a \arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\, dx \qquad \left[-2<a<\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio 1.3.5.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^{2a})}{(e^{\sqrt[3]{x}}-1)^a}\, dx \qquad \left[a>-\frac{3}{5}\right]$$

Esercizio 1.3.6.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-1}}\, dx \qquad \text{calcolarne il valore per } a=1 \qquad \left[a>0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Parte II

Serie

Capitolo 2

Successioni numeriche reali

2.1 Generalità

Definizione 2.1.1. Dicesi *successione* una funzione

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{N} &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Talora il dominio è $\mathbb{N}^*$.In generale A è un insieme qualsiasi; noi supporremo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 2.1.2. Dicesi *successione numerica reale* una successione a valori in $\mathbb{R}$.

Gli a_n si dicono *termini* della successione che si indica anche con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oppure $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

Definizione 2.1.3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica reale; diremo che il *limite* per n che tende a più infinito di a_n vale $L \in \mathbb{R}$ e scriveremo

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = L$$

se

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

In questo caso la successione si dice *convergente*.

Esempio 2.1.1. $a_n = \dfrac{1}{n}$.

Allora $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0$ Infatti: $\forall\, \epsilon > 0, |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. Per $n > \frac{1}{\epsilon}$, si trova $\bar{n} = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$[1].

Definizione 2.1.4. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica reale; diremo che

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{cases}$$

se

$$\forall\, M > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n} \quad \begin{cases} a_n > M \\ a_n < -M \\ |a_n| > M \end{cases}$$

[1] Ricordiamo che $\lceil x \rceil$ è il primo numero intero maggiore o uguale a x.

La successione si dice, rispettivamente, *positivamente divergente, negativamente divergente, oscillante.*

Esempio 2.1.2. $a_n = n$.
Allora $\lim_{n \mapsto +\infty} n = +\infty$. Infatti: $\forall M > 0, n > M$, si trova $\bar{n} = \lceil M \rceil$.

Definizione 2.1.5. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica reale; diremo che la successione è *indeterminata* se non esiste il $\lim_{n\mapsto+\infty} a_n$.

Esempio 2.1.3. $a_n = (-1)^n$ è indeteminata.
Infatti: se $n = 2k \quad \Rightarrow a_{2k} = 1$, se $n = 2k+1 \quad \Rightarrow a_{2k+1} = -1$. Il limite non esiste.

2.2 Successioni monotone

Definizione 2.2.1. Una successione numerica reale $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *monotona crescente* in senso stretto (lato) se $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < a_{n+1} \quad (a_n \leq a_{n+1})$; si dice *monotona decrescente* in senso stretto (lato) se $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n > a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1})$.

Ricordiamo che l'estremo superiore di un insieme A di numeri reali si indica con $sup(A)$ e l'estremo inferiore si indica con $inf(A)$.

Teorema 2.2.1. *Esiste sempre, finito o infinito, il limite di una successione reale monotona e coincide con $sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ se è crescente, con $inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ se è decrescente.*

Dimostrazione. 1^o caso: poniamo $sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = L \in \mathbb{R}$, e sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescente in senso stretto. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_{\overline{n}} > L - \epsilon$$

per la proprietà caratteristica del sup

$$L - \epsilon < a_{\overline{n}} < a_{\overline{n+1}} < \cdots < L$$

per la monotonia; allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \overline{n} \Rightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

$$\mid a_n - L \mid < \epsilon \quad \text{cioè} \lim_{n\mapsto+\infty} a_n = L$$

come si voleva.
2^o caso:poniamo $sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = +\infty$, e sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescente in senso stretto. Allora

$$\forall M > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_{\overline{n}} > M$$

per la proprietà caratteristica del sup

$$M < a_{\overline{n}} < a_{\overline{n+1}} < \ldots$$

per la monotonia; allora

$$\forall M > 0, \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \overline{n} \Rightarrow a_n > M$$

cioè

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = +\infty$$

□

Esempio 2.2.1. Numero di Nepero.
Il

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{esiste finito con } 2 < e < 3$$

che si dice *Numero di Nepero.*

2.3 Criteri di convergenza

Teorema 2.3.1 (Criterio di covergenza di Cauchy)**.** *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione numerica reale:*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall\,\epsilon > 0\,\exists\,\overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\,n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 > \overline{n} \Longrightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| < \epsilon.$$

Dimostrazione. Enunciamo solamente. □

Teorema 2.3.2. *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione numerica reale a termini non negativi; se*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1 \quad \textit{allora} \quad \lim_{n\mapsto+\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi:

$$\forall\,\epsilon > 0\,\exists\,\overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\,n > \overline{n} \Rightarrow |\frac{a_{n+1}}{a_n} - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon \Rightarrow a_{n+1} < (L + \epsilon)a_n$$

poniamo $L + \epsilon = h$, non è restrittivo supporre $h < 1$; quindi

$$a_{n+1} < ha_n; \quad a_{n+2} < ha_{n+1} < h^2 a_n; \quad \ldots \quad a_{n+k} < h^k a_n \quad \forall\,n > \overline{n}.$$

Concludendo:

$$\forall\,\epsilon > 0\,\exists\,\overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\,n > \overline{n}, \forall\,k \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+k} < h^k a_n < \epsilon$$

cioè

$$\lim_{k\mapsto+\infty} a_{n+k} = \lim_{n\mapsto+\infty} a_n = 0$$

□

Esempio 2.3.1. $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} > 0 \quad \forall\,n \in \mathbb{N}^*; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\mapsto+\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \lim_{n\mapsto+\infty} \Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Big)^n = \frac{1}{e} < 1$$

perciò

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

L'esercizio poteva essere svolto anche nel seguente modo:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{nnn\ldots n} = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\ldots\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$

dunque:

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \quad \forall\,n \geq 3$$

per il teorema dei due carabinieri

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Teorema 2.3.3. *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione numerica reale a termini non negativi; se*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1 \quad \textit{allora} \quad \lim_{n\mapsto+\infty} a_n = +\infty$$

Dimostrazione. Per ipotesi: supponiamo che $L \in \mathbb{R}$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \overline{n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon \Rightarrow a_{n+1} > (L - \epsilon)a_n$$

poniamo $L - \epsilon = h$, non è restrittivo supporre $h > 1$; quindi

$$a_{n+1} > ha_n; \quad a_{n+2} > ha_{n+1} > h^2 a_n; \quad \ldots \quad a_{n+k} > h^k a_n \quad \forall\, n > \overline{n}.$$

Concludendo:

$$\forall\, M > 0\, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \overline{n}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+k} > h^k a_n > M$$

cioè

$$\lim_{k \mapsto +\infty} a_{n+k} = \lim_{n \mapsto +\infty} a_n = +\infty$$

a maggior ragione se $L = +\infty$. □

Esempio 2.3.2. $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{a^n}{n} \quad a \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = \lim_{n \mapsto +\infty} a\frac{n}{n+1} = a \quad \text{se } a > 1 \quad \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

$$\text{se } 0 < a < 1 \quad \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{a^n}{n} = 0$$

se $a = 1$ il criterio non dice nulla ma $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Teorema 2.3.4. *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale a termini non negativi; se*

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \textit{allora} \quad \lim_{n \mapsto +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Dimostrazione. Enunciamo solamente. □

Esempio 2.3.3. $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

sia $a_n = \frac{n!}{n^n}$, abbiamo visto che $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$ allora

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

Esempio 2.3.4. Sia data la successione numerica reale definita induttivamente:

$$a_0 \geq 0, a_1 = \sqrt{1 + a_0}, a_2 = \sqrt{1 + a_1}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} = f(n)$$

Esercizio non svolto

ESERCIZI

Esercizio 2.3.1. Cercare i limiti delle successioni:

1. $\dfrac{a^n}{n!} \quad a \in \mathbb{R}^+$ $\qquad (0 \quad \forall\, a)$

2. $\sqrt[n]{a} \quad a \in \mathbb{R}^+$ $\qquad (1 \quad \forall\, a)$

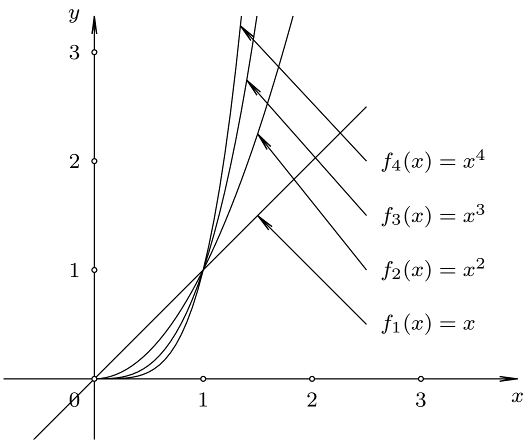
3. $\binom{2n}{n}$ $\qquad (+\infty)$

4. Sia $a_0 \geq 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$; provare che $\lim_{n \mapsto +\infty} a_n = 0$
(dimostrare prima che la successione è monotona decrescente)

2.4 Successioni di funzioni

Definizione 2.4.1. Dicesi *successione di funzioni* una successione i cui termini sono funzioni.

Esempio 2.4.1. $f_n(x) = x^n \quad x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$



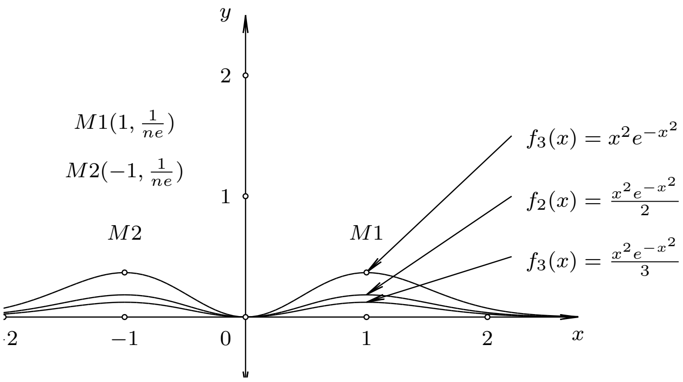
$$\lim_{n \mapsto +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ + & \infty \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Se $a \in \mathbb{R}^{\geq}$ possiamo considerare la successione reale $\{f_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ che

$$\text{converge a } \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

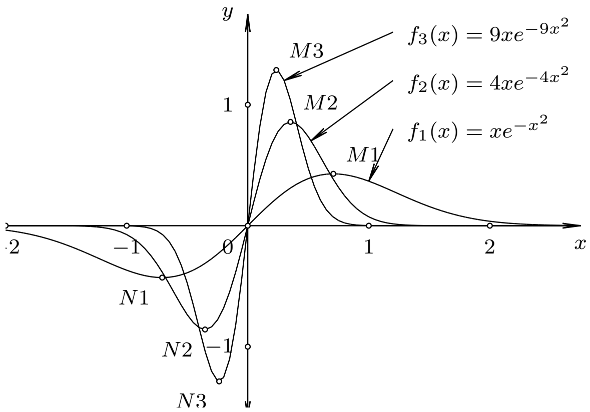
mentre diverge se $a > 1$.

Esempio 2.4.2. $f_n(x) = \dfrac{x^2 e^{-x^2}}{n} \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$



$\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{n} = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$ la $\{f_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ è una successione numerica reale che converge a 0.

Esempio 2.4.3. $f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

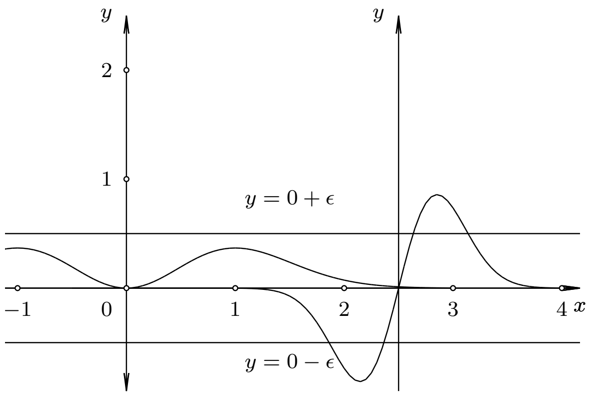


$$M\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}, \frac{ne^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right) \quad N\left(-\frac{1}{n\sqrt{2}}, -\frac{ne^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty} n^2xe^{-n^2x^2} = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$\forall\, a \in \mathbb{R}$ la $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione numerica reale che converge a 0.

Osservazione. In entrambi gli ultimi esempi $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Ma vi è una differenza: considerato un intorno di tale limite, nel primo caso è possibile determinare un indice h tale che da quell'indice in poi tutte le $f_n(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, vi cadano dentro; nel secondo caso ciò *non è possibile*. Si osservi attentamente la figura successiva .



2.5 Convergenza uniforme per successioni di funzioni

Definizione 2.5.1. Data una successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, si dice che *converge uniformemente* a $f(x)$ in un intervallo D se

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \overline{n}, \forall\, x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

ESERCIZI

Esercizio 2.5.1. Dimostrare che
$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$$
converge a $f(x) = 0$ uniformemente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.5.2. Dimostrare che
$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$
converge a $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ ma non uniformemente.

Capitolo 3

Serie numeriche reali

3.1 Generalità

Definizione 3.1.1. Data una successione numerica reale $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, sia

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 \\
&\vdots \\
s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

la successione delle *somme parziali* o *ridotte*. Tale successione si dice *serie associata* alla successione data e $\boldsymbol{a_n}$ si dice termine generale.

Definizione 3.1.2. Se $\lim_{n\mapsto+\infty} s_n = S$, allora si dice che la serie *converge*; S si chiama la *somma* della serie e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$$

Definizione 3.1.3.

$$\begin{aligned}
\text{Se } \lim_{n\mapsto+\infty} s_n &= +\infty \quad \text{si dice che la serie } \textit{diverge positivamente} \\
\text{se } \lim_{n\mapsto+\infty} s_n &= -\infty \quad \text{si dice che la serie } \textit{diverge negativamente} \\
\text{se } \lim_{n\mapsto+\infty} s_n &= \infty \quad \text{si dice che la serie } \textit{diverge oscillando} \text{ o semplicemente } \textit{diverge}.
\end{aligned}$$

Definizione 3.1.4. Se $\lim_{n\mapsto+\infty} s_n$ non esiste, allora si dice che la serie è *indeterminata*.

Esempio 3.1.1. Sia data la serie[1]

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Poichè

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

[1] di *Mengoli*

allora

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\lim_{n \mapsto +\infty} s_n = \lim_{n \mapsto +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Concludiamo che la serie di Mengoli converge a 1 o anche che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Esempio 3.1.2 (Serie geometrica di ragione x)**.** Sia data la serie

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Si ha

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} - x^{n+1} \\ &= 1 + x(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) - x^{n+1} \\ &= 1 + xs_n - x^{n+1} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} s_n - xs_n &= 1 - x^{n+1} \\ s_n(1-x) &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

e dividendo per $1 - x$, dopo aver posto $x \neq 1$, si ha

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad x \neq 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

se $|x| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

se $x = 1$ allora la serie diventa $1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ e diverge a $+\infty$[2];
se $x = -1$ allora la serie diventa $1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n + \cdots$ ed è indeterminata[3].
Se $x > 1$ allora

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = +\infty$$

quindi la serie diverge a $+\infty$; se $x < -1$ allora

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \infty$$

quindi la serie diverge oscillando.

[2] $s_n = n$
[3] $s_{2k} = 0$ e $s_{2k+1} = 1$

ESERCIZI

Esercizio 3.1.1. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche (eventualmente al variare di $x \in \mathbb{R}$:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ $\qquad \left[\frac{11}{8}\right]$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} \quad a<b \quad a,b \in \mathbb{N}$ $\qquad \left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\cdots+\frac{1}{b-1}\right]$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1+x}{x}\right)^n$ $\qquad \left[\text{converge a } \frac{x}{2x+1} \text{ per } x<-\frac{1}{2}\right]$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\ln(x^2-e)\right]^n$ $\qquad \left[\text{converge a } \frac{1}{1-\ln(x^2-e)} \text{ per } \sqrt{e+\frac{1}{e}}<|x|<\sqrt{2e}\right]$

3.2 Criterio di convergenza di Cauchy

Teorema 3.2.1 (Convergenza secondo Cauchy). *Data una serie* $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$, *essa converge se e solo se*

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \epsilon$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ s_{n+k} &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} & \forall\, n, k \in \mathbb{N} \quad k > 0 \\ s_{n+k} - s_n &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} \end{aligned}$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè la successione numerica reale $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga è che:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}\,, n_1, n_2 > \bar{n} \Rightarrow |s_{n_2} - s_{n_1}| < \epsilon$$

scegliamo $n_2 = n + k, n_1 = n > \bar{n}$; dunque

$$|s_{n_2} - s_{n_1}| = |s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \epsilon$$

□

Corollario 3.2.1. *Se una serie converge allora*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. E' il criterio di Cauchy per $k = 1$. □

Teorema 3.2.2. *Una serie a termini non negativi o converge o diverge positivamente.*

Dimostrazione. Se la serie è a termini non negativi, la $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente. Sapendo che le successioni monotone non sono mai indeterminate, segue la conclusione. □

Esempio 3.2.1 (Importante). Discutere la convergenza della serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Osserviamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ eppure la serie diverge: infatti

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right| \geq \left|\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}\right|$$

dunque, per il Criterio di Cauchy, la serie non converge ed essendo a termini positivi, diverge a $+\infty$.

Definizione 3.2.1. Si dice *resto n-esimo* di una serie $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$ la quantità

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Risulta che

$$R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - s_n$$

la serie è privata dei suoi termini fino ad a_n. La R_n è una serie le cui somme parziali sono: $R_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}$ e si ha $R_{n,k} = s_{n+k} - s_n$. Passando al limite per $k \to +\infty$ si ha

$$\lim_{k \to +\infty} R_{n,k} = \lim_{k \to +\infty} s_{n+k} - s_n$$

cioè la serie e il suo resto n-esimo hanno lo stesso carattere[4].

[4] Cioè *entrambe* convegenti, divergenti o indeterminate

3.3 Serie a termini non negativi

Teorema 3.3.1 (Criterio del confronto)**.** *Siano* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *due serie a termini non negativi. Supponiamo che*

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n} \quad a_n \leq b_n$$

Allora

$$\text{Se } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$
$$\text{Se } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ diverge } \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ diverge.}$$

Dimostrazione. $R_n^{(a)}$ sia il resto n-esimo di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $R_n^{(b)}$ sia il resto n-esimo di $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$;

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$

$$R_{n,k}^{(a)} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} \leq b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+k} = R_{n,k}^{(b)}$$

se per ipotesi $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora

$$R_{n,k}^{(a)} \leq R_{n,k}^{(b)} < \epsilon$$

e ne consegue che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (per il Criterio di Cauchy); se per ipotesi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge allora

$$\forall\, M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$
$$M < R_{n,k}^{(a)} \leq R_{n,k}^{(b)}$$

ne consegue che $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge. □

Esempio 3.3.1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall\, n \geq 2 \quad \text{(dimostrare)}$$

Poichè

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{converge (serie di Mengoli) allora } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

Esempio 3.3.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall\, n \geq 1 \quad \text{(dimostrare)}$$

Poichè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge (serie armonica) allora } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

Teorema 3.3.2 (Criterio del rapporto)**.** *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini non negativi e sia*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Allora

se $L > 1$ *la serie diverge*
se $0 \leq L < 1$ *la serie converge*
se $L = 1$ *nulla si può dire (del carattere, naturalmente).*

Dimostrazione. Caso[5] $L > 1$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon$$

sia $L - \epsilon = h > 1$

$$\begin{aligned} &a_{n+1} > h a_n \\ &a_{n+2} > h a_{n+1} > h^2 a_n \\ &\quad\vdots \\ &a_{n+k} > h^k a_n \quad \forall\, n > \bar{n}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} > h a_n + h^2 a_n + \cdots + h^k a_n + \cdots = a_n(h + h^2 + \cdots + h^k + \cdots)$$

Poichè h^k è il termine generale di una serie geometrica divergente ($h > 1$), ne consegue che, per il criterio del confronto, la serie diverge.

Caso $L < 1$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon$$

sia $L - \epsilon = h < 1$

$$\begin{aligned} &a_{n+1} < h a_n \\ &a_{n+2} < h a_{n+1} < h^2 a_n \\ &\quad\vdots \\ &a_{n+k} < h^k a_n \quad \forall\, n > \bar{n}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} < h a_n + h^2 a_n + \cdots + h^k a_n + \cdots = a_n(h + h^2 + \cdots + h^k + \cdots)$$

Poichè h^k è il termine generale di una serie geometrica convergente ($h < 1$), ne consegue che, per il criterio del confronto, la serie converge.

Caso $L = 1$
Nulla si può dire nel senso che il criterio non è sufficientemente potente per stabilire il carattere della serie. □

[5] Vale anche nel caso $L = +\infty$, ma noi ci limitiamo al caso finito.

Esempio 3.3.3.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

ne consegue che la serie data converge.

Esempio 3.3.4.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\,\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

ne consegue che la serie data converge.

Esempio 3.3.5. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}^+$ converge la serie

$$1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x+x^2} + \cdots + \frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}} + \cdots$$

Abbiamo

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad \text{se } x \neq 1$$

la serie diventa

$$1 + \frac{1-x}{1-x^2} + \frac{1-x}{1-x^3} + \cdots + \frac{1-x}{1-x^n} + \cdots$$

e quindi, applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-x}{1-x^{n+1}}\,\frac{1-x^n}{1-x} \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

se $x > 1$ la serie converge
se $x = 1$ si ottiene $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, la serie armonica che diverge
se $0 < x < 1$ il criterio non dice nulla ma

$$\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}} > \frac{1}{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-\text{volte}}} = \frac{1}{n}$$

per il criterio del confronto, la serie data diverge.

Teorema 3.3.3 (Criterio della radice)**.** *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini non negativi e sia*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Allora

se $L > 1$ *la serie diverge*
se $0 \leq L < 1$ *la serie converge*
se $L = 1$ *nulla si può dire.*

Dimostrazione. Caso $L > 1$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n} \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$$

sia $L - \epsilon = h > 1$
$\sqrt[n]{a_n} > h$ e quindi $a_n > h^n\ \forall\, n > \bar{n}$.
Poichè h^n è il termine generale di una serie geometrica divergente ($h > 1$), allora la serie data diverge per il criterio del confronto.

Caso $L < 1$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n} \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$$

sia $L - \epsilon = h < 1$
$\sqrt[n]{a_n} < h$ e quindi $a_n < h^n\ \forall\, n > \bar{n}$.
Poichè h^k è il termine generale di una serie geometrica convergente ($h < 1$), ne consegue che, per il criterio del confronto, la serie converge. □

Esempio 3.3.6.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

ne consegue che la serie data converge.

Esempio 3.3.7.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{(serie armonica)}$$

Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to0^+} t^t = \lim_{t\to0^+} e^{t\ln t} = e^{\lim_{t\to0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}}} = e^{\lim_{t\to0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}} = e^0 = 1$$

dove abbiamo posto $\frac{1}{n} = t$ e applicato De l'Hopital per il calcolo del limite.
Il criterio della radice non permette alcuna conclusione, pur essendo la serie armonica divergente.

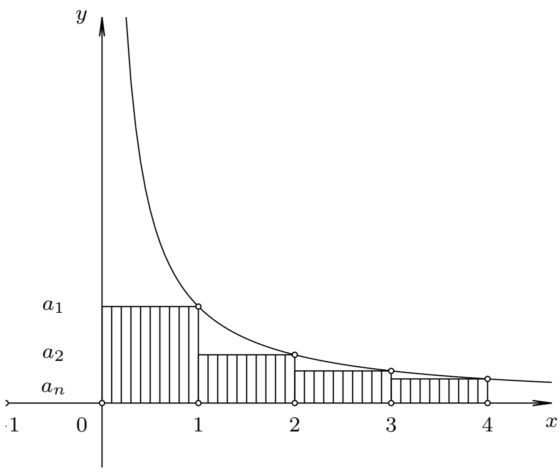
Teorema 3.3.4 (Criterio dell'integrale)**.** *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini non negativi. Se* $f(x)$ *è una funzione decrescente tale che* $f(n) = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *allora*

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \quad \textit{converge} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \textit{converge}$$

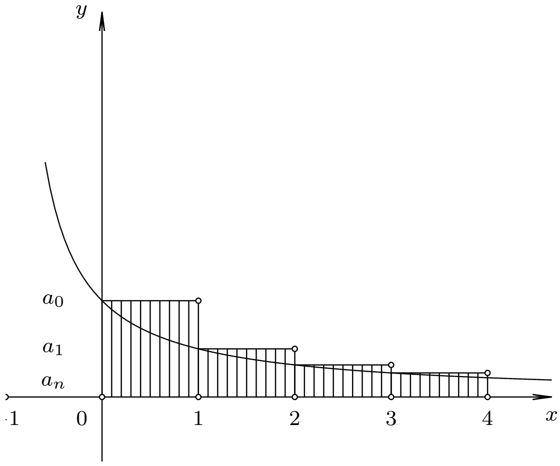
e

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \quad \textit{diverge} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \textit{diverge.}$$

Dimostrazione. Consideriamo le figure



Nella figura il plurirettangolo inscritto ha area $A_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n - a_0$.



Nella figura il plurirettangolo circoscritto ha area $A_c = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1}$.

Dunque

$$s_n - a_0 \leq \int_0^n f(x)\,dx \leq s_{n-1}$$

Se $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,dx$ esiste finito, allora $\lim_{n\to+\infty} s_n - a_0$ esiste finito; quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n$ esiste finito e la serie converge.
Se $\lim_{n\to+\infty} s_{n-1}$ esiste finito, allora $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)dx$ esiste finito e l'integrale converge.
Se $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,dx = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = +\infty$ e la serie diverge.
Se $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,dx = +\infty$ e l'integrale diverge.

$\square$

Esempio 3.3.8.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Abbiamo

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx \quad \text{diverge.}$$

Infatti

$$\lim_{m\to+\infty}[\ln|\ln x|]_2^m = \lim_{m\to+\infty}[\ln|\ln m| - \ln|\ln 2|] = +\infty$$

quindi la serie diverge.

Esempio 3.3.9.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

Calcoliamo

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

poichè

$$\frac{1}{x+\sqrt{x}} \approx \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty$$

e siccome $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ diverge, allora la serie data diverge.

Esercizio 3.3.1 (Serie di Riemann)**.** La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \iff p > 1.$$

3.4 Serie a termini di segno alterno

Definizione 3.4.1. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi; si dice *serie a segno alterno* la

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$$

Teorema 3.4.1 (Criterio di convergenza di Leibniz)**.** *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi, decrescenti e con termine generale infinitesimo.*
Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \quad \textit{converge e inoltre} \ \mid R_n \mid \le a_{n+1}$$

Dimostrazione. Consideriamo le somme:

$$s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} = s_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \le s_{2k}$$

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} = s_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) \ge s_{2k-1}$$

La successione delle ridotte di indice pari è decrescente mentre quella di indice dispari è crescente.

Ma essendo $\forall\, k,\ s_{2k} \ge s_{2k+1} \ge s_1$, allora $\{s_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata (oltre che decrescente).
Analogamente si ha: $s_{2k+1} \le s_{2k} \le s_0$, allora $\{s_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata (oltre che crescente).
Risulta:

$$0 = \lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty}(s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k\to+\infty} s_{2k} - \lim_{k\to+\infty} s_{2k+1}$$

quindi

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2k} = \lim_{k\to+\infty} s_{2k+1} = s$$

e la serie data converge. Risulta ancora:

$s_{2k-1} \leq s \leq s_{2k}$ e $s_{2k+1} \leq s \leq s_{2k}$, $0 \leq s - s_{2k-1} \leq s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k}$; $0 \leq s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1}$.

vale a dire

$$|R_{2k+1}| = |s - s_{2k-1}| \leq a_{2k}$$
$$|R_{2k}| = |s_{2k} - s| \leq a_{2k+1}$$

cioè il resto risulta minore o uguale al primo termine trascurato. □

Esempio 3.4.1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \qquad \text{armonica a segni alterni.}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è decrescente, con termine generale infinitesimo; ne consegue che la serie data converge per il criterio di Leibniz. Fermarsi al termine n-esimo significa commettere un errore minore, in modulo, di $\frac{1}{n+1}$.

Esempio 3.4.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \geq 0$$

se $x = 0$ allora la serie converge a 0. Se $x \neq 0$ allora

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \text{quando } 1 \geq \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

cioè

$$x^2 \leq (2n+2)(2n+3) \quad \text{cioè } 4n^2 + 10n + 6 - x^2 \geq 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24 + 4x^2}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{1 + 4x^2}}{4} \quad \text{cioè } n \geq \frac{-5 + \sqrt{1 + 4x^2}}{4}$$

Riassumendo: la successione di termine generale $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x \geq 0$ è decrescente $\forall\, n \geq \frac{-5+\sqrt{1+4x^2}}{4}$, inoltre il

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

per il criterio di Leibniz la serie data converge $\forall\, x \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Fermarsi al termine n-esimo significa commettere un errore minore, in modulo, di $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

Definizione 3.4.2. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge assolutamente* se converge la $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

Teorema 3.4.2. *Una serie assolutamente convergente è convergente*[6]

Dimostrazione.

$$|R_{n,k}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| = \overline{R_{n,k}} < \epsilon$$

dove $\overline{R_{n,k}}$ è la ridotta k-esima del resto n-esimo della serie dei moduli. Quindi, per il criterio di Cauchy, la serie data converge. □

[6] Per distinguere si dirà *convergenza semplice.*

Non vale il viceversa: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz ma $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ è divergente (serie armonica). Diciamo che la serie armonica a segni alterni converge semplicemente ma non assolutamente.

Esempio 3.4.3.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2x-1)^n$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei moduli $\sum_{n=0}^{+\infty}|2x-1|^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2x-1)^{n+1}}{(2x-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}|2x-1| = |2x-1|$$

se $|2x-1| < 1$ allora la serie converge assolutamente ed essendo una geometrica converge verso $\frac{1}{1-(2x-1)} = -\frac{1}{2x}$. Quindi, se $-1 < 2x-1 < 1$, cioè $0 < 2x < 2$, cioè $0 < x < 1$, la serie converge assolutamente. Se $|2x-1| > 1$ allora la serie dei moduli diverge e questo non ci dice nulla sulla serie data; osservando però che $\lim_{n\to+\infty}(2x-1)^n = \infty$, sicuramente la serie non converge. Se $|2x-1| = 1$ si ha $x = 0$ oppure $x = 1$; se $x = 0$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ che è indeterminata. Se $x = 1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty}1$ che diverge positivamente.

Esempio 3.4.4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei moduli $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)x^{2n+1}}\right| = x^2$$

se $x^2 < 1$ cioè $-1 < x < 1$, allora la serie converge assolutamente. Se $x^2 > 1$ cioè $x < -1, x > 1$, allora la serie dei moduli diverge e questo non ci dice nulla sulla serie data; osservando però che $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \infty$, sicuramente la serie non converge. Se $x = 1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ che converge per il criterio di Leibniz. Se $x = -1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ che converge per il criterio di Leibniz.

3.5 Proprietà e operazioni sulle serie numeriche

Valgono le seguenti proprietà e definizioni:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}ka_n$ $(k \in \mathbb{R}^*)$ hanno lo stesso carattere; se $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n = s$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty}ka_n = ks$.
2. Vale per le serie convergenti e divergenti la proprietà associativa; non vale per le serie indeterminate.
3. Non vale in generale la proprietà commutativa che però vale per le serie assolutamente convergenti.
4. Date $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$, si definiscono: la serie *somma*: $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)$; la serie *differenza*: $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-b_n)$; la serie *prodotto secondo Cauchy o prodotto di convoluzione*: $\sum_{n=0}^{+\infty}p_n$ dove $p_n = \sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_a$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = s_b$ allora la serie somma converge verso $(s_a + s_b)$ e la serie differenza verso $(s_a - s_b)$; se una delle serie date diverge e l'altra converge, allora la serie somma e la serie differenza divergono; se ambedue le serie date sono assolutamente convergenti allora la serie prodotto è assolutamente convergente e ha per somma $(s_a s_b)$; se almeno una delle serie date è assolutamente convergente e l'altra converge semplicemente allora la serie prodotto converge a $(s_a s_b)$; se le serie date convergono anche solo semplicemente allora non si può affermare nulla sulla serie prodotto ma, se questa converge, allora converge verso $(s_a s_b)$.

3.6 Esercizi riassuntivi

Esercizio 3.6.1. Stabilire la convergenza, semplice o assoluta, delle seguenti serie.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n!}$ [converge assolutamente]

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{3}$ [converge assolutamente]

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n+1}{n^2}$ [diverge]

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+\sin n}$ [converge semplicemente]

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ [converge assolutamente]

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\binom{n}{k}} \quad k\in\mathbb{Z}_*^+$ [converge $\forall k\neq 1$, diverge per $k=1$]

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+100}$ [converge semplicemente]

Esercizio 3.6.2. Determinare per quali valori $x\in\mathbb{R}$ converge la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$ [converge assolutamente per $|x|<1$; per $x=1$ converge semplicemente]

Capitolo 4

Serie di funzioni

4.1 Generalità

Definizione 4.1.1. Si dice *serie di funzioni* una serie i cui termini sono funzioni (reali di variabile reale). Con le solite notazioni la serie si indica con:

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) \cdots \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Definizione 4.1.2. Data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ove le $f_n(x)$ siano definite in $I \subseteq \mathbb{R}$, si dice *dominio di convergenza* l'insieme $D = \{x_0 \in I \mid \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) \quad \text{è una serie numerica convergente}\}$.

Esempio 4.1.1.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-x}{2} x^n \qquad I = \mathbb{R}$$

Se $x = 1$ allora tutti i termini della serie sono nulli e quindi essa converge a 0. Se $x \neq 1$ allora la serie $\frac{1-x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge a $\frac{1-x}{2} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$ per $|x| < 1$; quindi $D =]-1, 1]$.

Esempio 4.1.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{n(\arctan x - x)}}{n} \qquad I = \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{(n+1)(\arctan x - x)}}{n+1} \frac{n}{e^{n(\arctan x - x)}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} e^{\arctan x - x} = e^{\arctan x - x}$$

La serie converge assolutamente se $e^{\arctan x - x} < 1$ cioè se $\arctan x < x$ che è vera $\forall x > 0$; se $x < 0$ allora la serie non converge perchè il termine generale non è infinitesimo. Se $x = 0$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge. Quindi $D = [0, +\infty[$.

ESERCIZI

Esercizio 4.1.1. Studiare la seguenti serie di funzioni e individuarne il dominio di convergenza:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2-1)^n}{n+1}$ $\left[\text{Converge assolutamente in }]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\right]$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|x|+1}{x^2+1}\right)^n$ [Converge assolutamente in $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$]
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x|x|)^n}{n2^n}$ $\left[\text{Converge in } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\text{, converge assolutamente in }]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\right]$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cos^n x$ [Converge assolutamente in $\{x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi\}$]
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(p+\frac{x}{n}\right)^n$ [Se $|p|<1$ converge assolutamente; se$|p| \geq 1$ non converge $\forall\, x \in \mathbb{R}$]
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ [Converge assolutamente in $]-e, e[$]

4.2 Convergenza uniforme

Definizione 4.2.1. Data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, si dice che *converge uniformemente* in D se $\forall\epsilon > 0\ \exists\overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \overline{n}, \forall x \in D \Longrightarrow |R_n(x)| < \epsilon$.

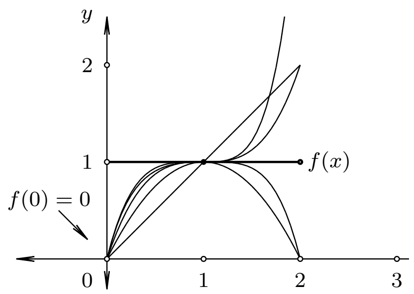
Esempio 4.2.1. $\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1$$

Se $x = 0$ o $x = 1$ la serie converge a 0.

Se $x \neq 0$ e $x \neq 1$ la serie diventa $x\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^n$ che converge a $x\frac{1}{1-(1-x)}$ per $|1-x| < 1$ cioè $0 < x < 2$. Quindi $D = [0, 2[$.

$$\begin{aligned}
&x\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^n = x[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots + (1-x)^n + \cdots]\\
&s_0(x) = x\\
&s_1(x) = x[1 + (1-x)] = x[2-x]\\
&s_2(x) = x[1 + (1-x) + (1-x)^2] = x[3 - 3x + x^2]\\
&\vdots\\
&s_n(x) = x[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots + (1-x)^n] = x\frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = 1 - (1-x)^{n+1}
\end{aligned}$$



Si vede dalla figura che, considerato un intorno di $f(x)$, qualunque sia $x \in [a, b] \subset]0, 2[$, è sempre possibile trovare un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che da quall'indice in poi, le somme parziali $s_n(x)$ cadano entro questo intorno. Si dice che vi è convergenza uniforme in $[a, b]$ con $0 < a < b < 2$. Infatti è :

$$\begin{aligned}
\forall\epsilon > 0 \Rightarrow |R_n(x)| &= |f(x) - s_n(x)| =\\
&= |1 - [1 - (1-x)^{n+1}]| =\\
&= |(1-x)^{n+1}| \leq c^{n+1} < \epsilon
\end{aligned}$$

ove $c = \max|b-1|, |a-1|$ e $c < 1$; allora $n + 1 > \log_c \epsilon$, per cui $n > \log_c \epsilon - 1$.

Invece, preso $x \in [0, 2[$ (insieme di convergenza puntuale) non è possibile trovare un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che da quall'indice in poi, le somme parziali cadano entro quell'intorno: in prossimità di 0 e 2 vi è un ramo della $s(x)$ che se ne esce.

Infatti abbiamo: $\forall\epsilon > 0 \Rightarrow |R_n(x)| = |1-x|^{n+1}$ se $x \in]0, 2[$; $|R_n(x)| = 0$ se $x = 0$; sarà $|1-x|^{n+1} < \epsilon$ se $n+1 > \log_{|1-x|}\epsilon$ cioè se $n > \log_{|1-x|}\epsilon - 1$ cioè $n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|1-x|} - 1$; si ha $\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|1-x|} - 1\right] = +\infty$ e anche $\lim_{x\to2^-}\left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|1-x|} - 1\right] = +\infty$ cioè non esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$, $\forall x \in [0, 2[\Rightarrow |R_n(x)| < \epsilon$.

4.3 Convergenza totale

Definizione 4.3.1. Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ si dice che *converge totalmente* in D se $\forall x \in D \Rightarrow |f_n(x)| \leq c_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ è una serie numerica reale convergente.

Teorema 4.3.1 (Criterio di Weierstrass)**.** *La convergenza totale implica la convergenza uniforme.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\forall\, \epsilon > 0,\ \forall\, x \in D \quad \text{si ha } |R_n(x)| &= |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots| \leq \\ &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots = \\ &= R_n < \epsilon\end{aligned}$$

□

Osservazione:l criterio di Weierstrass *non è invertibile*. Infatti $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ è uniformemente convergente in $[0,1]$:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > \bar{n}, \forall\, x \in [0,1] \Rightarrow |R_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \epsilon; \quad \text{basta che sia } \bar{n} = [\frac{1}{\epsilon} - 1] + 1 = \frac{1}{\epsilon}$$

ma non è totalmente convergente: $|(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}| \leq \frac{1}{n}$ e non è possibile trovare una serie numerica maggiorante che sia termini minori di quella data.

ESERCIZI

Esercizio 4.3.1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+n)^n}{n! 3^n}$$

[Converge totalmente e quindi uniformemente in $]-\infty, a]\ \forall\, a \in \mathbb{R}$]

Esercizio 4.3.2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

[Converge puntualmente $\forall\, x \in \mathbb{R}$; totalmente e quindi uniformemente in $[a,b]$ con $a < b < 0$ oppure in $[c,d]$ con $0 < c < d$; suggerimento: si disegnino le somme parziali e la $f(x)$]

Esercizio 4.3.3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [n(x^n - x^{2n} - (n-1)(x^{n-1} - x^{2n-2}] \quad x \geq 0$$

[Converge puntualmente in $[0,1]$ a $f(x) = 0$; converge totalmente e quindi uniformemente in $[0,a]$ con $a < 1$]

Capitolo 5

Serie di potenze

5.1 Generalità

Definizione 5.1.1. Si dice *serie di potenze* di punto iniziale x_0 la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad a_n \in \mathbb{R}.$$

Lemma 5.1.1. *Data la serie numerica* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *se* $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = p > 1$ *allora la serie non converge.*

Dimostrazione. Per ipotesi $|a_n|(p-\epsilon) < |a_{n+1}| < |a_n|(p+\epsilon)$; posto $p-\epsilon = h > 1$ si ha: $|a_{n+k}| > |a_n|h^k \,\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ e quindi $\lim_{k\to+\infty}|a_{n+k}| \neq 0$. □

Teorema 5.1.1. *La serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *converge assolutamente in* $]x_0-R, x_0+R[$ *dove*[1] $R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *e non converge in* $]-\infty, x_0-R[\cup]x_0+R, +\infty[$.

Dimostrazione. Applichiamo alla serie dei moduli il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}||x-x_0|^{n+1}}{|a_n||x-x_0|^n} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0|;$$

se $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ esiste, lo poniamo $=\frac{1}{R}$; quindi il limite precedente è $\frac{|x-x_0|}{R}$. Se $\frac{|x-x_0|}{R} < 1$, la serie converge assolutamente, quindi $|x-x_0| < R$, cioè $x \in]x_0-R, x_0+R[$. Dal lemma precedente segue la seconda parte del teorema. Negli estremi si controllerà di volta in volta l'eventuale convergenza. □

Esempio 5.1.1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+3)^n}{n} \qquad x_0 = -3 \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = 1$$

[1] R si dice *raggio di convergenza*

$R = 1$, la serie converge assolutamente in $]-3-1, -3+1[=]-4, -2[$; se $x = -4$ allora la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge semplicemente; se $x = -2$ allora la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.

Esempio 5.1.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-2)^n \quad x_0 = 2 \quad a_n = n!$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n!}{n+1!} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$R = 0$; quando $R = 0$ si ha convergenza solo per $x = x_0$; nel nostro caso solo per $x = 2$.

Esempio 5.1.3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad x_0 = 0 \quad a_n = \frac{1}{n^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{(n+1)^n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) = +\infty$$

$R = +\infty$; quando $R = +\infty$ si ha convergenza assoluta su tutto l'asse reale.

ESERCIZI

Esercizio 5.1.1. Studiare la seguenti serie di funzioni e individuarne il dominio di convergenza:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} n! \left(\frac{x+6}{n}\right)^n$ [Converge assolutamente in $]-6-e, -6+e[$]
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{2^n\sqrt{n^2+a^2}}$ $a \in \mathbb{R}^*$ $\left[\text{Converge in } [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\text{; assolutamente in }]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$
3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{\ln n}(1-5x)^n$ $\left[\text{Converge per } x = \frac{1}{5}\right]$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ [Converge assolutamente $\forall\, x \in \mathbb{R}$]

5.2 Sviluppo in serie di potenze.

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile indefinitamente in $I \subseteq \mathbb{R}$, ci proponiamo di costruire il polinomio di grado n che l'approssima nel migliore dei modi in un intorno di x_0, vale a dire che differisca dalla $f(x)$ per meno di un infinitesimo per $x \to x_0$. Osserviamo che il polinomio di grado 0, cioè la funzione costante, che meglio approssima la $f(x)$ in un intorno di x_0 è:

$$p_0(x) = f(x_0)$$

infatti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{cioè } f(x) = f(x_0) + \sigma(x_0, x - x_0) \quad \text{con } \lim_{x\to x_0} \sigma(x_0, x - x_0) = 0.$$

Invece il polinomio di grado 1, cioè la funzione lineare, che meglio approssima la $f(x)$ in un intorno di x_0 è:

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0);$$

imponiamo che il polinomio passi per $(x_0, f(x_0))$, cioè $p_1(x_0) = f(x_0)$ da cui $a_0 = f(x_0)$; imponiamo poi che il polinomio abbia, in x_0, la stessa derivata di $f(x)$ cioè $p_1'(x_0) = f'(x_0)$ da cui $a_1 = f'(x_0)$ e quindi finalmente:

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

questo polinomio risponde alle richieste, infatti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{cioè } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \sigma(x_0, x - x_0)$$

con $\lim_{x \to x_0} \sigma(x_0, x - x_0) = 0$; cioè $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\sigma(x_0, x - x_0)$.
Sarà dunque ragionevole supporre che il polinomio di grado n che meglio approssima la $f(x)$ in un intorno di x_0 sia:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

con

$$\begin{aligned} &p_n(x_0) = f(x_0) \\ &p_n'(x_0) = f'(x_0) \\ &\vdots \\ &p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} &a_0 = f(x_0) \\ &a_1 = f'(x_0) \\ &2a_2 = f''(x_0) \\ &2 \cdot 3a_3 = f'''(x_0) \\ &\vdots \\ &n!a_n = f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

da cui, in generale $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Abbiamo perciò la formula:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

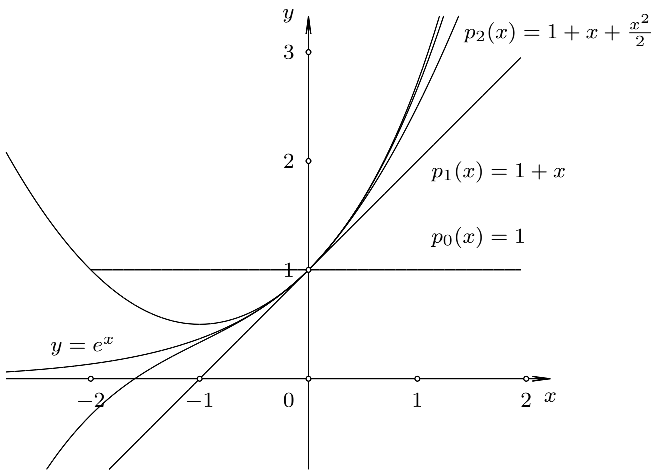
ossia

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Esempio 5.2.1.

$$f(x) = e^x \quad x_0 = 0$$

$$\begin{array}{ll}
n=0 & p_0(x) = 1 \\
n=1 & p_1(x) = 1+x \\
n=2 & p_2(x) = 1+x+\dfrac{x^2}{2} \\
\vdots & \vdots \\
n=n & p_n(x) = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}
\end{array}$$



Le condizioni di esistenza della costruzione appena vista sono definite nel seguente:

Teorema 5.2.1 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno aperto I di x_0 e ivi derivabile almeno $n+1$ volte; allora esiste $\xi \in I$ tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione. Applichiamo il teorema di Cauchy [2] alle funzioni $f(x) - p_{n-1}(x)$ e $(x-x_0)^n$ dove

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \text{nei punti } x \text{ e } x_0, \text{ con } x \in I$$

Sia, per esempio, $x > x_0$, poniamo $I_1 =]x_0, x[$, allora

$$\frac{[f(x) - p_n(x)] - [f(x_0) - p_n(x_0)]}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1) - p_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad \xi_1 \in I_1$$

[2]

Teorema (di Cauchy). Date due funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, continue in $[a,b]$, derivabili in $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$ allora esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

.

Riapplicando il teorema di Cauchy nell'intervallo I_1 all' espressione così ottenuta e così via per $n+1$ volte:

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \cdots \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}$$

e quindi

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

da cui la conclusione ponendo $\xi_n = \xi$. □

Il termine $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ è detto resto n-esimo nella forma di Lagrange. Consideriamo ora la serie[3] $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$; si tratta di una serie di potenze che, per come è stata costruita, approssima la funzione $f(x)$. Sorgono immediatamente due problemi:

1. la serie converge per $x = x_0$?
2. se converge, converge alla $f(x)$?

Teorema 5.2.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie di Taylor* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ *converga alla funzione* $f(x)$ *è che* $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ *dove* $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Dimostrazione.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad c \in I.$$

La serie di Taylor converge alla $f(x)$ se e solo se $\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = f(x)$ ($p_n(x)$ è la usuale ridotta n-esima $s_n(x)$) cioè se e solo se $\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$ □

Teorema 5.2.3 (Criterio di convergenza)**.** *Se* $\exists M > 0$ *tale che* $|f^{(n)}(x)| \le M \quad \forall x \in I$ *allora la serie di Taylor converge alla* $f(x)$ *in* I*. In questo caso si dice che le derivate sono* equilimitate*.*

Dimostrazione.

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)n+1 \right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} :$$

Consideriamo $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ e applichiamo ad essa il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x-x_0|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!|x-x_0|^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x-x_0|}{n+2} = 0 < 1$$

quindi la serie data converge e pertanto il suo termine generale è infinitesimo:

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} < \epsilon.$$

□

[3] Di Taylor.

5.3 Sviluppi notevoli in serie di Taylor

Spesso si usa come punto iniziale $x_0 = 0$; in tal caso si parla di serie di *Mac Laurin*.

Esempio 5.3.1.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Le derivate sono del tipo $f^{(n)}(x) = e^x$ e risulta $\forall x \in [-k, k]$ che $|e^x| \le e^k = M$; data l'arbitrarietà di k, vi è convergenza su tutto l'asse reale.

Esempio 5.3.2.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Tutte le derivate sono maggiorate in modulo da 1, quindi equilimitate $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 5.3.3.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Come sopra.

Esempio 5.3.4.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) &= -1 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}$$

quindi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

Applicando uno dei criteri noti si ottiene come dominio di convergenza $D =]-1, 1]$; la convergenza è totale in $[a, b]$ con $-1 < a < b < 1$:

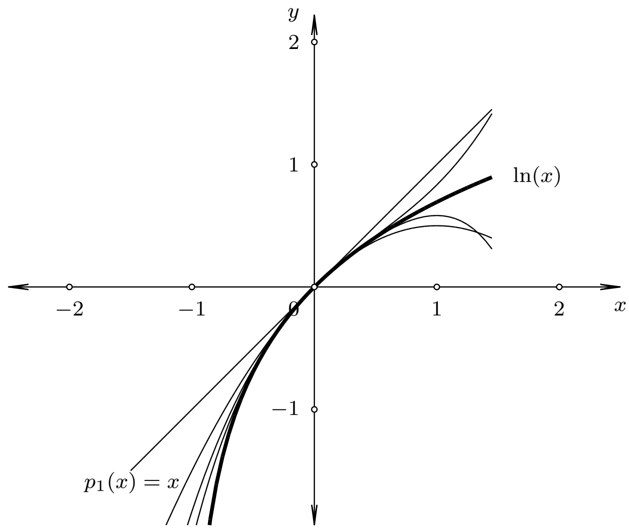
$$\left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{c^n}{n} \quad \text{dove } c = max(|a|, |b|) \quad 0 < c < 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c^n}{n} \quad \text{converge se } 0 < c < 1$$

La convergenza della nostra serie è addirittura uniforme in $[0,1]$ poichè

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ rappresenta una funzione continua in $[0,1]$. Poichè anche $\ln(1+x)$ è continua in $[0,1]$, l'uguaglianza $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ vale anche per $x=1$.



Come applicazione possiamo ottenere lo sviluppo in serie di

$$\ln 2 = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

l'errore commesso fermandosi al termine n-esimo è minore di $\frac{1}{n}$.

Esempio 5.3.5.

$$(1+m)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{m}{n}x^n \quad m \in \mathbb{R}$$

se $m=-1$ allora $(1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ e si ha la serie geometrica di ragione $-x$ che converge per $|x|<1$.
se $m = -\dfrac{1}{2}$ allora $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \cdots$
se $m = \dfrac{1}{2}$ allora $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \cdots$

ESERCIZI

Esercizio 5.3.1. Sviluppare in serie di Mac Laurin le funzioni:

1. $e^{\sin x}$
2. e^{-x^2}
3. $\dfrac{\sin x}{x}$
4. $\ln(1+\sqrt{1+x})$

Esercizio 5.3.2. Calcolare:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^2-\sin x}$ $\left[\dfrac{1}{6}\right]$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x-x^2)}{x(e^x-1)}$ $[1]$

5.4 Teoremi di continuità, derivazione e integrazione per serie

Teorema 5.4.1. *Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente a* $f(x)$ *in* D *e* x_0 *è un punto di accumulazione per* D *e se inoltre* $\lim_{x \to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x);$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Osserviamo che, in generale, se la convergenza non è uniforme il teorema non vale. Infatti consideriamo la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ che sappiamo convergere a $\frac{1}{1-x}$ per $|x| < 1$; $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$ passando al limite per $x \to -1$ si ha $\lim_{x \to -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x \to -1} (1+x+x^2+\cdots) = (1-1+1-\cdots)$ in questo caso, non essendoci convergenza uniforme in -1, non sussiste l'uguaglianza enunciata nel teorema.

Teorema 5.4.2. *Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente a* $f(x)$ *in* D *e* x_0 *è un punto di accumulazione per* D *e le* $f_n(x)$ *sono continue in* $x_0 \, \forall n \in \mathbb{N}$, *allora* $f(x)$ *è continua in* x_0.

Teorema 5.4.3. *Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge a* $f(x)$ *in* D *e le* $f_n(x)$ *sono derivabili in* D $\forall n \in \mathbb{N}$, *e la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$ *converge uniformemente a* $g(x)$ *allora* $f(x)$ *è derivabile in* D *e* $f'(x) = g(x)$; *cioè*

$$D\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[D f_n(x)\right].$$

Osserviamo che, in generale, se la convergenza della serie delle derivate non è uniforme, non è detto che valga il teorema.

Teorema 5.4.4. *Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente a* $f(x)$ *in* $D = [a, b]$ *e le* $f_n(x)$ *sono continue in* D $\forall n \in \mathbb{N}$, *allora* $f(x)$ *è integrabile in* D *e* $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$; *cioè*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right).$$

Esempio 5.4.1. $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

per $|t| < 1 \Longrightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - \cdots)\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

per $x = 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz
per $x = -1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ che diverge a $-\infty$.
Allora:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad -1 < x \leq 1.$$

Esempio 5.4.2. $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$
per $|t| < 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \cdots)\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$
per $x = 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ converge per il criterio di Leibniz
per $x = -1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n-1}$ converge per il criterio di Leibniz.
Allora:

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Se $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

cioè

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$

Capitolo 6

Serie di Fourier

6.1 Generalità

Definizione 6.1.1. Si dice *serie trigonometrica o di Fourier* la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Supponiamo che la funzione $y = f(x)$, periodica di periodo $T = 2\pi$ sia la somma di una serie trigonometrica e che la convergenza sia uniforme. Vogliamo, in queste ipotesi, ricavare i coefficienti a_n e b_n.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{6.1}$$

Integriamo ambo i membri su $[-\pi, \pi]$ utilizzando il teorema di integrazione per serie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right] = \pi a_0$$

Infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Quindi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Moltiplichiamo ambo i membri della 6.1 per $\cos mx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx\right] = \pi a_m$$

Infatti se $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+m)x}{n+m} - \frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

se $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2nx \, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2nx}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}^*$$

Ancora: se $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

se $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2nx}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Quindi

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

e analogamente

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

6.2 Sviluppabilità in serie di Fourier

Ci chiediamo quali siano le condizioni per la sviluppabilità di una funzione periodica di periodo $T = 2\pi$ in serie di Fourier:

Teorema 6.2.1 (Di Dirichlet)**.** *Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π monotona e continua a tratti in $[-\pi, \pi]$ e ivi limitata; allora si può scrivere la serie di Fourier relativa alla $f(x)$ e tale serie converge alla $f(x)$ ove questa è continua. Converge verso*

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to c^-} f(x) + \lim_{x\to c^+} f(x)\right]$$

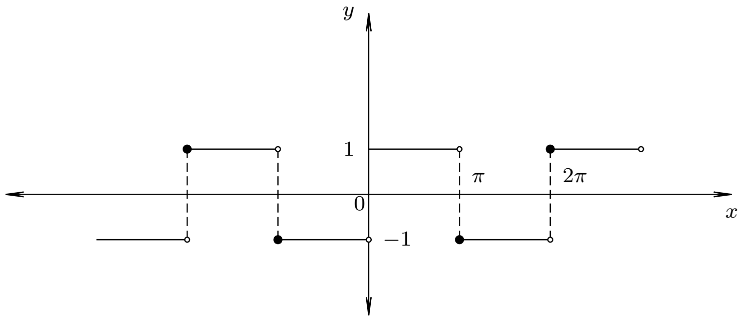
in ogni punto c di discontinuità interno all'intervallo. Converge verso

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to \pi^-} f(x) + \lim_{x\to -\pi^+} f(x)\right]$$

in ciascuno degli estremi. Dove la $f(x)$ è continua, la convergenza è uniforme.

Esempio 6.2.1. Si consideri l'onda quadra

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2k\pi \le x < \pi + 2k\pi \\ 2 & \text{se } \pi + 2k\pi \le x < 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$



Sono banalmente verificate le ipotesi del teorema di Dirichlet.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = 0$$

si può osservare che la funzione è dispari e quindi $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = 0$$

Lo stesso risultato si può ottenere osservando che, poichè $f(x)$ è dispari e $\cos nx$ è pari, il loro prodotto è dispari.

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \\ =& \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n}\right] = \\ =& \frac{2}{n\pi}[1+(-1)^{n+1}] = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \quad k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{4}{n\pi} & \text{se } n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

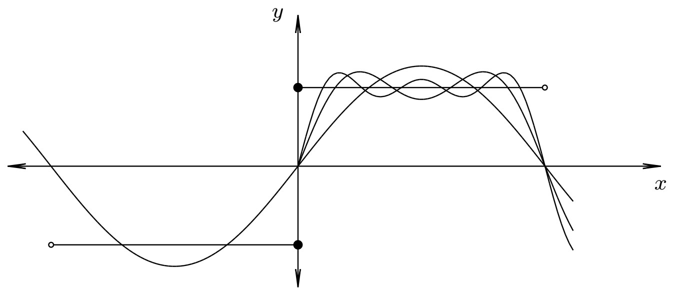
Si può osservare che, essendo $f(x)$ e $\sin nx$ entrambe dispari, il prodotto è pari e quindi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

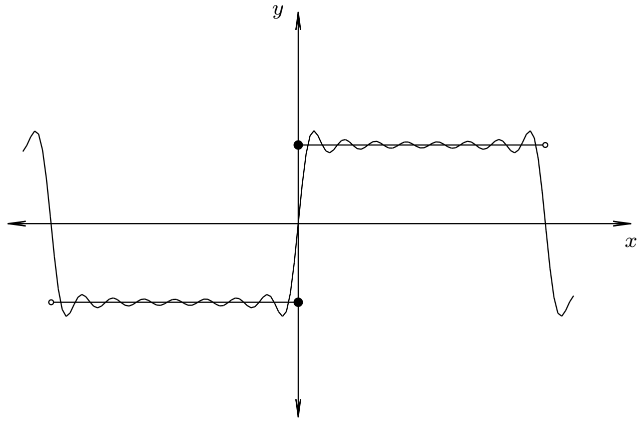
La serie di Fourier relativa all'onda quadra è:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)}$$

e converge uniformemente alla $f(x)$ per $x \neq k\pi$; converge a 0 per $x = k\pi$.



$$
\begin{aligned}
s_0(x) &= \frac{4}{\pi}\sin x \\
s_1(x) &= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right] \\
s_2(x) &= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right] \\
&\vdots \\
s_n(x) &= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right] \qquad n = 2k+1
\end{aligned}
$$



6.3 Serie trigonometriche notevoli

Se $f(x)$ è dispari, la sua serie trigonometrica è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \quad \text{ove } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

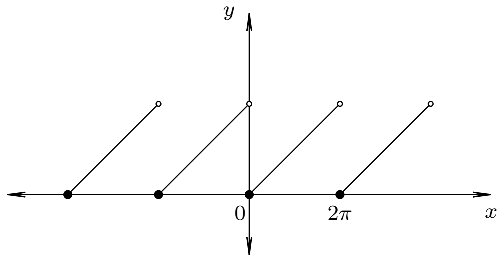
Se $f(x)$ è pari, la sua serie trigonometrica è:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \quad \text{ove } a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx \quad \text{ e } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx.$$

Osserviamo anche che $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\, dx$, qualunque sia $h \in \mathbb{R}$, se la funzione $f(x)$ è periodica di periodo 2π.

Esempio 6.3.1.

$$f(x) = x \quad \text{in } [0, 2\pi[\quad \text{periodica di periodo } 2\pi.$$

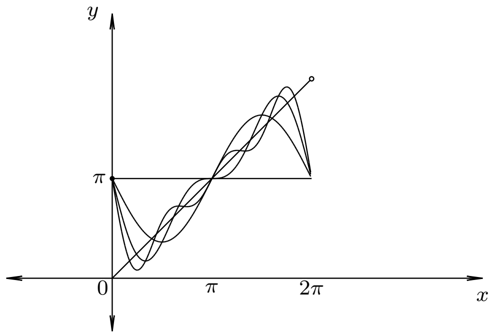


$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$$

La serie diventa:

$$\pi + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2\sin nx}{n}\right) = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin nx}{n}$$

e converge alla $f(x)$ per $x \neq 2k\pi$; converge a π per $x = 2k\pi$.



$$s_0(x) = \pi$$
$$s_1(x) = \pi - 2\sin x$$
$$s_2(x) = \pi - 2\left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2}\right]$$
$$\vdots$$
$$s_n(x) = \pi - 2\left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right]$$

Se $x = \frac{\pi}{4}$ si ha:

$$\frac{\pi}{4} = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n} = \pi - 2\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} + \frac{0}{4} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5} - \frac{1}{6} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{7} + \frac{0}{8} + \cdots\right]$$
$$\pi = \frac{8}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{1+8k} + \frac{1}{3+8k} - \frac{1}{5+8k} - \frac{1}{7+8k}\right) + \frac{1}{2+8k} - \frac{1}{6+8k}\right]$$

Se $x = \frac{\pi}{2}$ si ha:

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} = \pi - 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right]$$
$$\pi = 4\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$$

Osserviamo che se $f(x)$ è periodica di periodo $T = 2L$, la serie trigonometrica relativa è:

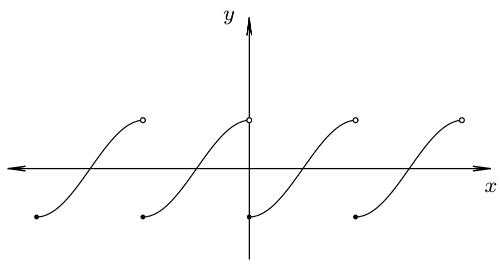
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

ove

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

Esempio 6.3.2.

$$f(x) = -\cos\sqrt{2}x \quad \text{in } 0 \le x < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \left(T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$$



$$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}2\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} -\cos\sqrt{2}x\sin\frac{n\pi}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} -\cos\sqrt{2}x\sin 2\sqrt{2}nx\,dx =$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\frac{1}{2}\left[\sin\sqrt{2}(2n+1)x + \sin\sqrt{2}(2n-1)x\right]dx =$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\cos\sqrt{2}(2n+1)x}{\sqrt{2}(2n+1)} + \frac{\cos\sqrt{2}(2n-1)x}{\sqrt{2}(2n-1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right] = \frac{8}{\pi}\frac{n}{1-4n^2}$$

la serie diventa:

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{1-4n^2}\sin 2\sqrt{2}nx$$

e converge alla $f(x)$ per $x \neq \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$; converge a 0 per $x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$.

Osservazione Data una funzione $f(x)$ definita in $[0, L]$, è possibile prolungarla in infiniti modi in $[-L, 0]$; sono notevoli i casi: prolungamento in modo *pari* e prolungamento in modo *dispari*.
Nel primo caso lo sviluppo in serie di Fourier sarà del tipo:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

nel secondo caso sarà del tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

6.4 Esercizi riassuntivi

Esercizio 6.4.1. Sviluppare in serie di Fourier $f(x) = x^2$ con $-1 \leq x \leq 1$ periodica con $T = 2$; calcolare quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$.

$$\left[x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\cos n\pi x; \qquad \text{per } x = 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\right]$$

Esercizio 6.4.2. Sviluppare in serie di soli seni la funzione $f(x) = \cos 2x$ in $[0, \pi]$.

$$\left[\cos 2x = \begin{cases} -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)\sin(2n+1)x}{4-(2n+1)^2} & \text{se } x \neq k\pi \\ 0 & \text{se } x = k\pi \end{cases}\right]$$

Esercizio 6.4.3. Sviluppare in serie di soli coseni $f(x) = \sin x$ in $[o, \pi]$

$$\left[\sin x = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{1-(2n)^2}\right]\right]$$

Esercizio 6.4.4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} & \text{se } x \neq \pi + 2k\pi \\ \frac{2}{\pi} & \text{se } x = \pi + 2k\pi \end{cases}\right]$$

Esercizio 6.4.5. Sviluppare in serie di soli seni la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}x}{(2k+1)^2}\right]$$

Esercizio 6.4.6. Sviluppare in serie di soli coseni la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}\right]$$

Parte III

Equazioni differenziali

Capitolo 7

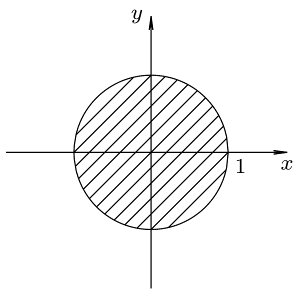
Funzioni di due variabili

7.1 Generalità

Definizione 7.1.1. Si dice *funzione reale di 2 variabili reali indipendenti* x e y e si scrive $z = f(x, y)$ ogni relazione definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tale che: $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\, \exists \| midz \in \mathbb{R} \mid z = f(x, y)$. Si scrive anche:

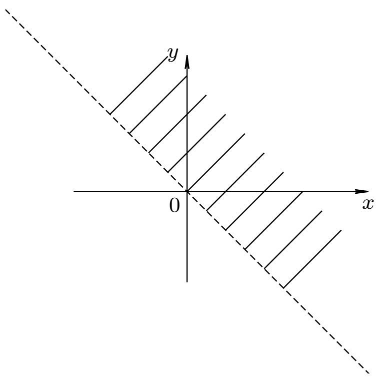
$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto f(x, y) = z \end{aligned}$$

Esempio 7.1.1. Determinare il campo di esistenza della funzione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.



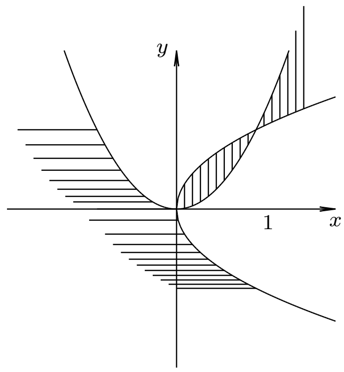
Ovviamente dovrà essere: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ cioè $x^2 + y^2 \leq 1$; il C.E. è costituito dai punti del cerchio di figura.

Esempio 7.1.2. Determinare il campo di esistenza della funzione $z = \ln(x + y)$.



Il C.E. sarà $x+y > 0$, cioè $y > -x$; geometricamente esso costituisce il semipiano tratteggiato in figura, retta origine esclusa.

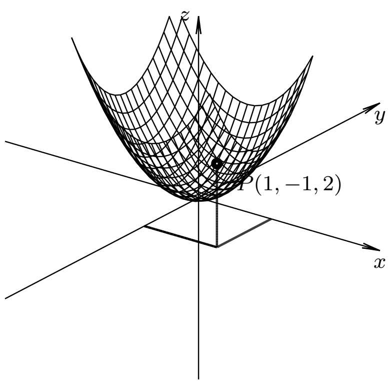
Esempio 7.1.3. Determinare il campo di esistenza della funzione $z = \sqrt{\dfrac{y - x^2}{x - y^2}}$.



Il C.E. sarà $\dfrac{y - x^2}{x - y^2} \geq 0$; geometricamente esso è composto dalle aree tratteggiate in figura.

Definizione 7.1.2. Si dice *grafico* della funzione $z = f(x, y)$ definita in un dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il luogo geometrico dei punti $P(x, y, f(x, y))$. Il grafico di una funzione di 2 variabili è dunque, generalmente, una superficie nello spazio la cui proiezione sul piano xy è D.

Esempio 7.1.4. $z = x^2 + y^2$.



C.E.: $(D)\, \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esempio 7.1.5. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

C.E.: $(D)\, x^2 + y^2 \leq 1$.

Definizione 7.1.3. Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ 2 punti di $\mathbb{R}^2$; si dice *distanza* di P_1 da P_2 e si scrive $\overline{P_1P_2}$ o $d(P_1, P_2)$ l'espressione $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Definizione 7.1.4. Si dice *sfera aperta* di centro $P_0(x_0, y_0)$ e raggio r l'insieme

$$B(P_0, r) = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, P_0) < r\}.$$

Definizione 7.1.5. Si dice *intorno* di $P_0(x_0, y_0)$ un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ contenente una sfera aperta di centro P_0. Si dice *intorno di infinito* P_∞, il complementare di un intorno di P_0.

Definizione 7.1.6. Si dice che *il limite per P che tende a P_0 di f(x,y) vale k* e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = k$$

se $\forall \epsilon > 0 \, \exists$ un intorno V di P_0 tale che $\forall (x,y) \in V \setminus P_0 \Rightarrow |f(x,y) - k| < \epsilon$.

Definizione 7.1.7. Si dice che *il limite per P che tende a P_0 di f(x,y) vale ∞* e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$$

se $\forall M > 0 \, \exists$ un intorno V di P_0 tale che $\forall (x,y) \in V \setminus P_0 \Rightarrow |f(x,y)| > M$. Se $f(x,y) > M$ il limite è $+\infty$, se $f(x,y) < -M$ il limite è $-\infty$.

Definizione 7.1.8. Si dice che *il limite per P che tende a ∞ di f(x,y) vale k* e si scrive

$$\lim_{P \to \infty} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to \infty} f(x,y) = k$$

se $\forall \epsilon > 0 \, \exists$ un intorno V di ∞ tale che $\forall (x,y) \in V \Rightarrow |f(x,y) - k| < \epsilon$.

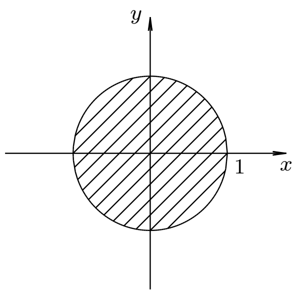
Definizione 7.1.9. Si dice che *il limite per P che tende a ∞ di f(x,y) vale ∞* e si scrive

$$\lim_{P \to \infty} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to \infty} f(x,y) = \infty$$

se $\forall M > 0 \, \exists$ un intorno V di ∞ tale che $\forall (x,y) \in V \Rightarrow |f(x,y)| > M$.

Esempio 7.1.6. Verificare che

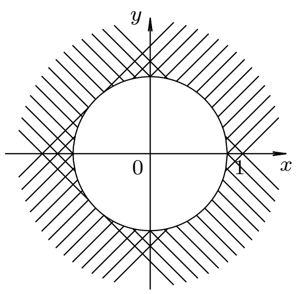
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$$



Infatti se $M > 0$ allora $\dfrac{1}{x^2+y^2} > M$ cioè $x^2 + y^2 < \dfrac{1}{M}$ che è la parte interna della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{\dfrac{1}{M}}$.

Esempio 7.1.7. Verificare che

$$\lim_{(x,y) \to +\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

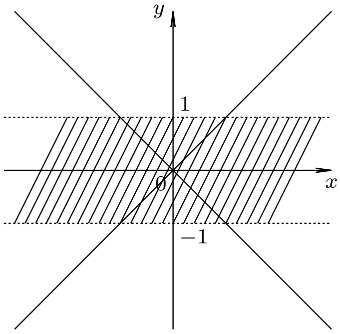


Infatti se $\epsilon > 0$ allora $\dfrac{1}{x^2+y^2} < \epsilon$ cioè $x^2 + y^2 > \dfrac{1}{\epsilon}$ che è la parte esterna della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{\dfrac{1}{\epsilon}}$.

Esempio 7.1.8. Calcolare il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin|\frac{y}{x}|}{\sqrt{1-y^2}}$$

lungo le rette $y=0, y=x, y=2x$.



Innanzitutto il C.E.:

$$\begin{cases} |\frac{y}{x}| \le 1 \\ 1-y^2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \le \frac{y}{x} \le 1 \\ -1\ y<1 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\arcsin 0}{\sqrt{1-0}} = 0, \qquad \lim_{(x,x)\to(0,x)} \frac{\arcsin 1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

in conclusione non esiste il limite per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione in quanto due limiti calcolati lungo due direzioni diverse sono diversi. L'ultimo limite non è calcolabile perchè la retta è esclusa dal C.E.

Definizione 7.1.10. Si dice che $z=f(x,y)$ è *continua in* $P_0(x_0,y_0)$ (di accumulazione per D) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Esempio 7.1.9. Sia

$$z=\begin{cases} \frac{2xy}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Studiamone la continuità in $(0,0)$ valutandone il limite lungo le rette $y=mx$:

$$(y=mx) \quad \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{2x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2m}{2+m^2} = \frac{2m}{2+m^2}$$

quindi *il limite non esiste* perchè dipende da m. Osserviamo che $f(0,0)=0$, perciò $z=f(x,y)$ è discontinua nell'origine.

7.2 Derivate parziali

Per estendere il calcolo differenziale alle funzioni di due variabili, viene spontaneo ridursi al caso di una sola variabile indipendente dando valore costante all'altra.

Definizione 7.2.1. Sia $z=f(x,y)$ una funzione definita in $D\subseteq\mathbb{R}^2$ e sia $P_0(x_0,y_0)$ di accumulazione per D; diremo *derivata parziale rispetto a* x della funzione $z=f(x,y)$ nel punto $P_0(x_0,y_0)$ il

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(y=y_0)}} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\(y=y_0)}} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \quad (h=x-x_0)$$

se esiste finito. Scriveremo anche

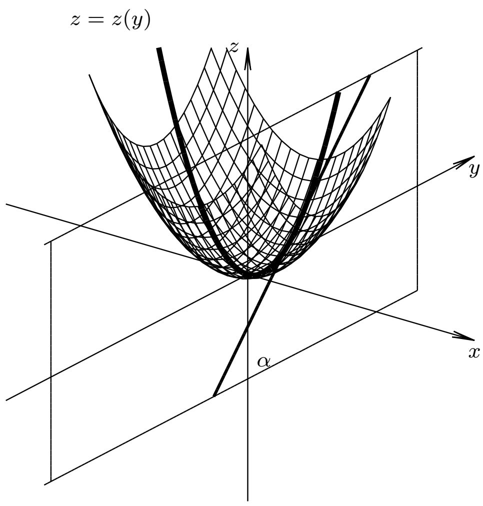
$$D_x f(x,y)\big|_{x=x_0,y=y_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\(y=y_0)}} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

Esempio 7.2.1. Sia $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ C.E. $x^2+y^2 \leq 1$
Calcoliamo le derivate parziali in $P(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left[-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right](0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left[-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right](0,0) = 0$$

Diamo l'interpretazione geometrica delle derivate parziali: quando deriviamo rispetto a x, pensando y costante, ci poniamo in un piano dello spazio parallelo al piano xz; la superficie $z = f(x,y)$ intersecata con tale piano ha come sezione la curva $z = f(x,y_0) = z(x)$ della quale abbiamo calcolato la derivata nel punto x_0. Tale derivata è il coefficiente angolare della tangente alla $z = z(x)$ nel punto $(x_0, z(x_0))$ (stiamo lavorando sul piano $y = y_0$) cioè la tangente trigonometrica dell'angolo formato con la retta intersezione del piano $y = y_0$ con il piano xy. Analogamente per la derivata rispetto ad y; ci chiediamo, però, sotto quali ipotesi sia possibile determinare il *piano tangente* alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto (x_0, y_0, z_0).



Osservando che le derivate parziali sono funzioni di x e y è possibile derivarle ulteriormente ottenendo così: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$ che si legge derivata seconda di f rispetto a x due volte; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$ che si legge derivata seconda mista; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ che si legge derivata seconda di f rispetto a y due volte. Un teorema (di Schwarz) ci garantisce che le derivate miste, se continue, sono uguali.

7.3 Derivate direzionali

Il concetto di derivata parziale, che ci dà informazioni sul comportamento della funzione intersecata con piani paralleli ai piani coordinati xz e yz, può essere generalizzato facendo assumere ad ogni piano passante per (x_0, y_0, z_0) il ruolo che avevano prima i piani paralleli ai piani xz e yz. Siano $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $\sqrt{h^2+k^2} = 1$, $P(x_0 + th, y_0 + tk)$ è il punto di $\mathbb{R}^2$ tale che la sua distanza da $P(x_0, y_0)$ è $|t|$ e la direzione della congiungente i due punti è daterminata da h e k.

Definizione 7.3.1. Diremo *derivata direzionale* della $z = f(x, y)$ lungo la direzione $v(h, k)$ nel punto (x_0, y_0) il

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

se esiste finito.

Notiamo che con $v(1, 0)$ oppure $v(0, 1)$ si ottengono le derivate parziali usuali. La nozione di derivata parziale direzionale è più soddisfacente da un punto di vista geometrico di quella di derivata parziale in quanto non assegna agli assi un ruolo privilegiato. Eppure non basta ancora agli scopi del calcolo differenziale: la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

ha tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ eppure non è ivi continua.
Infatti, considerato il versore $v(\cos\alpha, \sin\alpha)$ si ricava

$$\begin{aligned} f(x_0 + th, y_0 + tk) &= f(0 + t\cos\alpha, 0 + t\sin\alpha) = \\ &= \left(\frac{t^2\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}\right)^2 = g(t) \end{aligned}$$

e si vede facilmente che $g'(0) = 0$; d'altra parte il $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ non esiste, in quanto calcolato lungo le parabole $y = ax^2$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{ax^2}{x^4 + a^2x^4}\right)^2 = \left(\frac{a}{1+a^2}\right)^2$$

è diverso per ogni a.

ESERCIZI

Esercizio 7.3.1. Calcolare le derivate parziali prime di:

1. $f(x, y) = e^{x-y}$
2. $g(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$
3. $h(x, y) = x^y$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y}\right], \left[\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}\right], \left[\frac{\partial h}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = x^y \ln x\right]$$

Esercizio 7.3.2. Calcolare le derivate parziali prime e seconde di:

1. $f(x, y) = (x - y)^2$
2. $g(x, y) = \cos xy$
3. $h(x, y) = \dfrac{y}{1 + x}$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2\right]$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x} = -y \sin xy \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -x \sin xy \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -\sin xy - xy \cos xy\right]$$

Esercizio 7.3.3. Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y) = \sqrt{1 + x + 2y}$ in $(0, 0)$ lungo la direzione $v\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7.4 Teorema del differenziale totale

Definizione 7.4.1. Sia $z = f(x, y)$ una funzione da $A \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$; diremo che f è *differenziabile* in $(x_0, y_0) \in A$ se:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k\right]}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

la funzione $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k\right]$ si chiamerà *differenziale* della f in (x_0, y_0) e la indicheremo con $df(h, k)|_{(x_0,y_0)}$.

Teorema 7.4.1 (del diferenziale totale)**.** *Sia $z = f(x, y)$ una funzione da $A \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$; se essa ammette derivate parziali prime continue in $(x_0, y_0) \in A$ allora essa è differenziabile in (x_0, y_0).*

Dimostrazione. Usando il teorema di Lagrange, esistono opportuni c e d con $|c - x_0| < |h|$ e $|d - y_0| < |k|$ tali che $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] + [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)] = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d)k + \dfrac{\partial f}{\partial x}(c, y_0)h$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k\right]}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d)k + \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0)h - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k\right]}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left\{ \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right\} = 0$$

Poichè, per la continuità delle derivate parziali prime:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{se } h \to 0 \text{ allora } c \to x_0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{se } k \to 0 \text{ allora } d \to y_0$$

e visto inoltre che le quantità $\dfrac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ e $\dfrac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ sono entrambe limitate (fra 0 e 1). □

Notaoichè se $f(x, y) = x$, $df = dx = 1h + 0k = h$ e se $f(x, y) = y$, $df = dy = 0h + 1k = k$, in luogo di h e k scriveremo spesso dx e dy; quindi $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Definizione 7.4.2. La funzione $w(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ da Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$, si dice *esatta* o *integrabile* se esiste una funzione differenziabile f tale che $df = w$; f si dice una *primitiva* di w.

Teorema 7.4.2. *Se la funzione $w(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, con derivate parziali seconde continue, è esatta, allora*

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$$

Dimostrazione. Se w è esatta, esiste f differenziabile tale che $df = w$. Ma $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ quindi $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Dal teorema di Schwarz: $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$. □

La condizione è, in generale, solo necessaria. Diventa anche sufficiente se si opera in un sottoinsieme chiuso e limitato di Ω in cui $A, B, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial B}{\partial x}$ siano continue.

Esempio 7.4.1. Sia $W(x,y) = 2xydx + x^2dy$; allora $A(x,y) = 2xy$ e $B(x,y) = x^2$, $\dfrac{\partial A}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial B}{\partial x} = 2x$.

$A, B, \dfrac{\partial A}{\partial y}, \dfrac{\partial B}{\partial x}$ sono continue $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $W(x,y)$ è quindi esatta. Inoltre:

$$f(x,y) = \int 2xy\,dx + g(y) = x^2y + g(y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + g'(y) = B(x,y) = x^2$$

$g'(y) = 0 \quad g(y) = c$. Al variare di $c \in \mathbb{R}$ si hanno quindi le primitive di $W(x,y)$: $f(x,y) = x^2y + c$.

Esempio 7.4.2. Sia $W(x,y) = (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy$; allora $A(x,y) = y - 3x^2$ e $B(x,y) = x - 4y$, $\dfrac{\partial A}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial B}{\partial x} = 1$.

$A, B, \dfrac{\partial A}{\partial y}, \dfrac{\partial B}{\partial x}$ sono continue $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $W(x,y)$ è quindi esatta. Inoltre:

$$f(x,y) = \int (x - 4y)\,dy + g(x) = xy - 2y^2 + g(x) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + g'(x) = A(x,y) = y - 3x^2$$

$g'(x) = -3x^2 \quad g(x) = -x^3 + c$. Al variare di $c \in \mathbb{R}$ si hanno quindi le primitive di $W(x,y)$: $f(x,y) = xy - 2y^2 - x^3 + c$.
Si poteva operare anche col metodo cosiddetto *del raggruppamento*: $W(x,y) = (ydx + xdy) - 3x^2dx - 4ydy$, ricordando facili formule: $d(xy) = ydx + xdy$ e, ovviamente, $dx^3 = 3x^2dx$; $dy^2 = 2ydy$; si ha: $W(x,y) = d(xy) - d(x^3) - 2d(y^2) = d[xy - x^3 - 2y^2]$, da cui il risultato.

Capitolo 8

Generalità sulle equazioni differenziali

8.1 Definizioni

Definizione 8.1.1. Dicesi *equazione differenziale ordinaria di ordine* n ogni equazione del tipo:

$$F(x, y(x)y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Definizione 8.1.2. Dicesi *soluzione o integrale* dell'equazione differenziale ogni funzione $y = \phi(x)$ tale che:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

ESEMPI: $y^{''} + y = 0$ è una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine; $y = \sin x$ è una soluzione (o integrale) dell'equazione data poichè: $y' = \cos x$, $y^{''} = -\sin x$ e $-\sin x + \sin x = 0$. Ma anche $y = \cos x$ lo è (verificarlo per esercizio) e lo sono pure funzioni del tipo $y = a \sin x + b \cos x$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$: $y' = a \cos x - b \sin x$, $y^{''} = -a \sin x - b \cos x$, $-a \sin x - b \cos x + a \sin x + b \cos x = 0$.

Capitolo 9

Equazioni del primo ordine

9.1 Definizioni

Definizione 9.1.1. Dicesi *equazione differenziale ordinaria del primo ordine* ogni equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \tag{9.1}$$

Definizione 9.1.2. Dicesi *soluzione o integrale* dell'equazione differenziale 9.1.1 ogni funzione $y = \phi(x)$ tale che:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)(x)) = 0$$

Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo: $\Phi(x, y) = 0$.

Definizione 9.1.3. Dicesi *soluzione o integrale GENERALE* dell'equazione 9.1.1 una famiglia $y = \phi(x, C)$ tale che:

$$F(x, \phi(x, C), \phi'(x, C)) = 0$$

Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo: $\Phi(x, y, C) = 0$.

Definizione 9.1.4. Dicesi *soluzione o integrale PARTICOLARE* dell'equazione 9.1.1 una funzione $y = \phi(x, \overline{c})$ tale che:

$$F(x, \phi(x, \overline{c}), \phi'(x, \overline{c})) = 0$$

nella quale è stato attribuito il valore $\overline{c}$ alla costante C.
Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo: $\Phi(x, y, \overline{c}) = 0$.

La 9.1.1, se esplicitabile rispetto a y', viene scritta nella forma:

$$y' = f(x, y) \tag{9.2}$$

Teorema 9.1.1 (Esistenza e unicità (di Cauchy))**.** *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{9.3}$$

ove $f(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sono continue in D, aperto di $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in D$, ESISTE UNICA *$y = \phi(x)$ che risolve il problema.*

Se (x_0, y_0) appartiene alla frontiera di D, il teorema non ci dice nulla sulla esistenza (ed eventuale unicità) della soluzione. Si possono presentare due casi: c'è una curva soluzione che passa per (x_0, y_0) e ha tutti gli altri suoi punti in D. Si tratta allora di un integrale particolare di cui si è trattato nel teorema. Oppure vi è una curva soluzione che passa per (x_0, y_0) e ha tutti i gli altri punti sulla fronitera. Si parla allora di integrale *SINGOLARE* o di frontiera[1].

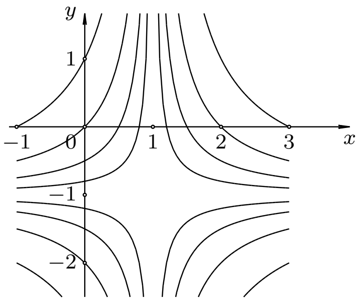
9.2 Equazioni a variabili separabili o separate

Sono equazioni del tipo $y' = A(x)B(y)$ e si possono quindi scrivere $\dfrac{dy}{B(y)} = A(x)dx$ che risolta da

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx + C$$

Fanno parte di questo gruppo anche le equazioni immediate del tipo $y' = f(x)$ che evidentemente pongono il problema del calcolo di un integrale indefinito: $y = \displaystyle\int f(x)\,dx + C$.

Esempio 9.2.1. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$



$$\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{1-x} \qquad \ln|1+y| = -\ln|1-x| + C$$

$$\ln|(1+y)(1-x)| = C \qquad (1+y)(1-x) = e^C = C_1$$

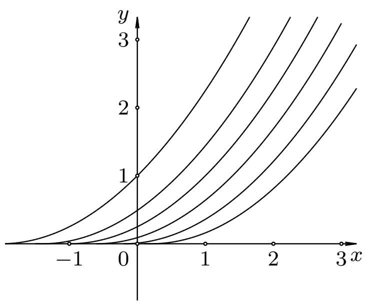
Soluzioni: $y = \dfrac{C_1}{1-x} - 1$ famiglia di iperboli di asintoti $x = 1$ e $y = -1$.

La soluzione passante per $O(0,0)$ si ha con: $0 = \dfrac{C_1}{1} - 1$, cioè $C_1 = 1$ e quindi si ha la curva $y = \dfrac{1}{1-x} - 1$. Vista nella forma

$$y' = \frac{1+y}{1-x} = f(x,y) \quad \text{si ha } \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{1}{1-x} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

si osserva che per ogni punto passa *una* ed *una sola* curva soluzione (per i punti del tipo $(a, -1)$ si ha la retta $y = -1$ ottenuta con $C_1 = 0$).

Esempio 9.2.2. $y' = \sqrt{y}$



$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \quad 2\sqrt{y} = \frac{x}{2} + C_1 \quad \text{essendo } C_1 = \frac{C}{2}$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + C_1\right)^2 \quad \text{con } x \geq -2C_1 \quad \text{famiglia di semiparabole}$$

[1] Si vedano gli esempi 9.2.1 e 9.2.2

La soluzione passante per $A(4,1)$ si ha con $1 = \left(\frac{4}{2} + C_1\right)^2$ $C_1 = -1$ cioè la curva $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$ con $x \geq -2$. Vista nella forma

$$y' = \sqrt{y} = f(x,y) \quad \text{si ha } \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$$

Si osserva che per ogni punto di D passa *una* e *una sola* curva soluzione; per un punto della frontiera (del tipo $(a,0)$) passano: una curva che ha con la frontiera *solo* quel punto in comune ed è quindi ancora un integrale particolare; l'intera frontiera ($y = 0$) che, essendo soluzione dell'equazione differenziale ($y' = 0$ quindi $0 = 0$) , ne è un integrale *singolare*.
Osserviamo che l'integrale singolare è tangente in ogni suo punto ad una delle semiparabole soluzione: si dice che ne è *l'INVILUPPO*. Se ne poteva ottenere l'equazione derivando $y = \left(\frac{x}{2} + C_1\right)^2$ rispetto a C_1: $0 = 2\left(\frac{x}{2} + C_1\right)$ da cui $C_1 = -\frac{x}{2}$ che, sostituito da: $y = 0$ equazione dell'inviluppo.

9.3 Equazioni del tipo y'=f(ax+by)

Per la loro soluzione poniamo $t = ax + by$ e ricavando y si ha $y = \frac{t - ax}{b}$ da cui $y' = \frac{t' - a}{b}$ e sostituendo nell'equazione di partenza $\frac{t' - a}{b} = f(t)$ che è del tipo (ref). Essendo $y = y(x)$ è ovviamente $t = t(x)$.

Esempio 9.3.1. $y' = (x + y)^2 - (x + y) - 1$

$$\text{poniamo } t = x + y \Rightarrow y = t - x \Rightarrow y' = t' - 1 \text{ e sostituendo } t' - 1 = t^2 - t - 1 \text{ cioè } t' = t(t-1)$$

$$\frac{dt}{t(t-1)} = dx \qquad \frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \qquad \begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right] dt = \int dx + C \qquad \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| = x + C \qquad \frac{t-1}{t} = ke^x \qquad k \in \mathbb{R}^* \text{ e ricordando che } t = x+y, \quad \frac{x+y-1}{x+y} = ke^x$$

9.4 Equazioni omogenee

Definizione 9.4.1. $z = f(x,y)$ si dice *omogenea di grado* α se $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ con $t > 0$.

Esempio 9.4.1. $z = x^3 - x^2y + y^3 \arctan \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

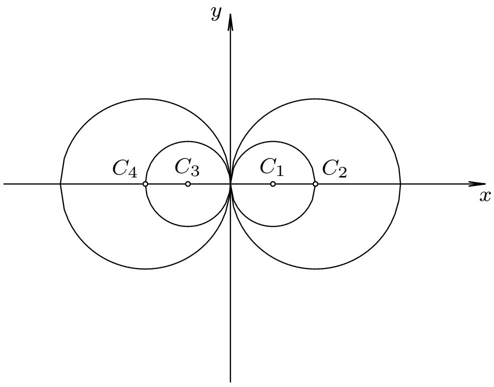
$$z(tx,ty) = t^3x^3 - t^2x^2ty + t^3y^3 \arctan \frac{\sqrt{ty}}{\sqrt{tx}} = t^3\left[x^3 - x^2y + y^3 \arctan \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right] = t^3 z(x,y) \quad t > 0 \quad z \text{ è omogenea di grado 3.}$$

Definizione 9.4.2. $y' = f(x,y)$ si dice *omogenea* se $f(x,y)$ è omogenea di grado 0.

Per la risoluzione poniamo $\frac{y}{x} = t$ da cui $y = xt$ e derivando $y' = t + xt'$.

Esempio 9.4.2. Data la famiglia di circonferenze $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ con centro $C(a,0)$ e passanti per $O(0,0)$, determinare le *traiettorie ortogonali*[2].

[2] Cioè la famiglia di curve ortogonali punto per punto alle curve della famiglia data; due curve si dicono ortogonali in un punto se hanno in questo tangenti ortogonali.



Differenziando l'equazione della famiglia, otteniamo $2xdx + 2ydy - 2adx = 0$ cioè $(x-a)dx + ydy = 0$ cioè $y' = \frac{a-x}{y}$ e sostituendo il valore del parametro a ricavato dall'equazione della famiglia:

$$a = \frac{x^2+y^2}{2x} y' = \frac{\frac{x^2+y^2}{2x} - x}{y} y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

l'equazione differenziale ottenuta (che ha per integrale generale la famiglia data) esprime il coefficiente angolare (y') della tangente in ogni punto alle curve della famiglia. Le traiettorie ortogonali cercate avranno coefficiente angolare della tangente in ogni punto:

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \quad (m_1 = -\frac{1}{m}).$$

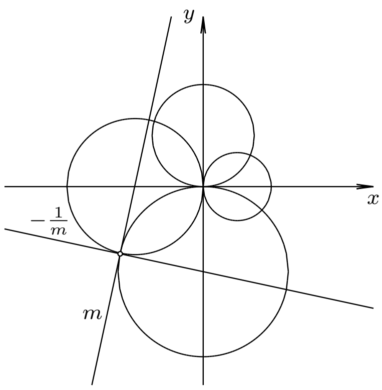
L'equazione differenziale è omogenea:

$$t = \frac{2t}{1-t^2} \qquad y = tx \qquad y' = t + xt' \qquad y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad t + xt' = \frac{2t}{1-t^2} \qquad t' = \frac{t(1+t^2)}{x(1-t^2)}$$

$$\frac{1-t^2}{t(1+t^2)}dt = \frac{dx}{x} \qquad \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\int \left[\frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}\right] dt = \int \frac{dx}{x} + C \qquad \ln\left|\frac{t}{1+t^2}\right| = \ln|x| + C \qquad \frac{t}{1+t^2} = kx \quad k \in \mathbb{R}^*$$

e sostituendo $t = \frac{y}{x}$ si ottiene: $\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = kx$; cioè $\frac{y}{x^2+y^2} = k$, vale a dire $y = k(x^2+y^2)$.



In forma implicita: $x^2 + y^2 - 2by = 0$ con $2b = \frac{1}{k}$.
La famiglia di traiettorie ortogonali è costituita da circonferenze con centro $D(0,b)$ e passanti per $O(0,0)$.

9.5 Equazioni lineari

Definizione 9.5.1. Una equazione del tipo $y' + p(x)y = q(x)$ si dice *lineare*.

Se $q(x) = 0$, l'equazione diventa

$$y' + p(x)y = 0 \qquad \textit{lineare omogenea}$$

che, essendo anche a variabili separabili, si può scrivere:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

cioè $\ln|y| = -\int p(x)\,dx + C$ da cui
$$y = ke^{-\int p(x)dx}$$
Se $q(x) \neq 0$, cerchiamo soluzioni del tipo:
$$y = k(x)e^{-\int p(x)\,dx}$$
e derivando:
$$y' = k'(x)e^{-\int p(x)\,dx} + k(x)e^{-\int p(x)\,dx}[-p(x)] = e^{-\int p(x)\,dx}\left[(k'(x) - k(x)p(x)\right]$$
sostituendo:
$$e^{-\int p(x)\,dx}\left[(k'(x) - k(x)p(x)\right] + p(x)k(x)e^{-\int p(x)\,dx} = q(x)$$
$$k'(x) = q(x)e^{\int p(x)\,dx}$$
da cui
$$k(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C$$
Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare è:
$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right]e^{-\int p(x)\,dx}$$

Esempio 9.5.1. $xy' - y = x^2\cos x$
$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad p(x) = -\frac{1}{x} \quad q(x) = x\cos x$$
$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right]e^{-\int p(x)\,dx} = \left[\int x\cos x\,e^{\int -\frac{1}{x}\,dx}\,dx + C\right]e^{\int \frac{1}{x}\,dx} =$$
$$= \left[\int x\cos x\frac{1}{x}\,dx + C\right]x = \left[\int \cos x\,dx + C\right]x = x[\sin x + C]$$

Osservazionen realtà
$$\int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + C_1 \qquad e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln|x| + C_1} = e^{\ln|x|^{-1}}e^{C_1} = \frac{C_2}{|x|}$$
$$e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x - C_1} = e^{\ln|x|}e^{-C_1} = \frac{|x|}{C_2}$$
così nella formula si sarebbe ottenuto
$$y = \left[\int x\cos x\frac{C_2}{|x|}\,dx + C\right]\frac{|x|}{C_2} = \begin{cases} \left[\int C_2\cos x\,dx + C\right]\frac{x}{C_2} = x\left[\sin x + \frac{C}{C_2}\right] & \text{se } x > 0 \\ \left[\int -C_2\cos x\,dx + C\right](-\frac{x}{C_2}) = x\left[\sin x - \frac{C}{C_2}\right] & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
e quindi, per $x \neq 0$, l'integrale generale è sempre $y = x[\sin x + k] \quad k \in \mathbb{R}$.

9.6 Equazioni di Bernoulli

Sono equazioni del tipo

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

e sono facilmente riconducibili alle lineari.
Supponiamo $n \neq 0$ e $n \neq 1$ altrimenti l'equazione è lineare; dividiamo entrambi i membri per y^n, ottenendo:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x) \qquad \text{vedremo a parte il caso } y = 0$$

Poniamo $\frac{1}{y^n} = z$ e deriviamo: $(1-n)y^{-n}y' = z'$; cioè $\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$ e quindi, sostituendo: $\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$ e perciò $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$ *che è lineare*. Risolvendo l'equazione lineare in funzione di z e poi sostituendo nella $\frac{1}{y^n} = z$ otteniamo la soluzione cercata.

Esempio 9.6.1. $y' - y = e^x\sqrt{x}$

$$\text{dividiamo per } \sqrt{y}: \qquad \frac{y'}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} = e^x \quad y \neq 0; \qquad \text{poniamo } \sqrt{y} = z \text{ e deriviamo:}$$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = z' \qquad \text{e sostituendo: } 2z' - z = e^x \quad z' - \frac{1}{2}z = \frac{e^x}{2}$$

$$z = \left[\int e^x e^{-\frac{1}{2}\int dx}\,dx + C\right] e^{\frac{1}{2}\int dx} = \left[\int \frac{e^x}{2} e^{-\frac{x}{2}}\,dx + C\right] e^{\frac{x}{2}} = \left[e^{\frac{x}{2}} + C\right] e^{\frac{x}{2}} = e^x + Ce^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{cioè } \sqrt{y} = e^x + Ce^{\frac{x}{2}} \qquad y = \left(e^x + Ce^{\frac{x}{2}}\right)^2 \quad \text{con } e^x + Ce^{\frac{x}{2}} \geq 0.$$

Inoltre: $y = 0 \quad y' = 0$ soddisfa l'equazione differenziale di partenza ma non è ottenibile per alcun valore dell'integrale generale; sarà quindi un *integrale singolare*. Considerando l'equazione scritta in forma normale:

$$y' = y + e^x\sqrt{y} = f(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \frac{e^x}{2\sqrt{y}} \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$$

effettivamente $y = 0$ costituisce la frontiera di D.

9.7 Equazioni esatte

9.8 Equazioni di forma particolare

Capitolo 10

Equazioni del secondo ordine

10.1 Generalità

Definizione 10.1.1. Dicesi *equazione differenziale ordinaria del secondo ordine* ogni equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \tag{10.1}$$

Definizione 10.1.2. Dicesi *soluzione o integrale* dell'equazione (10.1) ogni funzione:

$$y = \phi(x) \quad \text{tale che } F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x)) = 0$$

Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo $\Phi(x, y) = 0$.

Definizione 10.1.3. Dicesi *soluzione o integrale GENERALE* dell'equazione (10.1) una famiglia $y = \phi(x, c_1, c_2)$ che verifica la (10.1) per ogni valore di c_1 e c_2.
Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo $\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$.

Definizione 10.1.4. Dicesi *soluzione o integrale PARTICOLARE* dell'equazione (10.1) una funzione $y = \phi(x, \bar{c_1}, \bar{c_2})$ che verifica la (10.1) e nella quale sono stati attribuiti i valori $\bar{c_1}$ e $\bar{c_2}$ alle costanti c_1 e c_2.
Qualora non sia possibile esplicitare y in funzione di x nella soluzione, essa sarà del tipo $\Phi(x, y, \bar{c_1}, \bar{c_2}) = 0$.

Nel caso la (10.1) sia esplicitabile rispetto alla y'' e si possa scrivere nella forma

$$y'' = f(x, y, y') \tag{10.2}$$

vale il

Teorema 10.1.1 (Esistenza e unicità (di Cauchy))**.** *Dato il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{10.3}$$

ove $f(x, y_0, y'_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ *sono continue in* D*, aperto di* $\mathbb{R}^3$ *e* $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ *allora* ESISTE UNICA $y = \phi(x)$ *che risolve il problema* (10.3)

10.2 Equazioni del tipo y”=f(x)

Sono di integrazione immediata:

$$y'' = f(x) \quad \text{da cui } y' = \int f(x)\,dx \quad \text{e quindi } y = \int \left[\int f(x)\,dx + C_1\right] dx = \int \left[\int f(x)\,dx\right] dx + C_1 x + C_2$$

Esempio 10.2.1. Supponiamo che un corpo di massa m cada sotto la sola azione del proprio peso, da un'altezza h con attrito trascurabile. Dalla seconda legge della dinamica, $F = ma$, si ha:

$$mg = m\frac{d^2z}{dt^2} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g \qquad \frac{dz}{dt} = gt + C_1$$

e finalmente

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

$$\text{Qualora le condizioni iniziali fossero: } \begin{cases} z(0) = 0 \\ \frac{dz}{dt}(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{si avrebbe} \qquad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad z = z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

E' possibile ricavare l'istante di arrivo al suolo:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \bar{t} = \sqrt{2\frac{h}{g}}$$

Altrettanto facile ricavare la velocità del corpo nell'istante di arrivo al suolo:

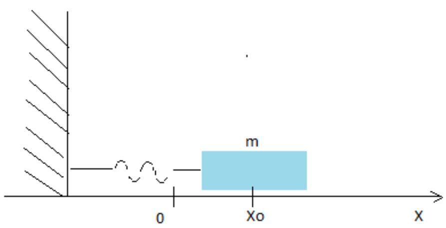
$$v(\bar{t}) = \frac{dz}{dt}(\bar{t}) = g\sqrt{2\frac{h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

10.3 Equazioni del tipo y”=f(x,y’)

Si pone $y' = p$ da cui $y'' = p'$. L'equazione diventa: $p' = f(x,p)$ che è del primo ordine. La soluzione è rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} p' = f(x,p) \\ y' = p \end{cases}$$

Esempio 10.3.1. Corpo sottoposto ad una forza elastica di richiamo.



Fissiamo come asse x la retta lungo cui si sposta il corpo - supposto di massa m - e l'origine sia la posizione di equilibrio della molla. Supponiamo che all'istante $t_0 = 0$ il corpo, spostato dall'origine di una quantità x, sia lasciato libero di muoversi. La forza elastica di richiamo (forza di Hooke) agisce proporzionalmente allo spostamento: $F = -kx \; k > 0$.

Dalla seconda legge della dinamica:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{cioè} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

poniamo $\frac{k}{m} = \omega^2$ e $\frac{dx}{dt} = v$ da cui:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

L'equazione diventa:

$$v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x \qquad \text{ovvero} \qquad \int v\,dv = \int -\omega^2 x\,dx + C_1 \qquad \frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + C_1 \text{ con } C_1 > 0$$

$$v^2 = -\omega^2 x^2 + k_1^2 \text{ con } k_1 > 0 \qquad v = \pm\sqrt{k_1^2 - \omega^2 x^2}dx = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\omega x}{k_1}\right)^2}$$

e ricordando che $\frac{dx}{dt} = v$:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{k_1^2 - \omega^2 x^2} \qquad \frac{1}{\sqrt{k_1^2 - \omega^2 x^2}}dx = \pm dt \qquad \frac{1}{k_1\sqrt{1 - \left(\frac{\omega x}{k_1}\right)^2}}dx = \pm dt \qquad \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\omega x}{k_1} = \pm t + C_2$$

$$\arcsin\frac{\omega x}{k_1} = \pm\omega t + k_2 \qquad \frac{\omega x}{k_1} = \sin(k_2 \pm \omega t) \qquad x = \frac{k_1}{\omega}\sin(k_2 \pm \omega t)$$

Supponendo che le condizioni iniziali siano: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} k_1 = \omega x_0 \\ k_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

e finalmente $x = x(t) = x_0 \sin(\frac{\pi}{2} \pm \omega t) = x_0 \cos\omega t$

Abbiamo così trovato l'equazione del moto di un corpo (sottoposto all'azione di una forza elastica di richiamo) attorno alla posizione di equilibrio (*moto armonico*).

10.4 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Sono del tipo

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

Qualora $f(x) = 0$, si dicono *lineari OMOGENEE*. Occupiamoci di queste.

10.4.1 Equazioni lineari omogenee

Risolviamo l'equazione $y'' + py' + qy = 0$; cerchiamo una soluzione del tipo $y = e^{\lambda x}$; si avrà:

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

sostituendo si avrà:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q\lambda e^{\lambda x} = 0 \qquad e^{\lambda x}\left[\lambda^2 + p\lambda + q\right] = 0$$

$e^{\lambda x}$ non si annulla mai, perciò deduciamo che deve essere:

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \qquad \text{detta } \textit{equazione caratteristica}$$

$\boxed{1^o \text{ Caso}}$: l'equazione caratteristica ammette radici reali distinte λ_1, λ_2. Allora: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni dell'equazione data. Esse sono inoltre, linearmente indipendenti $\left(\dfrac{y_1}{y_2} \neq k \in \mathbb{R}\right)$ e pure una loro combinazione lineare $\alpha y_1 + \beta y_2$ lo è[1]:

$$\alpha y_1'' + \beta y_2'' + p\alpha y_1' + p\beta y_2' + q\alpha y_1 + q\beta y_2 = \alpha\left[y_1'' + py_1' + qy_1\right] + \beta\left[y_2'' + py_2' + qy_2\right] = 0$$

Quindi, l'integrale generale è dato da:

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$$

$\boxed{2^o \text{ Caso}}$: l'equazione caratteristica ammette radici reali coincidenti. Allora: $y_1 = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione data $\left(\lambda = -\dfrac{p}{2}\right)$. Cerchiamo un'altra soluzione linearmente indipendente dalla prima, del tipo: $y_2 = u(x)e^{\lambda x}$

$$y_2' = u'(x)e^{\lambda x} + u(x)\lambda e^{\lambda x} \qquad y_2'' = u''(x)e^{\lambda x} + u'(x)\lambda e^{\lambda x} + u'(x)\lambda e^{\lambda x} + u(x)\lambda^2 e^{\lambda x}$$

Sostituendo si ha:

$$e^{\lambda x}\left[u''(x) + 2u'(x)\lambda + u(x)\lambda^2 + pu'(x) + pu(x)\lambda + qu(x)\right] = 0$$

$$u''(x) + u'(x)\left[2\lambda + p\right] + u(x)\left[\lambda^2 + p\lambda + q\right] = 0 \qquad \text{ma} \qquad 2\lambda + p = 0 \qquad \text{e} \qquad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Quindi:

$$u''(x) = 0 \Rightarrow u'(x) = k_1 \Rightarrow u(x) = k_1 x + k_2 \quad \text{fra tutte scegliamo} \quad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui } y_2 = xe^{\lambda x}$$

Quindi, l'integrale generale è dato da:

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(C_1 + C_2 x\right)}$$

$\boxed{3^o \text{ Caso}}$: l'equazione caratteristica ammette radici complesse coniugate $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Allora: $y_1 = e^{\alpha + i\beta x}$ e $y_2 = e^{\alpha - i\beta x}$ sono soluzioni dell'equazione data. Usando le formule di Eulero:

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \quad y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

sommando e sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$y_3 = 2e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad y_4 = 2ie^{\alpha x}\sin\beta x \qquad \text{che sono ancora soluzioni}$$

$$\text{ma lo sono anche:} \quad y_5 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{e} \quad y_6 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Quindi, l'integrale generale è dato da:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right]}$$

[1] $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha lo stesso risultato. Dimostrarlo per esercizio.

Esempio 10.4.1. Riprendiamo l'esercizio del corpo sottoposto a forza elastica di richiamo.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

L'integrale generale è:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega C_1 \sin\omega t + \omega C_2 \cos\omega t$$

Dalle condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{dx(0)}{dt} = 0 \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

L'integrale particolare che risolve il problema della massa-molla è quindi:

$$\boxed{x = x_0 \cos\omega t}$$

Esempio 10.4.2. Corpo sottoposto ad una forza elastica di richiamo e una forza d'attrito proporzionale alla velocità.

10.4.2 Equazioni lineari non omogenee

Sono del tipo

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad f(x) \neq 0 \quad p, q \in \mathbb{R} \tag{10.4}$$

L'integrale generale è dato da $y = y_0 + \bar{y}$, essendo y_0 l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{10.5}$$

e $\bar{y}$ una soluzione particolare dell'equazione non omogenea 10.4. Infatti

$$y = y_0 + \bar{y} \qquad y' = y_0' + \bar{y}' \qquad y'' = y_0'' + \bar{y}''$$

Sostituendo:

$$y_0'' + \bar{y}'' + p(y_0' + \bar{y}') + q(y_0 + \bar{y}) = (y_0'' + py_0' + qy_0) + (\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y}) = 0 + \bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = f(x)$$

come si voleva. Il problema si traduce quindi nel ricavare $\bar{y}$.

Esamineremo solo alcuni casi notevoli.

$\boxed{1. \quad f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)}$ dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n. L'equazione diventa

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x)$$

Cerchiamo $\bar{y} = e^{\alpha x} Q_n(x)$ dove $Q_n(x)$ è a sua volta un polinomio di grado n.

$$\bar{y}' = e^{\alpha x}\left[\alpha Q_n(x) + Q_n'(x)\right] \qquad \bar{y}'' = e^{\alpha x}\left[\alpha^2 Q_n(x) + 2\alpha Q_n'(x) + Q_n''(x)\right]$$

Sostituendo:

$$e^{\alpha x}\left[\alpha^2 Q_n(x) + 2\alpha Q_n'(x) + Q_n''(x) + p\alpha Q_n(x) + pQ_n'(x) + qQ_n(x)\right] = e^{\alpha x} P_n(x)$$

$$\left[\alpha^2 + p\alpha + q\right] Q_n(x) + \left[2\alpha + p\right] Q_n'(x) + Q_n''(x) = P_n(x) \tag{10.6}$$

Possiamo distinguere i sottocasi:

$\boxed{1.A}$ α non è soluzione di $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (equazione caratteristica dell'omogenea associata). Allora $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ e l'uguaglianza scritta sopra permette, in base al principio di identità dei polinomi, di individuare $Q_n(x)$.

$\boxed{1.B}$ α è soluzione semplice di $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Allora $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ ma $2\alpha + p \neq 0$ e quindi l'uguaglianza 10.6 diventa:

$$[2\alpha + p]\, Q'_n(x) + Q''_n(x) = P_n(x)$$

da questa sono ricavabili solo n equazioni nelle $n + 1$ incognite (i coefficienti di $Q_n(x)$). Cerchiamo $\bar{y} = xe^{\alpha x} Q_n(x)$

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= e^{\alpha x}\left[Q_n(x) + \alpha x Q_n(x) + x Q'_n(x)\right] \\ \bar{y}'' &= e^{\alpha x}\left[2\alpha Q_n(x) + 2Q'_n(x) + \alpha^2 x Q_n(x) + 2\alpha x Q'_n(x) + x Q''_n(x)\right]\end{aligned}$$

sostituendo, dopo semplici calcoli:

$$[2\alpha + p]\, Q_n(x) + 2Q'_n(x) + [2\alpha + p]\, xQ'_n(x) + xQ''_n(x) = P_n(x) \tag{10.7}$$

da cui si conclude per il principio di identità dei polinomi.

$\boxed{1.C}$ α è soluzione doppia di $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Allora $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ e $2\alpha + p = 0$ e quindi l'uguaglianza 10.6 diventa:

$$Q''_n(x) = P_n(x)$$

e nello stesso modo, la 10.7 diventa:

$$2Q'_n(x) + xQ''_n(x) = P_n(x)$$

e non sono sufficienti per ricavare gli $n+1$ coefficienti di $Q_n(x)$. Cerchiamo $\bar{y} = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$. Procedendo come nel caso precedente, dopo facili calcoli, si ottiene:

$$2Q_n(x) + 4xQ'_n(x) + x^2 Q''_n(x) = P_n(x)$$

da cui si conclude per il principio di identità dei polinomi.
Riassumiamo quanto visto in questo schema:

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \begin{cases} \alpha \text{ non è radice di } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 & \bar{y} = e^{\alpha x} Q_n(x) \\ \alpha \text{ è radice semplice di } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 & \bar{y} = xe^{\alpha x} Q_n(x) \\ \alpha \text{ è radice doppia di } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 & \bar{y} = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x) \end{cases}}$$

$\boxed{2. \quad f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]}$
L'equazione diventa

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$$

Cerchiamo $\bar{y} = e^{\alpha x}\left[R_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x\right]$ dove $N = max(n, m)$.
Procedendo come nei casi precedenti, dopo aver calcolato $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$ e sostituito nell'equazione di partenza, dopo facili calcoli, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&e^{\alpha x}\Big[(\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q)R_N(x)\cos\beta x+(\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q)S_N(x)\sin\beta x+(2\alpha+p)R'_N(x)\cos\beta x+\\
&\quad+(2\alpha+p)S'_N(x)\sin\beta x+R''_N(x)\cos\beta x+S''_N(x)\sin\beta x+\beta(2\alpha+p)S_N(x)\cos\beta x-\\
&\quad-\beta(2\alpha+p)R_N(x)\sin\beta x+2\beta S'_N(x)\cos\beta x-2\beta R'_N(x)\sin\beta x\Big]=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

Possiamo distinguere i sottocasi:

$\boxed{1.A}$ $\alpha=\pm i\beta$ non sono soluzioni di $\lambda^2+p\lambda+q=0$. Allora $\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q\neq 0$ e la 10.8 permette di ricavare i coefficienti di $R_N(x)$ e $S_N(x)$ in base al principio di identità dei polinomi.

$\boxed{1.B}$ $\alpha=\pm i\beta$ sono soluzioni di $\lambda^2+p\lambda+q=0$. Allora $\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q=0$ e la 10.8 diventa

$$[R''_N(x)\cos\beta x+S''_N(x)\sin\beta x+2\beta S'_N(x)\cos\beta x-2\beta R'_N(x)\sin\beta x]=P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$$

che non permette di ricavare i coefficienti di $R_N(x)$ e $S_N(x)$ col principio di identità dei polinomi. Cerchiamo $\bar{y}=xe^{\alpha x}\left[R_N(x)\cos\beta x+S_N(x)\sin\beta x\right]$, con procedimento analogo al caso precedente. Riassumendo:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$$

$$\boxed{\begin{cases}\alpha\pm i\beta \text{ non sono radici di } \lambda^2+p\lambda+q=0 & \bar{y}=e^{\alpha x}\left[R_N(x)\cos\beta x+S_N(x)\sin\beta x\right]\\ \alpha\pm i\beta \text{ sono radici di } \lambda^2+p\lambda+q=0 & \bar{y}=xe^{\alpha x}\left[R_N(x)\cos\beta x+S_N(x)\sin\beta x\right]\end{cases}\quad \text{dove } N=\max(n,m)}$$

Capitolo 11

Esercizi

11.1 Esercizi generali

Esercizio 11.1.1. Determinare l'ordine delle seguenti equazioni differenziali.

1. $dy + (xy - \cos x)dx = 0$ [primo ordine]

2. $y'' + xy'' + 2y(y')^3 + xy = 0$ [secondo ordine]

3. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - (y''')^4 + x = 0$ [terzo ordine]

4. $e^{y''} + xy'' + y = x$ [secondo ordine]

Esercizio 11.1.2. Dimostrare che le funzioni sulla colonna di destra sono soluzioni delle equazioni corrispondenti delle colonna di sinistra. Attenzione al campo di esistenza delle singole soluzioni.

1. $y' + y = 0$ e^{-x}

2. $y' = e^x$ $y = e^x$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

4. $f'(x) = f''(x)$ $y = e^x + 2$

Esercizio 11.1.3. Stabilire se le funzioni definite implicitamente nella colonna di destra sono soluzioni delle equazioni della colonna di sinistra.

1. $y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0$ $y^2 - 1 = (x+2)^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ $x^2 + y^2 + 1 = 0$

11.2 Esercizi sulle equazioni del primo ordine

Esercizio 11.2.1. Risolvere le equazioni separabili

1. $xy' - y = y^3$ []

2. $xyy' = 1 - x^2$ []

3. $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ []

Esercizio 11.2.2. Risolvere le equazioni separabili determinando le soluzioni particolari che verificano le condizioni iniziali indicate a fianco.

1. $(1 + e^x)yy' = e^x$ $y = 1, x = 0$

2. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$ $y = 1, x = 0$

3. $y' \sin x = y \ln y$ $y = 1, x = \dfrac{\pi}{2}$

Esercizio 11.2.3. Risolvere le equazioni omogenee.

1. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$ []

2. $(x - y)ydx - x^2dy = 0$ []

Esercizio 11.2.4. Risolvere le equazioni lineari e di Bernoulli.

1. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$ []

2. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3$ []

3. $xy' + y = y^2 \ln x$ $y \ln x + y + cxy = 1$

Esercizio 11.2.5. Risolvere le equazioni lineari e di Bernoulli determinando le soluzioni particolari che verificano le condizioni iniziali indicate a fianco.

1. $xy' + y - e^x = 0$ $y = b, x = a$

2. $y' - y \tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ $y = 0, x = 0$

11.3 Problemi sulle equazioni del primo ordine

Esercizio 11.3.1. Determinare la funzione di crescita di una popolazione supponendo:

1. la crescita è proporzionale alla popolazione attuale;
2. la crescita è proporzionale oltre che alla popolazione attuale anche alla quantità $A - P$, dove $P = P(t)$ è la funzione cercata e A una costante sperimentale.

Soluzioni:

1. $P(t) = P_0 e^{kt}$ dove $P_0 = P(0)$
2. $P(t) = \dfrac{A}{1 + \left(\frac{A}{P_0}\right) e^{-kt}}$ e si osserva che il grafico di P varia a seconda che $\begin{cases} P_0 > A \\ \frac{A}{2} < P_0 < A \\ 0 < P_0 < \frac{A}{2} \end{cases}$

Esercizio 11.3.2. Determinare la funzione di variazione della temperatura di un corpo inizialmente di valore T_0, immesso in un ambiente a temperatura T_1, sapendo che la variazione è propozionale al dislivello di temperatura corpo-ambiente.

Soluzione: $T(t) = T_1 + (T - T_1)e^{\pm kt}$

Esercizio 11.3.3. Quanto tempo occorre affinchè la temperatura di un corpo riscaldato a 100° scenda a 30°, se la temperatura ambiente è di 20° e nei primi 20 minuti si è raffreddato fino a 60°?

Soluzione: $t = 1^h$

Esercizio 11.3.4. Determinare la funzione di variazione di massa di un materiale radioattivo supponendola proprozionale alla massa nell'istante considerato.

Soluzione: $m(t) = m_0 e^{-kt}$

Esercizio 11.3.5. Sapendo che dopo 1600 anni la massa del radio si è dimezzata, determinare la percentuale di radio disintegrata in 100 anni.

Soluzione: $\dfrac{m_0 - m_0 2^{\frac{1}{16}}}{m_0} 100$

Esercizio 11.3.6. Determinare la funzione di variazione di pressione atmosferica con l'altezza, supponendo che la pressione diminuisca proprozionalmente alla pressione esistente all'altezza considerata.

Soluzione: $p(h) = p_0 e^{-kt}$

Esercizio 11.3.7. Trovare la relazione esistente tra pressione dell'aria ed altezza sapendo che al livello del mare la pressione è di 1 kg per cm^2 mentre a 500 m di altezza è di 0.92 kg per cm^2.

Soluzione: $p(h) = \left(\dfrac{23}{25}\right)^{\frac{h}{500}} m \dfrac{kg}{cm^2}$

Esercizio 11.3.8. Determinare la funzione di variazione dell'altezza di un liquido in un serbatoio supponendo che esso entri con velocità costante V_0 (rubinetto aperto) ed esca con velocità proporzionale all'altezza all'istante considerato.

Soluzione: $h(t) = \dfrac{V_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{s}t}\right)$ ove s è l'area di base del serbatoio.

Esercizio 11.3.9. Determinare le curve per le quali è costante la distanza di una qualunque tangente da un punto fisso.

Soluzione: integrale generale: $y = kx + h$ dove h è costante d'integrazione e k è costante dipendente dal problema. Integrale singolare: $x^2 + y^2 = d^2$ dove $d =$ distanza costante.

Esercizio 11.3.10. Determinare la configurazione di equilibrio di una catena sottoposta al suo peso.

Soluzione: il problema non è di facile soluzione; si suggerisce di scomporre la tensione agente su ciascun elemento infinitesimo d_1 della catena nelle 2 componenti orizzontale (deve essere poi costante per l'equilibrio) e verticale (la sua variazione deve bilanciare il peso).

$y(x) = \frac{H}{w}\left(\cosh \frac{w}{H}x - 1\right)$ dove $H =$ componenete orizzontale della tensione , $w =$ peso per unità di lunghezza. La curva che si ottiene è detta *CATENARIA*.

Esercizio 11.3.11. Determinare la curva la cui lunghezza è uguale all'area sottesa e passante per $A(0, 1)$.

Soluzione: osserviamo che la lunghezza di una curva di estremi $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ è data da $\int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2\, dx}$
$y = \cosh x$

11.4 Esercizi sulle equazioni del secondo ordine

Esercizio 11.4.1. Risolvere le equazioni lineari.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$ []
2. $y'' + 2y' + y = 0$ []
3. $y = y'' + y'$ []
4. $y'' - 4y' + 4y = x^2$ []
5. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ []
6. $y'' + y = \cos x$ []
7. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$ []

11.5 Problemi sulle equazioni del secondo ordine

Esercizio 11.5.1. Determinare il moto del pendolo semplice di lunghezza l supponendo che all'istante iniziale l'angolo descritto sia α_0 e la velocità angolare sia nulla.

Soluzione: $\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t$ dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Esercizio 11.5.2. Determinare la funzione di scarica di un condensatore in serie in un circuito LC sulle cui armature all'istante iniziale vi sia la carica q_0 e supponendo che l'intensità iniziale della corrente sia nulla.

Soluzione: $q(t) = q_0 \cos \omega t$ dove $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Esercizio 11.5.3. Determinare il moto dell'esercizio 11.5.1 quando la massa è sottoposta anche ad una forza esterna del tipo $F(t) = \sin \Omega t$.

Soluzione: se $\omega \neq \Omega$ $\quad \alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t - \dfrac{\frac{\Omega}{\omega}}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t + \dfrac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t$

se $\omega = \Omega$ $\quad \alpha(t) = \left(\alpha_0 - \dfrac{t}{2\omega}\right) \cos \omega t + \dfrac{1}{2\omega^2} \sin \omega t$

Esercizio 11.5.4. Il circuito LC del problema 11.5.2 venga collegato ad un generatore che eroga una d.d.p. $V(t) = \sin \Omega t$.

Soluzione: analoghe all'esercizio precedente.

Esercizio 11.5.5. La massa del problema 11.5.1 sia sottoposta, oltre che alla forza di richiamo anche ad una forza d'attrito proprozionale alla velocità.

Soluzione:

Detto $S = \dfrac{h}{2ml}$ e $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ dove $h =$ costante di proporzionalità dell'attrito

se $S^2 > \omega^2$ $\quad \alpha(t) = C_1 e^{-(S+T)t} + C_2 e{-}(S - T)t$ dove $T = \sqrt{S^2 - \omega^2}$

se $S^2 = \omega^2$ $\quad \alpha(t) = (C_1 + C_2 t)\, e{-}St$

se $S^2 < \omega^2$ $\quad \alpha(t) = e{-}St\,(C_1 \cos Tt + C_2 \sin Tt)$ dove $T = \sqrt{S^2 - \omega^2}$

Esercizio 11.5.6. Nel circuito del problema 11.5.2 vi sia anche inserita in serie una resistenza R (RLC).

Soluzione: come sopra.

Esercizio 11.5.7. Un uomo si muove in linea retta con velocità costante V e il suo cane cerca di raggiungerlo puntando in ogni istante nella direzione del padrone con velocità v costante in modulo. Determinare la traiettoria del moto del cane.

Suggerimento: la posizione dell'uomo sia, all'istante iniziale, nell'origine di un sistema di riferimento; quella del cane nel punto $P(a, 0)$. La velocità V dell'uomo abbia direzione e verso dell'asse y. Ricordiamo che $t = \dfrac{s}{v}$.

Soluzione: $y(x) = \dfrac{x^{1+\frac{V}{v}}}{2a^{\frac{V}{v}}(1 + \frac{V}{v})} - \dfrac{x^{1-\frac{V}{v}}}{2a^{-\frac{V}{v}}(1 - \frac{V}{v})} + \dfrac{a^{\frac{V}{v}}}{1 - \frac{V^2}{v^2}}$ Osserviamo che l'incontro uomo-cane avviene in $y(0)$ da cui si deduce che $V < v$.

Parte IV

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Integrazione - Matematica 5 Statistica descrittiva
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

Settembre 2012

Dipartimento di Matematica
ITIS V.Volterra
San Donà di Piave