Matematica 4

Dipartimento di Matematica

ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [12/13][S-All]

Indice

Parte I

Calcolo differenziale

Capitolo 1

Numeri reali

1.1 Insiemi di numeri reali

I concetti fondamentali dell'Analisi Matematica che ci apprestiamo a studiare – limiti, funzioni continue, derivate – si fondano sulle proprietà dei numeri reali e, in particolare, sulle proprietà degli *insiemi di numeri reali*; per questo iniziamo con un paragrafo che ne definisce la sostanza e le proprietà.

Definizione 1.1.1. Siamo a, b numeri reali con $a < b$, allora chiamiamo *intervalli limitati* i seguenti:

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \textit{intervallo chiuso} \\ ]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \textit{intervallo aperto} \\ [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ ]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}$$

Definizione 1.1.2. Sia a un numero reale, allora chiamiamo *intervalli illimitati* i seguenti:

$$\begin{aligned} [a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\ ]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\ ]-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\ ]-\infty,a[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \end{aligned}$$

Naturalmente possiamo definire $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ osservando che l'intero insieme dei reali può essere considerato un intervallo.
Useremo, anzi, abbiamo già usato, tutti questi intervalli ma di particolare importanza risultano i primi due ai quali abbiamo dato un nome specifico.

Esempio 1.1.1. Studiare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln(1 - x^2)$.
Si tratta di risolvere la disequazione $1 - x^2 > 0$, che, dopo rapidi calcoli, fornisce la soluzione : $]-1,1[$ cioè un intervallo aperto.

Esempio 1.1.2. Studiare il campo di esistenza della funzione $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
Si tratta di risolvere la disequazione $1 - x^2 \geq 0$, che, dopo rapidi calcoli, fornisce la soluzione : $[-1,1]$ cioè un intervallo chiuso.

Esempio 1.1.3. Studiare il campo di esistenza della funzione $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$.
Si tratta di risolvere la disequazione $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$, che, dopo rapidi calcoli, fornisce la soluzione : $]-\infty,-2] \cup]1,+\infty[$ cioè l'unione di intervalli illimitati.

Gli insiemi di numeri reali possono essere molto più complicati di un semplice intervallo o anche di unioni di intervalli. Per esempio si considerino gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$ oppure $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \,\text{irrazionale}\}$: non sono certamente un intervallo. In ogni caso possiamo dare alcune definizioni che ci aiuteranno perlomeno a catalogarli.

Definizione 1.1.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali; diciamo che A è *superiormente limitato* se $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A : x \leq c$. In questo caso c si dice *maggiorante* di A. Diciamo che A è *inferiormente limitato* se $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A : x \geq c$. In questo caso c si dice *minorante* di A. Diciamo che A è *limitato* se lo è superiormente e inferiormente. Un insieme che non sia limitato (superiormente, inferiormente) si dice *illimitato* (superiormente, inferiormente).

E' evidente che se esiste un maggiorante (minorante) di A allora ne esistono infiniti.

Esempio 1.1.4. Sia $A = [-1, 1[$; A è certamente limitato; infatti -1 è un minorante e 1 è un maggiorante.

Dall'esempio notiamo che i maggioranti (minoranti) non necessariamente appartengono all'insieme.

Esempio 1.1.5. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, \cdots\}$; è limitato inferiormente con 0 minorante; non è limitato superiormente[1].

Esempio 1.1.6. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots\}$; è limitato superiormente con 1 maggiorante; è limitato inferiormente perchè l'insieme contiene solo numeri positivi e quindi un qualsiasi numero negativo è minorante; ma anche 0 è minorante perchè certamente $0 < \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Possiamo osservare che 0 è *il più grande* fra i minoranti.

L'esercizio precedente ci suggerisce che se un maggiorante appartiene all'insieme allora altri non vi possono appartenere perchè non sarebbero più maggioranti; analogamente per i minoranti. Abbiamo perciò la definizione:

Definizione 1.1.4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali; se A è superiormente limitato e $c \in A$ è un maggiorante allora c è unico e si dice *il massimo* di A. Se A è inferiormente limitato e $c \in A$ è un minorante allora c è unico e si dice *il minimo* di A.

L'esempio 1.1.6 mostra che l'insieme A ha massimo 1 ma *non ha minimo*: questo perchè il più grande fra i minoranti, 0, non appartiene all'insieme. Come dire: l'insieme A non ha un *primo* elemento ma ha un *ultimo* elemento (1).

Esempio 1.1.7.

$A = [-1, 2]$	minimo $= -1$	massimo $= 2$
$C =]-1, 2]$	minimo $\nexists$	massimo $= 2$
$C =]-1, 2[$	minimo $\nexists$	massimo $\nexists$
$D = [-1, +\infty[$	minimo $= -1$	massimo $\nexists$

L'esempio 1.1.7 mostra che l'intervallo aperto non ha ne massimo ne minimo però i numeri -1 e 2 che sono rispettivamente il più grande minorante e il più piccolo maggiorante, sono una specie di surrogato di minimo e massimo. Diamo perciò la definizione:

Definizione 1.1.5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali; se esiste $c \in \mathbb{R}$ che sia il massimo fra i minoranti questo si dice **l'estremo inferiore** di A e si indica con $\inf A$. Se esiste $c \in \mathbb{R}$ che sia il minimo fra i maggioranti questo si dice **l'estremo superiore** di A e si indica con $\sup A$.

Esempio 1.1.8. $A = [-2, 5[$; è limitato inferiormente con minorante -2 che appartiene all'insieme e quindi ne è il minimo. E' limitato superiormente perchè 5 è un maggiorante. Non è il massimo perchè non appartiene all'insieme. Dimostriamo che 5 è l'estremo superiore: $[5, +\infty[$ è l'insieme di tutti i possibili maggioranti; osserviamo che ha minimo 5 che quindi è il minimo fra i maggioranti.

[1] Lo studente è in grado di fornirne una dimostrazione?

Purtroppo non è sempre così semplice dimostrare che un certo numero è l'estremo superiore (o inferiore) di un insieme. Riprendiamo in considerazione l'esempio 1.1.6 con una semplice variante:

Esempio 1.1.9. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} = \{1+1, 1+\dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{3}, \cdots, 1+\dfrac{1}{n}, \cdots\}$ Banalmente 2 è il massimo. Invece il minimo non esiste però 1 è un buon candidato per essere estremo inferiore. E' un minorante perchè tutti i numeri del tipo $1 + \frac{1}{n}$ sono maggiori[2] di 1 però non è immediato percepire che sia anche il massimo fra i minoranti e questo perchè il nostro insieme, stavolta, non è un intervallo. In effetti non tutti i numeri maggiori di 1 appartengono all'insieme e quindi si potrebbe dubitare del fatto che 1 sia proprio il più grande fra i minoranti. In ogni caso se dimostriamo che i numeri maggiori di 1 non sono minoranti siamo a posto. Per assurdo supponiamo che esista un numero $1 + \epsilon > 1$ che sia minorante di A; questo implica che $1 + \epsilon < x, \forall x \in A$, cioè $1 + \epsilon < 1 + \frac{1}{n}$, da cui $\epsilon < \frac{1}{n} \, \forall n \in \mathbb{N}*$ e quindi $n < \frac{1}{\epsilon} \, \forall n \in \mathbb{N}*$; ma quest'ultima disuguaglianza non è vera e quindi il nostro $1 + \epsilon$ non può essere minorante e abbiamo un assurdo.

Come si vede la dimostrazione che un numero è estremo inferiore (o superiore) non è immediata e come l'esempio illustra, la tecnica usata per la dimostrazione non è il richiamo alla definizione di estremo inferiore (o superiore) ma una applicazione del teorema seguente (la cui dimostrazione lasciamo per esercizio):

Teorema 1.1.1. *L'estremo superiore di un insieme di numeri reali A è l'unico numero c, se esiste, che ha le seguenti proprietà:*

1. *c è un maggiorante*
2. *qualunque sia $\epsilon > 0$, $c - \epsilon$ non è maggiorante di A*

Analogamente si ha

Teorema 1.1.2. *L'estremo inferiore di un insieme di numeri reali A è l'unico numero c, se esiste, che ha le seguenti proprietà:*

1. *c è un minorante*
2. *qualunque sia $\epsilon > 0$, $c + \epsilon$ non è minorante di A*

A questo punto è lecito porsi la domanda: ma quali sono le condizioni perchè $\inf A$ e $\sup A$ esistano? A questa domanda risponderemo in dettaglio nel paragrafo 1.3 ma riassumiamo quì le proprietà sinora esposte.

Riassumendo: Sia A un insieme di numeri reali; se A è limitato superiormente allora ammette $\sup A$ che è unico; se $\sup A \in A$ allora è anche massimo. Se A è limitato inferiormente allora ammette $\inf A$ che è unico; se $\inf A \in A$ allora è anche minimo.

Esercizi

Esercizio 1.1.1. Determinare (se esistono) l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il minimo, e il massimo dei seguenti insiemi:

1. $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2n+5}{5n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $A - 2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 - 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$
5. $A - 5 = \{z \in \mathbb{R} \mid z = \dfrac{x}{y} \quad x, y \in]1, 2]\}$

[2] Facile dimostrazione.

1.2 Intorni

Quando possiamo dire che due numeri (punti) reali sono *vicini* o *lontani*? Questo è certamente un concetto relativo: per esempio i numeri $3,14$ e $3,15$ sono vicini se sono misure in metri (la differenza è $0,01$ cioè 1 cm) di qualche grandezza ma sono lontani se sono misure in anni-luce (quanto sarà la differenza in m?). Risulta che la nozione importante è quella di *più* vicino o *meno* vicino piuttosto che la reale consistenza numerica della vicinanza. A questo proposito è fondamentale la definizione seguente:

Definizione 1.2.1. Si dice *intorno* di un numero (punto) $x \in \mathbb{R}$ un qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ che contenga un intervallo aperto contenente x.

In sostanza vogliamo che sia : $x \in]a, b[\subseteq U \subseteq \mathbb{R}$. La richiesta di questa doppia inclusione sembra inutilmente complicata; in realtà la definizione consente di avere come intorni di un punto anche insiemi molto complicati: la cosa non è importante, basta che contenga un intervallo aperto con dentro il punto.

Esempio 1.2.1. Sia $x = 1$ allora i seguenti sono tutti intorni di x:

1. $U_1 =]0, 2[$
2. $U_2 =]0.2, 1.3[$
3. $U_3 = [0, 3]$
4. $U_4 = [-1, +\infty[$

mentre i seguenti *non* sono intorni di x:

1. $U_5 =]1, 2[$
2. $U_6 =]0.2, 1[$
3. $U_7 = [0, 1]$
4. $U_8 = [-1, 0] \cup]2, +\infty[$
5. $U_9 =]-1, 0] \cup \{1\}$

L'insieme U_9 non è intorno di 1 nonostante $1 \in U_9$ perchè, in qualche modo, quest'ultimo è *isolato*.

La nozione di intorno ci permette di *avvicinarci* ad un numero sempre più: basta considerare una successione di intorni del numero via via più piccoli: per il numero 1, per esempio, possiamo considerare gli intorni del tipo $]a, b[$ con $0 < a < 1$ e $1 < b < 2$.

A volte torna utile definire anche intorni *parziali* di un numero:

Definizione 1.2.2. Si dice *intorno destro* di un numero (punto) $x \in \mathbb{R}$ un qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ che contenga un intervallo aperto a destra che abbia x come estremo inferiore. Si dice *intorno sinistro* di un numero (punto) $x \in \mathbb{R}$ un qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ che contenga un intervallo aperto a sinistra che abbia x come estremo superiore.

Esempio 1.2.2. Sia $x = 1$ allora $[-2, 1]$ è intorno sinistro e $]1, 5[$ è intorno destro di 1.

Risulterà utile il seguente:

Teorema 1.2.1. *L'unione e l'intersezione di due intorni (o di un numero finito d'intorni) di un numero è anch'essa intorno del numero.*

Lasciamo la dimostrazione allo studente pignolo.

Saranno molto usate anche le seguenti:

Definizione 1.2.3. Si dice *intorno di più infinito* un qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ che contenga un intervallo illimitato a destra ($]a, +\infty[$). Si indica usualmente con $U_{+\infty}$. Si dice *intorno di meno infinito* un qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ che contenga un intervallo illimitato a sinistra ($]-\infty, b[$).Si indica usualmente con $U_{-\infty}$. Si dice *intorno di infinito* un qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ che contenga un intervallo illimitato a sinistra ($]-\infty, b[$) e un intervallo illimitato a destra ($]a, +\infty[$). Si indica usualmente con U_{∞}.

Consideriamo il seguente problema: l'intervallo $U =]0,1[$, come sottoinsieme di numeri reali, è intorno di tutti i propri punti? La risposta è certamente sì; infatti se $c \in]0,1[$ abbiamo la catena di inclusioni $c \in]0,1[\subseteq]0,1[$ e quindi, per definizione, U è intorno di c. Invece, se consideriamo l'insieme $U_1 =]0,1] \subseteq \mathbb{R}$ non possiamo dire altrettanto: il problema è che l'insieme U_1 è solamente intorno sinistro del numero 1 e quindi non possiamo affermare che è intorno di *tutti* i propri punti. Questa osservazione porta alla seguente, importante, definizione:

Definizione 1.2.4. L'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ di numeri reali si dirà *aperto* se è intorno di tutti i suoi punti. L'insieme $B \subseteq \mathbb{R}$ di numeri reali si dirà *chiuso* se il suo complementare in $\mathbb{R}$ [3] è aperto.

La nozione di insieme aperto/chiuso risulta essere molto importante nello studio dell'analisi ma questo fatto non può essere reso esplicito ora; lo sarà più avanti quando si saranno studiate ulteriori proprietà delle funzioni.

Valgono i seguenti teoremi (che lasciamo da dimostrare al solito studente volenteroso):

Teorema 1.2.2. *L'intersezione di un numero* finito *e l'unione di un numero* qualsiasi *di insiemi aperti è un insieme* aperto*.*

Teorema 1.2.3. *L'intersezione di un numero* qualsiasi *e l'unione di un numero* finito *di insiemi chiusi è un insieme* chiuso*.*

L'ultima nozione importante per lo studio dell'analisi riguarda i numeri che risultano *infinitamente* vicini ad un certo insieme. Questo ci consente di avvicinarci quanto vogliamo al numero in questione sempre rimanendo dentro l'insieme. Vediamo la definizione:

Definizione 1.2.5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Si dice che c è un punto di *accumulazione* per A se in ogni intorno di c cadono infiniti punti di A. Non è necessario che $c \in A$.

Esempio 1.2.3. Sia $A =]1,2[$, allora 1 è punto di accumulazione per A. Infatti, se U è intorno qualsiasi di 1, conterrà un intervallo $]a,b[$ tale che $a < 1 < b$ e quindi in questo intervallo cadono tutti i numeri compresi fra 1 e b se $b < 2$ altrimenti tutti i numeri compresi fra 1 e 2: in ogni caso infiniti numeri di A. Per la stessa ragione anche 2 è punto di accumulazione per A. Osserviamo che 1 e 2 *non appartengono* ad A. Osserviamo anche che ogni altro punto di A è banalmente di accumulazione per A.

Non sempre le cose sono così semplici.

Esempio 1.2.4. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$. Facciamo vedere che 0 è di accumulazione per A. Se U è un qualsiasi intorno di 0 allora contiene un intervallo aperto che contiene 0 e quindi sarà del tipo $]a,b[$ con $a < 0$ e $b > 0$. E' evidente che nell'intervallo $]0,b[$ cadono infiniti numeri di A: infatti basterà vedere per quali valori di n è soddisfatta la $\frac{1}{n} < b$; risolvendo si ha: $n > \frac{1}{b}$ e quindi sono infiniti. Intutivamente la cosa è del tutto chiara: i numeri $\frac{1}{n}$ positivi diventando sempre più piccoli si avvicinano a 0 sempre di più.

Osserviamo che l'insieme A, contrariamente al caso dell'esercizio precedente, non ha altri punti di accumulazione. Dimostriamo, ad esempio, che $\frac{1}{3}$ non è di accumulazione: ricordiamo che la definizione di punto di accumulazione prescrive che in *ogni* intorno del numero cadano infiniti punti di A; se noi troviamo anche *un solo* intorno che non soddisfa la proprietà allora il punto non è di accumulazione. Sia U intorno di $\frac{1}{3}$, e supponiamo che U contenga l'intervallo aperto $]0.3, 0.4[$ è subito evidente che in questo intervallo cade un solo il numero di $\frac{1}{3}$: quindi il numero non è di accumulazione. Con analoga dimostrazione si procede per gli altri.

Osservazione importante Spesso si deve considerare quello che accade per numeri infinitamente grandi (positivi, negativi o entrambi) e quindi diventa comodo supporre che questi infiniti siano punti e siano di accumulazione per un insieme A. Si tratta di una pura convenzione di linguaggio poichè gli infinti

[3] Come noto dal biennio, il complementare di un insieme A contenuto in un insieme B è l'insieme dei punti di B tolti i punti di A.

non sono *numeri*. In effetti se un insieme è, ad esempio, superiormente illimitato contiene numeri che sono arbitrariamente grandi, senza alcun limite: è quindi possibile avvicinarsi *all'infinito* quanto si vuole sempre rimanendo all'interno dell'insieme; in questo caso è comodo dire che l'infinito è di accumulazione per l'insieme. In generale, quando diciamo che c è *un'accumulazione* intendiamo che può essere un numero qualsiasi o un infinito.

Esercizi

Esercizio 1.2.1. Studiare i seguenti insiemi (limitati superiormente, inferiormente, estremo superiore-inferiore, massimo-minimo, punti di accumulazione):

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2n+5}{5n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{n^2-1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 - 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $D = \{z \in \mathbb{R} \mid z = \dfrac{x}{y} \quad x, y \in]1, 2]\}$
5. $E =]-1, 0[\cup]0, 1]$
6. $F =]1, +\infty[$
7. $G = [1, 3[\cup \{4\}$

1.3 Completezza

In questo paragrafo riprendiamo brevemente la discussione sui numeri reali iniziata nel volume Matematica 3. Nel capitolo Numeri abbiamo discusso le 12 proprietà fondamentali dei numeri che consentono lo sviluppo dell'algebra. Per affrontare i temi dell'Analisi Matematica, compito di questo volume, abbiamo bisogno, come già anticipato, di una ulteriore proprietà (assioma) che permette di distinguere decisamente fra numeri razionali (frazioni) e numeri reali. Riportiamo per comodità le prime 12 proprietà enunciate dei numeri:
Siano a, b, c numeri qualsiasi e $\mathbf{P}$ l'insieme dei numeri *positivi*.

$a+(b+c)=(a+b)+c$	Associativa della somma	(P.1)
$a+0=0+a=a$	Elemento neutro della somma	(P.2)
$a+(-a)=(-a)+a=0$	Esistenza opposto	(P.3)
$a+b=b+a$	Commutativa della somma	(P.4)
$a(bc)=(ab)c$	Associativa del prodotto	(P.5)
$a1=1a$	Elemento neutro del prodotto	(P.6)
$aa^{-1}=a^{-1}a=1$	Esistenza inverso	(P.7)
$ab=ba$	Commutativa del prodotto	(P.8)
$a(b+c)=ab+ac$	Distributiva	(P.9)

Dove e $a \neq 0$ nel caso P.7.

Legge di tricotomia (P10)

Per ogni numero a, vale *una sola* delle seguenti:

$$a = 0 \tag{i}$$
$$a \in \mathbf{P} \tag{ii}$$
$$-a \in \mathbf{P} \tag{iii}$$

Se $a \in \mathbf{P}$ e $b \in \mathbf{P}$, allora $a+b \in \mathbf{P}$	Chiusura per la somma	(P11)
Se $a \in \mathbf{P}$ e $b \in \mathbf{P}$, allora $ab \in \mathbf{P}$	Chiusura per il prodotto	(P12)

Come già osservato, queste proprietà non permettono di distinguere fra razionali e reali. Per esempio, la $\sqrt{2}$ e tutte le radici di numeri che non sono quadrati non è razionale e questo sarebbe già un motivo sufficiente per la loro introduzione; ma lo studio dell'analisi matematica ci pone un problema altrettanto spinoso: se un insieme di numeri è limitato superiormente allora esiste l'estremo superiore? e analogamente, se un insieme di numeri è limitato inferiormente allora esiste l'estremo inferiore?

Esistenza dell'estremo superiore

Se $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset,$ e A è limitato superiormente, allora A ha un estremo superiore. (P.13)

L'esistenza dell'estremo superiore va postulata, non è dimostrabile. Con questo assioma distinguiamo definitivamente i numeri razionali dai reali nel senso che per i razionali questo assioma non vale. Per esempio l'insieme dei razionali che soddisfano la disequazione $x^2 < 2$ è certamente superiomente limitato perchè, per esempio, 3 è un maggiorante, ma non esiste il minimo fra i maggioranti perchè dovrebbe essere proprio la radice di 2 che *non è razionale*.

L'esistenza dell'estremo inferiore per gli insiemi inferiormente limitati non occorre sia postulata, si può dimostrare a partire da P.13.

Teorema 1.3.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ limitato inferiormente. Sia B l'insieme di tutti i minoranti di A. Allora $B \neq \emptyset$, B è limitato superiormente e l'estremo superiore di B è l'estremo inferiore di A.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Vale, ovviamente, anche il seguente

Teorema 1.3.2. *Se un insieme ha un estremo superiore (inferiore), questi è unico.*

Dimostrazione. Per assurdo, se A ammette due estremi superiori, diciamo x e y allora si avrebbe $x \leq y$ perchè y è un maggiorante e x è il più piccolo maggiorante; ma si avrebbe anche $y \leq x$ perchè x è un maggiorante e y è il più piccolo maggiorante; perciò $x = y$. Analogamente per l'estremo inferiore. □

Capitolo 2

Successioni numeriche reali

2.1 Generalità

Definizione 2.1.1. Diremo *successione* una funzione definita in $\mathbb{N}$.

Definizione 2.1.2. Diremo *successione numerica reale* una funzione definita da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

Con le consuete notazioni relative alle funzioni scriveremo:

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

Si conviene di definire *termine generale* della successione l'immagine a_n in cui n viene chiamato indice; inoltre spesso si indentifica la successione con l'insieme delle sue immagini, cioè

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

o, sinteticamente,

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Definizione 2.1.3. Diremo che la successione numerica reale $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (oppure è convergente) a* $l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall\, n > \overline{n} \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$$

In pratica, tutti i termini della successione da un certo punto in poi (proprio da $\overline{n}$ in avanti) risultano compresi fra $l - \epsilon$ e $l + \epsilon$ perchè la loro distanza da l è inferiore ad ϵ.

Per ogni scelta di ϵ positivo è sempre possibile trovare un $\overline{n}$ opportuno e la definizione risulta tanto più interessante quanto più ϵ è piccolo poichè in quel caso si rende ancor più evidente la 'vicinanza' degli a_n (da $\overline{n}$ in poi) ad l.

In tal caso scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

Definizione 2.1.4. Diremo che la successione numerica reale $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge (oppure è divergente)* se

$$\forall\, M > 0, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall\, n > \overline{n} \Rightarrow |a_n| > M;$$

diremo che **diverge (oppure è divergente) positivamente** se

$$\forall\, M > 0, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall\, n > \overline{n} \Rightarrow a_n > M;$$

diremo che *diverge (oppure è divergente) negativamente* se

$$\forall\, M > 0, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall\, n > \overline{n} \Rightarrow a_n < -M$$

In pratica, tutti i termini della successione da un certo punto in poi (proprio da $\overline{n}$ in avanti) risultano maggiori di M oppure minori di $-M$ perchè diventano in valore assoluto grandi a piacere.

Per ogni scelta di M positivo è sempre possibile trovare un $\overline{n}$ opportuno e la definizione risulta tanto più interessante quanto più M è grande poichè in quel caso si rende ancor più evidente l' 'aumentare' degli a_n (da $\overline{n}$ in poi).

In tali casi scriveremo, rispettivamente,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

Altrimenti, diremo che la successione numerica reale $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *indeterminata* .

Esempio 2.1.1. Discutere il carattere (cioè dire se è convergente, divergente o indeterminata) della successione di termine generale

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione (osserviamo che il minimo valore di n è 1):

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}, ...$$

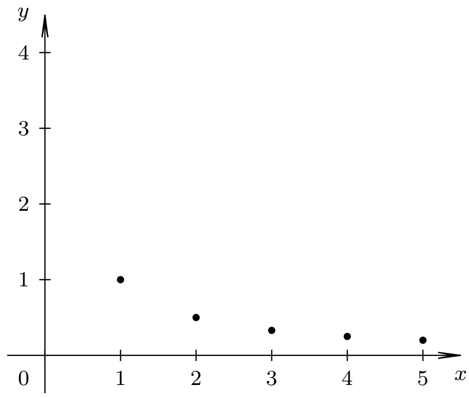
la successione converge a 0 poichè

$$\forall\,\epsilon > 0, \exists\,\overline{n} \in \mathbb{N} | \forall\, n > \overline{n} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$$

infatti la disequazione

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

è evidentemente verificata, per ogni scelta di ϵ, da tutti i naturali maggiori di $\overline{n}$ che per primo supera $\frac{1}{\epsilon}$.



Esempio 2.1.2. Discutere il carattere della successione di termine generale

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione (osserviamo che il minimo valore di n è 0):

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{5}{6}, ...$$

osserviamo che possiamo riscrivere il termine generale

$$a_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

ed i primi termini

$$a_0 = 1 - \frac{1}{2}, a_1 = 1 - \frac{1}{3}, a_2 = 1 - \frac{1}{4}, a_3 = 1 - \frac{1}{5}, a_4 = 1 - \frac{1}{6}, ...$$

la successione converge a 1 poichè

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall n > \overline{n} \Rightarrow |1 - \frac{1}{n+2} - 1| < \epsilon$$

infatti la disequazione

$$n + 2 > \frac{1}{\epsilon}$$

è evidentemente verificata, per ogni scelta di ϵ, da tutti i naturali maggiori di $\overline{n}$ che per primo supera $\frac{1}{\epsilon} - 2$.

Esempio 2.1.3. Discutere il carattere della successione di termine generale

$$a_n = e^{\frac{1}{n}}.$$

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione (osserviamo che il minimo valore di n è 1):

$$a_1 = e, a_2 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}, a_3 = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}, a_4 = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}, a_5 = e^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{e}, ...$$

la successione converge a 1 poichè

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall n > \overline{n} \Rightarrow |e^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$$

infatti la disequazione

$$1 - \epsilon < e^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$$

è equivalente a

$$\ln(1-\epsilon) < \frac{1}{n} < \ln(1+\epsilon)$$

ove non è restrittivo porre $1 - \epsilon > 0$ (essendo ϵ piccolo a piacere) e si osserva che essendo $\ln(1-\epsilon) < 0$ la prima parte della disequazione è sempre soddisfatta; per risolvere la seconda parte della stessa passiamo ai reciproci cambiando verso e otteniamo

$$n > \frac{1}{\ln(1+\epsilon)}$$

la quale è evidentemente verificata, per ogni scelta di ϵ, da tutti i naturali maggiori di $\overline{n}$ che per primo supera $\frac{1}{\ln(1+\epsilon)}$.

Esempio 2.1.4. Discutere il carattere della successione di termine generale

$$a_n = \frac{n^2-4}{n+2}.$$

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione (osserviamo che il minimo valore di n è 0) e riscriviamo il termine generale

$$a_n = \frac{n^2-4}{n+2} = \frac{(n+2)(n-2)}{n+2} = n - 2$$

ed i primi termini

$$a_0 = -2, a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2, ...$$

la successione diverge a $+\infty$ poichè

$$\forall M > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall n > \overline{n} \Rightarrow n - 2 > M$$

infatti la disequazione

$$n - 2 > M$$

è evidentemente verificata, per ogni scelta di M, da tutti i naturali maggiori di $\overline{n}$ che per primo supera $M + 2$.

Esempio 2.1.5. Discutere il carattere della successione di termine generale

$$a_n = \ln n.$$

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione (osserviamo che il minimo valore di n è 1):

$$a_1 = 0, a_2 = \ln 2, a_3 = \ln 3, a_4 = \ln 4, a_5 = \ln 5, ...$$

la successione diverge a $+\infty$ poichè

$$\forall M > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall n > \overline{n} \Rightarrow \ln n > M$$

infatti la disequazione

$$\ln n > M$$

è evidentemente verificata, per ogni scelta di M, da tutti i naturali maggiori di $\overline{n}$ che per primo supera e^M.

Esempio 2.1.6. Discutere il carattere (cioè dire se è convergente, divergente o indeterminata) della successione di termine generale

$$a_n = \cos n\pi.$$

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione (osserviamo che il minimo valore di n è 0):

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, ...$$

la successione è indeterminata poichè risulta

$$a_n = (-1)^n$$

che per n pari vale 1 e per n dispari vale -1.

Esempio 2.1.7. Discutere il carattere della successione di termine generale

$$a_n = 2^{(-1)^n n}.$$

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione (osserviamo che il minimo valore di n è 0):

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 4, a_3 = \frac{1}{8}, a_4 = 16, ...$$

la successione è indeterminata poichè risulta

$$a_n = 2^n$$

per n pari e

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

per n dispari.

Studiare il carattere delle seguenti successioni numeriche reali di cui è dato il termine generale:

1. $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-3}$

   [convergente a $\frac{3}{2}$]

2. $a_n = e^{-n^2}$

   [convergente a 0]

3. $a_n = \ln(5n+7)$

   [divergente positivamente]

4. $a_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$

   [indeterminata]

5. $a_n = (-1)^n \tan \frac{1}{n}$

   [convergente a 0]

Capitolo 3

Limiti e funzioni continue

Introduciamo il capitolo con l'esempio storicamente significativo del calcolo della lunghezza della circonferenza. Affrontiamo il problema costruendo i poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza osservando che:

- il perimetro di qualunque poligono inscritto è minore del perimetro di qualunque poligono circoscritto;
- aumentando il numero dei lati dei poligoni, diminuisce la differenza fra i perimetri dei poligoni con lo stesso numero di lati, rispettivamente inscritto e circoscritto;

Dalle osservazioni fatte ne consegue che i 2 insiemi dei perimetri dei poligoni, rispettivamente inscritti e circoscritti, costituiscono 2 classi di grandezze contigue che ammettono quindi un unico elemento di separazione: proprio la lunghezza della circonferenza.
Dal punto di vista dell'Analisi il problema potrebbe essere affrontato mediante la costruzione di 2 successioni, rispettivamente i perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti:

$$s_3, s_4, s_5, ...$$

$$S_3, S_4, S_5, ...$$

si può dimostarare, con l'uso della trigonometria, che tali successioni sono convergenti verso lo stesso valore L che quindi si assume come lunghezza della circonferenza. Ciò significa che

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall\, n > \overline{n} \Rightarrow |s_n - L| < \epsilon$$

e, analogamente, che

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall\, n > \overline{n} \Rightarrow |S_n - L| < \epsilon$$

cioè, come abbiamo già visto, si scrive anche

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = L$$

e, analogamente,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = L.$$

Cercheremo nel seguito di generalizzare il procedimento suesposto ad una qualunque funzione reale di variabile reale.

Definizione 3.0.5. Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale di dominio D e sia c un'accumulazione per D; diremo che l è il limite di f per x che tende a c e scriveremo

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

se

$$\forall V_l, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow f(x) \in V_l$$

cioè, fissato comunque un intorno del limite, deve esistere un intorno dell'accumulazione tale che, preso un qualunque punto x appartenente a tale intorno e al dominio, esclusa al più l'accumulazione stessa, accade che la sua immagine appartiene all'intorno del limite inizialmente considerato

La definizione generale appena data si traduce nei casi particolari come segue:

- limite finito per una funzione in un punto cioè $l, c \in \mathbb{R}$ (diremo che f converge ad l):

  $$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

  se

  $$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

- limite finito per una funzione all'infinito cioè $l \in \mathbb{R}, c = \infty$:

  $$\lim_{x\to \infty} f(x) = l$$

  se

  $$\forall \epsilon > 0, \exists U_\infty | \forall x \in U_\infty \cap D \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

- limite infinito per una funzione in un punto cioè $c \in \mathbb{R}, l = \infty$ (diremo che f diverge a ∞):

  $$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

  se

  $$\forall M > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow |f(x)| > M$$

- limite infinito per una funzione all'infinito cioè $l, c = \infty$:

  $$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$$

  se

  $$\forall M > 0, \exists U_\infty | \forall x \in U_\infty \cap D \Rightarrow |f(x)| > M$$

Osservazione. Di particolare utilità risultano, in taluni casi, le definizioni di limite destro e sinistro in un punto c: diremo che

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = l$$

se

$$\forall V_l, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D \cap \{x \in \mathbb{R} | x > c\} \Rightarrow f(x) \in V_l$$

e lo chiameremo limite destro della funzione in c. Analogamente si definisce il limite sinistro di $f(x)$ in c.

Esempio 3.0.8. Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1$$

$\forall \epsilon > 0, \exists U_2 | \forall x \in U_2 \cap \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow \left|\frac{x^2-5x+6}{x-2} + 1\right| < \epsilon$

Risolviamo la disequazione $\left|\frac{x^2-5x+6}{x-2} + 1\right| < \epsilon$ ottenendo $\left|\frac{(x-2)(x-3)}{x-2} + 1\right| < \epsilon$ da cui $|(x-3)+1| < \epsilon$ ed infine

$$|x - 2| < \epsilon$$

che rappresenta l'intorno di 2 cercato.

Esempio 3.0.9. Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+2} = 0$$

$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, U_\infty | \forall\, x \in U_\infty \cap \mathbb{R} \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2+2}\right| < \epsilon$

Risolviamo la disequazione $\left|\frac{1}{x^2+2}\right| < \epsilon$ ottenendo $x^2 + 2 > \frac{1}{\epsilon}$ da cui $x^2 > \frac{1}{\epsilon} - 2$ ed infine

$$x < -\sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 2}, x > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 2}$$

che rappresenta l'intorno di ∞ cercato.

Esempio 3.0.10. Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to -5} ln(x+5)^2 = -\infty$$

$\forall\, M > 0, \exists\, U_{-5} | \forall\, x \in U_{-5} \cap \mathbb{R} - \{-5\} \Rightarrow ln(x+5)^2 < -M$

Risolviamo la disequazione $ln(x+5)^2 < -M$ ottenendo $(x+5)^2 < e^{-M}$ da cui $-\sqrt{e^{-M}} < x+5 < \sqrt{e^{-M}}$ ed infine

$$-5 - \sqrt{e^{-M}} < x < -5 + \sqrt{e^{-M}}$$

che rappresenta l'intorno di -5 cercato.

Esempio 3.0.11. Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

$\forall\, M > 0, \exists\, U_{-\infty} | \forall\, x \in U_{-\infty} \cap]-\infty, 1] \Rightarrow \sqrt{1-x} > M$

Risolviamo la disequazione $\sqrt{1-x} > M$ ottenendo $1 - x > M^2$ da cui $-x > M^2 - 1$ ed infine

$$x < 1 - M^2$$

che rappresenta l'intorno di $-\infty$ cercato.

3.1 Teoremi sui limiti

Teorema 3.1.1 (Teorema di unicità del limite)**.** *Il limite di una funzione $f(x)$, reale di variabile reale, per x che tende ad una accumulazione c per il suo dominio D, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che il limite non sia unico. Nel caso finito, si avrebbe $l_1 \neq l_2$ ossia, per esempio, $l_1 < l_2$; per definizione di limite si ha

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, U_c^1 | \forall\, x \in U_c^1 \cap D - \{c\} \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon$$

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, U_c^2 | \forall\, x \in U_c^2 \cap D - \{c\} \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon$$

cioè

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, U_c^1 | \forall\, x \in U_c^1 \cap D - \{c\} \Rightarrow l_1 - \epsilon < f(x) < l_1 + \epsilon$$
$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, U_c^2 | \forall\, x \in U_c^2 \cap D - \{c\} \Rightarrow l_2 - \epsilon < f(x) < l_2 + \epsilon$$

in particolare in $U_c^1 \cap U_c^2 \cap D$ risulta che

$$l_2 - \epsilon < f(x) < l_1 + \epsilon$$

cioè anche

$$l_2 - \epsilon < l_1 + \epsilon$$

ovvero

$$l_2 - l_1 < 2\epsilon$$

che contraddice l'ipotesi che ϵ sia positivo piccolo a piacere.
In maniera del tutto analoga si lavora nel caso infinito. □

Teorema 3.1.2 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Se una funzione $f(x)$, reale di variabile reale, per x che tende ad una accumulazione c per il suo dominio, ha limite non nullo allora esiste un intorno di c in cui la funzione assume lo stesso segno del suo limite.*

Dimostrazione. Supponiamo che il limite esista finito e positivo. Per definizione di limite si ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

cioè

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

in particolare per $\epsilon = \frac{l}{2}$ risulta che

$$l - \frac{l}{2} < f(x)$$

ovvero

$$f(x) > \frac{l}{2} > 0$$

Analogamente si lavora nel caso finito e negativo e nei casi infiniti. □

Teorema 3.1.3 (Teorema del confronto o dei 2 carabinieri)**.** *Siano $f(x), g(x), h(x)$ tre funzioni reali di variabile reale definite in un intorno di una comune accumulazione c ove risulti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e sia inoltre*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l = \lim_{x \to c} h(x)$$

allora anche

$$\lim_{x \to c} g(x) = l$$

Dimostrazione. Per definizione di limite si ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow |h(x) - l| < \epsilon$$

cioè

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \cap D - \{c\} \Rightarrow l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$$

in particolare risulta che

$$l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon$$

cioè

$$l - \epsilon < g(x) < l + \epsilon$$

che equivale ad affermare che

$$\lim_{x \to c} g(x) = l$$

Analogamente si procede nei casi infiniti. □

3.2 Operazioni sui limiti

1. **Casi finiti**: siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$$
$$\lim_{x\to c}[f_1(x) - f_2(x)] = l_1 - l_2$$
$$\lim_{x\to c} f_1(x) \cdot f_2(x) = l_1 \cdot l_2$$
$$\lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad l_2 \neq 0$$
$$\lim_{x\to c} |f_1(x)| = |l_1|$$
$$\lim_{x\to c} f_1(x)^{f_2(x)} = l_1^{l_2} \quad l_1 > 0$$

2. **Addizioni con i limiti (almeno un caso infinito)**:

   siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = l$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$ con $l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = \infty$

   siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = +\infty$ allora $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = +\infty$

   siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = -\infty$

   Osservazione. Se invece $\lim_{x\to c} f_1(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = -\infty$ allora nulla si può dire! In tal caso parleremo di *forma indeterminata* del tipo $+\infty - \infty$.

3. **Moltiplicazioni con i limiti (almeno un caso infinito)**:

   siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = l$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$ con $l \in \mathbb{R}^*$ allora $\lim_{x\to c} f_1(x) \cdot f_2(x) = \infty$

   siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = \infty$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$ allora $\lim_{x\to c} f_1(x) \cdot f_2(x) = \infty$

   Osservazione. Se invece $\lim_{x\to c} f_1(x) = 0$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$ allora nulla si può dire! In tal caso parleremo di *forma indeterminata* del tipo $0 \cdot \infty$.

   Osservazione. Per la determinazione del segno di ∞ valgono le solite regole dei segni.

4. **Divisioni con i limiti (almeno un caso infinito o nullo)**:

   siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = l$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = 0$ con $l \in \mathbb{R}^*$ allora $\lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$

   siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = l$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$ con $l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$

   siano $\lim_{x\to c} f_1(x) = \infty$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$

   Osservazione. Se invece $\lim_{x\to c} f_1(x) = 0$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = 0$ allora nulla si può dire! In tal caso parleremo di *forma indeterminata* del tipo $\frac{0}{0}$.

Osservazione. Se invece $\lim_{x\to c} f_1(x) = \infty$ e $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$ allora nulla si può dire! In tal caso parleremo di *forma indeterminata* del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Osservazione. Per la determinazione del segno di ∞ valgono le solite regole dei segni.

5. **Potenze con i limiti (almeno un caso infinito o nullo)**:

   In tal caso è opportuno osservare che $f_1(x)^{f_2(x)} = e^{f_2(x)\ln f_1(x)}$ e quindi il calcolo del limite della potenza è ricondotto al calcolo del limite di un prodotto. Poichè l'unica forma indeterminata per il prodotto è $0 \cdot \infty$ ne consegue che se $f_2(x) \to 0$ e $\ln f_1(x) \to \infty$ allora $f_1(x) \to +\infty$ oppure $f_1(x) \to 0^+$; se invece $f_2(x) \to \infty$ e $\ln f_1(x) \to 0$ allora $f_1(x) \to 1$. Da ciò si deduce che risultano *forme indeterminate* anche quelle del tipo $+\infty^0$, 0^0 e 1^∞.

3.3 Continuità delle funzioni reali di variabile reale

Diamo di seguito una delle fondamentali definizioni di tutta l'Analisi matematica.

Definizione 3.3.1. Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale e sia c un punto di accumulazione per il suo dominio; diremo che la funzione è continua in c se

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Se invece c è un punto isolato per il dominio allora diremo che la funzione è continua in c.

Diremo che f è continua nel suo dominio se lo è in ogni suo punto.

Osservazione. I teoremi e le operazioni visti sopra sono banalmente estendibili al caso di funzioni continue in c con l'ovvia sostituzione di l_1 e l_2 con $f_1(c)$ e $f_2(c)$.

3.4 Continuità delle funzioni elementari

Teorema 3.4.1. *La funzione costante $f(x) = k$ è continua su tutto l'asse reale.*

Dimostrazione. Preso $c \in \mathbb{R}$ esso risulta di accumulazione per il dominio della funzione; si ha

$$\lim_{x\to c} k = k$$

cioè la funzione è continua su tutto l'asse reale, essendo

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, U_c | \forall\, x \in U_c \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

nel nostro caso

$$|k - k| = 0 < \epsilon$$

verificata per ogni valore reale di x. □

Teorema 3.4.2. *La funzione identità $f(x) = x$ è continua su tutto l'asse reale.*

Dimostrazione. Preso $c \in \mathbb{R}$ esso risulta di accumulazione per il dominio della funzione; si ha

$$\lim_{x \to c} x = c$$

cioè la funzione è continua su tutto l'asse reale, essendo

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

nel nostro caso

$$|x - c| < \epsilon$$

che rappresenta l'intorno U_c cercato. □

Osservazione. Conseguenza immediata dei primi due teoremi sulla continuità e dei precedenti sui limiti, è la continuità delle funzioni polinomiali e razionali fratte (naturalmente nei loro domini).

Teorema 3.4.3. *La funzione esponenziale elementare $f(x) = a^x$ è continua su tutto l'asse reale.*

Dimostrazione. Preso $c \in \mathbb{R}$ esso risulta di accumulazione per il dominio della funzione; si ha

$$\lim_{x \to c} a^x = a^c$$

cioè la funzione è continua su tutto l'asse reale, essendo

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

nel nostro caso

$$|a^x - a^c| < \epsilon$$

cioè

$$a^c - \epsilon < a^x < a^c + \epsilon$$
$$a > 1 \Rightarrow \log_a(a^c - \epsilon) < x < \log_a(a^c + \epsilon)$$
$$0 < a < 1 \Rightarrow \log_a(a^c + \epsilon) < x < \log_a(a^c - \epsilon)$$

che rappresentano nei rispettivi casi l'intorno di c cercato. □

Teorema 3.4.4. *La funzione logaritmica elementare $f(x) = \log_a x$ è continua nel suo dominio (per $x > 0$).*

Dimostrazione. Preso $c > 0$ esso risulta di accumulazione per il dominio della funzione; si ha

$$\lim_{x \to c} \log_a x = \log_a c$$

cioè la funzione è continua nel suo dominio, essendo

$$\forall \epsilon > 0, \exists U_c | \forall x \in U_c \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

nel nostro caso

$$|\log_a x - \log_a c| < \epsilon$$

cioè

$$\log_a c - \epsilon < \log_a x < \log_a c + \epsilon$$
$$a > 1 \Rightarrow a^{\log_a c - \epsilon} < x < a^{\log_a c + \epsilon}$$
$$0 < a < 1 \Rightarrow a^{\log_a c + \epsilon} < x < a^{\log_a c - \epsilon}$$

che rappresentano nei rispettivi casi l'intorno di c cercato. □

Teorema 3.4.5. *La funzione sinusoidale elementare $f(x) = \sin x$ è continua su tutto l'asse reale.*

Dimostrazione. Preso $c \in \mathbb{R}$ esso risulta di accumulazione per il dominio della funzione; si ha

$$\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$$

cioè la funzione è continua su tutto l'asse reale, essendo

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, U_c | \forall\, x \in U_c \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

nel nostro caso

$$|\sin x - \sin c| < \epsilon$$

cioè

$$\sin c - \epsilon < \sin x < \sin c + \epsilon$$

$$\arcsin(\sin c - \epsilon) + 2k\pi < x < \arcsin(\sin c + \epsilon) + 2k\pi,$$

$$\pi - \arcsin(\sin c + \epsilon) + 2k\pi < x < \pi - \arcsin(\sin c - \epsilon) + 2k\pi$$

intervalli tra i quali si trova l'intorno di c cercato. □

Teorema 3.4.6. *La funzione cosinusoidale elementare $f(x) = \cos x$ è continua su tutto l'asse reale.*

Dimostrazione. Preso $c \in \mathbb{R}$ esso risulta di accumulazione per il dominio della funzione; si ha

$$\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$$

cioè la funzione è continua su tutto l'asse reale, essendo

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, U_c | \forall\, x \in U_c \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

nel nostro caso

$$|\cos x - \cos c| < \epsilon$$

cioè

$$\cos c - \epsilon < \cos x < \cos c + \epsilon$$

$$\arccos(\cos c + \epsilon) + 2k\pi < x < \arccos(\cos c - \epsilon) + 2k\pi,$$

$$-\arccos(\cos c - \epsilon) + 2k\pi < x < -\arccos(\cos c + \epsilon) + 2k\pi$$

intervalli tra i quali si trova l'intorno di c cercato. □

Osservazione. Conseguenza immediata dei teoremi sulla continuità e dei precedenti sui limiti, è la continuità delle funzioni tangente, cotangente e ottenute mediante operazioni elementari su funzioni continue (naturalmente nei loro domini).

Osservazione. In maniera analoga si può dimostrare che composte di fuzioni continue sono continue (naturalmente nei loro domini) e che inverse di funzioni continue sono continue (naturalmente nei loro domini).

Osservazione. Si può dimostrare che per una fuzione $f(x)$ continua e monotona crescente su un intervallo reale I di estremi a, b con $a < b$ (anche infiniti) si ha

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = inf\,\{f(x)\}_{x\in I}$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = sup\,\{f(x)\}_{x\in I}$$

Analogamente se si fosse trattato di una funzione monotona decrescente. In particolare osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Diamo di seguito gli enunciati di tre teoremi riguardanti le funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato, anteponendo alcune definizioni di cui ci serviremo.

Definizione 3.4.1. Diremo *massimo assoluto* per una funzione reale definita in un dominio reale il massimo, se esiste, dell'insieme delle immagini.

Definizione 3.4.2. Diremo *minimo assoluto* per una funzione reale definita in un dominio reale il minimo, se esiste, dell'insieme delle immagini.

Teorema 3.4.7 (Teorema di Weierstrass)**.** *Una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato ammette minimo e massimo assoluti.*

Teorema 3.4.8 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori compresi fra il minimo e il massimo assoluti.*

Teorema 3.4.9 (Teorema degli zeri)**.** *Una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato che assume valori discordi agli estremi, si annulla almeno una volta all'interno dell'intervallo.*

Facendo uso della continuità delle funzioni elementari e dei teoremi sui limiti, calcolare i seguenti limiti.

Esempio 3.4.1. $\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 2)$ trattandosi di una fuzione continua, è sufficiente sostituire ad x il valore 1; si ottiene così

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Esempio 3.4.2. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ la fuzione non è continua in 2 ma è sufficiente usare le operazioni sui limiti nei casi infiniti; si ottiene così

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$$

Osservazione. La notazione usata riassume i 2 casi

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

e in tal caso ammetteremo che il limite dato esiste.

Esempio 3.4.3. $\lim_{x\to 3} e^{\frac{1}{x-3}}$ la fuzione non è continua in 3 ma è sufficiente usare le operazioni sui limiti nei casi infiniti disinguendo però il caso destro dal sinistro; si ottiene così

$$\lim_{x\to 3^+} e^{\frac{1}{x-3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{x-3}} = 0$$

Osservazione. Per il teorema dell'unicità del limite, diremo che il limite dato non esiste.

Esempio 3.4.4. $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ non esiste poichè, per x che tende a 0, $\frac{1}{x}$ tende all'infinito e, dato che la funzione sinusoidale è periodica, essa assume tutti i valori compresi fra -1 e 1 infinite volte in ogni intorno di infinito; viene, quindi, a mancare l'unicità del limite.

Esempio 3.4.5. $\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ la fuzione non è continua in 2 ma è sufficiente usare le operazioni sui limiti nei casi infiniti; si ottiene così

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$$

Osservazione. La notazione usata riassume i 2 casi

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$$

Esempio 3.4.6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$ numeratore e denominatore sono funzioni continue e i loro limiti si calcolano per sostituzione; si ottiene però la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che suggerisce la scomposizione in fattori dei polinomi:
$\lim_{x\to 2} \dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{x+2}$ la funzione razionale fratta ottenuta è ora continua in 2, perciò è sufficiente sostituire e si ottiene così

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2-4} = \frac{3}{4}$$

Esempio 3.4.7. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}+2x}{x+1}$ numeratore e denominatore sono funzioni continue e i loro limiti si calcolano per sostituzione; si ottiene però la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che elimineremo moltiplicando sia il numeratore che il denominatore per una stessa quantità:
$\lim_{x\to -1} \dfrac{(\sqrt{x+5}+2x)(\sqrt{x+5}-2x)}{(x+1)((\sqrt{x+5}-2x))} = \lim_{x\to -1} \dfrac{x+5-4x^2}{(x+1)((\sqrt{x+5}-2x))} = \lim_{x\to -1} -\dfrac{4x^2-x-5}{(x+1)((\sqrt{x+5}-2x))} =$
$= \lim_{x\to -1} -\dfrac{(x+1)(4x-5)}{(x+1)((\sqrt{x+5}-2x))} = \lim_{x\to -1} -\dfrac{4x-5}{\sqrt{x+5}-2x}$ la funzione ottenuta è ora continua in -1, perciò è sufficiente sostituire e si ottiene così

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}+2x}{x+1} = \frac{9}{4}$$

Esempio 3.4.8. $\lim_{x\to\infty} (x^3-2x+5)$ trattasi della forma indeterminata $+\infty-\infty$ che elimineremo raccogliendo la potenza di grado massimo:
$\lim_{x\to\infty} x^3(1-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}) = \infty$ poichè ciascuna delle frazioni tende a 0.

Esempio 3.4.9. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-4x+1}{5x^3+2x^2}$ numeratore e denominatore sono funzioni continue e i loro limiti risultano infiniti; si ottiene perciò la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che elimineremo raccogliendo sia a numeratore che a denominatore la potenza di grado massimo:
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3(2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(5+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{2}{x}} = \dfrac{2}{5}$ poichè ciascuna delle frazioni tende a 0.

Esempio 3.4.10. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+5x^2-2}{-x^2+2x+3}$ numeratore e denominatore sono funzioni continue e i loro limiti risultano infiniti; si ottiene perciò la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che elimineremo raccogliendo sia a numeratore che a denominatore la potenza di grado massimo:
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3(2+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^3})}{x^2(-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \dfrac{2+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^3}}{-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = \infty$ poichè, come nell'esercizio precedente, la frazione tende a -2 e tendendo x all'infinito, in base ai teoremi visti, il limite del prodotto risulta infinito.

Esempio 3.4.11. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4-x^2+3x-4}{6x^5-2x^4+x-1}$ numeratore e denominatore sono funzioni continue e i loro limiti risultano infiniti; si ottiene perciò la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che elimineremo raccogliendo sia a numeratore che a denominatore la potenza di grado massimo:
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4(1-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4})}{x^5(6-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5})} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}}{6-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}} = 0$ poichè, come nell'esercizio precedente, la frazione tende a $\frac{1}{6}$ e tendendo x all'infinito, in base ai teoremi visti, il limite del prodotto risulta zero.

Esempio 3.4.12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}+2}$ operando la sostituzione $\dfrac{1}{x}=t$ si ha $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}+2} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{t^2-t}{3t^2+2} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{t^2(1-\frac{1}{t})}{t^2(3+\frac{2}{t^2})} =$
$\lim_{t\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{t}}{3+\frac{2}{t^2}} = \dfrac{1}{3}$ poichè ciascuna delle frazioni tende a 0.

Osservazione. Dagli ultimi tre esempi si deduce facilmente la regola generale per il calcolo del limite di un rapporto di polinomi quando x tende all'infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } n=m \\ \infty & \text{se } n>m \\ 0 & \text{se } n<m \end{cases}$$

Procediamo ora fornendo due definizioni che permettono il confronto fra funzioni tendenti all'infinito.

Definizione 3.4.3. Diremo che una funzione $f(x)$ è un *infinito* per x che tende a c se

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

Definizione 3.4.4. Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ infinite per x che tende a c, se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} k\in\mathbb{R}^* & \text{allora diremo che } f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono } \textit{infiniti dello stesso ordine} \\ \infty & \text{allora diremo che } f(x) \text{ è un } \textit{infinito di ordine superiore} \text{ rispetto a } g(x) \\ 0 & \text{allora diremo che } f(x) \text{ è un } \textit{infinito di ordine inferiore} \text{ rispetto a } g(x) \\ \text{non esiste} & \text{allora diremo che } f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono } \textit{infiniti non confrontabili} \end{cases}$$

Osservazione. Nel caso in cui addirittura

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti equivalenti e si usa la notazione

$$f(x) \sim g(x)$$

Osservazione. Dagli esercizi visti sopra si deduce facilmente che, per x che tende all'infinito, un polinomio è equivalente al suo termine di grado massimo; inoltre, lo studio delle funzioni trascendenti aveva già messo in luce che, per x che tende a $+\infty$ la funzione logaritmica crescente è un infinito di ordine inferiore a qualsiasi potenza positiva di x, che a sua volta è un infinito di ordine inferiore rispetto alla funzione esponenziale crescente. Per esprimere quest'ultima relazione, che potrà essere provata solo in seguito, si usa la notazione: per $x \to +\infty$

$$\log_a x << x^\alpha << a^x$$

con a reale maggiore di 1 e per ogni α reale positivo.

Enunciamo, ora, due teoremi di particolare utilità nel calcolo dei limiti che coinvolgono funzioni infinite.

Teorema 3.4.10 (Principio di sostituzione degli infiniti equivalenti)**.** *Se $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ sono infiniti per x che tende a c e $f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$ allora*

$$\lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

se i limiti esistono.

Teorema 3.4.11 (Principio di eliminazione degli infiniti)**.** *Se $f(x), g(x), a(x), b(x)$ sono infiniti per x che tende a c, $a(x)$ e $b(x)$ sono infiniti di ordine inferiore rispettivamente a $f(x)$ e $g(x)$ allora*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)+a(x)}{g(x)+b(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

se i limiti esistono.

Esempio 3.4.13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{2x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ avendo utilizzato i principi enunciati sopra.

Esempio 3.4.14. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+5x^3}{3^x-6\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ essendo, per x che tende a $+\infty$, $(x-1)$ equivalente a x e avendo utilizzato i principi enunciati sopra, le proprietà delle potenze e delle funzioni esponenziali.

Esempio 3.4.15. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(x+3\sqrt[5]{x+2})}{\log_3(2x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(x)}{\log_3 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{\ln 2}}{\frac{\ln 2x}{\ln 3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln 2x}\cdot\frac{\ln 3}{\ln 2} == \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln x+\ln 2}\cdot$ $\displaystyle\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ essendo, per x che tende a $+\infty$, $(x+3\sqrt[5]{x+2})$ equivalente a x, $(2x+\sqrt{x})$ equivalente a $2x$, avendo utilizzato i principi enunciati sopra e le proprietà dei logaritmi.

Esempio 3.4.16. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}+2}$ operando la sostituzione $\displaystyle\frac{1}{x} = t$ si ha $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}+2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2-t}{3t^2+2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{3t^2} = \frac{1}{3}$ avendo utilizzato i principi enunciati sopra.

Esempio 3.4.17. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$ i due addendi tendono rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$ perciò si ottiene la forma indeterminata $+\infty-\infty$ che elimineremo moltiplicando sia numeratore che denominatore per $\sqrt{x^2+1}+x$:
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$ poichè x tende a $+\infty$ si ha $|x| = x$ pertanto si ottiene:
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0$ poichè la quantità dentro parentesi tende a 2 e x tende a $+\infty$.

Esempio 3.4.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ i due addendi tendono entrambi a $+\infty$ perciò non si ha una forma indeterminata e il limite è facilmente calcolabile:
$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$

Osservazione. Se l'esercizio fosse stato proposto nella forma

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$$

sarebbe stato necessario distinguere i due casi come fatto sopra.

Esempio 3.4.19. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ in base all'osservazione precedente, dovremo distinguere i due casi:
$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ i due addendi tendono rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$ perciò si ottiene la forma indeterminata $+\infty-\infty$ che elimineremo moltiplicando sia numeratore che denominatore per $\sqrt{x^2+3x}+x$:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x}$ poichè x tende a $+\infty$ si ha $|x|=x$ pertanto si ottiene:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\dfrac{3}{2}$ poichè il denominatore tende a 2.
$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ i due addendi tendono entrambi a $+\infty$ perciò non si ha una forma indeterminata e il limite è facilmente calcolabile:
$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=+\infty$

Esempio 3.4.20. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{x-1}$ numeratore e denominatore sono funzioni continue nei loro domini e i loro limiti risultano zero; si ottiene perciò la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che elimineremo moltiplicando sia numeratore che denominatore per $\sqrt{x+3}+2x$:
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x+3})^2-(2x)^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-4x^2+x+3}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(-4x-3)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-4x-3}{\sqrt{x+3}+2x}$ la funzione ottenuta è ora continua in 1, perciò è sufficiente sostituire e si ottiene così

$$\lim_{x\to1}\frac{-4x-3}{\sqrt{x+3}+2x}=-\frac{7}{4}$$

Esempio 3.4.21. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}$ numeratore e denominatore sono funzioni continue nei loro domini e i loro limiti risultano zero; si ottiene perciò la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che elimineremo moltiplicando sia numeratore che denominatore per $(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{x+1}+3)$:
$\lim\limits_{x\to8}\dfrac{((\sqrt[3]{x})^3-2^3)(\sqrt{x+1}+3)}{((\sqrt{x+1})^2-3^2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{((x-8)(\sqrt{x+1}+3)}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$ la funzione ottenuta è ora continua in 8, perciò è sufficiente sostituire e si ottiene così

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{2}$$

3.5 Limiti fondamentali

Esaminiamo ora due limiti notevoli, uno dei quali sarà anche dimostrato, detti primo e secondo limite fondamentale, di particolare interesse per le molteplici conseguenze che da essi discendono. Essi si presentano come forme indeterminate del tipo, rispettivamente, $\frac{0}{0}$ e 1^∞.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (I)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (II)$$

Teorema 3.5.1 (I limite fondamentale)**.** *Se x è la misura in radianti di un angolo allora risulta*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

.

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

non è restrittivo supporre che l'angolo (la cui misura in radianti coincide con la misura dell'arco associato) sia compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$; dalla goniometria e dalla geometria sintetica sappiamo che:

$$\sin x\leq x\leq \tan x$$

dividiamo tutti e tre i membri per $\sin x$ (che è positivo e non modifica, quindi, il verso) ed otteniamo:

$$1\leq\frac{x}{\sin x}\leq\frac{1}{\cos x}$$

applichiamo il teorema del confronto per x che tende a zero da destra; le funzioni estremanti tendono entrambe banalmente a 1 e quindi risulta:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1$$

da cui, per il teorema sul limite del reciproco di una funzione, si conclude la prima parte della dimostrazione.
Essendo, infine, la funzione $y=\dfrac{\sin x}{x}$ pari, risulta che anche il

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin x}=1$$

da cui la tesi. □

Esempio 3.5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$ ci riconduciamo al I limite fondamentale:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{2}$ poniamo $3x=z$ e osservando che se x tende a 0 anche z tende a 0, otteniamo:
$\lim_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

Osservazione. In generale, dati i numeri reali non nulli α e β, si prova facilmente che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Se $\alpha=0$ non c'è neppure bisogno di passare al limite, essendo la funzione identicamente nulla.

Esempio 3.5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ ci riconduciamo al I limite fondamentale:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$

Esempio 3.5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$ ci riconduciamo al I limite fondamentale con la posizione $\arcsin x=z$ da cui $x=\sin z$ con z tendente a 0:
$\lim_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z}=1$

Esempio 3.5.4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$ ci riconduciamo al I limite fondamentale con la posizione $\arctan x = z$ da cui $x = \tan z$ con z tendente a 0:
$\lim_{z\to 0} \dfrac{z}{\tan z} = 1$

Osservazione. In generale, dati i numeri reali non nulli α e β, si prova facilmente che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Se $\alpha = 0$ non c'è neppure bisogno di passare al limite, essendo la funzione identicamente nulla.

Esempio 3.5.5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ci riconduciamo al I limite fondamentale moltiplicando numeratore e denominatore per $1+\cos x$:
$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)^2}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}$

Esempio 3.5.6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$ ci riconduciamo al I limite fondamentale moltiplicando numeratore e denominatore per $1+\cos 5x$:
$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos 5x)^2}{x^2(1+\cos 5x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin 5x)^2}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos 5x} = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 5x}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1+\cos 5x} = \dfrac{25}{2}$

Osservazione. In generale, dato il numero reale non nullo α, si prova facilmente che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos \alpha x}{x^2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

Procediamo ora fornendo due definizioni che permettono il confronto fra funzioni tendenti a zero e rendono molto più agevole il calcolo di un limite qualora questo si riconduca al I limite fondamentale.

Definizione 3.5.1. Diremo che una funzione $f(x)$ è un *infinitesimo* per x che tende a c se

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0$$

Definizione 3.5.2. Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per x che tende a c, se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} k \in \mathbb{R}^* & \text{allora diremo che } f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono } \textit{infinitesimi dello stesso ordine} \\ \infty & \text{allora diremo che } f(x) \text{ è un } \textit{infinitesimo di ordine inferiore} \text{ rispetto a } g(x) \\ 0 & \text{allora diremo che } f(x) \text{ è un } \textit{infinitesimo di ordine superiore} \text{ rispetto a } g(x) \\ \text{non esiste} & \text{allora diremo che } f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono } \textit{infinitesimi non confrontabili} \end{cases}$$

Osservazione. Nel caso in cui addirittura

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi equivalenti e si usa la notazione

$$f(x)\sim g(x)$$

Dagli esempi svolti sopra e dalle definizioni date, segue immediatamente che, per x che tende a 0, sono infinitesimi equivalenti le seguenti funzioni:

$$x\sim\sin x$$

$$x\sim\tan x$$

$$x\sim\arcsin x$$

$$x\sim\arctan x$$

$$\frac{1}{2}x^2\sim 1-\cos x$$

Osservazione. Dalla definizione di infinitesimi equivalenti, discende che funzioni identicamente nulle in un intorno di c non possono essere equivalenti (infatti , in nessun caso, il limite del loro rapporto potrebbe dare 1).

Enunciamo, ora, due teoremi di particolare utilità nel calcolo dei limiti che coinvolgono funzioni infinitesime.

Teorema 3.5.2 (Principio di sostituzione degli infinitesimi equivalenti)**.** *Se $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ sono infinitesimi per x che tende a c e $f_1(x)\sim f_2(x)$, $g_1(x)\sim g_2(x)$ allora*

$$\lim_{x\to c}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

se i limiti esistono.

Teorema 3.5.3 (Principio di eliminazione degli infinitesimi)**.** *Se $f(x), g(x), a(x), b(x)$ sono infinitesimi per x che tende a c, $a(x)$ e $b(x)$ sono infinitesimi di ordine superiore rispettivamente a $f(x)$ e $g(x)$ allora*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)+a(x)}{g(x)+b(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

se i limiti esistono.

Esempio 3.5.7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin x^2-2\arctan 3x}{\tan 5x+\arcsin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x^2-2\cdot 3x}{5x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-6x}{5x}=-\frac{4}{5}$ essendo, per x che tende a 0, $\sin 2x$ equivalente a $2x$, $\arcsin x^2$ equivalente a x^2, $\arctan 3x$ equivalente a $3x$, $\tan 5x$ equivalente a $5x$ e $(\arcsin x)^2$ equivalente a x^2 ed avendo utilizzato i principi enunciati sopra.

Esempio 3.5.8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(\frac{\pi}{6}-x)}{\sqrt{1-\cos(x-\frac{\pi}{6})}}=\lim_{z\to 0}\frac{-z}{\sqrt{\frac{1}{2}z^2}}$ avendo posto $z=x-\frac{\pi}{6}$ ed essendo, per z che tende a 0, $\sin(-z)$ equivalente a $-z$ e $1-\cos z$ equivalente a $\frac{1}{2}z^2$. Dobbiamo a questo punto distinguere due casi: $\lim_{z\to 0^+}\frac{-z}{\frac{z}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}$ e $\lim_{z\to 0^-}\frac{-z}{-\frac{z}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$

Esempio 3.5.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^2\frac{1}{x}}{1-\cos\left(\frac{3}{x}\right)} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{\frac{1}{2}\cdot(3z)^2} = \dfrac{2}{9}$ avendo posto $z=\dfrac{1}{x}$ ed essendo, per z che tende a 0, $\sin^2 z$ equivalente a z^2 e $(1-\cos 3z)$ equivalente a $\dfrac{1}{2}\cdot(3z)^2$

Esempio 3.5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ in questo caso non è possibile sostituire $(\sin x - x)$ con $(x-x)=0$ poichè, come è stato precedentemente osservato, la funzione identicamente nulla non è equivalente ad alcun infintesimo; l'esercizio non è risolvibile con le attuali conoscenze.

Proponiamo, a questo punto, una serie di esercizi in cui si utilizza anche il II limite fondamentale.

Esempio 3.5.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 6} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^6 = \lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right]^6 = e^6$ avendo posto $z=\frac{x}{3}$ e utilizzato il II limite fondamentale oltre alla proprietà della potenza di potenza.

Osservazione. In generale, dati i numeri reali non nulli α e β, si prova facilmente che

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

Esempio 3.5.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x$ dobbiamo distinguere i due casi: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x = +\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x = 0$ avendo utilizzato il II limite fondamentale e i limiti relativi alla funzione esponenziale.

Esempio 3.5.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = 1$ avendo utilizzato il II limite fondamentale e i limiti relativi alla funzione esponenziale.

Esempio 3.5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^x$ il rapporto tra polinomi entro parentesi tende a 1, si ottiene perciò la forma indeterminata 1^∞ che elimineremo riconducendoci al II limite fondamentale: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x} = \dfrac{e}{e^2} = \dfrac{1}{e}$ avendo utilizzato il II limite fondamentale e gli esercizi precedenti.

Osservazione. In generale, dati i numeri reali non nulli α e β, si prova facilmente che

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\alpha+x}{\beta+x}\right)^x = e^{\alpha-\beta}$$

Osservazione. Usando la posizione $z=\frac{1}{x}$, si prova facilmente che il II limite fondamentale è equivalente al seguente limite

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Esempio 3.5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$ avendo usato una proprietà dei logaritmi e l'osservazione precedente.

Esempio 3.5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\log_a(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e \quad (a>0, a\neq 1)$ avendo usato una proprietà dei logaritmi e l'osservazione precedente.

Esempio 3.5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ ci riconduciamo al II limite fondamentale con la posizione $z=e^x-1$ da cui $x=\ln(1+z)$ con z tendente a 0:
$\lim_{z\to 0}\dfrac{z}{\ln(1+z)} = 1$ avendo usato l'esercizio precedente.

Esempio 3.5.18. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>0, a\neq 1)$ ci riconduciamo al II limite fondamentale con la posizione $z=a^x-1$ da cui $x=\log_a(1+z)$ con z tendente a 0:
$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$ avendo usato l'esercizio precedente.

Osservazione. Dagli esempi svolti sopra e dalle definizioni date, segue immediatamente che, per x che tende a 0, sono infinitesimi equivalenti le seguenti funzioni:

$$x\sim\ln(1+x)$$

$$x\sim e^x-1$$

Esempio 3.5.19. Dato il numero reale non nullo α, calcoliamo $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ riscriviamo in modo opportuno l'espressione a numeratore $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+x)^\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\cdot\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{x}=\alpha$ essendo, per x che tende a 0, $\ln(1+x)$ equivalente a x, $e^{\alpha x}-1$ equivalente a αx.

Osservazione. Dall'esempio svolto sopra e dalle definizioni date, segue immediatamente che, per x che tende a 0, sono infinitesimi equivalenti le seguenti funzioni:

$$\alpha x\sim(1+x)^\alpha-1$$

con α numero reale non nullo.

Esempio 3.5.20. $\lim_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{\sin x}}=e$ essendo, per x che tende a 0, $\arcsin x$ equivalente a x, $\sin x$ equivalente a x.

Esempio 3.5.21. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(\cos x-1+1)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-\frac{x^2}{2}+1)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ essendo, per x che tende a 0, $(\cos x-1)$ equivalente a $-\frac{x^2}{2}$.

Esempio 3.5.22. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+1-e^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$ essendo, per x che tende a 0, $(e^{2x}-1)$ equivalente a $2x$ e $(1-e^x)$ equivalente a $-x$.

Esempio 3.5.23. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ non esiste poichè, per x che tende a 0, $\frac{1}{x}$ tende all'infinito; pertanto gli infinitesimi $x\cdot\cos\frac{1}{x}$ e x non sono confrontabili.

3.6 Punti di discontinuità

Definizione 3.6.1. Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$, sia $x_0\in\mathbb{R}$ un punto di accumulazione del suo dominio; diremo che x_0 è un *punto di discontinuità di I specie* se esistono finiti ma diversi i seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

e

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)$$

In tal caso chiameremo *salto* della funzione f in x_0 la quantità $S=\left|\lim_{x\to x_0^+}f(x)-\lim_{x\to x_0^-}f(x)\right|$.

Esempio 3.6.1. Discutere gli eventuali punti di discontinuità della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

L'unico eventuale punto di discontinuità della funzione data è, ovviamente, $x_0 = 0$ e poichè

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

si tratta di una discontinuità di I specie con salto $S = 2$.

Definizione 3.6.2. Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione del suo dominio; diremo che x_0 è un *punto di discontinuità di II specie* se non esiste o è infinito almeno uno dei seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

e

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Esempio 3.6.2. Discutere gli eventuali punti di discontinuità della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$$

L'unico eventuale punto di discontinuità della funzione data è, ovviamente, $x_0 = -3$ e poichè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{2x+1}{x+3} = \infty$$

si tratta di una discontinuità di II specie. Osserviamo che la retta di equazione $x = -3$ costituisce un asintoto verticale per il grafico della funzione data.

Definizione 3.6.3. Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione del suo dominio; diremo che x_0 è un *punto di discontinuità di III specie* se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

ma il valore della funzione in x_0 non esiste oppure è diverso da tale limite.
In tal caso diremo che la discontinuità è *eliminabile* ponendo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esempio 3.6.3. Discutere gli eventuali punti di discontinuità della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

L'unico eventuale punto di discontinuità della funzione data è, ovviamente, $x_0 = 1$ e poichè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1$$

ma la funzione non è definita in $x_0 = 1$, si tratta di una discontinuità di III specie. Eliminiamo la discontinuità ponendo

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Esempio 3.6.4. Discutere gli eventuali punti di discontinuità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq \pi \\ \dfrac{1}{x-\pi} & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

Gli eventuali punti di discontinuità della funzione data sono, ovviamente, 0 e π; poichè

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+2) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

il punto $x = 0$ è una discontinuità di I specie con salto $S = 1$. Analogamente si procede per il punto $x = \pi$ e poichè

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\sin 3x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} \frac{1}{x-\pi} = +\infty$$

il punto $x = \pi$ è una discontinuità di II specie e la retta di equazione $x = \pi$ è un asintoto verticale da destra per il grafico della funzione.

Esempio 3.6.5. Determinare gli eventuali valori reali di k affinchè la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

sia continua su tutto l'asse reale.
L'unico eventuale punto di discontinuità della funzione data è, ovviamente, $x = 0$ e poichè

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

mentre il valore della funzione in 0 è k, affinchè essa sia continua su tutto l'asse reale deve essere $k = 1$.

3.6.1 Esercizi riassuntivi proposti

Usando i teoremi sui limiti e la continuità delle funzioni elementari, provare che:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{5}{3}$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\sin x - 2\cos x}{3x} = \frac{1}{2\pi}$

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3-x} = 0$

5. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2\ln x}{3+e^x} = -\infty$

6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-4}}{x} = 0$

7. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

8. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{7x^2-2x+1}{x^2+x} = +\infty$

9. $\lim_{x\to-\infty} \arctan(1+e^x) = \frac{\pi}{4}$

10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\tan(\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2+x}} = 0$

Usando anche le tecniche per eliminare la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, provare che:

1. $\lim_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}$

2. $\lim_{x\to1} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$

3. $\lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^4-1} = \frac{3}{4}$

4. $\lim_{x\to5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-10x+25} = \infty$

5. $\lim_{x\to-1} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-x-2} = 0$

6. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} = 0$

8. $\lim_{x\to0} \frac{1+x-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1} = 1$

9. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2}$

10. $\lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2(x-1)}} = -\infty$

Usando anche le tecniche per eliminare la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ o $+\infty-\infty$, provare che:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+x-6} = 3$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = 0$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \infty$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^6-3x-10}{x^2-10x+25} = +\infty$

5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{4x-3} = \frac{1}{4}$

6. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{4x-3} = -\frac{1}{4}$

7. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x+1} = \pm1$

8. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+4x+3}-x) = 2$

9. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+4x+3}-x) = +\infty$

10. $\lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-1}) = \mp\frac{3}{2}$

Usando anche il I limite fondamentale, provare che:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{6x} = \frac{1}{2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\tan 7x} = \frac{5}{7}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{2x+3\sin 5x+\tan^2 x}{x+\sin^2 x-3\tan x} = -\frac{17}{2}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x\sin x} = \frac{1}{4}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \frac{1}{2}$
7. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x^2-\frac{\pi^2}{9}} = \frac{6}{\pi}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 2x}{2x^3} = 4$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x+2x}{\arctan x+3x} = \frac{3}{4}$

Usando anche il II limite fondamentale, provare che:

1. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{5}{x}} = e^5$
2. $\lim_{x\to \infty} (1+\frac{2}{x})^x = e^2$
3. $\lim_{x\to \infty} (1+\frac{1}{3x})^x = \sqrt[3]{e}$
4. $\lim_{x\to \infty} (1+\frac{\alpha}{\beta x})^{\gamma x} = e^{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$
5. $\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\tan x}} = e$
6. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = \frac{1}{e}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{5x} = \frac{3}{5}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{x} = 2$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$
11. $\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{x} = \pm 1$

Determinare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni reali di variabile reale, indicandone la specie:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$ [$x = 1$, I specie]

2) $f(x) = \dfrac{2x-5}{3-2x}$ [$x = \frac{3}{2}$, II specie]

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{3^{\frac{2}{x}} - 9}$ [$x = 0$, I specie; $x = 1$, II specie]

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{3x - x^2 - 2}$ [$x = 1$, II specie; $x = 2$, III specie]

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ [$x = 2$, III specie]

Capitolo 4

Derivate e funzioni derivabili

In questo capitolo affronteremo il concetto di derivata che è uno dei più importanti dell'Analisi Matematica e delle sue applicazioni.

4.1 Definizione e significato geometrico di derivata

Data una funzione reale $f(x)$ definita in un intorno I di $x_0 \in \mathbb{R}$, siano $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0+h, f(x_0+h))$ due punti appartenenti al suo grafico (ove si intende $x_0 + h \in I$); detti rispettivamente incremento della variabile dipendente e indipendente le quantità

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

e

$$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$$

diremo *rapporto incrementale* di f relativo ad x_0 la quantità

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dalla teoria della Trigonometria e della Geometria Analitica, sappiamo che il rapporto incrementale è il coefficiente angolare m_{PQ} della retta passante per i punti P e Q che risulta secante il grafico della funzione data:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Osserviamo che, al tendere, lungo la curva, del punto Q verso il punto P, cioè al tendere di h a 0, la secante PQ tende alla tangente in P alla curva stessa. Diamo, dunque, la definizione seguente:

Definizione 4.1.1. Diremo *derivata prima della funzione $f(x)$ nel punto x_0* il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale di f relativo ad x_0 per h che tende a 0 e scriveremo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

In tal caso diremo che la funzione f è derivabile in x_0.

Osservazione. Per indicare la derivata prima di una funzione f possiamo utilizzare anche i seguenti simboli: $(Df)(x_0)$, $\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Osservazione. Essendo la derivata un limite, anche per essa ha senso definire la derivata destra:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

e la derivata sinistra:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$

Definizione 4.1.2. Diremo che una funzione $f(x)$ è *derivabile in un intervallo* I se lo è in ogni punto di I. Qualora $f(x)$ fosse definita agli estremi di I, sarà sufficiente che $f(x)$ ammetta derivata destra nell'estremo sinistro e derivata sinistra in quello destro.

Enunciamo ora e quindi dimostriamo un importante teorema sulle funzioni derivabili.

Teorema 4.1.1. *Una funzione derivabile in x_0 è ivi continua.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, in x_0, il limite coincide con il valore della funzione, cioè che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero che

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Infatti:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h + f(x_0)\right] = f(x_0)$$

poichè $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste finito essendo la funzione derivabile per ipotesi e quindi $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h = 0$ □

4.2 Calcolo e regole di derivazione

Esaminiamo ora alcuni esempi di calcolo di derivata, tutti di **importanza fondamentale**, facendo uso anche del teorema appena dimostrato.

Esempio 4.2.1. $f(x)=k$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$ si può osservare che la derivata così calcolata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione data in ogni suo punto; poichè la tangente alla funzione data è, in questo caso, la funzione stessa (retta parallela all'asse delle ascisse), il suo coefficiente angolare è, ovviamente, nullo.

Esempio 4.2.2. $f(x)=x$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)-x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$ si può osservare che la derivata così calcolata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione data in ogni suo punto; poichè la tangente alla funzione data è, in questo caso, la funzione stessa (bisettrice del primo e terzo quadrante), il suo coefficiente angolare è, ovviamente, unitario.

Esempio 4.2.3. $f(x)=x^2$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx_0+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0$ si può osservare che la derivata così calcolata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione data in ogni suo punto; rispetto agli esempi precedenti, si nota che esso varia al variare dell'ascissa del punto considerato.

Osservazione. Dall'esempio sopra svolto e dall'Algebra segue che con $f(x)=x^n$ per $n\in\mathbb{N}$ risulta

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} = n\cdot x_0^{n-1}$$

Osservazione. Si può dimostrare addirittura che con $f(x) = x^\alpha$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = \alpha \cdot x_0^{\alpha-1}$$

Esempio 4.2.4. $f(x) = e^x$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} = e^{x_0}$ si può osservare che la derivata così calcolata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione data in ogni suo punto; rispetto agli esempi precedenti, si nota che esso varia al variare dell'ascissa del punto considerato.

Osservazione. Dall'esempio precedente e da un limite già calcolato, segue che con $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \ln a$$

Esempio 4.2.5. $f(x) = \ln x$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$ si può osservare che la derivata così calcolata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione data in ogni suo punto; rispetto agli esempi precedenti, si nota che esso varia al variare dell'ascissa del punto considerato.

Osservazione. Dal precedente esempio e da un limite calcolato, segue che con $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x_0+h) - \log_a x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \cdot \log_a e$$

Esempio 4.2.6. $f(x) = \sin x$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0(\cos h - 1) + \cos x_0 \cdot \sin h}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}\right) = \cos x_0$ si può osservare che la derivata così calcolata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione data in ogni suo punto; rispetto agli esempi precedenti, si nota che esso varia al variare dell'ascissa del punto considerato.

Esempio 4.2.7. $f(x) = \cos x$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} = -\sin x_0$ (la dimostrazione è del tutto analoga al caso precedente); si può osservare che la derivata così calcolata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione data in ogni suo punto; rispetto agli esempi precedenti, si nota che esso varia al variare dell'ascissa del punto considerato.

Teorema 4.2.1 (Linearità dell'operatore di derivazione)**.** *Date le funzioni reali di variabile reale $f_1(x)$ e $f_2(x)$ derivabili in un punto x_0 e le costanti reali α_1 e α_2 si ha*

$$(\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2)'(x_0) = \alpha_1 \cdot f_1'(x_0) + \alpha_2 \cdot f_2'(x_0)$$

Dimostrazione. La dimostrazione discende immediatamente dalla definizione di derivata e dalla linearità dell'operatore di limite. □

Esempio 4.2.8. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = 3\sin x + 5x^4$; si ha

$$y' = 3 \cdot \cos x + 5 \cdot 4x^3 = 3\cos x + 20x^3$$

Esempio 4.2.9. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = 2\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x} = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot x^{-1}$; si ha

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 4 \cdot (-1)x^{-1-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 4 \cdot x^{-2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{x^2}$$

Teorema 4.2.2 (Derivata di un prodotto)**.** *Date le funzioni reali di variabile reale $f_1(x)$ e $f_2(x)$ derivabili in un punto x_0 si ha*

$$(f_1 \cdot f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0)$$

Dimostrazione. Applicando la definizione di derivata alla funzione prodotto otteniamo

$$(f_1 \cdot f_2)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x_0+h) \cdot f_2(x_0+h) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0)}{h}$$

aggiungendo e togliendo a numeratore la quantità $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0+h)$, si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(x_0+h) \cdot f_2(x_0+h) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0+h) + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0+h) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_2(x_0+h) \cdot (f_1(x_0+h) - f_1(x_0)) + f_1(x_0) \cdot (f_2(x_0+h) - f_2(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[f_2(x_0+h) \cdot \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0)}{h} + f_1(x_0) \cdot \frac{f_2(x_0+h) - f_2(x_0)}{h} \right] =$$

$$= f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0)$$

□

Esempio 4.2.10. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = (2x-5) \cdot e^x$; si ha

$$y' = 2 \cdot e^x + (2x-5) \cdot e^x = (2x-3)e^x$$

Teorema 4.2.3 (Derivata di un quoziente)**.** *Date le funzioni reali di variabile reale $f_1(x)$ e $f_2(x)$ derivabili in un punto x_0 si ha*

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x_0) = \frac{f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) - f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0)}{(f_2(x_0))^2}$$

Dimostrazione. Applicando la definizione di derivata alla funzione quoziente otteniamo

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f_1(x_0+h)}{f_2(x_0+h)} - \dfrac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}}{h} =$$

aggiungendo e togliendo a numeratore la quantità $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0)$, si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(x_0+h) \cdot f_2(x_0) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0+h)}{h\,(f_2(x_0+h) \cdot f_2(x_0))} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x_0+h) \cdot f_2(x_0) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0+h)}{h\,(f_2(x_0+h) \cdot f_2(x_0))} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_2(x_0) \cdot (f_1(x_0+h) - f_1(x_0)) - f_1(x_0)(f_2(x_0+h) - f_2(x_0))}{h\,(f_2(x_0+h) \cdot f_2(x_0))} =$$

$$= lim_{h\to 0} \frac{\left[f_2(x_0+h) \cdot \dfrac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0)}{h} - f_1(x_0) \cdot \dfrac{f_2(x_0+h) - f_2(x_0)}{h} \right]}{f_2(x_0+h) \cdot f_2(x_0} =$$

$$= \frac{f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) - f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0)}{(f_2(x_0))^2}$$

□

Esempio 4.2.11. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \dfrac{3x-1}{5-x}$; si ha

$$y' = \frac{3 \cdot (5-x) - (3x-1) \cdot (-1)}{(5-x)^2} = \frac{15 - 3x + 3x - 1}{(5-x)^2} = \frac{14}{(5-x)^2}$$

Esempio 4.2.12. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; si ha

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Teorema 4.2.4 (Derivata di una funzione di funzione)**.** *Date le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$ derivabili rispettivamente in x_0 e $f(x_0)$ e nell'ipotesi che esista $g \circ f$ si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Omettiamo la dimostrazione; chiariamo, invece, con una serie di esempi l'applicazione della regola enunciata.

Esempio 4.2.13. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \left(x^2+1\right)^3$; si ha

$$y' = 3 \cdot \left(x^2+1\right)^2 \cdot 2x = 6x\left(x^2+1\right)^2$$

Esempio 4.2.14. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \ln(3x-5)$; si ha

$$y' = \frac{1}{3x-5} \cdot 3 = \frac{3}{3x-5}$$

Esempio 4.2.15. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = e^{x^2}$; si ha

$$y' = e^{x^2} \cdot (2x) = 2xe^{x^2}$$

Esempio 4.2.16. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \sin^3 x = (\sin x)^3$; si ha

$$y' = 3 \cdot (\sin x)^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cos x$$

Esempio 4.2.17. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$; si ha

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} \cdot \left(2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln x}{2x\sqrt{1+\ln^2 x}} = \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$$

Esempio 4.2.18. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \ln|x|$; si ha

$$y = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e, quindi

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

da cui

$$y' = \frac{1}{x}, \qquad \forall\, x \neq 0$$

il che equivale ad affermare che la derivata del logaritmo del modulo di x può essere calcolata come se il modulo non ci fosse!

Osservazione. Data la funzione reale di variabile reale $f(x)$ con $f(x) \neq 0$ risulta che

$$y = \ln|f(x)| = \begin{cases} \ln f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ \ln(-f(x)) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

e, quindi

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ \dfrac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)) = \dfrac{1}{f(x)} & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

da cui

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad \forall\, f(x) \neq 0$$

il che equivale ad affermare che la derivata del logaritmo del modulo di $f(x)$ può essere calcolata come se il modulo non ci fosse!

Esempio 4.2.19. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \ln\left|x^2 - 3x + 2\right|$; si ha

$$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

Osservazione. Date le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$ con $f(x) > 0$ risulta che

$$y = [f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]}$$

quindi è

$$y' = e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

cioè, in definitiva:

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \left(g'(x) \ln[f(x)] + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Esempio 4.2.20. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = x^x = e^{x \cdot \ln x}$; si ha

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$$

Teorema 4.2.5 (Derivata della funzione inversa)**.** *Data la funzione reale di variabile reale f^{-1} inversa della funzione reale di variabile reale f si ha*

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$$

essendo $y_0 = f(x_0)$ e $f'(y_0) \neq 0$.

Omettiamo la dimostrazione; chiariamo, invece, con alcuni esempi l'applicazione della regola enunciata.

Esempio 4.2.21. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \arcsin x$; è, evidentemente, $x = \sin y$; si ha

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

avendo tenuto conto che, nell'intervallo di invertibilità della funzione sinusoidale, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ con segno positivo.

Esempio 4.2.22. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \arctan x$; è, evidentemente, $x = \tan y$; si ha

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

avendo utilizzato la seconda forma della derivata della funzione tangente.

Esempio 4.2.23. Calcolare la derivata della funzione di equazione $y = \ln x$; è, evidentemente, $x = e^y$; si ha

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

avendo ritrovata la derivata della funzione logaritmica già calcolata per via diretta.

A conclusione di questa sezione, forniamo la seguente tabella riassuntiva.

funzione	**derivata**
k	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha f'(x) + \beta g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$[f(x)]^{g(x)}$	$[f(x)]^{g(x)}\left(g'(x)\ln[f(x)] + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)$

Completiamo con la definizione di derivata n-esima.

Definizione 4.2.1. Diremo *derivata n-esima* o *derivata di ordine n* di una funzione reale di variabile reale in x_0 la derivata della derivata (n-1)-esima e scriveremo

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Osservazione. Per indicare la derivata n-esima di una funzione f possiamo utilizzare anche i seguenti simboli: $(D^n f)(x_0)$, $\left(\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}\right)_{x=x_0}$. Inoltre osserviamo che la prima scrittura necessita della parentesi tonda se l'ordine della derivata è espresso in cifre arabe mentre può essere omessa se è espresso in numero romano.

Esempio 4.2.24. Calcolare la derivata seconda della funzione di equazione $y = e^{3x}$; si ha

$$y' = 3e^{3x}$$

e quindi

$$y'' = y^{(2)} = 9e^{3x}$$

Esempio 4.2.25. Calcolare la derivata n-esima della funzione di equazione $y = \ln(1+x)$; si ha

$$y' = \frac{1}{1+x}$$

$$y'' = y^{(2)} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''' = y^{(3)} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y^{IV} = y^{(4)} = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

$$y^{V} = y^{(5)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}$$

e quindi

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Esempio 4.2.26. Calcolare la derivata n-esima della funzione di equazione $y = \sin x$; si ha

$$y' = \cos x$$

$$y'' = y^{(2)} = -\sin x$$

$$y''' = y^{(3)} = -\cos x$$

$$y^{IV} = y^{(4)} = \sin x$$

e quindi

$$y^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k \cos x & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

4.3 Regola di De L'Hospital

Enunciamo ora, senza dimostrarlo, un importante teorema da cui discende una regola pratica che permette di risolvere alcune forme indeterminate del tipo

$$\frac{0}{0}$$

oppure

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Teorema 4.3.1. *Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe infinitesime (o entrambe infinite) per $x \to c$, se esiste il*

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora risulta

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio 4.3.1. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$

Osserviamo che si tratta della forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ e applichiamo la regola appena enunciata

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

avendo segnalato l'uso della regola di De L'Hospital in modo opportuno.

Esempio 4.3.2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

Osserviamo che si tratta della forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ e applichiamo la regola appena enunciata

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

avendo segnalato l'uso della regola di De L'Hospital in modo opportuno.

Esempio 4.3.3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 5x}$

Osserviamo che si tratta della forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ e applichiamo la regola appena enunciata

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 5x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x - 5} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

avendo segnalato l'uso della regola di De L'Hospital in modo opportuno.

Osservazione. L'ultimo esempio, generalizzato a rapporti fra polinomi di grado qualunque e funzioni esponenziali o funzioni logaritmiche, iterando l'applicazione della regola tante volte quante necessarie per eliminare l'indeterminazione, dimostra ciò che già era stato anticipato sull'ordine di infinito delle funzioni polinomiali, esponenziali e logaritmiche.
Ricordiamo la notazione usata: per $x \to +\infty$

$$\log_a x << x^\alpha << a^x$$

con a reale maggiore di 1 e per ogni α reale positivo.

Esempio 4.3.4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

Osserviamo che si tratta della forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ e applichiamo la regola appena enunciata

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

avendo segnalato l'uso della regola di De L'Hospital in modo opportuno.

Esempio 4.3.5. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$
Osserviamo che si tratta della forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$ che riconduciamo alla forma indeterminata $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ prima di applicare la regola appena enunciata

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

avendo segnalato l'uso della regola di De L'Hospital in modo opportuno.

Osservazione. Calcolare $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$
Osserviamo che si tratta della forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$ ma non è possibile applicare la regola appena enunciata in quanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1} \text{ non esiste,}$$

mentre il limite iniziale è calcolabile banalmente e vale 1.

4.4 Continuità e derivabilità

Ci proponiamo ora di esaminare nel dettaglio il legame tra i concetti di continuità e derivabilità di una funzione reale di variabile reale. Abbiamo già provato il teorema che afferma che una funzione derivabile in un punto è, ivi, anche continua.
Il teorema non è invertibile! Una funzione può essere continua in x_0 senza essere ivi derivabile. Ne è un classico controesempio la funzione $f(x)=|x|$ che risulta banalmente continua su tutto l'asse reale e quindi anche in 0; invece la sua derivata in 0 non esiste, essendo

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x<0 \\ x & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

e, quindi

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x> 0 \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$$

Non può infatti esistere finito il limite del rapporto incrementale, cioè la derivata, se limite destro e sinistro sono diversi! In questo caso parleremo di *punto angoloso*, cioè di un punto del grafico della funzione nel quale le tangenti da destra e da sinistra sono diverse (e, quindi, non esiste un'unica tangente).

Dal teorema appena dimostrato (**la derivabilità implica la continuità**), discende che se una funzione non è continua in un punto allora non è neppure ivi derivabile. Dall'osservazione si deduce anche che una funzione può essere continua in un punto senza essere ivi derivabile. Analizziamo ora in dettaglio le situazioni di continuità senza derivabilità che si possono presentare nello studio del grafico di una funzione.

Definizione 4.4.1. Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$ continua in un punto x_0 di accumulazione per il suo dominio, diremo che essa ammette in x_0 un *punto angoloso* se esistono finite ma diverse le derivate destra e sinistra in x_0, ossia

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0)\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_-(x_0)\in\mathbb{R}$$

con

$$f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$$

cioè, dal punto di vista geometrico, il grafico della funzione ha in x_0 due diverse tangenti oblique.

Esempio 4.4.1. Discutere gli eventuali punti di non derivabilità della funzione $f(x)=|\ln x|$.
La funzione $f(x)=|\ln x|$ risulta banalmente continua su tutto il suo dominio e quindi anche in 1; invece la sua derivata in 1 non esiste, essendo

$$f(x)=\begin{cases}-\ln x & \text{se } 0<x<1\\ \ln x & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

e, quindi

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} & \text{se } 0<x<1\\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x>1\end{cases}$$

da cui

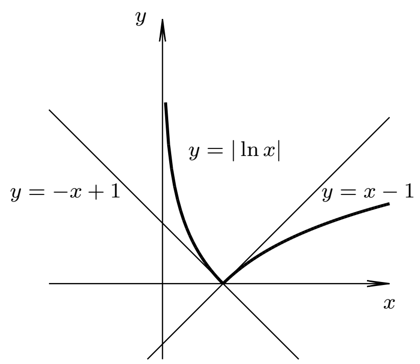
$$\lim_{x\to 1^-}f'(x)=-1$$
$$\lim_{x\to 1^+}f'(x)=1$$

pertanto si tratta di un punto angoloso con tangenti, rispettivamente al ramo sinistro e destro del grafico, aventi equazioni

$$t_1: y=-x+1$$

e

$$t_2: y=x-1$$



Definizione 4.4.2. Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$ continua in un punto x_0 di accumulazione per il suo dominio, diremo che essa ammette in x_0 una *cuspide* se

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

oppure

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

cioè, dal punto di vista geometrico, il grafico della funzione ha in x_0 una doppia tangente verticale.

Esempio 4.4.2. Discutere gli eventuali punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$.
La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ risulta banalmente continua su tutto l'asse reale e quindi anche in 0; invece la sua derivata in 0 non esiste, essendo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

e, quindi

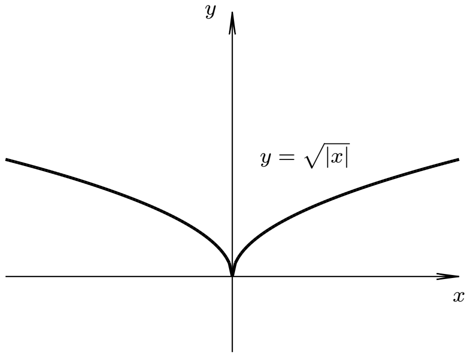
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

pertanto si tratta di una cuspide con doppia tangente verticale di equazione

$$t : x = 0$$



Definizione 4.4.3. Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$ continua in un punto x_0 di accumulazione per il suo dominio, diremo che essa ammette in x_0 un *flesso a tangente verticale* se

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

oppure

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

cioè, dal punto di vista geometrico, il grafico della funzione ha in x_0 un'unica tangente verticale.

Esempio 4.4.3. Discutere gli eventuali punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ risulta banalmente continua su tutto l'asse reale e quindi anche in 0; invece la sua derivata in 0 non esiste, essendo

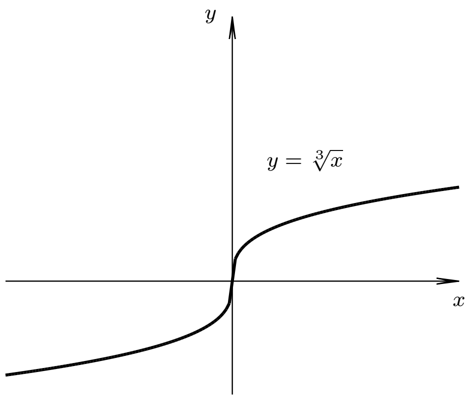
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad \forall\, x \neq 0$$

da cui

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

pertanto si tratta di un punto di flesso (che, in questo caso, viene anche detto *flesso ascendente*) a tangente verticale di equazione

$$t : x = 0$$



4.5 Teoremi del calcolo differenziale

Enunciamo ora e dimostriamo alcuni teoremi sulle funzioni derivabili.

Teorema 4.5.1 (di Rolle)**.** *Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$ continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ con $f(a) = f(b)$ allora esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = 0$.*

Dimostrazione. Se la funzione è costante allora la sua derivata è sempre nulla, come precedentemente dimostrato, ed il teorema risulta banalmente verificato.
Supponiamo, quindi, che la funzione non sia costante; per il Teorema di Weierstrass essa ammette minimo e massimo assoluti in $[a,b]$: almeno uno dei due deve essere assunto in $]a,b[$ (altrimenti la funzione sarebbe costante!), supponiamo, per esempio, che sia il massimo, cioè $M = f(x_0)$ essendo M il valor massimo della funzione e x_0 in $]a,b[$. Pertanto si ha:

$$f(x_0+h) \leq f(x_0) \qquad (1)$$
$$f(x_0-h) \leq f(x_0) \qquad (2)$$

essendo h un incremento positivo della variabile indipendente tale che risulti $x_0 \pm h \in [a,b]$; dividiamo le disuguaglianze (1) e (2) rispettivamente per h e $-h$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad (1)$$

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \geq 0 \qquad (2)$$

passiamo ora al limite per h che tende a 0:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \leq 0 \qquad (1)$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = f'_-(x_0) \geq 0 \qquad (2)$$

poichè, per ipotesi, la funzione è derivabile in $]a,b[$, quindi anche in x_0, deve essere

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$$

ed x_0 è il punto c che cercavamo. □

Dal punto di vista geometrico, osserviamo che il grafico della funzione ha, nel punto di ascissa c, tangente orizzontale, ossia parallela alla retta passante per gli estremi.
DISEGNO

Teorema 4.5.2 (di Cauchy)**.** *Date due funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, continue in $[a,b]$, derivabili in $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$ allora esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che l'ipotesi $g'(x) \neq 0$ garantisce che il denominatore $g(b)-g(a)$ sia anch'esso diverso da zero (se, infatti, fosse $g(b) = g(a)$, per il Teorema di Rolle si avrebbe $g'(c) = 0$ per un qualche $c \in]a,b[$. Consideriamo la funzione

$$h(x) = [f(b)-f(a)] \cdot g(x) - [g(b)-g(a)] \cdot f(x)$$

e verifichiamo per essa le ipotesi del Teorema di Rolle: $h(x)$ è, banalmente, continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$; inoltre

$$h(b) = -f(a) \cdot g(b) + g(a) \cdot f(b) = h(a)$$

pertanto esiste almeno un punto c in $]a,b[$ tale che $h'(c) = 0$ cioè

$$h'(c) = [f(b)-f(a)] \cdot g'(c) - [g(b)-g(a)] \cdot f'(c) = 0$$

da cui

$$[g(b)-g(a)] \cdot f'(c) = [f(b)-f(a)] \cdot g'(c)$$

e quindi

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

Teorema 4.5.3 (di Lagrange o del valor medio)**.** *Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$ continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ allora esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Dimostrazione. Si tratta del Teorema di Cauchy con $g(x) = x$. □

Dal punto di vista geometrico, osserviamo che il grafico della funzione ha, nel punto di ascissa c, tangente parallela alla retta passante per gli estremi. Osserviamo anche che il Teorema di Rolle è un caso particolare del Teorema di Lagrange.
DISEGNO
Vediamo ora due importanti conseguenze del Teorema di Lagrange che saranno particolarmente utili nello studio di funzione.

Teorema 4.5.4 (prima conseguenza)**.** *Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$ continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ con $f'(x) = 0, \quad \forall\, x \in]a, b[$ allora $f(x) = k, \quad \forall\, x \in [a, b]$ con k costante reale.*

Dimostrazione. Presi x_1, x_2 tali che $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, applichiamo il Teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

essendo c opportuno in $]x_1, x_2[$; da cui

$$f(x_2) = f(x_1)$$

e la funzione risulta quindi costante in $[x_1, x_2]$. Data l'arbitrarietà di x_1, x_2 si ha la tesi. □

Teorema 4.5.5 (seconda conseguenza)**.** *Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$ continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ con $f'(x) > 0, \quad \forall\, x \in]a, b[$ allora $f(x)$ è crescente $\forall\, x \in [x_1, x_2]$. Data l'arbitrarietà di x_1, x_2 si ha la tesi.*

Dimostrazione. Presi x_1, x_2 tali che $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, applichiamo il Teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

essendo c opportuno in $]x_1, x_2[$; da cui

$$f(x_2) > f(x_1)$$

e la funzione risulta quindi crescente in $[a, b]$. □

Del tutto analogo è il caso in cui la derivata è negativa e la funzione decrescente.

Esempio 4.5.1. Data la funzione di equazione $y = \sqrt{|x|}$ siano, rispettivamente, O, A, B, C i punti del suo grafico di ascisse 0, 1, -1, 4. Trovare l'equazione delle tangenti al grafico nei punti dati, dire se è applicabile il Teorema di Rolle in $[-1, 1]$, Lagrange in $[0, 4]$ e in caso affermativo determinare gli eventuali punti c relativi.

Calcoliamo le coordinate dei punti dati: $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(4, 2)$; inoltre calcoliamo anche la derivata prima della funzione in quanto essa rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto considerato.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

considerando dapprima il punto O, si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

pertanto $O(0, 0)$ è una cuspide con doppia tangente verticale di equazione

$$t_O : x = 0$$

Considerando il punto A, si ha:

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

l'equazione della retta tangente alla curva in A è $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ cioè

$$t_A : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

oppure è del tipo $y = \frac{1}{2}x + q$ ed imponendo il passaggio per A si ottiene $q = \frac{1}{2}$ da cui, nuovamente

$$t_A : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Considerando il punto B, si ha:

$$f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

l'equazione della retta tangente alla curva in B è $y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 1)$ cioè

$$t_B : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

oppure è del tipo $y = -\frac{1}{2}x + q$ ed imponendo il passaggio per B si ottiene $q = \frac{1}{2}$ da cui, nuovamente

$$t_B : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Considerando il punto C, si ha:

$$f'(4) = \frac{1}{4}$$

l'equazione della retta tangente alla curva in C è $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ cioè

$$t_C : y = \frac{1}{4}x + 1$$

oppure è del tipo $y = \frac{1}{4}x + q$ ed imponendo il passaggio per C si ottiene $q = 1$ da cui, nuovamente

$$t_C : y = \frac{1}{4}x + 1$$

Non è applicabile il Teorema di Rolle in $[-1, 1]$ perchè la funzione non è derivabile in O; è applicabile, invece, il teorema di Lagrange in $[0, 4]$ e il punto del grafico in cui la tangente è parallela alla retta passante per gli estremi O e C ($y = \frac{1}{2}x$) è proprio il punto A, come evidente dai calcoli precedenti; d'altra parte è ricavabile ponendo

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{2}$$

da cui $c = 1$.

4.5.1 Esercizi riassuntivi proposti

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1)	$f(x) = (2x+1)^2$	$[f'(x) = 4(2x+1)]$
2)	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$	$[f'(x) = 3x^2 + 4x]$
3)	$f(x) = (x-3)(x^2+3x+2)$	$[f'(x) = 3x^2 - 7\ ]$
4)	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$	$[f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}]$
5)	$f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$	$[f'(x) = \dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}]$
6)	$f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{2x}$	$[f'(x) = \dfrac{x^2-4}{2x^2}\ ]$
7)	$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$	$[f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}]$
8)	$f(x) = \sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$	$[f'(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{4x\sqrt[4]{x}}]$
9)	$f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$	$[f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^2}\ ]$
10)	$f(x) = 3 + x + \sin x$	$[f'(x) = 1 + \cos x]$
11)	$f(x) = 5\sin x\cos x$	$[f'(x) = 5\cos 2x]$
12)	$f(x) = \sin^2 x$	$[f'(x) = \sin 2x\ ]$
13)	$f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\cos x}$	$[f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}]$
14)	$f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\tan^2 x}$	$[f'(x) = \cos x(3\cos^2 x - 2)]$
15)	$f(x) = \tan^2 x - \dfrac{1}{\cos x}$	$[f'(x) = \dfrac{\sin x(2-\cos x)}{\cos^3 x}\ ]$
16)	$f(x) = x^3 \ln x$	$[f'(x) = x^2(\ln x^3 + 1)]$

17) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ $\quad [f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}(\ln \sqrt{x} + 1)]$

18) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ $\quad [f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}\ ]$

19) $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ $\quad [f'(x) = (x + 1)^2 e^x]$

20) $f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$ $\quad [f'(x) = 2e^x \cos x]$

21) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad [f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}]$

22) $f(x) = (x^2 + 1) \arctan x$ $\quad [f'(x) = 2x \arctan x + 1]$

23) $f(x) = (1 - x^2) \arcsin x$ $\quad [f'(x) = \sqrt{1 - x^2} - 2x \arcsin x]$

24) $f(x) = \arctan \frac{x}{2}$ $\quad [f'(x) = \frac{2}{4 + x^2}\ ]$

25) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ $\quad [f'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}]$

26) $f(x) = \arcsin e^{-x}$ $\quad [f'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}]$

27) $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ $\quad [f'(x) = 0]$

28) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ $\quad [f'(x) = x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \ln x\right)]$

29) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ $\quad [f'(x) = (\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln \sin x - \sin x \tan x)]$

30) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ $\quad [f'(x) = 0]$

31) $f(x) = \ln(\sqrt{1 + e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1 + e^x} + 1)$ $\quad [f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}}]$

32) $f(x) = \ln \cos \arctan \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad [f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}]$

33) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}$ $\quad [f'(x) = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}]$ con $a > 0$

Problemi:

1. Trovare le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 3$ nei suoi punti di ordinata 6.

   [$y = -4x + 2$; $y = 4x - 6$]

2. Trovare le equazioni delle rette tangenti alla curva di equazione $y = \dfrac{x^2-3}{x^3}$ nei punti in cui essa interseca l'asse x e le equazioni delle rette tangenti parallele all'asse x.

   $[2x-3y-2\sqrt{3}=0;\ 2x-3y+2\sqrt{3}=0;\ y=\pm\frac{2}{9}]$

3. Trovare le equazioni delle rette tangenti alla funzione omografica di equazione $y = \dfrac{2x+4}{x-3}$ parallele alle rette di equazione $5x+8y=0;\ 5x+2y=0$

   $[5x+8y+9=0;\ 5x+8y-71=0;\ 5x+2y+1=0;\ ,5x+2y-39=0]$

Discutere continuità e derivabilità delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1)	$f(x)=\|x^2-9\|$	[continua $\forall x\in\mathbb{R}$; $(-3,0)$ punto angoloso con tangenti $y=6x+18$ e $y=-6x-18$, $(3,0)$ punto angoloso con tangenti $y=-6x+18$ e $y=6x-18$]
2)	$f(x)=\sqrt{\|x+2\|}$	[continua $\forall x\in\mathbb{R}$; $(-2,0)$ cuspide con tangente verticale $x=-2$]
3)	$f(x)=\sqrt[5]{1-x}$	[continua $\forall x\in\mathbb{R}$; $(1,0)$ flesso a tangente verticale $x=1$]
4)	$f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-5x+4}$	[continua $\forall x\in\mathbb{R}-\{1,4\}$;derivabile in $\forall x\in\mathbb{R}-\{1,4\}$]
5)	$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$	[continua $\forall x\in\mathbb{R}$; $(0,0)$ punto angoloso con tangenti $y=x$ e $x=0$]

Facendo uso della regola di De L'Hospital, provare che:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty,\ n\in\mathbb{N}$

Capitolo 5

Studio del grafico di una funzione reale

Tutti gli strumenti fin qui forniti vengono utilizzati per lo studio di una funzione reale di variabile reale, nel quale essi trovano la loro più completa applicazione. Diamo di seguito uno **schema generale** che permette di ottenere le informazioni necessarie per la costruzione del grafico.

5.1 Campo di esistenza

Le abilità acquisite nei primi tre anni di Scuola Secondaria di II grado riguardo le proprietà delle funzioni algebriche e trascendenti, ci consentono ora di esplicitare le condizioni necessarie affinchè una funzione reale di variabile reale possa esistere. Si tratta, in generale, di risolvere un sistema di disequazioni del tipo:

$$C.E.:\begin{cases}\text{ogni denominatore deve essere diverso da zero}\\ \text{ogni radicando con indice di radice pari deve essere maggiore o uguale a zero}\\ \text{ogni argomento di logaritmo deve essere maggiore di zero}\\ \text{ogni argomento di arcoseno o arcocoseno deve essere compreso fra -1 e 1, estremi inclusi}\end{cases}$$

Esempio 5.1.1. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Trattandosi di una funzione razionale intera si ha

$$C.E.: \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Esempio 5.1.2. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Trattandosi di una funzione razionale fratta si ha

$$C.E.: \forall\, x \neq 1$$

Esempio 5.1.3. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Trattandosi di una funzione irrazionale con radicando intero e indice di radice dispari si ha

$$C.E.: \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Esempio 5.1.4. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$y = f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$

Trattandosi del prodotto tra una funzione razionale intera e una esponenziale si ha

$$C.E.: \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Esempio 5.1.5. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$y = f(x) = \ln\left|1 - x^2\right|$$

Trattandosi di una funzione logaritmica si ha

$$C.E.: \forall\, x \neq \pm 1$$

Esempio 5.1.6. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$y = f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

Trattandosi di una funzione goniometrica intera si ha

$$C.E.: \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Esempio 5.1.7. Studiare il campo di esistenza della funzione

$$y = f(x) = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Trattandosi di una funzione inversa di una goniometrica si ha

$$\left|\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right| \leq 1$$

ossia

$$-1 \leq \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1$$

$$-1 - x^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 + x^2$$

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq -1 - x^2 \\ 1 - x^2 \leq 1 + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \geq 0 \\ 2x^2 \geq 0 \end{cases}$$

da cui

$$C.E.: \forall\, x \in \mathbb{R}$$

5.2 Simmetrie e periodicità

A questo punto va controllato se la funzione data gode di simmetrie elemetari e/o di periodicità mediante l'utilizzo delle relative definizioni.
Ricordiamo la definizione di **funzione pari**, ossia con grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate:

$$f(-x) = f(x), \quad \forall\, x \in C.E.$$

e di **funzione dispari**, ossia con grafico simmetrico rispetto all'origine:

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall\, x \in C.E.$$

Naturalmente, qualora il C.E. della funzione non sia un insieme simmetrico rispetto allo 0, non ha alcun senso controllare se la funzione è pari o dispari. In questa sede non consideriamo simmetrie diverse da quelle elemenatri viste sopra perchè di trattazione meno immediata.
Ricordiamo la definizione di **funzione periodica** di periodo **T**:

$$f(x + kT) = f(x), \quad \forall\, x \in C.E., \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Qualora la funzione risulti periodica è sufficiente studiarla e disegnarne il grafico all'interno di un periodo opportunamente scelto.

Esempio 5.2.1. Studiare le eventuali simmetrie e/o periodicità della funzione

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Essendo $f(-x) = -x^3 + 3x + 2$ diverso sia da $f(x)$ che da $-f(x)$, la funzione non è nè pari nè dispari; non può, evidentemente, essere periodica.

Esempio 5.2.2. Studiare le eventuali simmetrie e/o periodicità della funzione

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Essendo $f(-x) = \dfrac{x^2}{-x-1}$ diverso sia da $f(x)$ che da $-f(x)$, la funzione non è nè pari nè dispari; non può, evidentemente, essere periodica.

Esempio 5.2.3. Studiare le eventuali simmetrie e/o periodicità della funzione

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Essendo $f(-x) = \sqrt[3]{-x^3 - x^2}$ diverso sia da $f(x)$ che da $-f(x)$, la funzione non è nè pari nè dispari; non può, evidentemente, essere periodica.

Esempio 5.2.4. Studiare le eventuali simmetrie e/o periodicità della funzione

$$y = f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$

Essendo $f(-x) = (x^2 - 4)e^{x}$ diverso sia da $f(x)$ che da $-f(x)$, la funzione non è nè pari nè dispari; non può, evidentemente, essere periodica.

Esempio 5.2.5. Studiare le eventuali simmetrie e/o periodicità della funzione

$$y = f(x) = \ln\left|1 - x^2\right|$$

Essendo $f(-x) = \ln\left|1 - x^2\right| = f(x)$, la funzione è pari; non può, evidentemente, essere periodica.

Esempio 5.2.6. Studiare le eventuali simmetrie e/o periodicità della funzione

$$y = f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

Essendo $f(-x) = -2\sin x + \cos 2x$ diverso sia da $f(x)$ che da $-f(x)$, la funzione non è nè pari nè dispari; essendo $f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \cos 2(x+2\pi) = f(x)$, evidentemente, è periodica di periodo $T = 2\pi$. Perciò è sufficiente studiare la funzione e rappresentarne il grafico nel solo intervallo $[0, 2\pi]$.

Esempio 5.2.7. Studiare le eventuali simmetrie e/o periodicità della funzione

$$y = f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Essendo $f(-x) = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$, la funzione è pari; non può, evidentemente, essere periodica.

5.3 Segno della funzione

Studiare il segno della funzione data significa ricavare dove risulta

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

e a tale scopo è sufficiente, per il principio di esclusione, risolvere, per esempio, la sola disequazione

$$f(x) \geq 0$$

Vengono così determinati gli eventuali punti di intersezione del grafico della funzione data con l'asse delle ascisse e le regioni del piano nelle quali esso deve trovarsi.
A questo livello è interessante cercare anche l'eventuale punto di intersezione del grafico della funzione data con l'asse delle ordinate.

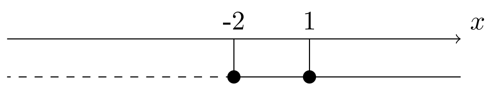
Esempio 5.3.1. Studiare il segno della funzione

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Essendo $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ (scomposizione effettuata tramite la regola di Ruffini) si deve risolvere la disequazione

$$(x-1)^2(x+2) \geq 0$$

cioè, graficamente



da cui risulta

$$x \geq -2 \quad \text{(si annulla per } x = -2, 1)$$

Indichiamo con $A(-2, 0)$ e $B(1, 0)$ le intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse e con $C(0, 2)$ l'intersezione con l'asse delle ordinate.

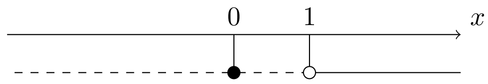
Esempio 5.3.2. Studiare il segno della funzione

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Si deve risolvere la disequazione

$$\frac{x^2}{x-1} \geq 0$$

cioè, graficamente



da cui risulta

$$x > 1,\ x = 0 \quad \text{(si annulla per } x = 0 \text{ e non esiste per } x = 1\text{)}$$

Indichiamo con $O(0,0)$ l'intersezione del grafico con entrambi gli assi coordinati.

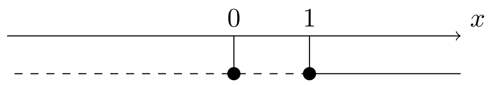
Esempio 5.3.3. Studiare il segno della funzione

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Si deve risolvere la disequazione

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2} \geq 0$$

cioè, graficamente



da cui risulta

$$x \geq 1,\ x = 0 \quad \text{(si annulla per } x = 0, 1\text{)}$$

Indichiamo con $O(0,0)$ l'intersezione del grafico con entrambi gli assi coordinati e con $A(1,0)$ l'ulteriore intersezione del grafico con l'asse delle ascisse.

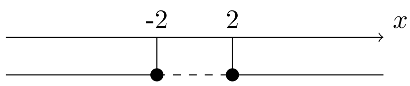
Esempio 5.3.4. Studiare il segno della funzione

$$y = f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$

Si deve risolvere la disequazione

$$(x^2 - 4)e^{-x} \geq 0$$

cioè, graficamente



da cui risulta

$$x \leq -2,\ x \geq 2 \quad \text{(si annulla per } x = \pm 2\text{)}$$

Indichiamo con $A(-2,0)$ e $B(2,0)$ le intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse e con $C(0,-4)$ l'intersezione con l'asse delle ordinate.

Esempio 5.3.5. Studiare il segno della funzione

$$y = f(x) = \ln\left|1 - x^2\right|$$

Si deve risolvere la disequazione

$$\ln\left|1 - x^2\right| \geq 0$$

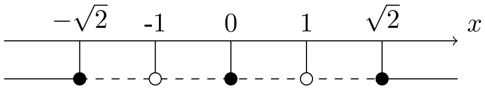
ossia

$$\left|1 - x^2\right| \geq 1$$

$$1 - x^2 \leq -1\,;\, 1 - x^2 \geq 1$$

$$x^2 \geq 2\,;\, x^2 \leq 0$$

cioè, graficamente



da cui risulta

$$x \leq -\sqrt{2},\ x \geq \sqrt{2},\ x = 0 \quad \text{(si annulla per } x = \pm\sqrt{2}, 0 \text{ e non esiste per } x = \pm 1\text{)}$$

Indichiamo con $A(-\sqrt{2}, 0)$ e $B(\sqrt{2}, 0)$ le intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse e con $O(0, 0)$ l'intersezione con entrambi gli assi.

Esempio 5.3.6. Studiare il segno della funzione

$$y = f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

Si deve risolvere la disequazione

$$2\sin x + \cos 2x \geq 0$$

ossia

$$2\sin x + 1 - 2\sin^2 x \geq 0$$

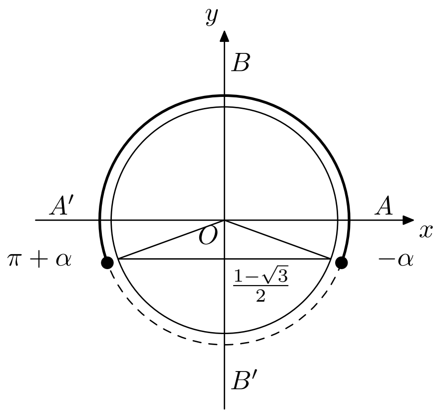
da cui

$$2\sin^2 x - 2\sin x - 1 \leq 0$$

ovvero

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

cioè, graficamente



da cui risulta

$$0 \leq x \leq \pi + \alpha;\ 2\pi - \alpha \leq x \leq 2\pi \quad \text{(si annulla per } x = 2\pi - \alpha, \pi + \alpha)$$

$$(\text{ essendo } \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2})$$

Indichiamo con $A(\pi + \alpha, 0)$ e $B(2\pi - \alpha, 0)$ le intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse, con $C(0, 1)$ l'intersezione con l'asse delle ordinate e con $D(2\pi, 1)$ l'ulteriore punto calcolato nell'estremo destro dell'intervallo di studio.

Esempio 5.3.7. Studiare il segno della funzione

$$y = f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

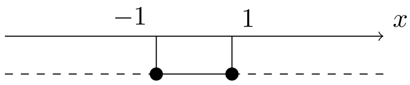
Si deve risolvere la disequazione

$$\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0$$

ossia

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0$$

cioè, graficamente



da cui risulta

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{(si annulla per } x = \pm 1)$$

Indichiamo con $A(-1, 0)$ e $B(1, 0)$ le intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse e con $C\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ l'intersezione con l'asse delle ordinate.

5.4 Limiti e asintoti

Vanno calcolati i limiti negli eventuali punti di discontinuità e, se necessario, sulla frontiera del C.E.. Si possono presentare alcuni casi notevoli:

1. se risulta
$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty, \qquad c \in \mathbb{R}$$
allora la funzione ha un asintoto verticale di equazione
$$A.V. : x = c$$

2. se risulta
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k, \qquad k \in \mathbb{R}$$
allora la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione
$$A.Or. : y = k$$

3. se risulta
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
allora la funzione potrebbe avere un asintoto obliquo di equazione
$$A.Ob. : y = mx + q$$
se
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad m \in \mathbb{R}^*$$
e
$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx], \qquad q \in \mathbb{R}$$

A questo livello può essere interessante cercare le eventuali intersezioni del grafico con gli asintoti orizzontali e obliqui.

Esempio 5.4.1. Calcolare i limiti della funzione
$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$
Basta calcolare $\lim_{x\to\infty} f(x)$ cioè
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(x^3 - 3x + 2\right) = \pm\infty$$
perciò la funzione potrebbe avere asintoti obliqui; pertanto va calcolato il seguente
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = +\infty$$
da cui deduciamo che non vi è alcun asintoto obliquo (nè di altro tipo!)

Esempio 5.4.2. Calcolare i limiti della funzione
$$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$
Bisogna calcolare sia $\lim_{x\to c} f(x)$ cioè
$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$
da cui deduciamo che la funzione ha un asintoto verticale di equazione
$$A.V. : x = 1$$
ed anche $\lim_{x\to\infty} f(x)$ cioè
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$
perciò la funzione potrebbe avere asintoti obliqui di equazione $y = mx + q$; pertanto vanno calcolati i seguenti
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = 1 = m$$
e
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = 1 = q$$
da cui deduciamo che la funzione ha un asintoto obliquo di equazione
$$A.Ob. : y = x + 1$$

Esempio 5.4.3. Calcolare i limiti della funzione

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Basta calcolare $\lim_{x\to\infty} f(x)$ cioè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \pm\infty$$

perciò la funzione potrebbe avere asintoti obliqui di equazione $y = mx + q$; pertanto vanno calcolati i seguenti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} = 1 = m$$

essendo $\sqrt[3]{x^3 - x^2} \sim x$; inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x\right) = -\frac{1}{3} = q$$

essendo $\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x = \dfrac{(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x)(\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} = \dfrac{-x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} \sim \dfrac{-x^2}{3x^2}$ da cui deduciamo che la funzione ha un asintoto obliquo di equazione

$$A.Ob. : y = x - \frac{1}{3}$$

Esempio 5.4.4. Calcolare i limiti della funzione

$$y = f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$

Basta calcolare $\lim_{x\to\infty} f(x)$ cioè, distinguendo

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 4)e^{-x} = +\infty$$

perciò la funzione potrebbe avere un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$; pertanto va calcolato il seguente

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2 - 4)e^{-x}}{x} = -\infty$$

da cui si deduce che non c'è asintoto obliquo a $-\infty$; ed inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 4)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4}{e^x} = 0$$

da cui si deduce che la funzione ha un asintoto orizzontale a $+\infty$ di equazione

$$A.Or. : y = 0$$

Esempio 5.4.5. Calcolare i limiti della funzione

$$y = f(x) = \ln\left|1 - x^2\right|$$

Bisogna calcolare sia $\lim_{x\to c} f(x)$ cioè

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \ln\left|1 - x^2\right| = -\infty$$

da cui deduciamo che la funzione ha un asintoto verticale di equazione

$$A.V. : x = 1$$

(e, vista la simmetria, anche un ansintoto verticale di equazione $A.V. : x = -1$)

ed anche $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ cioè

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left|1-x^2\right| = +\infty$$

perciò la funzione potrebbe avere un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$; pertanto va calcolato il seguente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left|1-x^2\right|}{x} = 0$$

da cui si deduce che non c'è asintoto obliquo a $+\infty$ (e, vista la simmetria, neppure a $-\infty$).

Esempio 5.4.6. Calcolare i limiti della funzione

$$y = f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

non risulta necessario in quanto la funzione è continua su tutto l'asse reale e periodica.

Esempio 5.4.7. Calcolare i limiti della funzione

$$y = f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Basta calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ cioè

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2}$$

da cui si deduce che la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione

$$A.Or. : y = -\frac{\pi}{2}$$

(vista la simmetria, sia a $+\infty$ che a $-\infty$).

5.5 Derivata prima e segno relativo

Va calcolata la derivata prima $f'(x)$ della funzione data e di questa va studiato il segno; studiare il segno della derivata prima significa ricavare dove risulta

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f'(x) = 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$$

e a tale scopo è sufficiente, per il principio di esclusione, risolvere, per esempio, la sola disequazione

$$f'(x) \geq 0$$

Vengono così determinati, come dimostrato nella seconda conseguenza del Teorema di Lagrange, gli intervalli in cui la funzione è crescente ($f'(x) > 0$), decrescente ($f'(x) < 0$) e i punti a tangente orizzontale ($f'(x) = 0$). Detta c l'ascissa di uno di tali punti, quindi $f'(c) = 0$, e supposto che la funzione data sia continua in un intorno di c, con riferimento a tale intorno si possono presentare le seguenti situazioni:

1. se f cresce in un intorno sinistro di c e decresce in un intorno destro di c allora f ammette in c un punto di **massimo relativo** $M(c, f(c))$;

2. se f decresce in un intorno sinistro di c e cresce in un intorno destro di c allora f ammette in c un punto di **minimo relativo** $N(c, f(c))$;
3. se f cresce in un intorno sinistro di c e cresce in un intorno destro di c allora f ammette in c un punto di **flesso ascendente** $F(c, f(c))$ a tangente orizzontale;
4. se f decresce in un intorno sinistro di c e decresce in un intorno destro di c allora f ammette in c un punto di **flesso discendente** $F(c, f(c))$ a tangente orizzontale.

Più in generale, diremo che la funzione f ammette in c un punto di *massimo relativo (o locale)* se esiste un intorno di c in cui risulta $f(x) \leq f(c)$; ciò implica che vi possono essere punti di massimo relativo a tangente non orizzontale, addirittura di non derivabilità. Analogamente per il *minimo relativo.*

Nell'ipotesi in cui la funzione abbia in c un punto di continuità ma dubbia derivabilità, è necessario calcolare il

$$\lim_{x \to c} f'(x)$$

per ottenere informazioni sul comportamento della funzione in prossimità di c attraverso la pendenza delle tangenti.

Esempio 5.5.1. Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

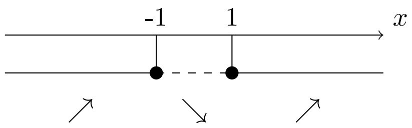
Si ha

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

si deve risolvere la disequazione

$$3(x+1)(x-1) \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato gli intervalli di crescenza e decrescenza con le frecce); da cui risulta

$$x \leq -1,\ x \geq 1 \quad \text{(si annulla per } x = \pm 1)$$

Indichiamo con $M(-1, 4)$ il massimo relativo e con $N \equiv B(1, 0)$ il minimo relativo.

Esempio 5.5.2. Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

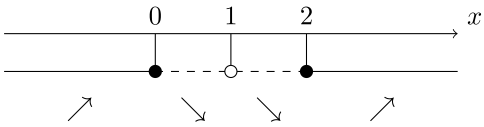
Si ha

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

si deve risolvere la disequazione

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato gli intervalli di crescenza e decrescenza con le frecce); da cui risulta

$$x \leq 0,\ x \geq 2 \quad \text{(si annulla per } x = 0, 2 \text{ e non esiste per } x = 1\text{)}$$

Indichiamo con $M \equiv O(0,0)$ il massimo relativo e con $N(2,4)$ il minimo relativo.

Esempio 5.5.3. Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

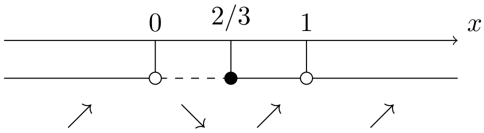
Si ha

$$y' = \frac{3x^2 - 2x}{3(x^3 - x^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}}$$

si deve risolvere la disequazione

$$\frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato gli intervalli di crescenza e decrescenza con le frecce); da cui risulta

$$x < 0,\ x \geq \frac{2}{3},\ x \neq 1 \quad \text{(si annulla per } x = \frac{2}{3} \text{ e non esiste per } x = 0, 1\text{)}$$

Indichiamo con $N\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ il minimo relativo.
In 0 c'è un punto di continuità ma non derivabilità, poichè dal calcolo del $\lim\limits_{x \to c} f'(x)$ risulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{3x - 2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}} = \mp\infty$$

$O(0,0)$ è pertanto una cuspide ed anche un massimo relativo (ma non a tangente orizzontale!) per la funzione.
In 1 c'è un punto di continuità ma non derivabilità, poichè dal calcolo del $\lim\limits_{x \to c} f'(x)$ risulta

$$\lim_{x \to 1} \frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} = +\infty$$

$A(1,0)$ è pertanto un flesso ascendente a tangente verticale per la funzione.

Esempio 5.5.4. Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$

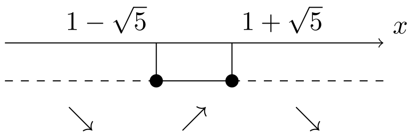
Si ha

$$y' = (2x - x^2 + 4)e^{-x}$$

si deve risolvere la disequazione

$$(-x^2 + 2x + 4)e^{-x} \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato gli intervalli di crescenza e decrescenza con le frecce); da cui risulta

$$1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5} \quad \text{(si annulla per } x = 1 \pm \sqrt{5}\text{)}$$

Indichiamo con $N(1-\sqrt{5}, f(1-\sqrt{5}))$ il minimo relativo e con $M(1+\sqrt{5}, f(1+\sqrt{5}))$ il massimo relativo.

Esempio 5.5.5. Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = \ln\left|1 - x^2\right|$$

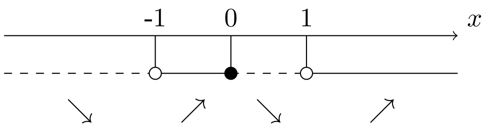
Si ha

$$y' = \frac{1}{1-x^2}(-2x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

si deve risolvere la disequazione

$$\frac{2x}{x^2-1} \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato gli intervalli di crescenza e decrescenza con le frecce); da cui risulta

$$-1 < x \leq 0,\ x > 1 \quad \text{(si annulla per } x = 0, \text{ e non esiste per } x = \pm 1\text{)}$$

Indichiamo con $O(0,0)$ il massimo relativo.

Osservazione. La derivata di una funzione pari (dispari) è dispari (pari).

Esempio 5.5.6. Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

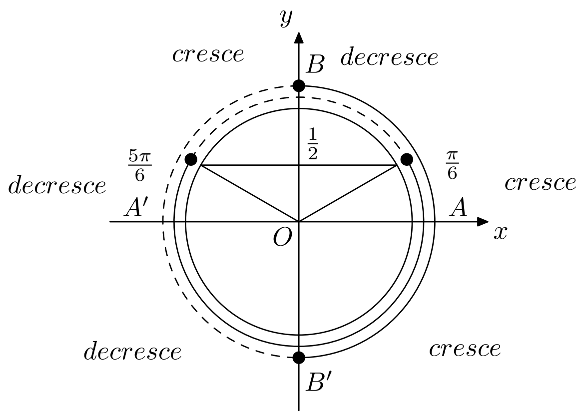
Si ha

$$y' = 2\cos x + 2(-\sin 2x) = 2\cos x - 4\sin x\cos x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$$

si deve risolvere la disequazione

$$2\cos x(1 - 2\sin x) \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato gli intervalli di crescenza e decrescenza); da cui risulta

$$0 \le x \le \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \quad (\text{si annulla per } x = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2})$$

Indichiamo con $M_1\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$ e $M_2\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$ i massimi relativi, con $N_1\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ e $N_2\left(\frac{3\pi}{2},-3\right)$ i minimi relativi.

Esempio 5.5.7. Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

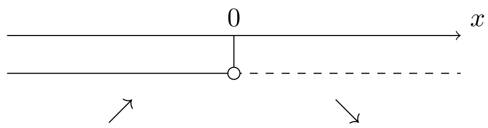
Si ha

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2}(1+x^2)}$$

si deve risolvere la disequazione

$$\frac{-2x}{\sqrt{x^2}(1+x^2)} \ge 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato gli intervalli di crescenza e decrescenza con le frecce); da cui risulta

$$x < 0 \quad (\text{ non si annulla mai },\ \text{e non esiste per } x = 0)$$

In 0 c'è un punto di continuità ma non derivabilità, poichè dal calcolo del $\lim_{x\to c} f'(x)$ risulta, distinguendo

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{-2x}{\sqrt{x^2}(1+x^2)} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{-2x}{|x|(1+x^2)} = \mp 2$$

$M \equiv C\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è pertanto un punto angoloso ed anche un massimo relativo (ma non a tangente orizzontale!) nonchè **massimo assoluto**, cioè il valore massimo assunto dalla funzione nel suo dominio.

Osservazione. La derivata di una funzione pari (dispari) è dispari (pari).

5.6 Derivata seconda e segno relativo

Va calcolata la derivata seconda $f''(x)$ della funzione data e di questa va studiato il segno; studiare il segno della derivata seconda significa ricavare dove risulta

$$f''(x) > 0$$
$$f''(x) = 0$$
$$f''(x) < 0$$

e a tale scopo è sufficiente, per il principio di esclusione, risolvere, per esempio, la sola disequazione

$$f''(x) \geq 0$$

Vengono così determinati, come è senz'altro possibile dimostrare ma esula dagli obiettivi di questo testo, gli intervalli in cui la funzione volge la concavità verso l'alto (corrispondenti alle zone in cui risulta $f''(x) > 0$), volge la concavità verso il basso (corrispondenti alle zone in cui risulta $f''(x) < 0$) e i punti in cui la derivata seconda si annulla. Detta c l'ascissa di uno di tali punti, quindi $f''(c) = 0$, e supposto che la funzione data sia continua in un intorno di c, con riferimento a tale intorno si possono verificare le seguenti situazioni:

1. se f volge la concavità verso l'alto in un intorno sinistro di c e volge la concavità verso il basso in un intorno destro di c allora f ammette in c un punto di **flesso** $F(c, f(c))$ o di cambio di concavità.
2. se f volge la concavità verso il basso in un intorno sinistro di c e volge la concavità verso l'alto in un intorno destro di c allora f ammette in c un punto di **flesso** $F(c, f(c))$ o di cambio di concavità.

Se invece nell'intorno di c, ove risulti sempre $f''(c) = 0$, non c'è cambio di concavità, allora significa che in c la funzione ha un punto di massimo o di minimo relativo; in questo caso esso deve essere stato già scoperto con lo studio della derivata prima.
Ricordiamo che la funzione può avere un punto di flesso anche se non ammette in esso derivate prima e seconda (come già visto nel caso di flessi a tangente verticale).
Infine, può essere richiesto di calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in un punto di flesso; essa, come già visto in precedenza, è data da

$$t_F : y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

Esempio 5.6.1. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

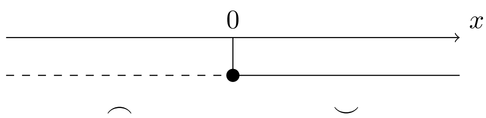
Si ha

$$y'' = 6x$$

si deve risolvere la disequazione

$$6x \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato opportunamente gli intervalli di concavità verso l'alto o verso il basso); da cui risulta

$$x \geq 0 \quad (\text{si annulla per } x = 0)$$

Indichiamo con $F \equiv C(0, 2)$ il flesso.

Esempio 5.6.2. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

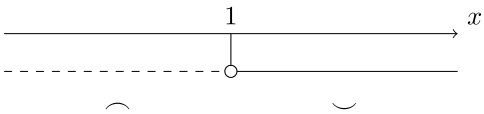
Si ha

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

si deve risolvere la disequazione

$$\frac{2}{(x-1)^3} \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato opportunamente gli intervalli di concavità verso l'alto o verso il basso); da cui risulta

$$x > 1 \quad (\text{ non si annulla mai, non esiste per } x = 1)$$

Non ci sono flessi perchè il cambio di concavità avviene in corrispondenza di un punto di non continuità.

Esempio 5.6.3. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

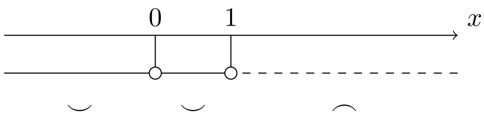
Da $y' = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 2x)$ si ha

$$y'' = \frac{1}{3}[-\frac{2}{3}(x^3-x^2)^{-\frac{5}{3}}(3x^2-2x)^2 + (x^3-x^2)^{-\frac{2}{3}}(6x-2)] = -\frac{2}{9}\frac{1}{(x-1)\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}$$

si deve risolvere la disequazione

$$-\frac{2}{9}\frac{1}{(x-1)\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}} \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato opportunamente gli intervalli di concavità verso l'alto o verso il basso); da cui risulta

$$x < 1,\ x \neq 0 \quad (\text{non si annulla mai, non esiste per } x = 0, 1)$$

Indichiamo con $F \equiv A(1, 0)$ il flesso a tangente verticale.

Esempio 5.6.4. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$

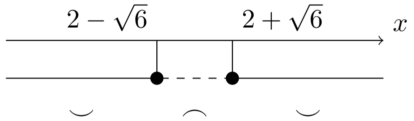
Si ha

$$y'' = (x^2 - 4x - 2)e^{-x}$$

si deve risolvere la disequazione

$$(x^2 - 4x - 2)e^{-x} \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato opportunamente gli intervalli di concavità verso l'alto o verso il basso); da cui risulta

$$x \leq 2 - \sqrt{6},\ x \geq 2 + \sqrt{6} \quad (\text{ si annulla per } x = 2 \pm \sqrt{6})$$

Indichiamo con $F_1(2 - \sqrt{6}, f(2 - \sqrt{6}))$ e $F_2(2 + \sqrt{6}, f(2 + \sqrt{6}))$ i flessi.

Esempio 5.6.5. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = \ln\left|1 - x^2\right|$$

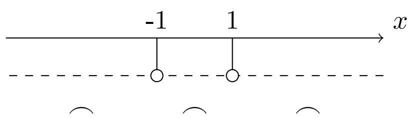
Si ha

$$y'' = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = -2\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

si deve risolvere la disequazione

$$-2\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \geq 0$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato opportunamente gli intervalli di concavità verso l'alto o verso il basso); da cui risulta

$$\nexists x \in \mathbb{R} \quad (\text{non si annulla mai, non esiste per } x = \pm 1)$$

Non ci sono flessi.

Esempio 5.6.6. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

Si ha

$$y'' = -2\sin x + 2(-2\cos 2x) = -2(\sin x + 2 - 4\sin^2 x) = 2(4\sin^2 x - \sin x - 2)$$

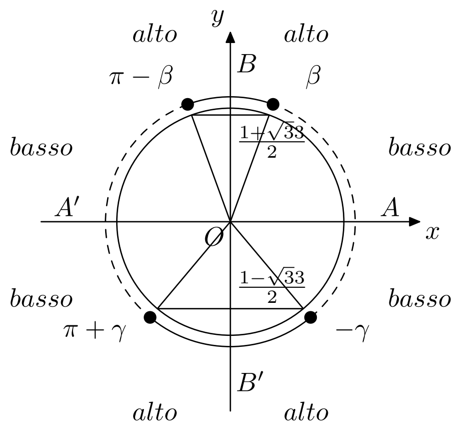
si deve risolvere la disequazione

$$2(4\sin^2 x - \sin x - 2) \geq 0$$

ossia

$$\sin x \leq \frac{1 - \sqrt{33}}{8},\ \sin x \geq \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$$

cioè, graficamente



(avendo segnalato gli intervalli di concavità verso l'alto e il basso); da cui risulta

$$\beta \leq x \leq \pi - \beta,\ \pi + \gamma \leq x \leq 2\pi - \gamma \quad \text{(si annulla per } x = \beta,\ \pi - \beta,\ \pi + \gamma,\ 2\pi - \gamma)$$

$$(\text{ essendo } \beta = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}),\ \gamma = \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8})$$

Indichiamo con $F_1(\beta, f(\beta))$, $F_2(\pi-\beta, f(\pi-\beta))$, $F_3(\pi+\gamma, f(\pi+\gamma))$ e $F_4(2\pi-\gamma, f(2\pi-\gamma))$ i flessi.

Esempio 5.6.7. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno, relativamente alla funzione

$$y = f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

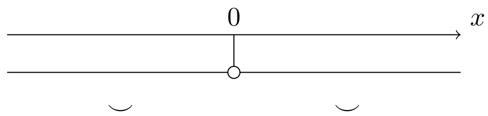
Si ha, lavorando per $x > 0$, $y' = -\dfrac{2}{1+x^2}$ da cui

$$y'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

si deve risolvere la disequazione

$$\frac{4x}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

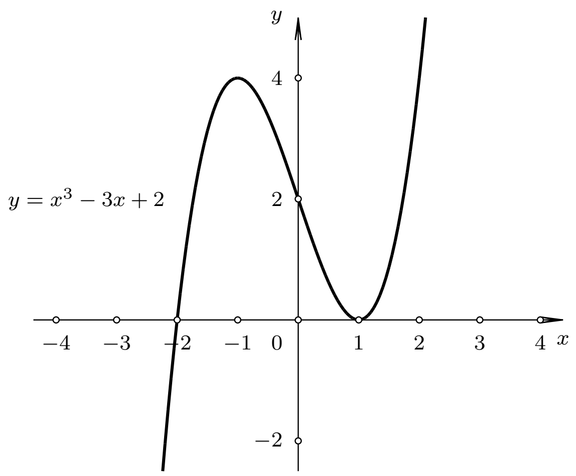
e, ricordando che la derivata di una funzione dispari è pari, si ha, graficamente

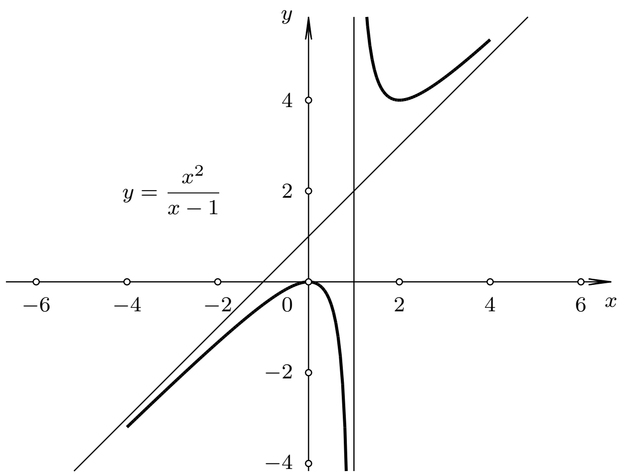


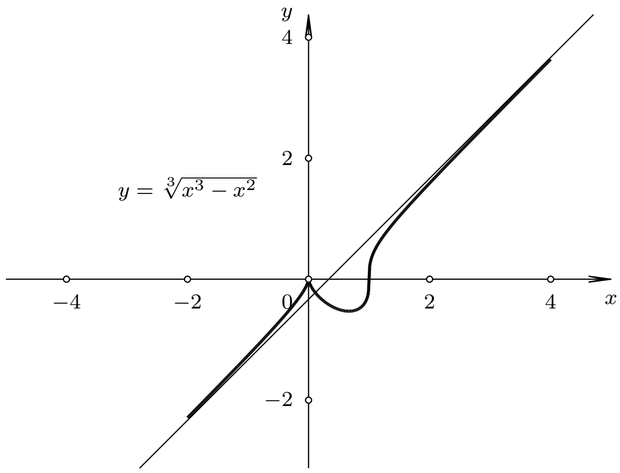
(avendo segnalato opportunamente gli intervalli di concavità verso l'alto o verso il basso); da cui risulta

$$\forall x \neq 0 \quad (\text{ non si annulla mai , non esiste per } x = 0)$$

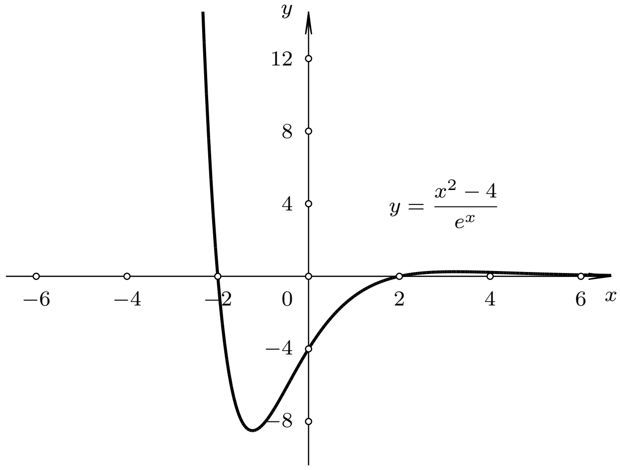
GRAFICI FUNZIONI



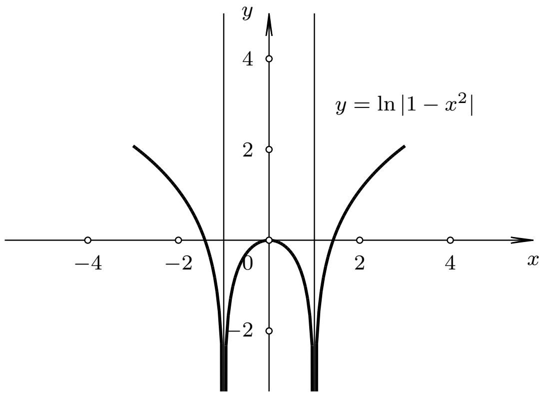


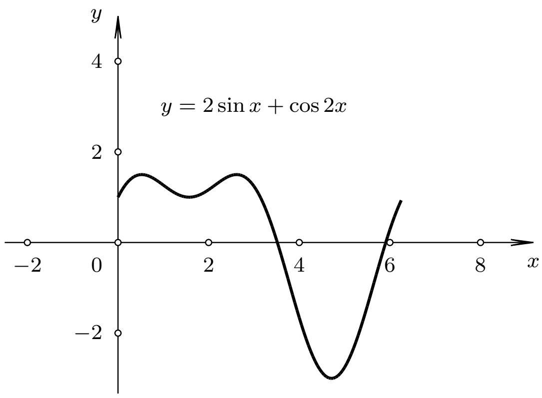


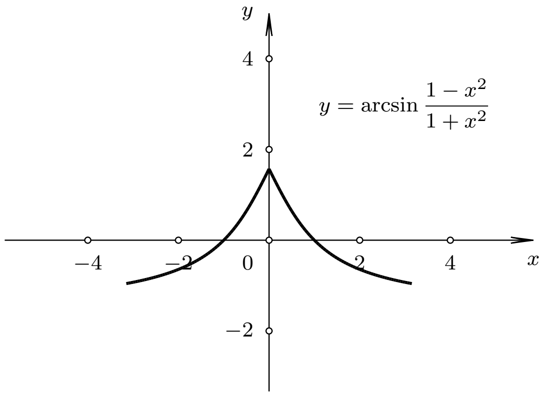
y
4
2
$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
−4
−2
0
2
4
x
−2



y
12
8
4
$y = \frac{x^2 - 4}{e^x}$
−6
−4
−2
0
2
4
6
x
−4
−8


y
4
$y = \ln|1 - x^2|$
2
−4
−2
0
2
4
x
−2


y
4
$y = 2\sin x + \cos 2x$
2
−2
0
2
4
6
8
x
−2



5.7 Esercizi riassuntivi proposti

1) $f(x) = (x-1)^2(x+3)$ [C.E.:$\mathbb{R}$; max $x = -\frac{5}{3}$, min $x = 1$; flesso $x = -\frac{1}{3}$]

2) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ [C.E.:$\mathbb{R}$; max $x = -\frac{4}{3}$, min $x = 0$; flesso $x = -\frac{2}{3}$]

3) $f(x) = 6x - x^3$ [C.E.:$\mathbb{R}$; max $x = \sqrt{3}$, min $x = -\sqrt{3}$; flesso $x = 0$]

4) $f(x) = (x-3)(x^2+3x+2)$ [C.E.:$\mathbb{R}$; max $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$, min $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$; flesso $x = 0$]

5) $f(x) = 2x(x+4)^3$ [C.E.:$\mathbb{R}$; no max, min $x = -1$; flesso $x = -4$]

6) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$ [C.E.:$\forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; asintoti: $y = 0, x = \pm 1$; max $x = 2+\sqrt{3}$, min $x = 2-\sqrt{3}$; flesso $x = \alpha > 2+\sqrt{3}$]

7) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$ [C.E.:$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$; asintoti: $y = 1, x = -2, x = 0$; no max, no min; flesso $x = \alpha < -$]

8) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ [C.E.:$\forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; asintoti: $y = x, x = \pm 1$; max $x = -\sqrt{3}$, min $x = \sqrt{3}$; flesso $x = 0$]

9) $f(x) = \dfrac{1}{2x - |x^2-3|}$ [C.E.:$\forall x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$; asintoti:$y = 0, x = 1, x = 3$; max $x = -1$, min (punti angolosi) $x = \pm\sqrt{3}$; no flessi]

10) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ [C.E.:$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$; asintoti: $y = 1, x = 2$; no max, min $x = 0$; flesso $x = -1$]

11) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ [C.E.:$x \leq 1$; max $x = \frac{2}{3}$, no min; no flessi]

12) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x}$ [C.E.:$x \leq 0, x \geq 2$; asintoti: $y = 1, y = 2x - 1$; no max, no min; no flesso]

13) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ [C.E.:$\mathbb{R}$; max (cuspide) $x = 0$, min $x = \frac{2}{5}$; flesso $x = -\frac{1}{5}$]

14) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ [C.E.:$x > -1$; asintoto: $x = -1$; no max, no min; no flesso]

15) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ [C.E.:$\mathbb{R}$; asintoti: $y = x + 1$; max $x = -2$, min (cuspide) $x = 0$; flesso $x = -3$]

16) $f(x) = x\ln^2 x$ [C.E.:$x > 0$; max $x = e^{-2}$, min $x = 1$; flesso $x = e^{-1}$]

17) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ [C.E.:$x > 0, x \neq 1$; asintoto: $x = 1$; no max, min $x = e$; flesso $x = e^2$]

18) $f(x) = \ln(2 - x^2)$ [C.E.:$|x| < \sqrt{2}$; asintoti: $x = \pm\sqrt{2}$; max $x = 0$, no min; no flessi]

19) $f(x) = \ln \dfrac{x}{2x+1}$ [C.E.:$x < -\frac{1}{2}, x > 0$; asintoti:$y = -\ln 2, x = -\frac{1}{2}, x = 0$; no max, no min; no flessi]

20) $f(x) = \ln^2 x - \ln x^2$ [C.E.:$x > 0$; asintoto: $x = 0$; no max, min $x = e$; flesso $x = e^2$]

21) $f(x) = (x+1)e^{-x}$ [C.E.:$\mathbb{R}$; asintoto: $y = 0$; max $x = 0$, no min; flesso $x = 1$]

22) $f(x) = xe^{|x-2|}$ [C.E.:$\mathbb{R}$; max $x = 1$, min (punto angoloso) $x = 2$; no flesso]

23) $f(x) = |x-1|e^{-x}$ [C.E.:$\mathbb{R}$; max $x = 2$, min (punto angoloso) $x = 1$; flesso $x = 3$]

24) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ [C.E.:$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$; asintoto: $y = 1, x = 0$; no max, no min; flesso $x = -\frac{1}{2}$]

25) $f(x) = \dfrac{e^x}{2e^x - 1}$ [C.E.:$\forall x \in \mathbb{R} - \{\ln 2\}$; asintoti: $y = 0, y = \frac{1}{2}, x = -\ln 2$; no max no min; no flessi]

26) $f(x) = 2\sin x - 2\sin^2 x$ [C.E.:$\mathbb{R}$ studio in $[0, 2\pi]$; max $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, min $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; 4 flessi]

27) $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ [C.E.:$\mathbb{R}$ studio in $[0, 2\pi]$; max $x = \frac{\pi}{6}$, min $x = \frac{7\pi}{6}$; flessi $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$]

28) $f(x) = \sin|x| + \sin x$ [C.E.:$\mathbb{R}$ studio in $[-\pi, \pi]$; max $x = \frac{\pi}{2}$, no min; no flessi]

29) $f(x) = \sin^2 x(1 - \cos x)$ [C.E.:$\mathbb{R}$ studio in $[-\pi, \pi]$; 2 max, min $x = -\pi, 0, \pi$; 4 flessi]

30) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}}$ [C.E.:$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$ studio in $[0, 2\pi]$; discontinuità di I specie in $x = \frac{\pi}{2}$; no max, no min; flesso $x = \frac{3\pi}{2}$]

Parte II

Calcolo integrale

Capitolo 6

Integrazione definita

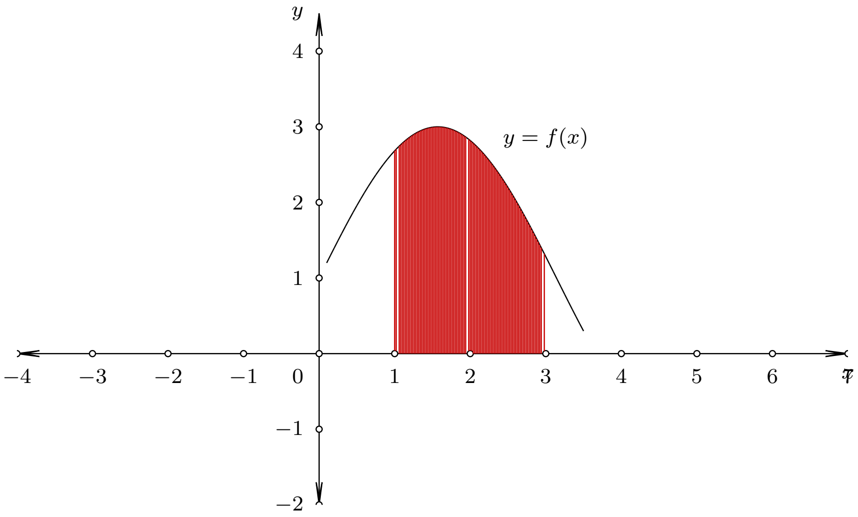
6.1 Il problema delle aree

Il problema che, storicamente, portò per primo al calcolo dell'integrale definito fu quello di calcolare l'area delle superifici piane dal contorno mistilineo.In geometria elementare si riesce a calcolare l'area di un qualsiasi poligono grazie alla teoria dell'equivalenza e dell'equiscomponibilità, ma già quando si passa a definire l'area del cerchio si incontra una certa difficoltà, perchè il cerchio non è equiscomponibile con alcun poligono. Per definire l'area del cerchio, in geometria elementare, si costruiscono i poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti al cerchio; dette s_n e S_n rispettivamente l'area del poligono inscritto e quella del poligono circoscritto, si dimostra che all'aumentare di n le due aree tendono all'area del cerchio. Quanto detto per il cerchio potrà essere generalizzato a superfici piane dal contorno mistilineo.

6.2 Definizione di integrale

Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e supponiamo inizialmente $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Ci proponiamo di calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse x, dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ e dalla curva di equazione $y = f(x)$, detta trapezoide.



A tal fine operiamo una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in un numero finito n di parti uguali di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$ e in ciascun intervallo $I_k = [x_{k-1}; x_k]$ consideriamo il valore minimo m_k ed il valore massimo M_k che la funzione sicuramente assume per il teorema di Weierstrass. Siano s_n ed S_n le somme inferiori e superiori così definite:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k h = m_1 h + m_2 h + \cdots + m_n h$$

e

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k h = M_1 h + M_2 h + \cdots + M_n h$$

che rappresentano l'area del plurirettangolo inscritto nel trapezoide e l'area del plurirettangolo circoscritto ad esso. Le somme integrali inferiore e superiore si possono, quindi, considerare approssimazioni per difetto e per eccesso della misura dell'area del trapezoide e tali approssimazioni migliorano al crescere del numero n degli intervalli in cui è stato suddiviso $[a, b]$. Si vengono così a costituire due successioni $(s_n)_{n \in N}$ e $(S_n)_{n \in N}$. Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 6.2.1. *Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ le due successioni $(s_n)_{n \in N}$ e $(S_n)_{n \in N}$ sono convergenti e convergono verso lo stesso numero che rappresenta la misura dell'area A del trapezoide:*

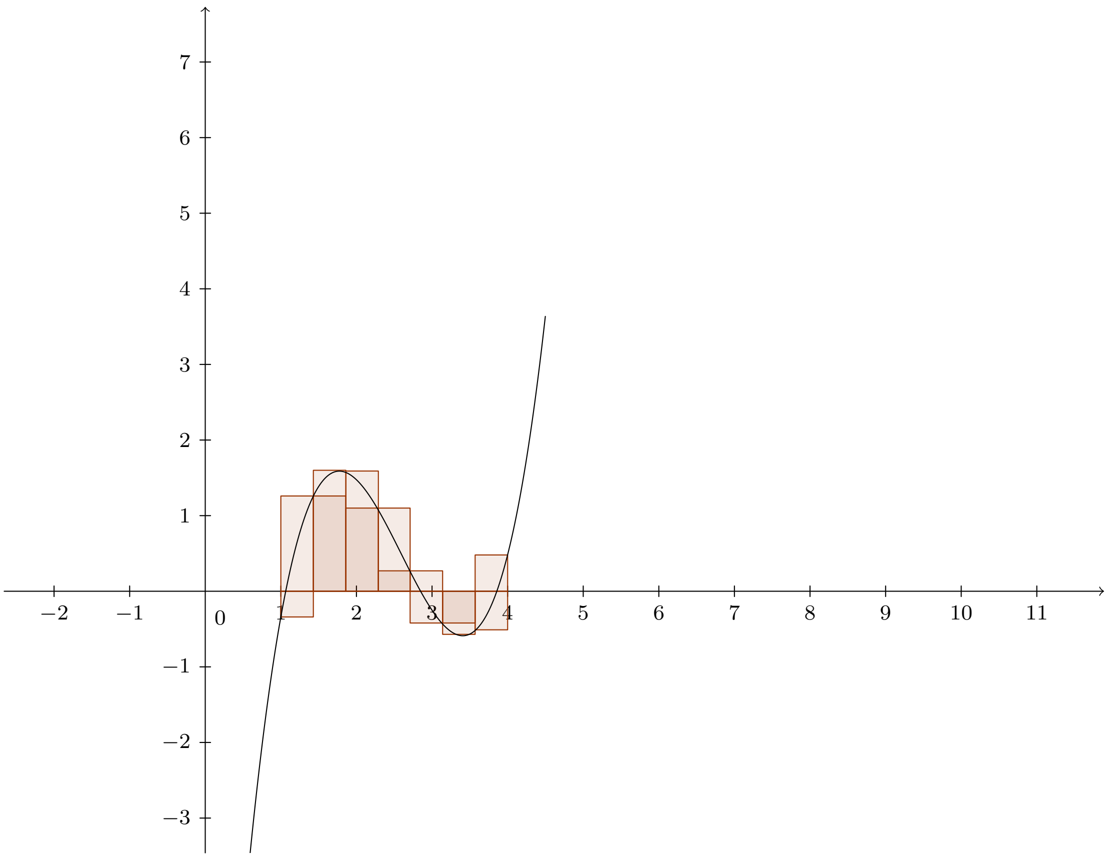
$$A = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

Definizione 6.2.1. Si chiama *integrale definito* della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ il valore comune di tali limiti e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

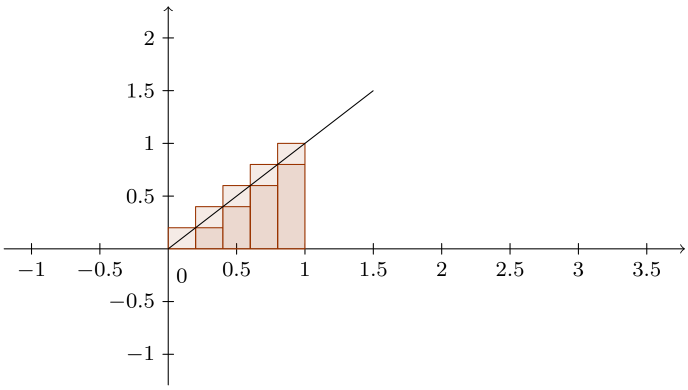
La funzione $f(x)$ si dice *funzione integranda*, la variabile x è detta *variabile di integrazione* e i valori a e b si dicono **estremi di integrazione**.

Le considerazioni fin qui svolte possono essere applicate anche ad una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ ma senza la condizione restrittiva prima posta relativa alla sua positività. La definizione di integrale definito si può usare anche in questa situazione più generale, ma, naturalmente, ad esso non corrisponde più il valore dell'area del trapezoide e quindi viene meno il suo significato geometrico.



Esempio 6.2.1. Calcoliamo

$$\int_0^1 x\,dx$$



Anzitutto suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n intervallini di ampiezza $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ i cui estremi saranno

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1$$

Data la crescenza della funzione $f(x) = x$ le somme integrali inferiori e superiori saranno rispettivamente:

$$s_n = m_1 h + m_2 h + \cdots + m_n h = 0\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(0 + 1 + \cdots + (n-1))$$

$$S_n = M_1 h + M_2 h + \cdots + M_n h = \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\frac{1}{n} + \cdots + 1\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)$$

Ricordando la formula di Gauss per la somma dei primi n numeri naturali si puo' concludere

$$s_n = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$S_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Calcolando i limiti di tali successioni per $n \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

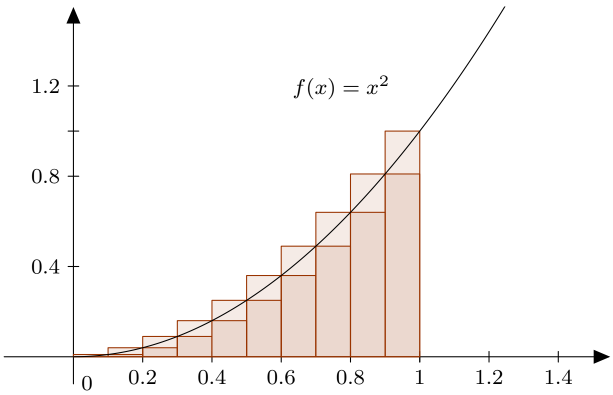
I limiti delle successioni delle somme integrali inferiori e superiori, quindi, coincidono e il loro valore comune è l'integrale cercato, cioè:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

L'interpretazione del risultato ottenuto è abbastanza semplice: l'area sottesa dal grafico della funzione di equazione $y = x$ nell'intervallo $[0;1]$ è quella di un triangolo rettangolo isoscele di base e altezza uguali a 1 e, perciò, misura $\frac{1}{2}$.

Esempio 6.2.2. Calcoliamo

$$\int_0^1 x^2\,dx$$



Anzitutto suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n intervallini di ampiezza $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ i cui estremi saranno

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1$$

Data la crescenza della funzione $f(x) = x^2$ le somme integrali inferiori e superiori saranno rispettivamente:

$$s_n = m_1h + m_2h + \cdots + m_nh = 0\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(0 + 1 + \cdots + (n-1))$$

$$S_n = M_1h + M_2h + \cdots + M_nh = \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\frac{1}{n} + \cdots + 1\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)$$

Ricordando la formula di Gauss per la somma dei primi n numeri naturali si puo' concludere

$$s_n = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$S_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Calcolando i limiti di tali successioni per $n \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

I limiti delle successioni delle somme integrali inferiori e superiori, quindi, coincidono e il loro valore comune è l'integrale cercato, cioè:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

L'interpretazione del risultato ottenuto è abbastanza semplice: l'area sottesa dal grafico della funzione di equazione $y = x$ nell'intervallo $[0; 1]$ è quella di un triangolo rettangolo isoscele di base e altezza uguali a 1 e, perciò, misura $\frac{1}{2}$.

6.3 Proprietà dell'integrale definito

Dalla definizione di integrale definito per una funzione continua discendono alcune importanti proprietà.

Teorema 6.3.1.

$$\int_a^a (f(x)\,dx = 0$$

Teorema 6.3.2.

$$\int_a^b (f(x)\,dx = -\int_b^a (f(x)\,dx$$

Teorema 6.3.3. *L'operatore di integrazione definita è* ***lineare****, cioè:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b (f(x)\,dx + \int_a^b (g(x)\,dx \tag{6.1}$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b (f(x)\,dx \quad \forall k \in \mathbb{R} \tag{6.2}$$

Teorema 6.3.4. *Data f continua nell'intervallo I, $\forall\, a, b, c \in I$ vale l'uguaglianza:*

$$\int_a^b (f(x)\,dx = \int_a^b (f(x)\,dx + \int_a^c (f(x)\,dx$$

Teorema 6.3.5 (della media)**.** *Data f continua nell'intervallo $[a, b]$,è sempre possibile determinare un punto c di $[a, b]$ per il quale vale l'uguaglianza:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che, fissata una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ in n intervalli parziali, dette s_n e S_n le somme integrali inferiori e superiori, vale la relazione:

$$s_n \le \int_a^b (f(x)\,dx \le S_n,$$

se consideriamo $n = 1$, indicando con m il minimo di f in $[a, b]$ e con M il suo massimo, ottengo:

$$m(b-a) \le \int_a^b (f(x)\,dx \le M(b-a)$$

ossia

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x)\,dx \le M$$

E allora esiste un numero h , compreso tra m e M, tale che

$$h = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x)\,dx$$

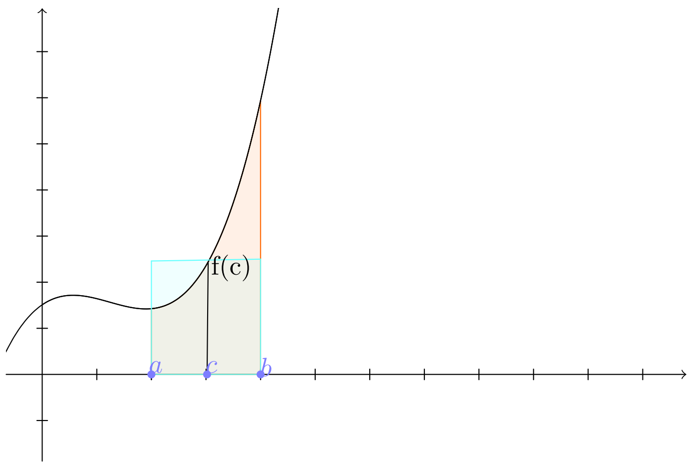
ed essendo f continua in $[a, b]$ esiste sempre un punto c di $[a, b]$ in cui risulta $f(c) = h$, da cui segue che

$$f(c) = h = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x)\, dx$$

e pertanto

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(c)$$

□



Definizione 6.3.1. Data la funzione f continua nell'intervallo $[a, b]$, la funzione

$$F(x) = \int_a^x (f(t)\, dt \quad \forall\, x \in [a, b]$$

si dice *funzione integrale* della f in $[a, b]$:

ove abbiamo indicato con t la variabile d'integrazione, affinchè non vada confusa con l'estremo superiore x d'integrazione.

Teorema 6.3.6 (fondamentale del calcolo integrale o di Torricelli-Barrow)**.** *Se f è continua in $[a, b]$, allora la sua funzione integrale F è derivabile in ogni punto di $[a, b]$ e si ha:*

$$F'(x) = f(x)$$

Dimostrazione. Calcoliamo $F'(x)$ in base alla definizione:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} (f(x)\, dx - \int_a^x (f(x)\, dx \right)$$

Per il teorema 6.3.3:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\, dx$$

per il teorema della media si ottiene

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} h f(c) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(c),$$

essendo c un conveniente punto di $[x, x+h]$.

Ora se, tenendo fisso x, facciamo tendere h a zero il valore di c compreso tra x e $x+h$ tende a x ed essendo f continua risulta:

$$\lim_{h \to 0} f(c) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

e perciò si può concludere:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

□

Per la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

risulta quindi $F'(x) = f(x)$.

Definizione 6.3.2. Tutte le funzioni la cui derivata coincide con $f(x)$ vengono dette *primitive* di $f(x)$.

Corollario al teorema di Torricelli:

Teorema 6.3.7 (formula fondamentale del calcolo integrale)**.** *Detta $\varphi(x)$ una qualsiasi primitiva di $f(x)$ si ha:*

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Dimostrazione. Essendo $F(x)$ e $\varphi(x)$ primitive di una stessa funzione $f(x)$, avremo che $F'(x) - \varphi'(x) = 0$ e quindi esse differiscono per una costante k (corollario del Teorema di Lagrange sulle funzioni derivabili) cioè

$$F(x) = \varphi(x) + k$$

Essendo

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0 = \varphi(a) + k$$

si ricava $k = -\varphi(a)$, e quindi $F(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$. Si può concludere, in particolare, per $x = b$:

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

□

Osservazione. La differenza $\varphi(b) - \varphi(a)$ viene convenzionalmente indicata con la scrittura $[\varphi(x)]_a^b$ e pertanto scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Osservazione. Grazie alla formula fondamentale del calcolo integrale riusciamo a calcolare l'integrale definito senza ricorrere al limite delle somme integrali; il problema viene ricondotto al calcolo di primitive che sarà oggetto dell'integrazione indefinita.

Esercizio 6.3.1. Calcoliamo nuovamente $\int_0^1 x\,dx$, questa volta usando la formula fondamentale del calcolo integrale.

Una possibile primitiva di $f(x) = x$ è $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, infatti $\varphi'(x) = x$ e quindi:

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6.3.2. Dopo aver verificato che $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$ è una primitiva della funzione $y = x + 1$ calcolare il valore dell'integrale definito $\int_1^5 (x+1)dx$

[16]

Capitolo 7

Integrazione indefinita

7.1 Generalità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo sull'asse reale e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale definita su I.

Definizione 7.1.1. Diciamo che una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è una *primitiva* di f in I se

- F è derivabile
- $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I.$

Diciamo inoltre che se una funzione ammette primitiva, essa è *integrabile* in I.

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza della primitiva:

Teorema 7.1.1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$, allora f ammette primitiva su $[a, b]$.*

Nel seguito daremo per scontata l'esistenza della primitiva, supponendo che tutte le funzioni considerate siano continue su un opportuno intervallo. Ovviamente, se una funzione ammette una primitiva su $[a, b]$, allora ne ammette infinite: vale infatti il seguente

Teorema 7.1.2. *Sia $f(x)$ definita su $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua primitiva su $[a, b]$. Allora tutte e sole le primitive di $f(x)$ su $[a, b]$ sono le funzioni $\varphi(x) = F(x)+c$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante additiva arbitraria.*

Dimostrazione. Evidentemente $\varphi(x) = F(x) + c$ è primitiva per $f(x)$ in quanto $\varphi'(x) = F'(x) = f(x)$. Viceversa, se $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ sono due primitive per $f(x)$ su $[a, b]$, si ha che $F_1'(x) = f(x)$ e $F_2'(x) = f(x)$: allora $F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, pertanto per il II corollario al teorema di Lagrange, le due funzioni differiscono per una costante, si ha cioè $F_1(x) = F_2(x) + c$. □

Per esempio, data la funzione $f(x) = \cos x$ definita su $I = \mathbb{R}$, allora una qualunque funzione della forma $F(x) = \sin x + c$ (dove c è una costante pensata come fissata) è anch'essa una primitiva per $f(x)$ in I, in quanto $F(x)$ è derivabile su I e $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Definizione 7.1.2. Se $F(x)$ è una primitiva per $f(x)$ sull'intervallo I, allora con la scrittura

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

si indica l'insieme di tutte le primitive di f, essendo c una costante additiva arbitraria, detta *costante d'integrazione*, che penseremo variare nell'insieme dei numeri reali: $c \in \mathbb{R}$.

Gli integrali indefiniti godono delle proprietà enunciate nel seguente teorema, ovvia conseguenza delle analoghe proprietà delle derivate:

Teorema 7.1.3. *Siano* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funzioni continue,* $k \in \mathbb{R}$*. Allora:*

- $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

In virtù di tali proprietà si dice che l'operazione di integrazione indefinita (come peraltro quella di derivazione) è lineare.

Osservazione. Dalle considerazioni fin qua esposte si potrebbe pensare che le operazioni di integrazione e di derivazione siano l'una l'inversa dell'altra. Tale affermazione va tuttavia presa con una certa cautela: infatti, data una funzione $f(x)$ derivabile, è sempre possibile associare ad essa la sua derivata $f'(x)$ in modo univoco mentre la totalità delle primitive di $f(x)$, supponendo che tali primitive esistano, è, come si è visto, una famiglia di funzioni dipendenti dal parametro c. In generale, quindi, ad $f(x)$ non può essere associata univocamente una funzione primitiva ma le infinite funzioni $\varphi(x)$ che compaiono nella definizione 7.1.2. L'operazione di derivazione e l'operazione di integrazione indefinita non possono quindi essere *scambiate*, nel senso che l'ordine con cui le due operazioni sono effettuate conduce a risultati differenti: per esempio, data una funzione f(x) che ammetta primitiva e che sia derivabile, si avrà:

$$\int Df(x)\,dx = \int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

mentre

$$D\int f(x)\,dx = D[F(x) + c] = F'(x) = f(x)$$

e quindi, in generale:

$$D\int f(x)\,dx \neq \int Df(x)\,dx$$

Se le due operazioni fossero una l'inversa dell'altra l'applicazione ad una funzione f(x) della derivazione e successivamente dell'integrazione o viceversa dovrebbero portare allo stesso risultato, ossia a $f(x)$ stessa, il che non è. Il riferimento all'integrazione come *operazione inversa della derivazione* non è quindi da ritenersi corretto.

Osservazione. Il significato della scrittura dx all'interno dell'operatore di integrazione è da ricercarsi nella seguente definizione di differenziale.

Definizione 7.1.3. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile nel generico punto x del suo Dominio, detto Δx l'incremento della variabile indipendente a partire da x, si dice *differenziale* della funzione $f(x)$ nel punto x

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x$$

Dunque il differenziale di una funzione è il prodotto della derivata della funzione stessa per l'incremento arbitrario della variabile indipendente.

Esempio 7.1.1. Data $f(x) = x^2$ si avrà $df(x) = f'(x)\Delta x = 2x\Delta x$.

Esempio 7.1.2. Data $f(x) = x$ si avrà $df(x) = dx = f'(x)\Delta x = 1\Delta x = \Delta x$. Quindi il differenziale della variabile indipendente coincide con l'incremento della stessa.
Come conseguenza la definizione di differenziale viene convenzionalmente scritta nella forma:

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

.

7.2 Metodi di Integrazione indefinita

In generale non esiste un metodo che consenta di determinare l'integrale indefinito di una qualsiasi funzione continua. Per risolvere un integrale indefinito si adoperano speciali artifizi che servono a ricondurre gli integrali dati ad altri noti oppure piu' facilmente calcolabili. I metodi elementari di integrazione indefinita che verranno esposti in questo capitolo sono i seguenti:

- Integrazione immediata
- Integrazione per scomposizione
- Integrazione per parti
- Integrazione per sostituzione

7.3 Integrazione immediata

Come diretta conseguenza dei teoremi sulle derivate delle funzioni elementari, alcune funzioni possono essere integrate immediatamente: tali casi sono riassunti nella seguente tabella.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x+c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x+c$$
$$\int e^x\,dx = e^x+c$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$$
$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}+c$$
$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}+c$$
$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|+c$$
$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|+c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{|a|}+c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x+c$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x+c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x+c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x+c$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \sqrt{x^2+a}+c$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = -\sqrt{a-x^2}+c$$
$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c$$
$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln|\tan\frac{x}{2}|+c$$
$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+c$$
$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+c$$
$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+c$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2})+c$$

7.4 Integrazione per parti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue come pure le loro derivate. Dalla regola di derivazione del prodotto di funzioni si ha che

$$d(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

ossia

$$f'(x)g(x)dx = d(f(x)g(x)) - f(x)g'(x)dx$$

Integrando ambo i membri dell'uguaglianza si ottiene

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

detta formula di integrazione per parti.

Osservazione. Il fattore $f'(x)dx$ si dice *fattore differenziale* mentre il fattore $g(x)$ si chiama *fattore finito.*

Esempio 7.4.1. Calcoliamo $\int xe^x\,dx$. Applicando la regola di integrazione per parti poniamo come fattore finito $g(x) = x$ e di conseguenza $g'(x) = 1$ mentre come fattore differenziale $f'(x)\,dx = e^x\,dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = e^x$
Pertanto

$$\int xe^x)\,dx = xe^x - \int 1e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

Esempio 7.4.2. Calcoliamo $\int \ln(x)\,dx$. Applicando la regola di integrazione per parti poniamo come fattore finito $g(x) = \ln(x)$ e di conseguenza $g'(x) = \frac{1}{x}$ mentre come fattore differenziale $f'(x)\,dx = 1\,dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = x$
Pertanto

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + c$$

Esempio 7.4.3. Calcoliamo $\int x^2e^x\,dx$. Applicando la regola di integrazione per parti poniamo come fattore finito $g(x) = x^2$ e di conseguenza $g'(x) = 2x$ mentre come fattore differenziale $f'(x)\,dx = e^x\,dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = e^x$
Pertanto

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

Per risolvere quest'ultimo integrale è necessario riapplicare la regola di integrazione per parti. Questo integrale è stato risolto nell'esempio 3.3.1 e pertanto sostituendolo otteniamo

$$= x^2e^x - 2[xe^x - e^x] + c = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Esempio 7.4.4 (Esempio particolarmente significativo di integrazione per parti)**.** Calcoliamo $\int e^x \sin x\,dx$. Applicando la regola di integrazione per parti poniamo come fattore finito $g(x) = \sin x$ e di conseguenza $g'(x) = \cos x$ mentre come fattore differenziale $f'(x)\,dx = e^x\,dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = e^x$
Pertanto

$$\int e^x \sin x\,dx = \sin xe^x - \int \cos xe^x\,dx$$

Per risolvere quest'ultimo integrale è necessario riapplicare la regola di integrazione per parti e pertanto poniamo come fattore finito $g(x) = \cos x$ e di conseguenza $g'(x) = -\sin x$ mentre come fattore differenziale $f'(x)\,dx = e^x\,dx$ e di conseguenza una sua primitiva (a meno di una costante) risulta essere $f(x) = e^x$. Sostituendo otteniamo

$$\int e^x \sin x\,dx = \sin xe^x - \left[\cos xe^x - \int -\sin xe^x\,dx\right] =$$

$$= \sin xe^x - \cos xe^x - \int \sin xe^x\,dx$$

ritrovando così l'integrale da calcolare. Isolando l'integrale incognito a sinistra otteniamo:

$$2\int e^x \sin x\,dx = \sin xe^x - \cos xe^x$$

e quindi:

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}[\sin xe^x - \cos xe^x] + c = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

7.5 Integrazione per sostituzione

In alcuni casi è utile introdurre sotto il segno di integrale una variabile ausiliaria al fine di ottenere un integrale più semplice da calcolare.

Supponiamo di dover calcolare $\int f(x)\,dx$; scelta allora una opportuna funzione derivabile con derivata continua $x = g(t)$ ed invertibile (cioè tale che esista $t = g^{-1}(x)$), si consideri l'integrale così ottenuto:

$$\int f[g(t)]g'(t)\,dt$$

Se $G(t)$ è una primitiva di $g(t)$, cioè $G'(t) = f[g(t)]g'(t)\ \forall t$, allora la funzione composta $G[g^{-1}(x)]$ è una primitiva di $f(x)$

Esempio 7.5.1. Calcoliamo $\int \sqrt{2x-4}\,dx$. Posto, per ogni x appartenente al Dominio della funzione integranda, $t = 2x-4$ si ricava $x = \frac{t+4}{2}$, funzione continua con derivata continua, da cui $dx = \frac{1}{2}\,dt$.
Sostituendo nell'integrale dato si ottiene:

$$\int \sqrt{t}\frac{1}{2}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\,dt =$$

in base alla tabella degli integrali immediati

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c$$

Ricordando che $t = 2x - 4$ allora

$$\int \sqrt{2x-4}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(2x-4)^3} + c$$

Da quanto detto si possono dedurre generalizzazioni degli integrali riportati nella tabella degli integrali immediati, come evidenzia la seguente ulteriore tabella

$$\int f^{\alpha}(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \sin f(x)f'(x)\,dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \cos f(x)f'(x)\,dx = \sin f(x) + c$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)}f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

Infatti se, per esempio, nella prima delle generalizzazioni proposte si applica il metodo di sostituzione ponendo $f(x) = t$ e quindi $f'(x)\,dx = dt$ si ottiene $\int t^{\alpha}\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ e risostituendo $\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$.

Esempio 7.5.2. Calcoliamo $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

Facendo riferimento alla tabella degli integrali generalizzati si conclude che:

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c$$

7.6 Integrazione per scomposizione

Come abbiamo già detto, il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione non è sempre immediato. Ad esempio si può trasformare opportunamente la funzione integranda applicando regole di calcolo già acquisite. Chiariamo con alcuni esempi i procedimenti da seguire:

Esempio 7.6.1. Calcoliamo

$$\int \frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{4x}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= 3\int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx + 4\int \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx + \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx \\
&= 3\int x^{\frac{3}{2}}\,dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= 3\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\
&= 3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
&= \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

Esempio 7.6.2. Calcoliamo $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx &= \int \left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right] dx \\
&= \arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \arctan x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c
\end{aligned}$$

Esempio 7.6.3. Calcoliamo $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\
&= \int \frac{1+x^2}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \arctan x + c
\end{aligned}$$

7.7 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Particolare attenzione va posta nell'integrazione delle funzioni razionali fratte. Per integrare queste funzioni si ricorre al metodo di scomposizione in modo da ottenere funzioni razionali fratte più semplici. Chiariamo il metodo con alcuni esempi e a tale scopo distinguiamo i casi a seconda della scomposizione del denominatore della funzione razionale fratta *propria* (cioè quando il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore)

$$\frac{M(x)}{N(x)}$$

Radici reali semplici

Teorema 7.7.1. *Supponiamo che, data una funzione razionale fratta propria* $\frac{M(x)}{N(x)}$*, il suo denominatore* $N(x)$ *sia un polinomio di grado* n *e che l'equazione* $N(x) = 0$ *abbia* n *radici reali distinte* $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$*.*

Allora è sempre possibile determinare univocamente n *costanti* $A, B, C, \cdots, N$ *in modo tale che valga la seguente identità:*

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_3)} + \cdots \frac{N}{(x-x_n)}$$

Esempio 7.7.1. Calcoliamo $\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\,dx$. Consideriamo l'equazione $x^2-5x+6=0$, essa ha due radici reali e distinte (facilmente calcolabili) $x_1=2$ e $x_2=3$, pertanto

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

dove A e B sono due opportune costanti da determinare. Riducendo a denominatore comune risulta

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}=\frac{x(A+B)-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}$$

e per il principio di identità polinomiale che afferma che due polinomi sono identici se e solo se i coefficienti dei termini aventi il medesimo grado sono uguali, si ottiene il seguente sistema :

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -3A-2B)=4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite A e B si ricava facilmente che $A=-10$ e $B=13$. Pertanto

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6}=\frac{-10}{x-2}+\frac{13}{x-3}$$

e quindi

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\,dx=\int\left(\frac{-10}{x-2}+\frac{13}{x-3}\right)dx=-10\ln|x-2|+13\ln|x-3|+c$$

Esempio 7.7.2. Calcoliamo $\int \frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$. Consideriamo l'equazione $x^3-3x^2-x+3=0$, usando il raccoglimento parziale si scompone in $(x^2-1)(x-3)=0$ e quindi $(x-1)(x+1)(x-3)=0$ e pertanto le sue radici sono $x_1=1$, $x_2=-1$ e $x_3=3$, pertanto

$$\frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}$$

dove A, B e C sono tre opportune costanti da determinare. Riducendo a denominatore comune risulta

$$\frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}=$$

dopo semplici passaggi

$$=\frac{x^2(A+B+C)+x(-2A-4B)-3A+3B-C}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

e per il principio di identità polinomiale si ha:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ -2A-4B=-16 \\ -3A+3B-C=4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite A, B e C si ricava facilmente che $A=2$, $B=3$ e $C=-1$.
Pertanto

$$\frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}+\frac{-1}{x-3}$$

e quindi

$$\int \frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}+\frac{-1}{x-3}\right)dx=2\ln|x-1|+3\ln|x+1|-\ln|x-3|+c$$

Radici reali multiple

Teorema 7.7.2. *Supponiamo che data una funzione razionale propria $\frac{M(x)}{N(x)}$ il suo denominatore $N(x)$ sia un polinomio di grado n e si supponga, per semplicità, che $N(x)$ ammetta uno zero r-uplo x_0 e $p=r-n$ zeri semplici x_1, x_2,.... x_p.*

Allora è sempre possibile determinare univocamente $r+p$ costanti A, B, C, ..., V in modo tale che valga la seguente identità:

$$\frac{M(x)}{N(x)}=\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\frac{C}{(x-x_0)^3}+......+\frac{M}{(x-x_0)^r}+\frac{N}{(x-x_1)}+\frac{P}{(x-x_2)}+.....+\frac{V}{(x-x_p)}$$

.

Esempio 7.7.3. Calcoliamo $\int \frac{2x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx$. Consideriamo l'equazione $x^3-3x+2=0$, usando la regola di Ruffini si ottiene che $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ e pertanto

$$\frac{2x^2-1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

dove A , B e C sono tre opportune costanti da determinare. Riducendo a denominatore comune risulta

$$\frac{2x^2-1}{x^3-3x+2}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}=$$

dopo semplici passaggi

$$=\frac{x^2(A+C)+x(A+B-2C)+2A-2B-C}{(x-1)^2(x+2)}$$

e per il principio di identità polinomiale si ha:

$$\begin{cases} A+C=2 \\ A+B-2C=0 \\ 2A-2B-C=1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite A, B e C si ricava facilmente che $A=\frac{11}{9}$, $B=\frac{1}{3}$ e $C=\frac{7}{9}$. Pertanto

$$\frac{2x^2-1}{x^3-3x+2}=\frac{\frac{11}{9}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{7}{9}}{x+2}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx &= \int \left(\frac{\frac{11}{9}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{7}{9}}{x+2}\right)dx \\ &= \frac{11}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\int (x-1)^{-2}\,dx+\frac{7}{9}\ln|x+2| \\ &= \frac{11}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{7}{9}\ln|x+2|+c\end{aligned}$$

Radici complesse semplici

Teorema 7.7.3. *Supponiamo che data una funzione razionale propria $\frac{M(x)}{N(x)}$ il suo denominatore $N(x)$ sia un polinomio di grado n e si supponga, per semplicità, che $N(x)$ ammetta uno zero complesso semplice (l'equazione $ax^2+bx+c=0$ abbia $\Delta<0$) e $n-2$ zeri semplici x_1, x_2,.... x_{n-2}.*

Allora è sempre possibile determinare univocamente n costanti A, B, C, ..., N in modo tale che valga la seguente identità:

$$\frac{M(x)}{N(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+......+\frac{L}{x-x_{n-2}}+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

.

Esempio 7.7.4. Calcoliamo $\int \frac{2x-1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$. Consideriamo l'equazione $x^3-x^2+x-1=0$, usando la regola del raccoglimento parziale si ottiene che $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ e pertanto

$$\frac{2x-1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

dove A , B e C sono tre opportune costanti da determinare. Riducendo a denominatore comune risulta dopo semplici passaggi

$$=\frac{x^2(A+B)+x(-B+C)+A-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

e per il principio di identità polinomiale si ha:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=2 \\ A-C=-1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite A, B e C si ricava facilmente che $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{-1}{2}$ e $C=\frac{3}{2}$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^3-x^2+x-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-3}{x^2+1}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+3\arctan x\right)+c\end{aligned}$$

Esempio 7.7.5. Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$.

Poichè il polinomio x^2+x+1 è irriducibile (questo si verifica in tutti i casi di trinomio di secondo grado con $\Delta < 0$) si può dimostrare che è esprimibile come somma di due quadrati. Nel nostro caso, per esempio, avremo:

$$x^2+x+1 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4} = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

Cercando di ricondurci all'integrale immediato $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$, si avrà:

$$\int \frac{1}{x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1\right]}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx$$

e, ponendo $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)=t$, cioè $x=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}$ e $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$ otteniamo

$$\frac{4}{3}\cdot\int\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]+c$$

7.8 Esercizi

Esercizio 7.8.1. Calcolare utilizzando integrali immediati, formule elementari e formule generalizzate (o sostituzione di differenziale).

1. $\int 5a^2x^6\,dx$
2. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,dx$
3. $\int x(x+a)(x+b)\,dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2+7}$
5. $\int (a+bx^3)^2\,dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$
7. $\int \tan^2 x\,dx$
8. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$
9. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$
10. $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$
11. $\int \frac{x}{a+bx}\,dx$
12. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$
13. $\int \sqrt{a-bx}\,dx$
14. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
15. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$
16. $\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx$
17. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}\,dx$
18. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx$
19. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$
20. $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$
21. $\int \tan x\,dx$
22. $\int \cot x\,dx$
23. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
24. $\int \sin^2 x\,dx$
25. $\int \cos^2 x\,dx$
26. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$
27. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}\,dx$
28. $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

Esercizio 7.8.2. Calcolare i seguenti integrali utilizzando anche il metodo di sostituzione.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}},\quad x=\frac{1}{t}$
2. $\int \frac{dx}{e^{x+1}},\quad x=-\ln t$
3. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx,\quad t=\sin x$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx,\quad t=\sqrt{x+1}$
5. $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\,dx$
6. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

7. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$
8. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$
9. $\int \dfrac{\ln 2x}{\ln 4x}\, dx$
10. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Esercizio 7.8.3. Calcolare i seguenti integrali utilizzando anche il metodo per parti.

1. $\int \ln x\, dx$
2. $\int \arctan x\, dx$
3. $\int \arcsin x\, dx$
4. $\int x \sin x\, dx$
5. $\int x \cos 3x\, dx$
6. $\int \dfrac{x}{e^x}\, dx$
7. $\int x^2 e^{3x}\, dx$
8. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}\, dx$
9. $\int x \sin x \cos x\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int \ln^2 x\, dx$
12. $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$
13. $\int x \arcsin x\, dx$
14. $\int \dfrac{x}{\sin^2 x}\, dx$
15. $\int x \arctan x\, dx$
16. $\int \dfrac{x \cos x}{\sin^2 x}\, dx$
17. $\int e^x \sin x\, dx$
18. $\int \sin(\ln x)\, dx$
19. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$
20. $\int \dfrac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$

Esercizio 7.8.4. Calcolare i seguenti integrali in cui compaiono particolari trinomi di secondo grado.

1. $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$
2. $\int \dfrac{x dx}{x^2-7x+13}$
3. $\int \dfrac{x^2}{x^2-6x+10}\, dx$
4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$
5. $\int \dfrac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\, dx$
6. $\int \sqrt{x-x^2}\, dx$
7. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
8. $\int \dfrac{x}{x^4-4x^2+3}\, dx$

Esercizio 7.8.5. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte.

1. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$
2. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$
3. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\, dx$
4. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$
5. $\int \frac{dx}{x^3+1}$
6. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

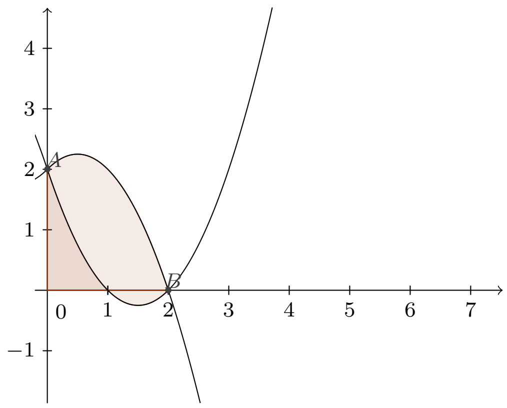
Capitolo 8

Applicazioni del calcolo integrale

8.1 Calcolo di aree

L'interpretazione geometrica dell'integrale definito suggerisce un' immediata applicazione al calcolo di aree di trapezoidi. L'integrale definito si presta, però, anche a determinare l'area di una qualunque superficie piana, limitata da una curva definita attraverso due funzioni $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$.

Esempio 8.1.1. Trovare l'area della regione di piano limitata dalle due parabole di equazioni: $y = x^2 - 3x + 2$ e $y = -x^2 + x + 2$



Dal grafico delle due parabole si deduce che esse hanno in comune i due punti $A(2,0)$ e $B(0,2)$. Usando i trapezoidi dobbiamo suddividere la regione di piano in

$$\int_0^1 (-x^2 + x + 2)\,dx - \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\,dx + \int_1^2 (-x^2 + x + 2)\,dx + \left(- \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx \right)$$

Applicando allora le proprietà dell'integrale definito l'espressione si può sintetizzare in

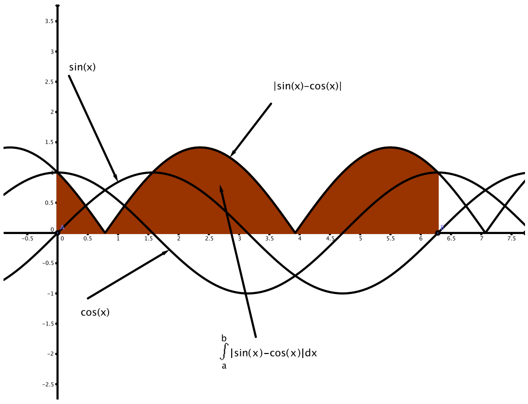
$$\begin{aligned} \int_0^2 (-x^2 + x + 2)\,dx - \int_0^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx &= \int_0^2 (-x^2 + x + 2 - x^2 + 3x - 2)\,dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Dall'esempio si deduce che l'area di una superficie S limitata da una curva definita attraverso due funzioni continue $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ che si intersecano in due punti A e B di relative ascisse a e b e tali che nell'intervallo $[a, b]$ sia $f_1(x) \geq f_2(x)$ è, in ogni caso:

$$\text{area } S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

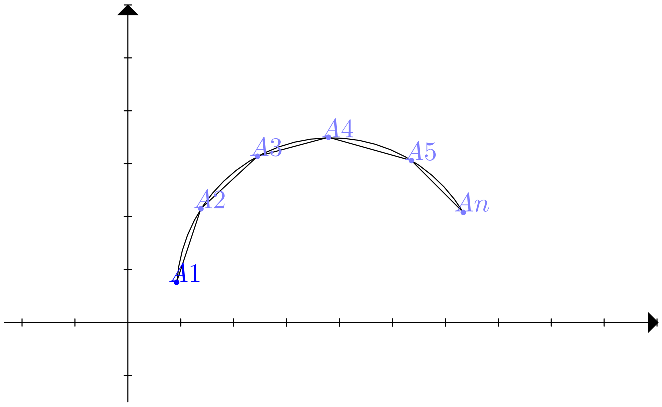
Esercizio 8.1.1. Proponiamo, a titolo di esercizio, il seguente problema: dimostrare che se due curve - diciamo $f_1(x)$ e $f_2(x)$ - si intersecano in modo da essere a volte una sopra l'altra, a volte una sotto l'altra, allora la somma delle aree delimitate dalle curve e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$ è data da:

$$\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$$



La figura a lato esemplifica il significato del teorema.

8.2 Lunghezza di un arco di curva



L'idea di approssimare una figura curvilinea con rettangoli può essere applicata anche ad una curva approssimandola con una spezzata (vedi figura). La lunghezza della spezzata sarà una approssimazione della lunghezza della curva e aumentando il numero dei segmenti della spezzata otteniamo una sempre migliore approssimazione della lunghezza vera della curva. Possiamo allora *definire* come lunghezza della curva il limite della lunghezza della spezzata al tendere a 0 della lunghezza del segmento più lungo. In questo caso la curva si dirà *rettificabile.*

Supponiamo che la curva sia parte del grafico di una funzione $y = f(x)$, con derivata continua, compreso fra i punti A_1 e A_n e indichiamo con $x_1, x_2 \cdots, x_n$ le ascisse degli estremi dei segmenti della spezzata; poniamo inoltre $y_i = f(x_i)$. In queste ipotesi vedremo che la curva compresa fra i punti A_1 e A_n è rettificabile e la sua misura si ottiene mediante un integrale definito.

La misura del generico segmento di spezzata risulta essere:

$$s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

e quindi la lunghezza della spezzata:

$$s = \sum_{i=2}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_{i=2}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Applicando il teorema di Lagrange nell'intervallo (x_i, x_{i-1}) otteniamo:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{con } x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

la lunghezza del singolo segmento risulta quindi:

$$s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi)}(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{tenendo presente che } x_i > x_{i-1}$$

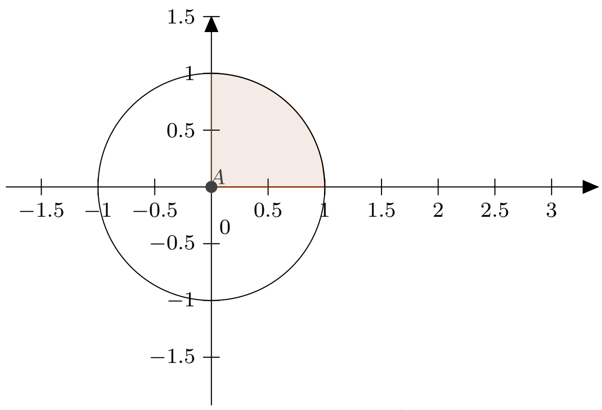
e per la lunghezza della spezzata:

$$s = \sum_{i=2}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi)}(x_i - x_{i-1})$$

passando al limite per $n \mapsto +\infty$ o per la massima lunghezza del segmento che tende a 0:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx \qquad \text{avendo posto } a = A_1 \quad \text{e } b = A_n$$

Esempio 8.2.1. Calcolare la lunghezza di una circonferenza di raggio 1.



Per semplicità, possiamo pensare che la circonferenza sia centrata nell'origine degli assi; calcoliamo la lunghezza di un quarto di circonferenza superiore e poi moltiplichiamo per 4.

L'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 = 1$, esplicitando rispetto a y otteniamo $y = \sqrt{1 - x^2}$ e quindi $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; il quarto di circonferenza è rappresentato dal grafico della funzione nell'intervallo $[0, 1]$ che sarà il nostro dominio di integrazione:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx$$

vale a dire

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = [\arcsin x]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi moltiplicando per 4

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$$

un valore già noto dalla geometria elementare.

Esercizio 8.2.1. Sviluppare i calcoli nel caso la circonferenza abbia raggio r e centro nell'origine (in questo caso l'equazione della circonferenza diventa $x^2 + y^2 = r^2$).

Esercizio 8.2.2. Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = 2\sqrt{x}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

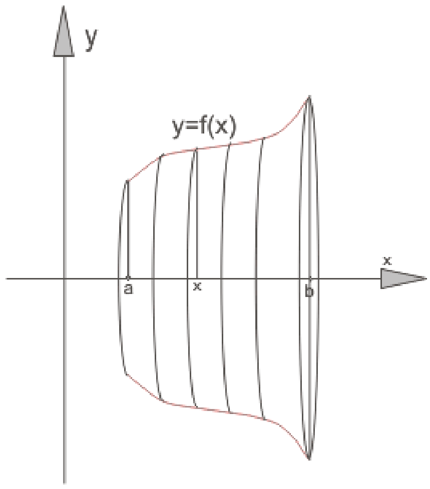
Esercizio 8.2.3. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $y = e^x$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Esercizio 8.2.4. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $y = \ln(x)$ nell'intervallo $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

8.3 Volume di un solido di rotazione

Il volume di un solido, ancora in analogia con il calcolo dell'area di una superficie, può essere calcolato sommando il volume di sottili fettine in cui lo si è suddiviso; evidentemente il calcolo sarà esatto a condizione che il volume di ciascuna fettina sia corretto e questo è il problema: una singola fettina può essere pensata come un cilindretto di base irregolare e altezza molto piccola; in tale approssimazione si commette un errore che verrà azzerato se pensiamo di tagliare infinite fettine di spessore infinitesimo; resta il problema del calcolo dell'area di base che, in generale, sarà delimitata da una curva chiusa irregolare e questo è il problema risolto dall'integrale definito – a condizione che la curva irregolare sia integrabile –. Riassumendo: per calcolare il volume di un solido lo si suddivide in tante piccole sezioni la cui area si calcola con una integrazione indefinita (ovviamente dipendente da un parametro) e poi si passa al limite per il numero di sezioni tendente all'infinito della somma dei volumi di tutte le sezioni.

Sembra molto semplice e lo è a patto che le funzioni che definiscono le curve contorno delle sezioni siano esprimibili analiticamente e integrabili e questo non si verifica frequentemente. In un caso però il calcolo è semplice perchè le sezioni sono cerchi la cui area si calcola anche senza integrazione: è il caso in cui il solido è ottenuto da una rotazione completa di una curva attorno ad un asse, in questo caso lo chiameremo *solido di rotazione*.



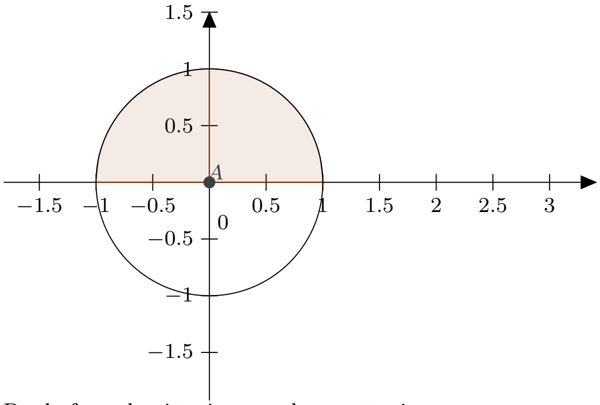
Supponiamo che il solido sia generato dalla rotazione della porzione di grafico della funzione $y = f(x)$ compresa fra le ascisse a e b attorno all'asse x. Una sezione trasversale è un cerchio di raggio $f(x)$ che avrà area:

$$A(x) = \pi f^2(x)$$

sommando tutte le sezioni e passando al limite avremo, per il volume del solido:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$

Esempio 8.3.1. Calcolare il volume della sfera di raggio 1.



Per semplicità, possiamo pensare che la sfera sia centrata nell'origine degli assi; facciamo ruotare la semicirconferenza positiva attorno all'asse x di un angolo giro ottenendo la sfera cercata; come in un esercizio precedente, l'equazione della semicirconferenza è $y = \sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Per la formula vista in precedenza otteniamo:

$$V = \pi \int_{1}^{-1} (\sqrt{1-x^2})^2 \, dx = \pi \int_{1}^{-1} (1-x^2) \, dx$$

vale a dire

$$V = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \pi(1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3})) = \pi(2 - \frac{2}{3}) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$$

un valore già noto dalla geometria elementare.

Esercizio 8.3.1. Sviluppare i calcoli nel caso la sfera abbia raggio r e centro nell'origine.

Esercizio 8.3.2. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione di una semionda della sinusoide $y = \sin x$ nell'intervallo $[0, \pi]$ attorno all'asse x.

Esercizio 8.3.3. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione attorno all'asse x dalla figura determinata dall'asse x e dalla parabola $y = x - x^2$.

Esercizio 8.3.4. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione attorno all'asse x dalla figura determinata dall'asse x e dalla parabola $y = ax - x^2$ con $a > 0$.

Esercizio 8.3.5. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x dalla figura delimitata dai grafici delle funzioni x e x^2.

Esercizio 8.3.6. Calcolare il volume dell'*elissoide di rivoluzione*, vale a dire il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x della parte positiva dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Capitolo 9

Esercizi proposti

9.1 Esercizi sul calcolo degli integrali indefiniti

Esercizio 9.1.1. Calcolare gli integrali

1. $\int \frac{e^{2x} + 4e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$
2. $\int \frac{x^2 - 3x}{(x-1)^2(x+1)} \, dx$
3. $\int \frac{x}{x^2 - 5} \, dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \, dx$
5. $\int 2x \ln(x^2) \, dx$
6. $\int \arctan \sqrt{x} \, dx$
7. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} \, dx$
8. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \, dx$
9. $\int \frac{2x}{8x^2 + 1} \, dx$
10. $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} \, dx$
11. $\int \frac{e^x \sqrt{1 - e^x}}{e^x - 2} \, dx$
12. $\int \frac{\ln x \sqrt{\ln x - 1}}{x(\ln x + 1)} \, dx$
13. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$
14. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 5x}} \, dx$
15. $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \, dx$
16. $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}} \, dx$
17. $\int \frac{e^{\tan x - 1}}{\cos^2 x} \, dx$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} \ln^2 \sqrt{x+1} \, dx}$
19. $\int (\sqrt{x^2 + 1} - x^2) \, dx$
20. $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}} \, dx$

9.2 Altri esercizi

Esercizio 9.2.1. Calcolare gli integrali

1. $\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$
3. $\int \frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}\,dx$
4. $\int \frac{a^x}{b^x}\,dx$
5. $\int \tan^2 x\,dx$
6. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$
8. $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$
9. $\int e^x \sin e^x\,dx$
10. $\int x e^{-x^2}\,dx$
11. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
12. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$
13. $\int e^{e^x} e^x\,dx$
14. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$
15. $\int \ln(\cos x)\tan x\,dx$
16. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\,dx$
17. $\int x^2 e^x\,dx$
18. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$
19. $\int x^2\sin x\,dx$
20. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
22. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$
23. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$
24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$
26. $\int \frac{4^x+1}{2^x+1}\,dx$
27. $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$
28. $\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx$
29. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx$
30. $\int \sin^3 x\,dx$
31. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$
32. $\int \sin\sqrt{x+1}\,dx$

Esercizio 9.2.2. Fra le primitive della funzione $y = f(x) = x \arctan(1 + \sqrt{1-x^2})$ determinare quella passante per il punto $A = (1; 3/2)$

9.3 Esercizi sul calcolo degli integrali definiti

Esercizio 9.3.1. Calcolare gli integrali

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1}\, dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$
3. $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\, dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} (x+1)\ln(1+x^2)\, dx$
6. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \ln(1+|x|)\, dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{1} (3\sqrt{x}+2)\arctan\sqrt{x}\, dx$

9.4 Esercizi proposti su aree di superfici, lunghezze di archi di curva e volumi di solidi di rotazione

Esercizio 9.4.1. Calcolare l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola $y = 2x^2 - 4x + 1$ e dalla retta $y = 3$

Esercizio 9.4.2. Determinare l'area della regione di piano finita individuata dall'iperbole di equazione $y = \frac{2}{x}$ e dalla parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 4$

Esercizio 9.4.3. Data la funzione $y = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ definita in [2;3], si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di un giro completo attorno all'asse delle ascisse del relativo grafico.

Esercizio 9.4.4. Dopo aver rappresentato il grafico della funzione $y = \sqrt{(x+1)^3}$, determinare la lunghezza dell'arco compreso fra i punti di ascissa $a = -1$ e $b = 0$.

Esercizio 9.4.5. Dopo aver rappresentato il grafico della funzione $y = \sqrt{(x+1)^3}$, determinare la lunghezza dell'arco compreso fra i punti di ascissa $a = -1$ e $b = 0$.

Parte III

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Integrazione - Matematica 5 Statistica descrittiva
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

Settembre 2012

Dipartimento di Matematica
ITIS V.Volterra
San Donà di Piave