Matematica 3

Dipartimento di Matematica

ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [12-13][S-All]

Indice

Parte I

Numeri e Funzioni

Un elenco **completo** dei numeri reali:

1) 0,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899 ...
2) 0,86280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502 ...
3) 0,84102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165 ...
4) 0,27120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817 ...
5) 0,48815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094...
6) 0,33057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724...
7) 0,89122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277...
8) 0,05392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091...
9) 0,73637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960...
10) 0,86403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859 ...
11) 0,50244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083 ...
12) 0,81420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532 ...
13) 0,17122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796 ...
14) 0,82303019520353018529689957736225994138912497217752834791315155748572424541506959 ...
15) 0,50829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012 ...
16) 0,85836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753464 ...
17) 0,62080466842590694912933136770289891521047521620569660240580381501935112533824300 ...
18) 0,35587640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586315030...
19) 0,28618297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596 ...
20) 0,02364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746728909777727938000 ...
21) 0,81647060016145249192173217214772350141441973568548161361157352552133475741849468 ...
22) 0,43852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427255025425688767179...
23) 0,04946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642 ...
24) 0,25125205117392984896084128488626945604241965285022210661186306744278622039194945 ...
25) 0,04712371378696095636437191728746776465757396241389086583264599581339047802759009 ...
26) 0,94657640789512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401 ...
27) 0,36394437455305068203496252451749399651431429809190659250937221696461515709858387 ...
28) 0,61515709858387410597885959772975498930161753928468138268683868942774155991855925 ...
29)0,99725246808459872736446958486538367362226260991246080512438843904512441365497627 ...
30) 0,80797715691435997700129616089441694868555848406353422072225828488648158456028506 ...
31) 0,01684273945226746767889525213852254995466672782398645659611635488623057745649803 ...
32) 0,55936345681743241125076069479451096596094025228879710893145669136867228748940 51 ...
33) 0,60101503308617928680920874760917824938589009714909675985261365549781893129784821 ...
34) 0,68299894872265880485756401427047755513237964145152374623436454285844479526586782 ...
35) 0,10511413547357395231134271661021359695362314429524849371871101457654035902799344 ...
36) 0,03742007310578539062198387447808478489683321445713868751943506430218453191048481 ...
37) 0,00537061468067491927819119793995206141966342875444064374512371819217999839101591 ...
38) 0,95618146751426912397489409071864942319615679452080951465502252316038819301420937 ...
39) 0,62137855956638937787083039069792077346722182562599661501421503068038447734549202 ...
40) 0,60541466592520149744285073251866600213243408819071048633173464965145390579626856 ...
41) 0,10055081066587969981635747363840525714591028970641401109712062804390397595156771...
42) 0,57700420337869936007230558763176359421873125147120532928191826186125867321579198 ...
43) 0,41484882916447060957527069572209175671167229109816909152801735067127485832228718 ...
44) 0,35209353965725121083579151369882091444210067510334671103141267111369908658516398...
45) 0,31501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647918535 ...
46) 0,89322618548963213293308985706420467525907091548141654985946163718027098199430992 ...
47) 0,44889575712828905923233260972997120844335732654893823911932597463667305836041428 ...
48) 0,13883032038249037589852437441702913276561809377344403070746921120191302033038019 ...
49) 0,76211011004492932151608424448596376698389522868478312355265821314495768572624334 ...
50) 0,37634668206531098965269186205647693125705863566201855810072936065987648611791045 ...
51) 0,33488503461136576867532494416680396265797877185560845529654126654085306143444318...
52) 0,58676975145661406800700237877659134401712749470420562230538994561314071127000407 ...
53) 0,85473326993908145466464588079727082668306343285878569830523580893306575740679545 ...
54) 0,71637752542021149557615814002501262285941302164715509792592309907965473761255176...
55) 0,56751357517829666454779174501129961489030463994713296210734043751895735961458901...
56) 0,93897131117904297828564750320319869151402870808599048010941214722131794764777262...
57) 0,24142548545403321571853061422881375850430633217518297986622371721591607716692547 ...
58) 0,48738986654949450114654062843366393790039769265672146385306736096571209180763832 ...
59) 0,71664162748888007869256029022847210403172118608204190004229661711963779213375751 ...

⋮

Capitolo 1

Numeri

1.1 Premessa

Scopo di questo capitolo è di presentare le proprietà fondamentali dei numeri **reali**. Per capire bene la loro importanza e in cosa differiscono dagli altri numeri è necessario confrontarli tutti assieme e verificarne le proprietà. I numeri **reali** sono il fondamento su cui costruiremo la quasi totalità delle conoscenze matematiche del triennio. In questo e nel prossimo capitolo ci occuperemo delle proprietà fondamentali dei reali e della loro esistenza. Allo studente potrà sembrare strano che ci si debba preoccupare dell'esistenza di numeri che si usano in continuazione; in effetti l'argomento è delicato e riguarda un pò tutta la matematica; in fondo in questa disciplina si parla continuamente di oggetti che non hanno alcuna esistenza reale: sono pure costruzioni del pensiero; allora che senso può avere parlare di **esistenza**? ci occuperemo più estesamente di questo nel prossimo capitolo.

1.2 Tipi di numeri

Sono noti dal biennio i numeri **naturali** indicati con $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$$

i numeri **interi** indicati con $\mathbb{Z}$ (dal tedesco "Zahl", numero)

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

i numeri **razionali** indicati con $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

si noti che non li abbiamo elencati ordinatamente come nel caso di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ anche se questo è possibile[1].
I numeri **reali** indicati con $\mathbb{R}$ dei quali non possiamo dare una elencazione o una definizione precisa ora; ci accontentiamo - almeno per ora - di pensare che contengano tutti i numeri di cui abbiamo avuto la necessità di parlare come le radici[2] o π.
Possiamo pensare che questi insiemi numerici siano l'uno contenuto nell'altro - come dire, *inscatolati* -

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

poichè i positivi di $\mathbb{Z}$ coincidono con $\mathbb{N}$ e le frazioni del tipo $\frac{m}{1}$ coincidono con $\mathbb{Z}$ mentre $\mathbb{R}$ si può pensare come unione di $\mathbb{Q}$ e degli **irrazionali**. Matematicamente sarebbe più corretto dire che l'uno contiene una *immagine* dell'altro ma pensarli direttamente come sottoinsiemi non ha conseguenze decisive.

[1] Appendice A.
[2] Alcuni studenti avranno già una nozione più precisa di numero reale.

Naturalmente questi insiemi sarebbero poco interessanti se non vi fossero definite anche le **operazioni** di somma e prodotto. Non parliamo delle operazioni di sottrazione e divisione poichè - come sappiamo - si possono pensare inglobate rispettivamente nella somma e nel prodotto. La sottrazione $a - b$ la pensiamo come una abbreviazione[3] della somma $a + (-b)$ e la divisione $\frac{a}{b}$ come abbreviazione[4] del prodotto $a\frac{1}{b}$.

1.3 Proprietà fondamentali

Le proprietà più importanti delle operazioni sono le seguenti[5]:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{Associativa della somma} \qquad \text{(P.1)}$$
$$a + 0 = 0 + a = a \qquad \text{Elemento neutro della somma} \qquad \text{(P.2)}$$
$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \qquad \text{Esistenza opposto} \qquad \text{(P.3)}$$
$$a + b = b + a \qquad \text{Commutativa della somma} \qquad \text{(P.4)}$$
$$a(bc) = (ab)c \qquad \text{Associativa del prodotto} \qquad \text{(P.5)}$$
$$a1 = 1a \qquad \text{Elemento neutro del prodotto} \qquad \text{(P.6)}$$
$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \qquad \text{Esistenza inverso} \qquad \text{(P.7)}$$
$$ab = ba \qquad \text{Commutativa del prodotto} \qquad \text{(P.8)}$$
$$a(b + c) = ab + ac \qquad \text{Distributiva} \qquad \text{(P.9)}$$

Dove a, b, c sono numeri qualsiasi e $a \neq 0$ nel caso P.7; inoltre i numeri 0 e 1 sono **unici**[6].
Queste prime 9 proprietà sono quelle che ci permettono di risolvere i problemi di natura **algebrica** cioè quelli legati alle equazioni o ai sistemi di equazioni. Per affrontare i problemi di natura **analitica** - di cui ci occuperemo nel seguito - diventano altrettanto centrali le proprietà legate alle disuguaglianze $(<, >, \leq, \geq)$.
Indichiamo con $\mathbf{P}$ l'insieme dei numeri *positivi*, intendendo con ciò che possano essere naturali, interi, razionali o reali.
Le proprietà che risultano centrali sono:

$$\text{Legge di tricotomia} \qquad \text{(P10)}$$
Per ogni numero a, vale *una sola* delle seguenti:
$$a = 0 \qquad \text{(i)}$$
$$a \in \mathbf{P} \qquad \text{(ii)}$$
$$-a \in \mathbf{P} \qquad \text{(iii)}$$

$$\text{Se } a \in \mathbf{P} \text{ e } b \in \mathbf{P}, \text{ allora } a + b \in \mathbf{P} \qquad \text{Chiusura per la somma} \qquad \text{(P11)}$$
$$\text{Se } a \in \mathbf{P} \text{ e } b \in \mathbf{P}, \text{ allora } ab \in \mathbf{P} \qquad \text{Chiusura per il prodotto} \qquad \text{(P12)}$$

Le proprietà sopraelencate non valgono tutte negli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$[7]. Valgono però negli insiemi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e questo ci dice che l'insieme di queste proprietà non è sufficiente per distinguere l'insieme $\mathbb{Q}$ dall'insieme $\mathbb{R}$; in altre parole, per distinguere i razionali dai reali bisogna introdurre una ulteriore proprietà[8].

[3] Avendo definito i numeri negativi.
[4] Avendo definito il reciproco.
[5] Notiamo che - come d'abitudine - non si usa il puntino per indicare il prodotto.
[6] Per chi ama le perversioni: il fatto che $0 \neq 1$ andrebbe esplicitamente asserito; non vi è modo di dimostrarlo usando le altre proprietà.
[7] Per esercizio si scoprano quelle che non sono valide trovando dei controesempi.
[8] L'ulteriore assioma sarà introdotto in un capitolo successivo.

Definiamo ora le relazioni di disuguaglianza:

Definizione 1.3.1.

$$a > b \quad \text{se} \quad a - b \in \mathbf{P}$$

$$a < b \quad \text{se} \quad b > a$$

$$a \geq b \quad \text{se} \quad a > b \quad \text{o} \quad a = b$$

$$a \leq b \quad \text{se} \quad a < b \quad \text{o} \quad a = b$$

Come si può notare, tutte le usuali relazioni di disuguaglianza sono definibili a partire dalla definizione dell'insieme $\mathbf{P}$. In particolare sottolineiamo che $a > b$ è solo un'altro modo di dire che $b < a$ e che possiamo usare $a \leq b$ quando sappiamo che uno dei due $a < b$ o $a = b$ è vero ma non entrambi ecc.

1.4 Uguaglianze e disuguaglianze

Altre relazioni di uguaglianza importanti che non dobbiamo assumere come postulati ma che possiamo dimostrare:

$\forall x \in \mathbb{R}$	$0x = x0 = 0$	(1.1)
Legge annullamento del prodotto		
$\forall a, b \in \mathbb{R}$	$ab = 0 \;\Leftrightarrow a \text{ o } b = 0$	(1.2)
Il significato di $\dfrac{0}{0}$		(1.3)
$\forall a, b \in \mathbb{R}$	$(-a)b = -(ab) \quad a(-b) = -(ab)$	(1.4)
$\forall a \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$	$1/(1/a) = a$	(1.5)
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a, b \neq 0$	$1/(ab) = (1/a)(1/b)$	(1.6)
$\forall a \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$	$1/(-a) = -(1/a)$	(1.7)

Relazioni di disuguaglianza:

La relazione $\leq$ (e anche la $\geq$) è un **ordinamento totale** (1.8)

Riflessiva	$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$
Antisimmetrica	siano $x, y \in \mathbb{R}$ se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$
Transitiva	siano $x, y, z \in \mathbb{R}$ se $x \leq y \leq z$ allora $x \leq z$
Totalità dell'ordine	$x \leq y$ oppure $y \leq x$

Il termine totale che compare nella proprietà indica che **tutti** i numeri sono confrontabili e questo si deduce dalla P10 (Tricotomia). La relazione $<$ (e naturalmente anche la $>$) è pure un ordinamento totale; in questo caso però bisogna sostituire la proprietà **Riflessiva** con la **Irriflessiva**: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < x$ è falsa. Le relazioni $\leq, \geq$ si dicono disuguaglianze in senso **debole** mentre le $<, >$ si dicono disugaglianze in senso **forte**. Nel seguito useremo indifferentemente tutte le relazioni $(<, >, \leq, \geq)$ secondo la convenienza del momento.

Ulteriori proprietà e regole di calcolo con disuguaglianze:

Proposizione 1.4.1. *Siano $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Se $x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$ allora $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$. L'ultima disuguaglianza è forte se e solo se almeno una delle altre due lo è.*

La proposizione resta vera se sostituiamo la relazione $\leq$ con una qualsiasi delle altre (naturalmente sempre la stessa).

Dimostrazione. Per la definizione 1.3.1 da $x_1 \leq y_1$ si ha $y_1 - x_1 \in \mathbf{P}$ oppure $y_1 - x_1 = 0$ e da $x_2 \leq y_2$ si ha $y_2 - x_2 \in \mathbf{P}$ oppure $y_2 - x_2 = 0$. Per la proprietà P11 si ha $y_1 - x_1 + y_2 - x_2 \in \mathbf{P}$ cioè $y_1 + y_2 - (x_1 + x_2) \in \mathbf{P}$ oppure $y_1 + y_2 - (x_1 + x_2) = 0$ che per definizione significa $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$ oppure $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ e quindi $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$. Analogamente per le altre disuguaglianze. □

Questa proposizione dice che le disuguaglianze dello stesso **verso** possono essere sommate membro a membro. La stessa cosa non si può dire per le moltiplicazioni: ad esempio da $-2 \leq -1$ e $-3 \leq -1$ si ottiene $6 \leq 1$ evidentemente falsa. Il comportamento delle disuguaglianze rispetto alla moltiplicazione è riassunto nelle seguenti proposizioni:

Proposizione 1.4.2. *Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se $x \leq y$ e $z > 0$ allora $xz \leq yz$; se $z < 0$ allora $xz \geq yz$. Analogamente per i casi $<$ e $>$.*

Dimostrazione. Se $x \leq y$ e $z > 0$ allora $z \in \mathbf{P}$ e per la definizione 1.3.1 si ha $y - x \in \mathbf{P}$ oppure $y - x = 0$. Quindi per la proprietà P12 si ha $(y - x)z = yz - xz \in \mathbf{P}$ o $yz - xz = 0$ e quindi $xz < yz$ o $xz = yz$ da cui $xz \leq yz$.
Se $x \leq y$ e $z < 0$ allora $-z \in \mathbf{P}$ e si ha $y - x \in \mathbf{P}$ oppure $y - x = 0$. Quindi $(y - x)(-z) = -(yz - xz) = xz - yz \in \mathbf{P}$ o $xz - yz = 0$ (anche per 1.4). Perciò $yz < xz$ o $yz = xz$ e in definitiva $yz \leq xz$. Analogamente per le altre disuguaglianze. □

In particolare dalla 1.4.2 con $z = -1$ si ottiene la regola: *se si cambiano i segni ad ambo i membri di una disuguaglianza questa si inverte.*

Proposizione 1.4.3. *Siano $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Se $0 \leq x_1 \leq y_1$ e $0 \leq x_2 \leq y_2$ allora $x_1x_2 \leq y_1y_2$. Analogamente per i casi $<$ e $>$.*

Dimostrazione. Primo caso: supponiamo $x_2 > 0$. Allora per $x_1 \leq y_1$ e la proposizione precedente si ha: $x_1x_2 \leq y_1x_2$; e se $y_1 > 0$ da $x_2 \leq y_2$ si ottiene $y_1x_2 \leq y_1y_2$; quindi $x_1x_2 \leq y_1x_2 = y_1x_2 \leq y_1y_2$ e per transitività (1.8) $x_1x_2 \leq y_1x_2 \leq y_1y_2$. Se invece $y_1 = 0$ allora anche $x_1 = 0$ (dimostrarlo) e quindi $x_1x_2 = 0$ e $y_1y_2 = 0$ da cui la tesi.
Secondo caso: sia $x_2 = 0$ allora anche $x_1 = 0$ (dimostrarlo) e quindi $x_1x_2 = 0$. Il prodotto y_1y_2 è $= 0$ se uno dei due è $= 0$ (1.2), altrimenti è > 0: in ogni caso $0 = x_1x_2 \leq y_1y_2$. Analogamente per le altre disuguaglianze. □

Proposizione 1.4.4. *Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Se $0 \leq x$ e $0 \leq y$ allora $0 \leq xy$. Se $0 < x$ e $0 < y$ allora $0 < xy$. Se $x < 0$ e $y < 0$ allora $0 < xy$. Se $x < 0$ e $0 < y$ allora $xy < 0$.*

Osservazione: La proposizione 1.4.4 esprime la nota **regola dei segni**: $++ = +, -- = +, +- = -, -+ = -$.

Proposizione 1.4.5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$. *Se $x \neq 0$ allora $x^2 > 0$. I quadrati sono positivi.*

Proposizione 1.4.6. $\forall x \in \mathbb{R}$ *se $x > 0$ allora $1/x > 0$. Se $x < 0$ allora $1/x < 0$.*

Definizione 1.4.1. Si dice **valore assoluto** di $x \in \mathbb{R}$ il

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

Questa definizione sottolinea che $-x > 0$ se $x < 0$. Osserviamo anche che il valore assoluto ha significato solo se sono presenti numeri **negativi** e quindi gli opposti dei numeri (non in $\mathbb{N}$) e che non ha il significato di numero **senza** segno, ma semplicemente il numero o il suo opposto. Utile sottolineare che $|x|$ è **sempre** positivo salvo il caso $x = 0$.
Il fatto più importante che riguarda il valore assoluto è:

Teorema 1.4.1 (Disuguaglianza triangolare)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Dimostrazione. Procediamo per casi:
Caso $x \geq 0, y \geq 0$: allora abbiamo $x + y \geq 0$ e quindi, per definizione, $|x + y| = x + y = |x| + |y|$ e vale proprio l'uguaglianza.
Caso $x \leq 0, y \leq 0$: allora $x+y \leq 0$ e quindi $|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) = |x|+|y|$ e di nuovo vale l'uguaglianza.
Caso $x \geq 0, y \leq 0$: in questo caso dobbiamo dimostrare che $|x + y| \leq x - y$. Si presentano due casi: se $x + y \geq 0$ allora dobbiamo far vedere che $x + y \leq x - y$ cioè $y \leq -y$ che sarà certamente vero perchè $y \leq 0$ e quindi $-y \geq 0$. Nel secondo caso se $x + y \leq 0$ dobbiamo dimostrare che $-x - y \leq x - y$ cioè $-x \leq x$ che è certamente vero dato che $x \geq 0$ e quindi $-x \leq 0$.
Caso $x \leq 0, y \geq 0$: la dimostrazione è identica alla precedente scambiando i ruoli di x e y. □

Osservazione: Il teorema ci dice che il modulo della somma **non è uguale** alla somma dei moduli; dalla dimostrazione si vede che lo è solo nel caso che i numeri abbiano lo stesso segno: entrambi positivi o entrambi negativi. Negli altri casi vale la disuguaglianza stretta come si vede negli esempi seguenti.

Esempi.

1. $|\pi + (-3)| = \pi - 3 < |\pi| + |-3| = \pi + 3$
2. $|\sqrt{2} + (-1)| = \sqrt{2} - 1 < |\sqrt{2}| + |-1| = \sqrt{2} + 1$
3. $|1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3} = |1| + |\sqrt{3}|$
4. $|-5 - \sqrt{5}| = 5 + \sqrt{5} = |-5| + |-\sqrt{5}|$

Il prodotto e il quoziente si comportano molto meglio:

Proposizione 1.4.7. *$\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|xy| = |x||y|$ (il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli). Se $y \neq 0$ allora anche $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ (il modulo del quoziente è uguale al quoziente dei moduli).*

Terminiamo il capitolo con una considerazione generale: è sensato chiedersi perchè si dimostrano tutte queste proprietà dei numeri che sembrano (e sono) ovvie e perchè si è scelto di assumere come proprietà indimostrate (assiomi) le P.1 - P12 che sono altrettanto ovvie. La risposta non è semplice e coinvolge questioni molto complesse e profonde che non sono affrontabili in un corso di studi secondario; non in tutta generalità perlomeno. Lo studente impara a *conoscere* i numeri e a lavorarci sin dalle scuole elementari ma il problema di stabilire *cosa* i numeri veramente *sono* resta una questione incerta [9]. Anche in questo corso impareremo ad usare i numeri e a conoscerne ulteriori proprietà ma con una consapevolezza maggiore: ci renderemo conto che, anche non sapendo bene cosa sono i numeri, certamente dovranno avere le proprietà P.1 - P12. Vedremo anche che quelle proprietà non sono sufficienti per risolvere tutti i problemi che siamo in grado di porci e che dovremo estenderle in modo decisamente innovativo.

[9] Come dice V.A.Zorich in *Mathematical Analisys I*: 'I numeri in matematica sono come il tempo in fisica: tutti sanno cosa sono ma solo gli esperti li trovano difficili da capire.'

Esercizi

Esercizio 1.4.1. Dimostrare le proprietà delle uguaglianze (1.4).

Esercizio 1.4.2. Dimostrare le proprietà delle disuguaglianze (1.8).

Esercizio 1.4.3. Dimostrare la proposizione 1.4.5.

Esercizio 1.4.4. Dimostrare la proposizione 1.4.6.

Esercizio 1.4.5. Dimostrare la proposizione 1.4.7.

1.5 Equazioni e disequazioni

In questo paragrafo useremo le proprietà e gli assiomi dei numeri razionali e reali per risolvere alcune equazioni e disequazioni algebriche, razionali, irrazionali e con moduli. Naturalmente, in alcuni casi, si tratterà di un ripasso di nozioni già viste nel biennio.

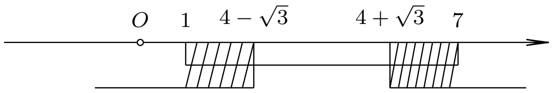
1.5.1 Equazioni algebriche

Esempio 1.5.1. esempio

1.5.2 Una disgressione sui grafici

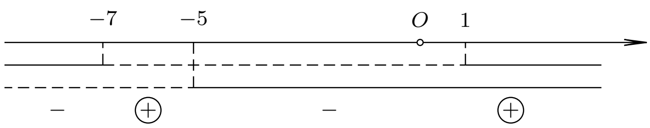
Lo studente ha già usato i grafici per rappresentare le soluzioni delle disequazioni e dei sistemi di disequazioni algebriche incontrate nel biennio. Illustriamo le convenzioni che assumiamo nel tracciare i grafici.

Grafico di intersezione. Viene usato quando si risolve un sistema di disequazioni o quando la disequazione porta ad un sistema equivalente come nel caso delle frazionarie[10].



Assumiamo di tracciare una linea che rappresenta l'asse delle x sulla quale fissiamo gli estremi degli intervalli calcolati. Tracciamo una linea continua (una per ogni disequazione) che rappresenta gli intervalli dove la singola disequazione è **soddisfatta**. Infine tratteggiamo l'area che rappresenta l'intersezione di tutte le soluzioni delle disequazioni.

Grafico dei segni. Viene usato quando si risolve una disequazione in cui compaiono prodotti o quozienti in cui il segno complessivo della disequazione dipende dai segni dei singoli fattori.



Assumiamo di tracciare una linea che rappresenta l'asse delle x sulla quale fissiamo gli estremi degli intervalli calcolati. Tracciamo una linea continua (una per ogni fattore) che rappresenta gli intervalli dove il fattore è **positivo** e una linea tratteggiata dove il fattore è **negativo**. Infine indichiamo, applicando la regola dei segni, con segni $+$ e $-$ le zone corrispondenti. Per maggiore chiarezza cerchiamo con un circoletto i segni nelle zone che rappresentano soluzioni della disequazione.

In entrambi i tipi di grafico assumiamo di congiungere con linee verticali gli estremi degli intervalli ai corrispondenti valori sull'asse delle x: con linea continua se l'estremo è compreso, altrimenti con linea tratteggiata.

Ricordiamo che, in molti casi, può essere necessario tracciare più grafici per la stessa disequazione o sistema e non è escluso che si debba tracciare, per lo stesso problema, grafici di entrambi i tipi.

[10] O delle modulari e irrazionali come si vedrà presto.

1.5.3 Disequazioni e sistemi di disequazioni algebriche

Ricordiamo che il polinomio di secondo grado ax^2+bx+c assume valori positivi o negativi in funzione del valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$; per la precisione se $a > 0$, cosa a cui possiamo sempre ricondurci eventualmente cambiando tutti i segni, e $\Delta > 0$ allora il polinomio è positivo **esternamente** all'intervallo delle soluzioni e negativo **internamente**; se $\Delta = 0$ allora il polinomio è sempre positivo tranne nell'unica radice; se $\Delta < 0$ allora il polinomio è sempre positivo.

Esempio 1.5.2. Risolvere la disequazione

$$(3x-2)^2 + 3 < 5x - (2x-1)^2$$

$$\begin{aligned}
&9x^2 - 12x + 4 + 3 - 5x + 4x^2 - 4x + 1 < 0\\
&13x^2 - 21x + 8 < 0\\
&\Delta = 441 - 416 = 25 > 0\\
&x = \frac{21 \pm \sqrt{25}}{26} \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{8}{13}
\end{aligned}$$

per quanto detto, le soluzioni sono: $\frac{8}{13} < x < 1$, in intervalli: $]\frac{8}{13}, 1[$.

Esempio 1.5.3. Risolvere il sistema di disequazioni

$$\left\{\begin{array}{l} 2x(x+5) > 3(x+1)^2 \\ x^2 + 4x + 3 > 3(x-1)^2 \\ 2x^2 + x + 1 > 0 \end{array}\right.$$

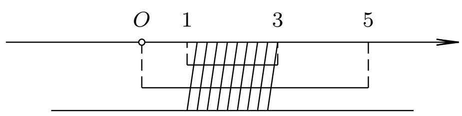
tutte le disequazioni sono di secondo grado, quindi semplifichiamo e calcoliamo i discriminanti

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2 + 10x > 3x^2 + 6x + 3 \\ x^2 + 4x + 3 > 3(x-1)^2 \\ \Delta_3 = 1 - 8 = -7 < 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ x^2 - 5x < 0 \\ \Delta_3 = 1 - 8 = -7 < 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \Delta_1 = 16 - 12 = 4 > 0 \\ \Delta_2 = 25 > 0 \\ \Delta_3 = 1 - 8 = -7 < 0 \end{array}\right.$$

per quanto detto si ha

$$\left\{\begin{array}{ll} x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 & \text{formula ridotta} \\ x(x-5) < 0 & \text{disequazione spuria} \\ \forall x \in \mathbb{R} & \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \quad x_2 = 3 \\ x_1 = 0 \quad x_2 = 5 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 1 < x < 3 \\ 0 < x < 5 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

riportiamo su un grafico di intersezione



quindi le soluzioni sono: $1 < x < 3$, in intervalli: $]1, 3[$.

Ricordiamo che le disequazioni di grado superiore al secondo si risolvono cercando di scomporre in fattori il polinomio della disequazione normalizzata[11]. Poi si studierà il segno dei vari fattori e si riporterà in un grafico dei segni. Analogamente per le disequazioni frazionarie.

Esempio 1.5.4. Risolvere la disequazione di terzo grado

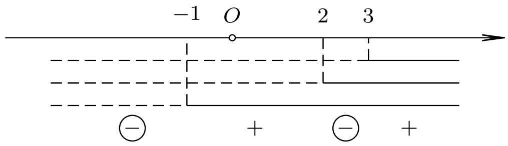
$$x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$$

osserviamo che il polinomio $x^3 - 4x^2 + x + 6$ si annulla per $x = -1$ e quindi[12] è divisibile per il binomio $x + 1$. La divisione ci consente di scrivere

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 5x + 6)(x+1) = (x-3)(x-2)(x+1) \qquad \text{trinomio di secondo grado}$$

riportiamo su un grafico dei segni i tre fattori ottenuti

[11] Ridotta in forma normale con lo 0 a destra.
[12] T. del resto.



quindi le soluzioni sono: $x < -1 \quad \cup \quad 2 < x < 3$, in intervalli: $]-\infty, -1[\quad \cup \quad]2, 3[$.

Esempio 1.5.5. Risolvere la disequazione frazionaria

$$\frac{(x+1)^3 - 1}{(x-1)^3 + 1} > 1$$

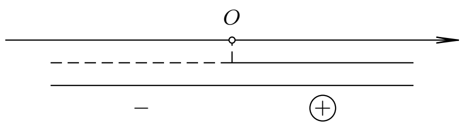
osserviamo che numeratore e denominatore sono rispettivamente differenza e somma di cubi e quindi si scompongono nel modo seguente

$$\frac{(x+1)^3 - 1}{(x-1)^3 + 1} > 1 \qquad \frac{(x+1-1)((x+1)^2 + (x+1) + 1)}{(x-1+1)((x-1)^2 - (x-1) + 1)} > 1$$

$$\frac{\cancel{x}(x^2 + 3x + 3)}{\cancel{x}(x^2 - 3x + 3)} > 1 \quad x \neq 0 \qquad \frac{\cancel{x^2} + 3x + \cancel{3} - \cancel{x^2} + 3x - \cancel{3}}{x^2 - 3x + 3} > 0$$

$$\frac{6x}{x^2 - 3x + 3} > 0$$

studiamo i segni di numeratore e denominatore. $N > 0$ per $x > 0$. $D > 0$: osserviamo che $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$ e quindi $D > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Riportando in grafico dei segni



quindi le soluzioni sono: $x > 0$, in intervalli: $]0, +\infty[$.

Esercizi Alcuni esercizi su disequazioni e sistemi di disequazioni algebriche.

1. $\begin{cases} 2x^2 > 3(9-x) \\ x\dfrac{x-5}{5} < 5x + \dfrac{64}{5} \\ (x+4)(2x+5) > 0 \end{cases}$ $(3 < x < 32)$

2. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x+1}{5} > -2 \\ \dfrac{x-2}{7} - \dfrac{x^2-1}{2} < 3 \\ (1-x)(x-3)(x+2) < 0 \end{cases}$ $(-2 < x < 1 \quad \cup \quad x > 3)$

3. $\dfrac{x-2}{x-1} < \dfrac{x^2}{x^2-3x+2} - \dfrac{x-1}{2-x}$ $(x < -3 \quad \cup \quad \cup x > 2$

4. $x^3 - 3x + 2 \leq 0$ $(x < -2 \quad \cup x = 1)$

5. $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 \geq 0$ $(x \leq -3 \quad \cup \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \cup \quad x \geq 2)$

6. $\dfrac{2x+1}{2x-1} + \dfrac{x^2+1}{x} \geq 5x$ $(x \leq -\frac{1}{2} \quad \cup \quad 0 < x \leq \frac{1}{4} \quad \cup \quad x \leq 1)$

7. $\dfrac{x^2}{x-1} + \dfrac{x}{2x-3} \leq 3x$ $(0 \leq x < 1 \quad \cup \quad \frac{5}{4} \leq x < \frac{3}{2} \quad \cup \quad x \geq 2)$

8. $9x^4 - 46x^2 + 5 \leq 0$ $(-\sqrt{5} \leq x \leq -\frac{1}{3} \quad \cup \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \sqrt{5})$

1.5.4 Equazioni e disequazioni con modulo

Ricordiamo la definizione di modulo o valore assoluto di un numero reale:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

Equazioni. Ci proponiamo di risolvere l'equazione

$$|f(x)| = k$$

con $f(x)$ espressione nella variabile x e $k \in \mathbb{R}$.

Si presentano tre casi:

- Se $k < 0$, allora l'equazione è impossibile, poiché, come già detto, $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Se $k = 0$, allora l'equazione con modulo è equivalente alle equazioni

  $$\pm f(x) = 0$$

  cioè alla

  $$f(x) = 0$$

- Se $k > 0$, allora l'equazione con modulo è equivalente alla coppia di equazioni

  $$\pm f\,(x) = k$$

  che si risolvono separatamente.

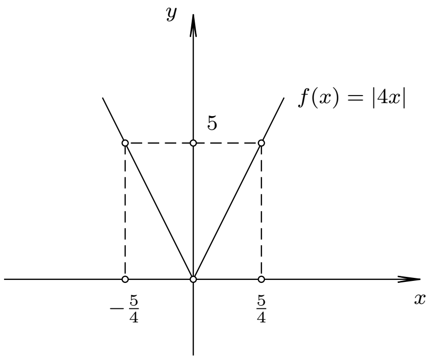
Esempio 1.5.6. Risolvere l'equazione

$$|4x| = 5$$

Per quanto detto si ha

$$\begin{array}{lll} 4x = 5 & \text{cioè} & x = \dfrac{5}{4} \\ -4x = 5 & \text{cioè} & x = -\dfrac{5}{4} \end{array}$$

Osserviamo che l'equazione in esame è solo apparentemente di primo grado; se così fosse avrebbe una sola soluzione come ben noto. Se pensiamo ai possibili valori della espressione $|4x|$, cioè alla funzione[13] $f(x) = |4x|$ ci rendiamo conto che potrà assumere due volte il valore 5.



[13] Come si vedrà nel capitolo sulle funzioni.

Consideriamo l'equazione con modulo più generale

$$|f(x)| = g(x)$$

con $f(x)$ e $g(x)$ espressioni nella variabile x. Essa è equivalente all'unione dei sistemi misti

$$\begin{cases} f(x) \le 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Esempio 1.5.7. Risolvere l'equazione

$$|x^2 - 1| = x + 1$$

Per quanto detto si ha

$$\begin{cases} x^2 - 1 \le 0 \\ -(x^2 - 1) = x + 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ x^2 - 1 = x + 1 \end{cases}$$

vale a dire

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \le -1 \quad \cup \quad x \ge 1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \le -1 \quad \cup \quad x \ge 1 \\ x_1 = 2 \quad x_2 = -1 \end{cases}$$

Le soluzioni quindi sono $x = -1$ e $x = 0$.

Osservazione: Il fatto che la soluzione $x = -1$ compaia in entrambi i sistemi (ma nell'unione viene contata una sola volta) dipende dalla definizione di modulo che abbiamo dato: lo zero compare due volte, sia come numero positivo che come negativo; come sappiamo $-0 = 0$, l'opposto di 0 è 0 stesso e questo è l'unico numero che ha questa proprietà.

Disequazioni. Consideriamo la disequazione con modulo

$$|f(x)| < k$$

con $k \in \mathbb{R}$. Risulta

- se $k \le 0$, la disequazione risulta impossibile;
- se $k > 0$, allora la disequazione risulta equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} f(x) > -k \\ f(x) < k \end{cases}$$

Per la disequazione con modulo

$$|f(x)| \le k$$

con $k \in \mathbb{R}$, risulta

- se $k < 0$, allora la disequazione è impossibile:
- se $k = 0$, allora la disequazione è equivalente all'equazione

$$f(x) = 0$$

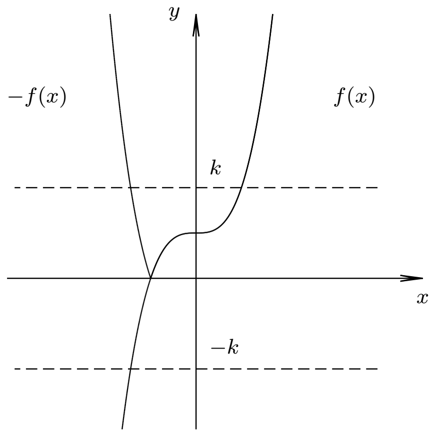
- se $k > 0$, allora la disequazione è equivalente a

$$-k \leq f(x) \leq k$$

che è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} f\,(x) \geq -k \\ f\,(x) \leq k \end{cases}$$

Nel grafico abbiamo disegnato la $f(x)$ completa e la parte negativa ridisegnata positiva in corrispondenza a $-f(x)$. Si può constatare che i valori di x che soddisfano la $|f(x)| \leq k$ sono quelli compresi fra l'asse x e la retta ad altezza k cioè quelli che, dopo aver esplicitato il modulo, sono compresi fra le rette ad altezza $-k$ e k.



Esempio 1.5.8. Risolvere la disequazione

$$|x^2 - 8x + 10| \leq 3$$

Si ha

$$-3 \leq x^2 - 8x + 10 \leq 3$$

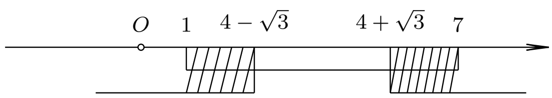
vale a dire

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 10 \leq 3 \\ x^2 - 8x + 10 \geq -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 13 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \pm \sqrt{9} = 4 \pm 3 \\ x = 4 \pm \sqrt{3} = 4 \pm \sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 7 \quad x_2 = 1 \\ x_1 = 4 + \sqrt{3} \quad x_2 = 4 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \leq x \leq 1 \\ 4 - \sqrt{3} \leq x \leq 4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Riportando in grafico di intersezione:



Le soluzioni sono: $1 \le x \le 4 - \sqrt{3} \quad \cup \quad 4 + \sqrt{3} \le x \le 7$. In intervalli: $[1, 4 - \sqrt{3}] \quad \cup \quad [4 + \sqrt{3}, 7]$.

Più in generale, le disequazioni con modulo

$$|f(x)| < g(x) \quad \text{e} \quad |f(x)| \le g(x)$$

sono equivalenti rispettivamente ai sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f(x) \ge -g(x) \\ f(x) \le g(x) \end{cases}$$

Esempio 1.5.9. Risolvere la disequazione

$$\left| \frac{x-7}{x+5} \right| < x$$

Si ha

$$-x < \frac{x-7}{x+5} < x$$

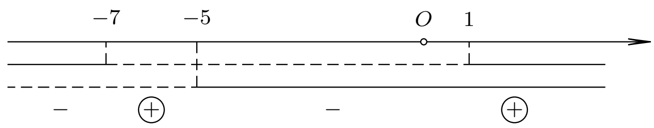
vale a dire

$$\begin{cases} \frac{x-7}{x+5} > -x \\ \frac{x-7}{x+5} < x \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione frazionaria:

$$\frac{x-7}{x+5} > -x \qquad \frac{x-7+x^2+5x}{x+5} > 0 \qquad \frac{x^2+6x-7}{x+5} > 0$$

Numeratore: $x = -3 \pm \sqrt{16} = -3 \pm 4 \quad x_1 = -7, x_2 = 1$. Quindi $N > 0$ per $x < -7 \cup x > 1$.
Denominatore: $x + 5$. Quindi $D > 0$ per $x > -5$.
Riportando in grafico dei segni:

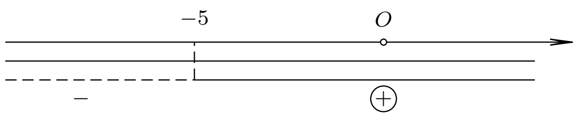


Soluzioni: $-7 < x < -5 \quad \cup \quad x > 1$.

Risolviamo la seconda disequazione frazionaria:

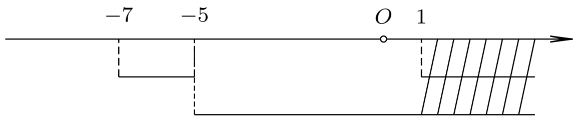
$$\frac{x-7}{x+5} < x \qquad \frac{x-7-x^2-5x}{x+5} < 0 \qquad \frac{-x^2-4x-7}{x+5} < 0 \qquad \frac{x^2+4x+7}{x+5} > 0$$

Numeratore: $x = -2 \pm \sqrt{-3} \qquad \Delta < 0$. Quindi $N > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Denominatore: $x + 5$. Quindi $D > 0$ per $x > -5$.
Riportando in grafico dei segni:



Soluzioni: $x > -5$.

Riportiamo le soluzioni delle due disequazioni in un grafico di intersezione:



Le soluzioni finali sono: $x > 1$. In intervalli: $]1, +\infty[$.

Sia data la disequazione con modulo

$$|f(x)| > k$$

con $k \in \mathbb{R}$, risulta

- se $k < 0$, allora è verificata per tutti i valori di x nel dominio di $f(x)$;
- se $k = 0$, allora è verificata per tutti i valori di x nel dominio di $f(x)$, esclusi quelli per cui $f(x) = 0$;
- se $k > 0$, allora la disequazione è equivalente a

$$f(x) < -k \qquad \cup \qquad f(x) > k$$

Quest'ultimo caso si capisce bene se si tiene presente il grafico 1.5.4.

Per la disequazione

$$|f(x)| \geq k$$

con $k \in \mathbb{R}$, risulta

- se $k \leq 0$, allora è verificata per tutti i valori di x nel dominio di $f(x)$;
- se $k > 0$, allora la disequazione è equivalente a

$$f(x) \leq -k \qquad \cup \qquad f(x) \geq k$$

Consideriamo, più in generale, le disequazioni

$$|f(x)| > g(x) \quad \text{e} \quad |f(x)| \geq g(x)$$

ragioniamo sulla prima: ricordando la definizione di modulo

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

analogamente per la seconda.

Esempio 1.5.10. Risolvere la disequazione

$$\frac{x^2 - 2}{|x - 4|} < 1$$

Osserviamo che il C.E. è $x \neq 4$ e che il denominatore è sempre positivo per i valori consentiti. Possiamo quindi moltiplicare per $|x - 4|$.

$$x^2 - 2 < |x - 4| \qquad |x - 4| > x^2 - 2$$

Per quanto detto risulta

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 4 > x^2 - 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x - 4 < 0 \\ -x + 4 > x^2 - 2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - x + 2 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 4 \\ x^2 + x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ \Delta = 1 - 8 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 4 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nexists x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 4 \\ -\frac{3}{2} < x < 2 \end{cases}$$

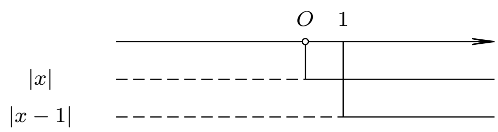
Le soluzioni sono $-\frac{3}{2} < x < 2$. In intervalli: $]-\frac{3}{2}, 2[$.

Può capitare di dover risolvere equazioni o disequazioni con più di un modulo. In questi casi basterebbe applicare più volte le soluzioni discusse in precedenza; questo procedimento conduce, nella maggioranza dei casi, ad una situazione molto complicata in cui è facile commettere errori di calcolo; per questo decidiamo di scomporre l'equazione-disequazione in più sistemi equivalenti usando la definizione di modulo. Vediamo due esempi.

Esempio 1.5.11. Risolvere l'equazione

$$|x - 1| = 1 + |x|$$

Riportiamo in grafico di segni i due moduli che compaiono nell'equazione:



Come si vede le zone sono tre: $x \leq 0, 0 \leq x \leq 1, x \geq 1$; scriviamo i corrispondenti sistemi misti per le tre zone:

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -x + 1 = 1 - x \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 1 = 1 + x \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 = 1 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ 1 = 1 \quad \text{indeterminata} \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x = 0 \quad x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 = 1 \quad \text{impossibile} \end{cases}$$

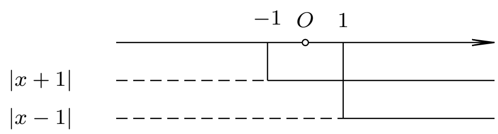
$$x \geq 0 \quad \cup \quad x = 0 \quad \cup \quad \nexists$$

Soluzioni finali: $x \geq 0$, in intervalli: $[0, +\infty[$

Esempio 1.5.12. Risolvere la disequazione

$$|x - 1| < 1 + |x + 1|$$

Riportiamo in grafico di segni i due moduli che compaiono nell'equazione:



Come si vede le zone sono tre: $x \leq -1, -1 \leq x \leq 1, x \geq 1$; scriviamo i corrispondenti sistemi per le tre zone:

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ -x + 1 < 1 - x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -x + 1 < 1 + x + 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 < 1 + x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ 1 < 0 \quad \nexists \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x > -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < 3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\nexists \quad \cup \quad -\frac{1}{2} < x \leq 1 \quad \cup \quad x \geq 1$$

Soluzioni finali: $x > -\frac{1}{2}$, in intervalli: $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

Esercizi Alcuni esercizi sui moduli.

1. $|5x-4| = -3$
2. $|x-7| = x$
3. $|2-5x| < 3$ $\qquad]-\frac{1}{5}, 1[$
4. $|3x+2| > 5$ $\qquad (x < -\frac{7}{3} \cup x > 1 \quad$ in intervalli: $]-\infty, -\frac{7}{3}[\cup]1, \infty[)$
5. $\left|3x + \frac{2}{x}\right| > 5$ $\qquad (x \neq 0, \quad]-\infty, -1[\cup]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[\cup]1, +\infty[)$
6. $\left|\frac{3x-4}{x}\right| \leq x$ $\qquad (x \neq 0, \quad]0, 1] \cup [4, +\infty[)$
7. $\frac{2}{x} + |x+1| < 1$
8. $\frac{|x^2+1|}{x+1} \geq x - 1$
9. $x - 2 < |x|$ $\qquad \mathbb{R}$

1.5.5 Equazioni e disequazioni irrazionali

Una equazione o disequazione si dice irrazionale se al suo interno l'incognita compare almeno una volta sotto il segno di radice n-esima. Particolare attenzione[14] bisogna prestare, come vedremo, al caso in cui n è un intero pari.

Equazioni. Consideriamo l'equazione irrazionale

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

con $n > 1$ naturale, $f(x)$ e $g(x)$ funzioni algebriche nella variabile x.

- Supponiamo n dispari, allora l'equazione irrazionale è equivalente all'equazione razionale

$$f(x) = (g(x))^n$$

  Non poniamo alcuna condizione su $f(x)$ poichè la radice di indice dispari di un numero reale esiste sempre.

- Supponiamo n pari, allora l'equazione irrazionale è equivalente al sistema misto razionale

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

  In caso di indice pari sappiamo che la radice esiste solo se il radicando è positivo, da cui la condizione su $f(x)$; la condizione su $g(x)$ si rende necessaria perchè la radice di un numero reale è sempre positiva o nulla.

Esempio 1.5.13. Risolvere l'equazione

$$\sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = 2x - 1$$

$$2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \quad 6x^3 - 11x^2 + 4x = 0 \quad x(6x^2 - 11x + 4) = 0$$

applicando la legge di annullamento del prodotto

$$x_1 = 0 \quad \cup \quad 6x^2 - 11x + 4 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \cup \quad x = \frac{11 \pm 5}{12}$$

Soluzioni finali: $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{4}{3}$

Esempio 1.5.14. Risolvere l'equazione

$$\sqrt{2x^2 + x + 5} = x + \sqrt{5}$$

per quanto detto l'equazione risulta equivalente al sistema misto

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 5 \geq 0 \\ x + \sqrt{5} \geq 0 \\ 2x^2 + x + \cancel{5} = x^2 + 2\sqrt{5}x + \cancel{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta < 0 \\ x \geq -\sqrt{5} \\ x^2 + (1 - 2\sqrt{5})x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq -\sqrt{5} \\ x(x + 1 - \sqrt{5}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq -\sqrt{5} \\ x_1 = 0 \quad x_2 = 2\sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

considerando che $2\sqrt{5} - 1 > -\sqrt{5}$, entrambe le soluzioni sono accettabili. Soluzioni finali: $x_1 = 0 \quad x_2 = 2\sqrt{5} - 1$.

[14] Lo studente ne è cosciente se ha studiato i radicali nel biennio.

Disequazioni. Sia data la disequazione irrazionale

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

con $n > 1$ naturale, $f(x)$ e $g(x)$ funzioni algebriche nella variabile x.

- Supponiamo n dispari, allora la disequazione irrazionale è equivalente alla disequazione razionale

$$f(x) < (g(x))^n$$

- Supponiamo n pari, allora la disequazione irrazionale è equivalente al sistema di disequazioni razionali

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^n \end{cases}$$

  In caso di indice pari la condizione che $f(x) \geq 0$ è la condizione di esistenza della radice. La condizione su $g(x)$ si impone perchè deve essere maggione di un numero positivo o nullo.

Esempio 1.5.15. Risolvere la disequazione

$$\sqrt[3]{3x^2 - 3x - 1} < 1 - x$$

$$3x^2 - 3x - 1 < 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$
$$x^3 < 2$$

estraendo la radice cubica, le soluzioni sono: $x < \sqrt[3]{2}$

Esempio 1.5.16. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} < x - 1$$

per quanto detto la disequazione risulta equivalente al sistema

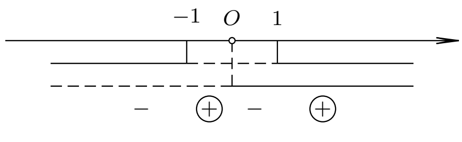
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - \frac{1}{x} < x^2 - 2x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \\ x > 1 \\ \frac{x^2-1-x^3+2x^2-x}{x} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \\ x > 1 \\ \frac{x^3-3x^2+x+1}{x} > 0 \end{cases}$$

Non abbiamo evidenziato la condizione $x \neq 0$ perchè già contenuta nella condizione di esistenza della radice.
Risolviamo la prima disequazione:

$$\frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$$

Segno del numeratore: $N \geq 0$ per $x \leq -1 \quad \cup \quad x \geq 1$. Segno del denominatore: $D > 0$ per $x > 0$. Passando al grafico dei segni:



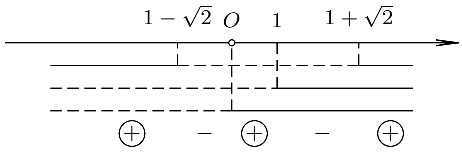
Le soluzioni sono $[-1, 0[\quad \cup \quad [1, +\infty[$.
Risolviamo la terza disequazione:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x} > 0$$

Il numeratore è di terzo grado per cui sarà necessario scomporre il polinomio. Osservando che il esso si annulla per $x = 1$ sappiamo[15] che è divisibile per $x - 1$, da cui si deduce che $x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x^2 - 2x - 1)(x - 1)$. Non volendo usare la divisione si può osservare che $x^3-3x^2+x+1 = x^3-x^2-2x^2-x+2x+1 = x^2(x-1)-2x(x-1)-(x-1) = (x^2-2x-1)(x-1)$ con lo stesso risultato. Siamo ricondotti alla

$$\frac{(x^2 - 2x - 1)(x - 1)}{x} > 0$$

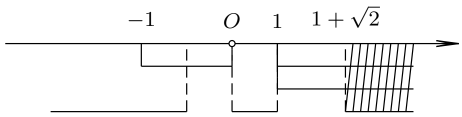
Passando al grafico dei segni:



Riassumendo

$$\begin{cases} -1 \le x < 0 \quad \cup \quad x \ge 1 \\ x > 1 \\ x < 1 - \sqrt{2} \quad \cup \quad 0 < x < 1 \quad \cup \quad x > 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

che riportiamo in grafico d'intersezione



Soluzioni finali: $x > 1 + \sqrt{2}$, in intervalli: $]1 + \sqrt{2}, +\infty[$.

Sia data la disequazione irrazionale

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$$

con $n > 1$ naturale, $f(x)$ e $g(x)$ funzioni algebriche nella variabile x.

- Supponiamo n dispari, allora la disequazione irrazionale è equivalente alla disequazione razionale

$$f(x) > (g(x))^n$$

- Supponiamo n pari, allora la disequazione irrazionale è equivalente all'unione dei sistemi di disequazioni razionali

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases}$$

  i due sistemi si spiegano osservando che possiamo avere soluzioni valide sia nel caso $g(x) < 0$ che nel caso $g(x) \ge 0$; nel primo caso basterà che la radice esista ($f(x) \ge 0$) e sarà ovviamente maggiore di un numero negativo; nel secondo caso, con entrambi i membri positivi o nulli bisognerà anche elevare alla n.

[15] Per il teorema di Ruffini.

Osserviamo che nel secondo sistema la condizione di esistenza $f(x) \geq 0$ è superflua dato che poi $f(x)$ deve essere maggiore di una potenza pari. Quindi si avrà

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases}$$

Esempio 1.5.17. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{2x^2 - 1} > -2x - 1$$

per quanto detto la disequazione risulta equivalente ai sistemi

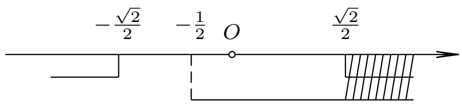
$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ -2x - 1 < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 1 > 4x^2 + 4x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq \frac{1}{2} \\ 2x > -1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + 4x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cup \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ (x+1)^2 < 0 \quad \nexists \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cup \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il secondo sistema non da soluzioni mentre per il primo usiamo un grafico d'intersezione



Soluzioni finali: $x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, in intervalli: $[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$.

Esercizi Alcuni esercizi su equazioni e disequazioni irrazionali.

1. $\sqrt{2x^2 - 7x + 4} = 1$ $(\frac{1}{2}, 3)$
2. $\sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 8} = x - 2$ $(0, \frac{11}{5})$
3. $\sqrt{x^2 + 3x + 9} = x - 3$
4. $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{5x - 1} = 0$ (1)
5. $\sqrt{x^2 + 3} > 3x - 1$ $(x < 1)$
6. $x - \sqrt{25 - x^2} > 7$ $(\nexists x)$
7. $\sqrt{4 - 9x^2} > x + 2$ $(-\frac{2}{5} < x < 0)$
8. $\sqrt{3(x^2 - 1)} < 5 - x$ $(-7 < x \leq -1; 1 \leq x < 2)$
9. $\sqrt[3]{x^3 + 2} > x - 1$
10. $\sqrt{-x^2 + 3x + 10} > x + 2$ $(-2 < x < \frac{3}{2})$
11. $\sqrt{-x^2 + x + 2} > x - 4$ $(-1 \leq x \leq 2)$
12. $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 5} \geq \sqrt{5 - x}$ (5)
13. $\sqrt{x + 1} > \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $(x > \sqrt{2})$
14. $\frac{x - \sqrt{x-1}}{x^2+2} > 0$ $(x \geq 1)$
15. $\frac{x - \sqrt{x^2-2x-3}}{x^2-x} \leq 0$ $(x \leq -1)$

1.5.6 Esercizi riassuntivi

1. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2} > \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$ $\qquad (x \geq 2)$

2. $\sqrt[3]{x^3-2x^2-2x+5} > x-1$ $\qquad (x < 2 \quad \cup \quad x > 3)$

3. $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+x}-1\right| > 2$ $\qquad (-2 < x < \frac{2}{3}; \quad x \neq -1)$

4. $|x^2-1|+|x| > 5$ $\qquad (x < -2 \quad \cup \quad x > 2)$

5. $\sqrt{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} > 1$

6. $\dfrac{x|x-1|}{x+1} > 0$ $\qquad (x < -1 \quad \cup \quad 0 < x < 1 \quad \cup \quad x > 1)$

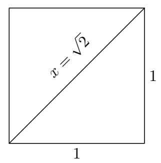
Capitolo 2

Appendici

2.1 Cosa e dove

Nell'insieme $\mathbb{N}$ possiamo risolvere equazioni ma solo entro certi limiti; ad esempio l'equazione $2x - 4 = 0$ ha soluzione $x = 2$ ma l'equazione $2x + 4 = 0$ ha soluzione $x = -2$ che non appartiene a $\mathbb{N}$; un discorso analogo vale per $\mathbb{Z}$ considerando le equazioni $2x + 4 = 0$ e $2x + 3 = 0$; quest'ultima ha soluzione $-\frac{3}{2}$, un numero razionale; in generale possiamo dire che l'equazione $ax + b = 0$ ha **sempre** soluzione solo se x può assumere valori in $\mathbb{Q}$. E' ragionevole chiedersi quali altri problemi possano richiedere l'introduzione di nuovi numeri.

Dalla geometria è noto che un quadrato con lati di misura 1 ha diagonale di misura x che deve soddisfare il teorema di Pitagora, cioè $x^2 = 1^2 + 1^2$, vale a dire $x^2 = 2$. Questa equazione di secondo grado ha come soluzioni i numeri $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ che non sono razionali.



Riportiamo per comodità la dimostrazione di questo fatto:

Proposizione 2.1.1. *Il numero* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dim. Per assurdo. Supponiamo che esistano numeri interi m e n relativamente primi, tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Elevando al quadrato si ottiene $2 = \frac{m^2}{n^2}$ dove m^2 e n^2 non hanno fattori comuni e - in particolare - non sono entrambi pari. Anche m e n, di conseguenza, non sono entrambi pari perchè il quadrato di un numero dispari[1] è dispari[2]. Semplificando otteniamo $2n^2 = m^2$ da cui si deduce che m^2 è pari e così anche m, cioè $2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ da cui $n^2 = 2k^2$. Allora anche n^2 e n sono pari; questa è una contraddizione perchè avevamo stabilito che m e n non potevano essere entrambi pari. □

Esercizi

2.2 Naturali e Interi

I numeri appartenenti ad $\mathbb{N}$, chiamati comunemente **numeri naturali**, non soddisfano tutte le proprietà elencate nel paragrafo 1.2. La proprietà P.1 certamente vale ma la P.2 vale solo se consideriamo $0 \in \mathbb{N}$ ed è quello che faremo[3]. Quindi per noi

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

[1] Cosa c'entrano i dispari?
[2] Dimostrare per esercizio
[3] Non tutti gli autori fanno questa scelta.

Le proprietà P.3 e P.7 certamente non valgono quindi considerando quanto detto nel paragrafo 2.1 e riflettendo sulle dimostrazioni delle regole elencate nel paragrafo 1.4, concludiamo che l'insieme $\mathbb{N}$ è molto povero algebricamente. Tuttavia questi numeri sono importanti per molti motivi non ultimo il fatto che gran parte della matematica si fonda su di essi[4] e che li usiamo per **contare**, procedimento senza dubbio fra i più primitivi. Non è secondario il fatto che abbiano un ruolo centrale in molte questioni informatiche e algoritmiche[5]. Lo strumento più importante che abbiamo a disposizione per fare dimostrazioni con i numeri naturali è il seguente:

Principio 1 (**Induzione matematica**). *Sia $x \in \mathbb{N}$ e P una certa proprietà dei naturali; indichiamo con $P(x)$ il fatto che la proprietà P valga per il numero x. Allora il principio afferma che $P(x)$ è vera per tutti gli x naturali se sono verificate le seguenti:*

$$P(0) \quad \text{è vera} \tag{1}$$

$$\text{se } P(k) \text{ è vera, allora } P(k+1) \text{ è vera} \tag{2}$$

Osservazione. L'enunciato sembra certamente strano e ancor più strano che lo si debba considerare un *Principio*. La sua utilità (anzi, indispensabilità) si potrà comprendere solo con molti esempi. Il principio è *equivalente* alla proprietà seguente:

Principio 2 (**Buon ordinamento**). *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme di numeri naturali non vuoto. Allora A ha un elemento minimo.*

L'equivalenza dei due principi si può facilmente dimostrare (vedere esercizi riassuntivi) e il Buon ordinamento sembra molto più evidente e facile da accettare. Si ricordi comunque che nessuno dei due è dimostrabile usando le proprietà P.1 ... P12.

Esercizio 2.2.1. Ogni numero naturale è pari o dispari[6].

Ricordiamo che un numero si dice *pari* se è della forma $2k$ per un qualche intero (naturale) k e si dice *dispari* se è della forma $2k+1$.

Buon ordinamento. Sia A l'insieme dei numeri naturali che non sono ne pari ne dispari. Dimostreremo che A è vuoto. Per assurdo: sia A non vuoto; allora per il Buon ordinamento sia $m \in A$ minimo che non sia ne pari ne dispari; consideriamo $m-1$, non può essere pari perchè se $m-1=2k$ allora $m=2k+1$ e sarebbe dispari e quindi $m \notin A$; analogamente $m-1$ non può essere dispari perchè se $m-1=2k+1$ allora $m=2k+2=2(k+1)=2k_1$ e sarebbe pari quindi $m \notin A$; concludiamo che $m-1 \in A$ non essendo ne pari ne dispari. Questo è assurdo perchè $m-1<m$ ma m era il minimo di A. □

Induzione matematica. Sia $P(x)$ la proprietà "essere pari o dispari". Per il principio di induzione dobbiamo dimostrare che $P(0)$ è vera: infatti $0 = 2 \cdot 0$ e quindi è pari. Dimostriamo ora la proprietà 2). Supponiamo che $P(k)$ sia vera per un qualche valore k, dobbiamo far vedere che allora è vera anche $P(k+1)$.

Siccome $P(k)$ è vera, k sarà pari o dispari. Se k è pari allora $k=2h$ e $k+1=2h+1$ è dispari, quindi $P(k+1)$ è vera. Se Se k è dispari allora $k=2h+1$ e $k+1=2h+2=2(h+1)=2h_1$ è pari, quindi $P(k+1)$ è vera. In ogni caso $P(k+1)$ è vera. □

Esercizi

2.3 Reali

Esercizi

[4]Un famoso matematico, Kronecker, soleva dire che i numeri naturali sono creati da Dio, il resto è opera dell'uomo.
[5]Si veda il paragrafo 2.4 e il documento "Laboratorio Matematica".
[6]Ma non è ovvio?, dirà lo studente.

2.4 Numeri interi e calcolatori

Esercizi

2.5 Numeri reali e calcolatori

Esercizi

Capitolo 3

Funzioni

3.1 Introduzione

La nozione che vogliamo studiare è quella di **funzione**. Lo studente ha già incontrato questa nozione in precedenza ma la sua importanza è tale che si rende necessario riprenderla e approfondirla. In futuro le funzioni saranno riprese molte volte e ancora molte volte sarà necessario approfondire questo concetto; anzi, non crediamo di esagerare se diciamo che nei prossimi tre anni ci occupero *sostanzialmente* di funzioni.

A scopo puramente illustrativo esaminiamo alcuni esempi di funzioni.

Definizione 3.1.1 (Provvisoria)**.** Una *funzione* è una *regola* che associa ad un certo numero un altro numero.

Esempio 3.1.1. la regola che associa ad **ogni** numero il suo quadrato.

Esempio 3.1.2. la regola che associa ad un **numero positivo** la sua radice quadrata.

Esempio 3.1.3. la regola che associa ad ogni numero $x \neq 1$ il numero $\dfrac{x^3+3}{x-1}$.

Esempio 3.1.4. la regola che associa ad ogni numero s che soddisfa $-3 \leq s \leq 5$ il numero $\dfrac{s}{s^2+1}$.

Esempio 3.1.5. la regola che associa al numero 1 il numero 5, al numero 15 il numero $\frac{12}{\pi}$, a tutti i numeri diversi dai precedenti il numero 16.

Esempio 3.1.6. la regola che associa a tutti i numeri irrazionali il numero 0, a tutti i numeri razionali il numero 1.

Esempio 3.1.7. la regola che associa ad un numero reale il numero 0 se nelle cifre decimali del numero compaiono un numero finito di cifre pari altrimenti 1.

Dagli esempi emergono le seguenti osservazioni:

- Una funzione è una regola *qualsiasi* che associa numeri a numeri e non una regola per la quale esiste una espressione algebrica che la rappresenta.
- Non è necessario che la regola si applichi a tutti i numeri noti. In qualche caso può essere anche poco chiaro a quali numeri la regola si applichi (per es. 3.1.7).
- Sembra necessario dare un nome all'insieme dei numeri per i quali *effettivamente* si può calcolare il valore della funzione. Tale insieme si dirà **dominio**[1].

[1] Nel prossimo paragrafo tutte le definizioni saranno raccolte in modo ordinato.

- Le funzioni elencate sottolineano la necessità di usare una qualche notazione specifica per indicarle. In generale useremo le lettere f, g, ecc. per le funzioni e le lettere x, y ecc. per indicare i numeri. Il valore che la funzione associa al numero x si indicherà con $f(x)$ che si legge 'f di x' e che si dice anche il valore di f in x o anche l'immagine di x.

Un modo più ordinato per definire le funzioni precedenti è il seguente:

$$f(x) = x^2 \quad \text{per ogni } x \tag{3.1}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{per ogni } x \geq 0 \tag{3.2}$$

$$h(x) = \frac{x^3+3}{x-1} \quad \text{per ogni } x \neq 1 \tag{3.3}$$

$$r(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{per ogni numero } s \text{ tale che} -3 \leq s \leq 5 \tag{3.4}$$

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 5 \\ 15 & \text{se } x = \dfrac{12}{\pi} \\ 16 & \text{ad ogni altro } x \end{cases} \tag{3.5}$$

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{per ogni } x \text{ irrazionale} \\ 1 & \text{per ogni } x \text{ razionale} \end{cases} \tag{3.6}$$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se nelle cifre decimali del numero } x \text{ compaiono infinite cifre pari} \\ 1 & \text{per ogni altro } x \end{cases} \tag{3.7}$$

Osservazione: spesso, nell'indicare funzioni, si potranno usare delle abbreviazioni come, ad esempio, la funzione

$$v(t) = \frac{t}{t-1} \quad t \neq 1$$

potrà essere indicata come

$$v(t) = \frac{t}{t-1}$$

senza specificare il dominio; in questo caso è ovvio che si intende come dominio l'insieme dei numeri per i quali ha senso calcolare la funzione.

Osservazione: molta attenzione va prestata al seguente fatto: le due funzioni

$$r(x) = x + \frac{x+1}{x-1}$$
$$t(y) = y + \frac{y+1}{y-1}$$

sono la **stessa** funzione. Anche se i nomi delle funzioni e delle lettere che indicano i numeri sono diverse.

Invece nel caso noi scrivessimo:

$$r(x) = x + \frac{x+1}{x-1} \quad -3 \leq x \leq 0$$
$$t(y) = y + \frac{y+1}{y-1}$$

dovremmo considerare **diverse** le due funzioni dato che il dominio non coincide.

Osservazione: ricordiamo anche che, nonostante sia decisamente una perversione, l'uso delle lettere che abbiamo indicato rappresenta la *consuetudine* ma non un obbligo; quindi è perfettamente lecito definire una funzione in questo modo (e ci sono contesti in cui si fa):

$$x(f) = f + \frac{f+1}{f-1}$$

in questo caso il nome della funzione è x mentre i numeri si sostituiscono alla lettera f.

Prima di procedere ad una più precisa definizione di funzione è necessario capire bene cosa esattamente caratterizza la nozione di funzione. Nella definizione 3.1.1 provvisoria abbiamo parlato di *regola* qualsiasi che associa ad un numero un altro numero. Come precisiamo la nozione di *regola*? In effetti sarebbe troppo complicato restringere il significato della parola regola per ottenere l'esatto intendimento dei matematici quando pensano al concetto di funzione. Alla fine, come spesso succede in matematica, quello che conta è il risultato finale: che cos'è una funzione? per ogni elemento x del dominio dobbiamo conoscere l'elemento a cui viene associato cioè $f(x)$ e quindi sostanzialmente una coppia ordinata[2] $(x, f(x))$; una funzione diventa un'insieme di coppie che possiamo rappresentare, per esempio per $f(x) = x^3$, con una tabella:

x	$f(x) = x^3$
1	1
-1	-1
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2^3}$
$\sqrt[3]{2}$	2
$-\sqrt[3]{2}$	-2
π	π^3

oppure come elenco:

$$f = \{(1,1), (-1,-1), (\sqrt{2}, \sqrt{2^3}), (\sqrt[3]{2}, 2), (-\sqrt[3]{2}, -2), (\pi, \pi^3), \dots\}$$

Per trovare il numero associato al numero 1 basta scorrere l'elenco e trovare la coppia $(1,1)$ e così via. Supponiamo ora di avere una funzione definita dall'insieme: $g = \{(1,3), (2,5), (1,6), (3,5), \dots\}$ chi sarà l'immagine del numero 1? Troviamo la coppia $(1,3)$ ma anche la coppia $(1,6)$ quindi non sarà possibile dire che $g(1) = 3$ e neanche che $g(1) = 6$); la funzione g non è ben definita: non è *univoca*. La condizione di univocità è la caratteristica più importante della nozione di funzione.

Pensare alle funzioni come regole è più semplice che pensarle come insiemi di coppie ma quest'ultimo modo è più rigoroso e permette di condurre più facilmente le dimostrazioni: si tratta di una definizione più *astratta*. Naturalmente nessuno può vietarci di *pensare* alle funzioni come a delle regole.

Esercizi

3.2 Definizioni

Definiamo il concetto di coppia.

Definizione 3.2.1. Per coppia (a, b) si intende l'insieme *ordinato* dei due elementi a e b, non necessariamente distinti, in cui ha rilevanza l'ordine.

Osservazione: è evidente che la coppia (a, b) si distingue dall'insieme $\{a, b\}$ perchè mentre $\{a, b\} = \{b, a\}$ per le coppie si ha $(a, b) \neq (b, a)$ cioè nelle coppie è rilevante l'ordine degli elementi. Inoltre, mentre la coppia (a, a) contiene effettivamente due elementi, l'insieme $\{a, a\}$ si riduce ad $\{a\}$.

[2] La definizione al prossimo paragrafo.

Definizione 3.2.2. Si definisce *Prodotto cartesiano* di due insiemi A e B l'insieme di *tutte* le possibili coppie (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ e si scrive:

$$A \times B = \big\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\big\}$$

Esempio 3.2.1.

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3\} \\
B &= \{1, 2\} \\
A \times B &= \big\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\big\} \\
B \times A &= \big\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\big\} \\
B \times B &= B^2 = \big\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\big\}
\end{aligned}$$

Naturalmente A e B non necessariamente sono insiemi numerici:

Esempio 3.2.2.

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3\} \\
B &= \{r, t\} \\
A \times B &= \big\{(1, r), (1, t), (2, r), (2, t), (3, r), (3, t)\big\} \\
B \times A &= \cdots \\
B \times B &= B^2 = \big\{(r, r), (r, t), (t, r), (t, t)\big\}
\end{aligned}$$

E naturalmente A e B non necessariamente sono insiemi *finiti*:

Esempio 3.2.3.

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2\} \\
B &= \mathbb{N} \\
A \times B &= \big\{(1, 0), (2, 0), (1, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 3), \dots\big\} \\
B \times A &= \cdots \\
B \times B &= B^2 = \big\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), \dots\big\}
\end{aligned}$$

Definizione 3.2.3. Si chiama *funzione* un insieme di coppie di numeri tali che se due coppie hanno lo stesso primo elemento allora sono la stessa coppia (univocità). In simboli: se (a, b) e (a, c) appartengono alla funzione allora $b = c$.

Definizione 3.2.4. Si chiama *dominio* di una funzione f l'insieme dei numeri a per i quali esiste un b tale che la coppia (a, b) appartiene a f. Per la definizione precedente è ovvio che tale b è unico e si indicherà con $f(a)$ e si chiama *immagine* di a. In questo caso a si dice anche *controimmagine* o anche *immagine inversa* di b; è evidente che la controimmagine di un numero non è sempre unica e quindi si dirà spesso l'insieme delle controimmagini. Si chiama *codominio* qualsiasi insieme che contenga tutti i numeri b tali che (a, b) appartenga a f.

Osservazione: nella definizione 3.2.4 vi è una chiara asimmetria fra dominio e codominio. Il motivo risiede nella centralità della nozione di univocità che dipende solo dal dominio.

Osservazione: nella definizione 3.2.3 abbiamo parlato genericamente di numeri senza specificare di che tipo sono. Sottointendiamo che si tratta di numeri **reali** ($\mathbb{R}$). Naturalmente nessuno vieta che per particolari funzioni il dominio sia limitato a sottoinsiemi di numeri quali i naturali ($\mathbb{N}$) o gli interi ($\mathbb{Z}$) o i razionali ($\mathbb{Q}$) o qualche sottoinsieme degli stessi.

Osservazione: dalla definizione risulta chiaro che le nostre funzioni sono **numeriche**, vale a dire mandano numeri in numeri. Come lo studente già saprà, è possibile definire funzioni più astratte che associano tra loro oggetti che non sono numeri: per esempio possiamo pensare ad un procedimento che associa ad ogni studente di una classe il suo nome oppure il suo numero di telefono ecc. Queste associazioni si chiamano **applicazioni** o **mappe** e sono definibili fra insiemi di oggetti qualsiasi. Non studieremo questo argomento in questo contesto.
Spesso useremo la seguente forma grafica per indicare una funzione:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- f indica la legge che definisce la funzione
- l'insieme A è il *dominio* della funzione
- l'insieme B è il *codominio* della funzione

Spesso useremo anche il simbolo $f(A) = \{\text{insieme delle immagini } f(x) \text{ con } x \in A\}$
Come esempi di funzioni valgono quelli già esposti in 3.1; aggiungiamo qualche altro caso.

Esempio 3.2.4. Sia $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \mathbb{N}$. Consideriamo

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto 3x + 1 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $f = \{(0, 1), (1, 4), (2, 7), (3, 10)\}$. In questo caso $f(A) = \{1, 4, 7, 10\}$ e naturalmente $f(A) \subseteq B$.

Esempio 3.2.5. Sia f la funzione che esprime il volume V di un cubo in funzione della lunghezza l del suo lato.

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & l \longmapsto V = f(l) = l^3 \end{aligned}$$

Ricordiamo che $\mathbb{R}^+$ (ma anche $\mathbb{R}^>$) indica l'insieme dei numeri reali positivi. Il domino di questa funzione potrebbe comprendere anche il numero 0 supponendo che anche il cubo di lato 0 abbia significato. Anche in questo caso abbiamo ovviamente $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$. Problema: ha senso porre $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$?

Esempio 3.2.6. Sia g la funzione che associa ad ogni numero pari la sua metà e ad ogni numero dispari la metà del numero precedente:

$$\begin{aligned} g: \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Esempio 3.2.7. Sia h la funzione che esprime la frequenza percentuale di un certo gruppo di studenti suddivisi secondo classi di statura.

Statura (cm)	Percentuale
$150 \leq x < 160$	15.1
$160 \leq x < 170$	20.3
$170 \leq x < 175$	28.1
$175 \leq x \leq 180$	18.2
$180 < x < 190$	13.4
$x \geq 190$	5.9

In questo caso la funzione è definita mediante una tabella.

Problema: la funzione h è effettivamente una funzione? Come la descrivereste in termini di coppie?

Esercizi

Esercizio 3.2.1. Stabilire se le seguenti relazioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2-3 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \geq 2 \\ 2x+1 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Esercizio 3.2.2. Determinare il dominio delle funzioni:

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad g(x) = \frac{2}{x^2+3x} \qquad h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$k(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \qquad t(x) = \sqrt{\frac{|x|-1}{x^2-1}}$$

Esercizio 3.2.3. Data la funzione $f(x) = -\frac{2}{3}x$, calcolare:

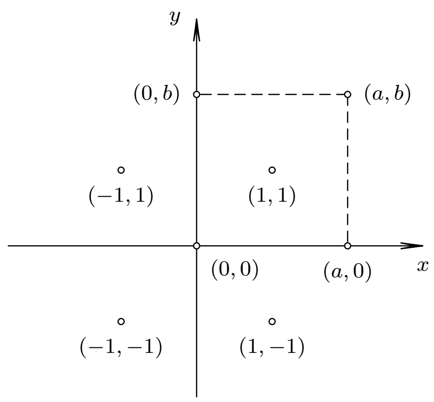
1. le immagini tramite f di $x_1 = 3$ e di $x_2 = -\frac{7}{2}$
2. le controimmagini di $y_1 = 8$ e di $y_2 = \frac{4}{3}$

Esercizio 3.2.4. Date le funzioni $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$, determinare, se esistono, i valori di x per cui le due funzioni hanno la stessa immagine.

Esercizio 3.2.5. Analogamente per le funzioni $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$ e $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{4}$

3.3 Grafici

La nozione di piano cartesiano si assume come già nota dal biennio. Ricordiamo che una coppia di numeri reali (a, b) rappresenta un punto del piano e che viceversa un punto del piano è rappresentato da una coppia di numeri reali. Riassumiamo in un disegno la struttura del piano cartesiano con le coordinate dei punti nei vari quadranti:



E' evidente che se una coppia di numeri rappresenta un punto, una funzione, che è un insieme di coppie, sarà rappresentabile mediante un insieme di punti. Infatti si può dare la seguente:

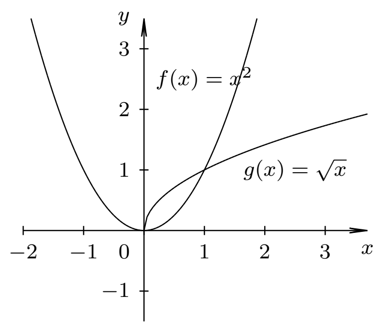
Definizione 3.3.1. Sia f una funzione

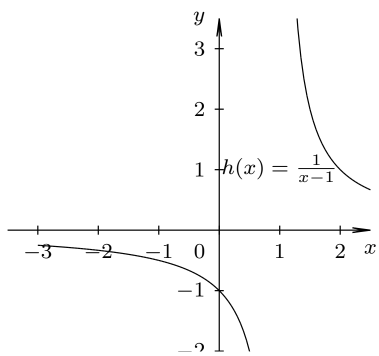
$$f: \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

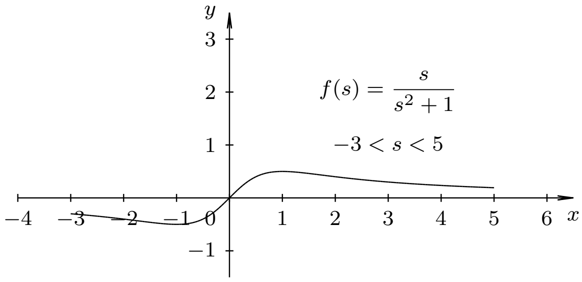
si chiama *grafico* della funzione f l'insieme dei punti del piano cartesiano:

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Ecco alcuni esempi di grafici di funzioni di cui abbiamo parlato:

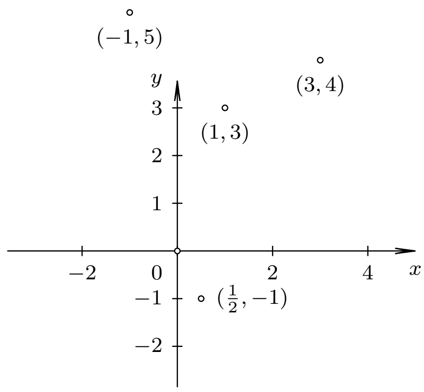






Per costruire il grafico di una funzione sarà necessario procurarsi un certo numero di coppie che poi saranno disegnate sul piano cartesiano. Ovviamente sarà possibile calcolare e disegnare **tutte** le coppie appartenenti alla funzione solo se queste sono in numero finito. Nel caso di infinite coppie se ne disegneranno alcune[3] e poi si congiungeranno i punti ottenuti mediante archi di curva che ragionevolmente rappresenteranno i punti mancanti.

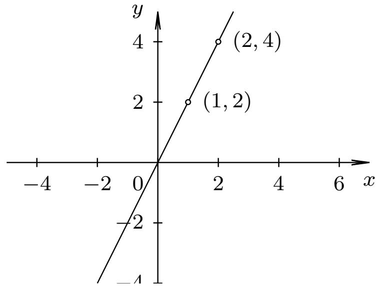
Esempio 3.3.1. Sia f la funzione $f = \{(1,3), (-1,5), (3,4), (\frac{1}{2}, -1)\}$



Esempio 3.3.2. Sia g la funzione

$$\begin{aligned} g:\ \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto 2x \end{aligned}$$

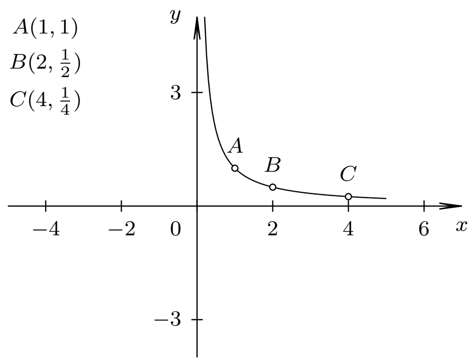
In questo caso sappiamo che la funzione è rappresentata da una retta e quindi basterà calcolare le coordinate di due soli punti: $x = 1$ da cui $g(1) = 2$ e $x = 2$ da cui $g(2) = 4$



[3] Nel corso di studi si vedranno molte altre tecniche per tracciare grafici di funzioni.

Esempio 3.3.3. Sia g la funzione

$$\begin{aligned} h: \quad \mathbb{R}^{>} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$



In questo esempio si vede come sia necessario congiungere i punti calcolati con archi di curva per avere un grafico realistico; naturalmente se si calcola un numero maggiore di punti si ha maggiore aderenza al grafico corretto.

Esercizi

Esercizio 3.3.1. Tracciare i grafici delle seguenti funzioni reali:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \\ g(x) &= \frac{1}{3}x - 2 \\ h(x) &= x^2 - 1 \\ r(s) &= |x-1| + 1 \\ s(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

3.4 Tipi di funzioni

Tra tutte le funzioni numeriche ne distinguiamo alcune classi[4] particolarmente importanti.
Una delle funzioni più importanti è certamente la funzione **identica**

$$\begin{aligned} I: \quad A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

La funzione associa ad ogni numero x se stesso. E' composta quindi dalle coppie (x, x). Notiamo che il dominio è identico al codominio.

Funzioni **polinomiali**

[4] Il problema della classificazione delle funzioni non è particolarmente semplice ma questo, per fortuna, riguarda solo i matematici.

$$
\begin{aligned}
f: \quad & A \longrightarrow B \\
& x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0
\end{aligned}
$$

Sono i classici polinomi e il valore della funzione si calcola sostituendo alla x il numero a. Il grado n del polinomio è il grado della funzione.
Un caso particolare di funzione polinomiale è la funzione **costante**

$$
\begin{aligned}
f: \quad & A \longrightarrow B \\
& x \longmapsto c
\end{aligned}
$$

che associa ad ogni elemento del dominio il numero c; si ottiene come polinomio di grado 0.

Esempi:

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1$
- $h(x) = \pi x^5 - 1$

Funzioni **razionali**

$$
\begin{aligned}
f: \quad & A \longrightarrow B \\
& x \longmapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots b_1 x + b_0}
\end{aligned}
$$

Sono quozienti di due polinomi e si richiede, naturalmente, che il polinomio $b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots b_1 x + b_0$ al denominatore non sia *sempre nullo*. Notare bene: non sia sempre nullo: questo significa che può valere 0 per qualche valore di x ma non per *tutti*.
Esempi:

- $r1(x) = \dfrac{x}{x-1}$
- $r2(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 2}$
- $r3(x) = \dfrac{x^2 - 3}{1}$
- $s(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

La stranezza della funzione $r3(x)$ testimonia soltanto che le funzioni polinomiali possono essere considerate casi particolari delle funzioni razionali.
Funzioni **irrazionali**

- $u(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$
- $v(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 2}$
- $z(x) = 5x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

Osservazione: spesso l'insieme delle funzioni razionali e irrazionali vengono indicate come **funzioni algebriche** cioè funzioni per le quali l'immagine si calcola con un numero finito di operazioni di somma, differenza, prodotto, quoziente ed estrazione di radice su un elemento del dominio; questa definizione non è strettamente rigorosa ma la useremo anche noi.

Osservazione: in tutti gli esempi precedenti non abbiamo specificato il **dominio** delle varie funzioni. Questa mancanza non deve essere considerata un errore ma semplicemente una scorciatoia. Significa che il dominio delle varie funzioni, dipendendo dalle operazioni algebriche che vi compaiono, deve essere considerato il più grande possibile. In altre parole: se in una funzione algebrica non compare esplicitamente il dominio, questo si intende composto da tutti i numeri per i quali le operazioni di calcolo della funzione hanno senso. Spesso questo insieme viene distinto dal dominio e chiamato *campo di esistenza*. Potremmo dire che il campo di esistenza di una funzione è il più grande dominio possibile. Per esempio la funzione r ha campo di esistenza $\mathbb{R} - \{1\}$ mentre la s e la t hanno campo di esistenza $\mathbb{R}$. La funzione u ha campo di esistenza $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ poichè la radice quadrata esiste solo se il numero è ≥ 0 e il denominatore della frazione non può essere nullo. La funzione v ha campo di esistenza $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ o } x \geq 1\ \}$ per motivi analoghi.

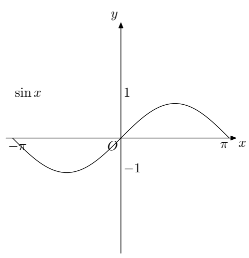
Funzioni **goniometriche**

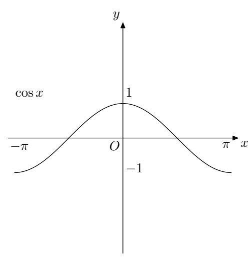
$$\begin{aligned} \sin : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ & x \longmapsto \sin x \end{aligned}$$

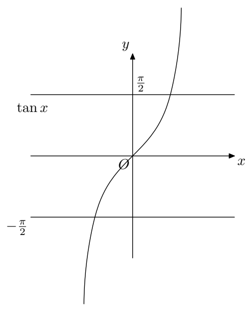
$$\begin{aligned} \cos : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ & x \longmapsto \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan : \quad & A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \\ & x \longmapsto \tan x \end{aligned}$$

Queste funzioni sono forse note ad alcuni studenti dal corso di fisica del biennio. In ogni caso saranno studiate a breve data la loro straordinaria importanza nelle applicazioni. Si tratta di funzioni **periodiche**, cioè i loro valori si ripetono infinite volte.







Esercizi

Esercizio 3.4.1. Per ciascuna delle seguenti funzioni indicare se è razionale (intera o fratta) o irrazionale e determinarne il campo di esistenza:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - x}{2x+1} \\ g(x) &= \frac{\sqrt{7}x+1}{2} \\ h(x) &= 3\sqrt{x+1} \\ r(s) &= 2\pi x \\ s(x) &= \frac{2}{\sqrt{(x+1)^2}} \end{aligned}$$

3.5 Operazioni

Sulle funzioni possiamo agire con **operazioni** che ci consentono di ottenere altre funzioni.

Definizione 3.5.1. Siano f e g due funzioni.
Per ogni valore di x per cui ha senso definiamo $f+g$ e la chiamiamo *somma*, la funzione tale che

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

e definiamo $f \cdot g$ e la chiamiamo *prodotto*, la funzione tale che

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Osservazione: il dominio della funzione somma o prodotto è l'intersezione dei domini delle funzioni componenti (vedi esempi).

Esempio 3.5.1.

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$$

La funzione somma sarà:

$$(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{1-x}$$

Il dominio (campo di esistenza) di f è $\mathbb{R}$ mentre quello di g è $x \leq 1$; perciò il dominio di $f+g$ sarà l'intersezione dei due, vale a dire $x \leq 1$.

Esempio 3.5.2.

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

La funzione prodotto sarà:

$$(f \cdot g)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$$

Il dominio (campo di esistenza) di f è $\mathbb{R}$ mentre quello di g è $x < 1$; perciò il dominio di $f \cdot g$ sarà l'intersezione dei due, vale a dire $x < 1$.

L'operazione di gran lunga più importante è la **composizione** o **prodotto di composizione** di funzioni:

Definizione 3.5.2. Siano f e g due funzioni

$$f: \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \qquad\qquad g: \begin{array}{l} B \longrightarrow C \\ x \longmapsto g(x) \end{array}$$

la funzione *composta* di g e f, detta anche g *tondino* f, è la funzione che manda ogni x di un opportuno dominio in $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, cioè

$$g \circ f: \begin{array}{l} A \longrightarrow C \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

Osservazione: il dominio di $g \circ f$ è composto da tutte le x del dominio di f tali che $f(x)$ è contenuto nel dominio di g. Questo perché, per poter calcolare l'elemento $g(f(x))$, il numero $f(x)$ deve appartenere al dominio di g. Il codominio di $g \circ f$ sarà C perché l'ultima funzione applicata è g.
Un grafico può chiarire meglio la situazione:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Osservazione: osserviamo anche che la funzione composta pone f alla destra di g quando apparentemente f dovrebbe comparire a sinistra. Il motivo risiede nel fatto che la f è la prima funzione che viene applicata e quindi nella notazione funzionale $g(f(x))$ deve essere posta vicino alla x, cioè a destra. Questo giustifica il fatto che è meglio dire g *tondino* f piuttosto che *la funzione composta di* f *e* g. Un altro motivo importante è che $g \circ f$ è **diversa** da $f \circ g$ come si vedrà dagli esempi.

Esempio 3.5.3.

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$$

In questo caso

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{1-x^2}$$

come si può notare il calcolo di $(g \circ f)(x)$ è semplice: si applica a x la funzione f ottenendo il **numero** $f(x)$ che poi andrà sostituito nella funzione g al posto di x.
Il campo di esistenza di f è $\mathbb{R}$ mentre quello di g è $x \leq 1$. Il campo di esistenza della funzione $g \circ f$ si ottiene osservando che il codominio di f è $\mathbb{R}^{\geq}$ ma solo i numeri x tali che $x \leq 1$ appartengono al campo di esistenza di g; quindi solo i numeri $x^2 \leq 1$, cioè $-1 \leq x \leq 1$, sono ammissibili nel campo di esitenza di $g \circ f$. Lo stesso risultato si ottiene semplicemente osservando l'espressione algebrica di $g \circ f$ e cioè $\sqrt{1-x^2}$; la radice è calcolabile solamente per i valori del radicando ≥ 0, cioè $1 - x^2 \geq 0$, $x^2 \leq 1$, da cui il risultato già trovato.
Osserviamo che la funzione composta $f \circ g$ è

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2$$

conludiamo che la funzione $(f \circ g)$ è molto diversa dalla $(g \circ f)$. Il campo di esistenza della $(f \circ g)$ è $x \leq 1$.

Esempio 3.5.4.

$$g(x) = \sqrt{1-x}$$

Possiamo comporre la funzione g con se stessa

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{1-x}) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$$

Il campo di esistenza di g è $x \leq 1$ mentre quello di $(g \circ g)$ è: $1 - \sqrt{1-x} \geq 0$, $1 \geq \sqrt{1-x}$, $1 \geq 1 - x$, $x \geq 0$; quindi finalmente $0 \leq x \leq 1$. Notiamo che il campo di esistenza è ben diverso da quello di g.

Esempio 3.5.5. La funzione

$$f(x) = \sqrt{3x\sqrt{1+x^2}}$$

può essere pensata come la composizione delle funzioni

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$$

mentre la funzione h può essere pensata come il prodotto delle funzioni

$$m(x) = 3x \qquad n(x) = \sqrt{1+x^2}$$

e finalmente la funzione n è la composizione delle funzioni

$$p(x) = \sqrt{1+x} \qquad q(x) = x^2$$

perciò abbiamo

$$f(x) = (g \circ (m \cdot (p \circ q)))(x)$$

La nozione più importante legata a quella di composizione di funzioni è quella di funzione **inversa**.

Definizione 3.5.3. Sia f una funzione

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

diciamo *funzione inversa* della f la funzione g (se esiste) tale che

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$$

e

$$(f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in B$$

nel caso la funzione g esista la si indica con f^{-1} e quindi

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A \qquad\qquad (f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in B$$

Esempio 3.5.6. Sia f la funzione tale che $f(x) = 2x$, cioè

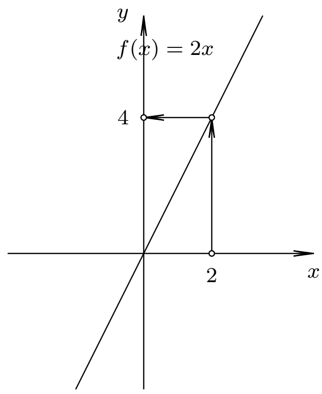
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

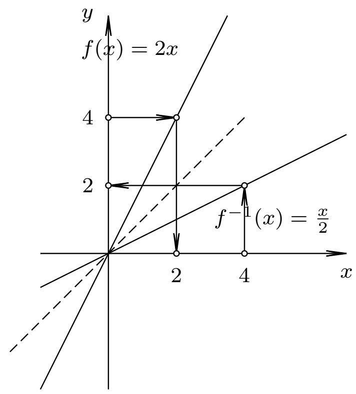
allora $f^{-1} = \dfrac{x}{2}$; infatti

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(\frac{x}{2}) = 2\frac{x}{2} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(2x) = \frac{2x}{2} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$





Osserviamo che la funzione inversa consente di tornare **indietro**, cioè partendo da x la f porta in $f(x)$ e la f^{-1} riporta in x. Però vale anche il viceversa: se partiamo da x e applichiamo la f^{-1} questo ci porta in $f^{-1}(x)$ e poi applicando la f ritorniamo in x.

Nella seconda figura abbiamo disegnato entrambe le funzioni f e f^{-1} e possiamo osservare come il loro grafico sia simmetrico rispetto alla retta bisettrice del primo quadrante. Tale retta è il grafico della funzione $f(x) = x$ come ci si dovrebbe aspettare.

Questo fatto vale sempre: il grafico della funzione inversa è simmetrico di quello della funzione diretta, rispetto alla bisettrice del primo quadrante[5].

Esempio 3.5.7. Sia f la funzione tale che $f(x) = x^2$, cioè

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

[5] Lo studente virtuoso può cercare di dimostrarlo.

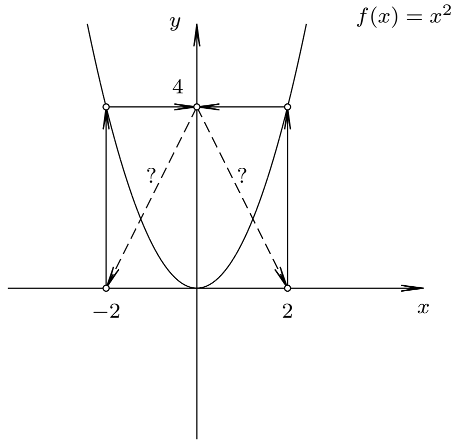
in questo caso la funzione inversa non esiste; infatti per tornare indietro dopo aver quadrato un numero devo estrarre la radice quadrata, quindi la funzione inversa non può che essere $\sqrt{x}$; ma allora si avrebbe:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2}$$

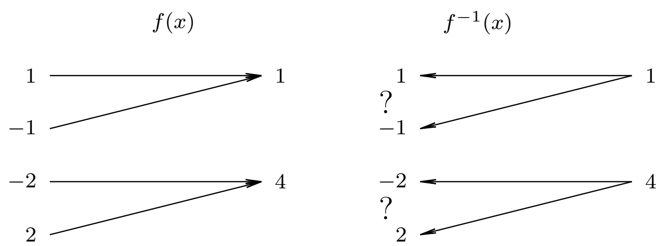
ma $\sqrt{x^2} \geq 0$ mentre se noi partiamo con $x < 0$ non ritorniamo più nella stessa x; in pratica se $x = -2$

$$(f^{-1} \circ f)(-2) = f^{-1}(4) = \sqrt{4} = 2$$

che non va bene. Peggio ancora se tentiamo di comporre nel senso opposto: $(f \circ f^{-1})(x) = f(\sqrt{x})$ ma non possiamo inserire alcun numero negativo nella composizione.



L'ultimo esempio suggerisce che ci devono essere delle condizioni affinchè la funzione inversa possa esistere. Il primo problema è che nella funzione 3.5.7 compaiono coppie diverse - per l'esattezza due - con la stessa immagine: $\{(1,1),(-1,1),(2,4),(-2,4)\dots\}$ e questo significa che quando torniamo indietro, cioè applichiamo la funzione inversa, abbiamo **due** numeri da associare a ciascuna immagine; dovremmo formare così le coppie: $\{(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),\dots\}$ e questo non è possibile per la definizione di funzione.



Diamo perciò la seguente:

Definizione 3.5.4. Sia f una funzione

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

diciamo che la funzione è *iniettiva* se

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in A$$

La funzione dell'esercizio 3.5.7 non è iniettiva perché ad esempio $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, si ha $x_1 \neq x_2$ ma $f(x_1) = f(2) = 4 = f(x_2) = f(-2)$. La non iniettività non permette di tornare indietro univocamente mediante la funzione inversa e quindi quet'ultima non esiste. L'iniettività non è sufficiente per l'ivertibilità delle funzioni; infatti sempre nell'esempio 3.5.7 in cui il codominio è $\mathbb{R}$, questo dovrebbe diventare dominio della funzione inversa; ma, come abbiamo osservato, l'inversa è la radice quadrata e questa non esiste per $x < 0$. Il problema è che l'insieme di tutte le immagini $f(x)$, che indichiamo con $f(A)$ ($f(\mathbb{R})$ nel nostro esempio), non **ricopre** tutto il codominio e quindi, per alcuni valori di $f(x)$ non possiamo tornare indietro.
Diamo perciò la seguente:

Definizione 3.5.5. Sia f una funzione

$$\begin{aligned} f:\quad & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

diciamo che la funzione è *suriettiva* se

$$f(A) = B$$

in altri termini, se

$$\forall y \in B \text{ (codominio di f) } \exists x \in A \text{ (dominio di f) tale che } y = f(x)$$

Evidentemente la funzione 3.5.7 non è suriettiva mentre la funzione dell'esempio 3.5.6 è iniettiva e suriettiva e questo basta perchè sia invertibile. Mettendo assieme le due cose abbiamo:

Definizione 3.5.6. Una una funzione f si dice *biiettiva* o *biunivoca* se è iniettiva e suriettiva.

Per quanto detto, una funzione biiettiva è invertibile[6]

Esempio 3.5.8. Sia f la funzione tale che $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, cioè

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R}$ poichè x^2+1 è sempre positivo. Per calcolare l'immagine scriviamo l'equazione $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, anzi sostituiamo $f(x)$ con y per comodità di scrittura,

$$y = \sqrt{x^2+1}$$

Questa equazione ci dice che y non sarà mai negativo, anzi non sarà mai minore di 1 e quindi l'immagine $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ e perciò la funzione **non è suriettiva**. Alla stessa conclusione si arriva osservando che se prendiamo un $y \in \mathbb{R}$ tale che $y < 1$ non ci sarà alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$.

La funzione non risulta invertibile perchè non biiettiva; però possiamo restringere il codominio in modo che lo sia; ridefiniamo la funzione in questo modo:

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R} \longrightarrow B \\ & x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

con $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ Cerchiamo ora di risolvere l'equazione $y = \sqrt{x^2+1}$ rispetto a x; in altre parole cerchiamo i numeri x che hanno come immagine un particolare y. Se ne trovassimo uno solo allora la funzione sarebbe iniettiva; in caso fossero più d'uno non lo sarebbe.

$$y = \sqrt{x^2+1} \qquad y^2 = x^2+1 \qquad x^2 = y^2-1$$

e quindi

$$x = \pm\sqrt{y^2-1} \qquad \text{vale a dire } x = \sqrt{y^2-1} \quad \text{e } x = -\sqrt{y^2-1}$$

[6] Questa affermazione andrebbe rigorosamente dimostrata ma ci accontentiamo della evidenza illustrata negli esempi.

concludiamo che ogni y, cioè $f(x)$, è immagine di due x distinti e quindi la funzione **non è iniettiva** e perciò non invertibile. Anche in questo caso possiamo modificare la definizione di f per renderla iniettiva, intervenendo, in questo caso, sul dominio:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\geq} \longrightarrow B \\ x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

con $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.
Ricordiamo che con $\mathbb{R}^{\geq}$ intendiamo i numeri reali positivi o nulli (si dice anche non negativi).
La funzione diventa iniettiva poichè solo la soluzione $x = \sqrt{y^2-1}$ è ora accettabile. Quindi la **funzione inversa** sarà $f^{-1}(y) = \sqrt{y^2-1}$. Dato che quest'ultima è una funzione a tutti gli effetti, possiamo cambiare le lettere per indicarla: $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$, come già evidenziato nella definizione[7].

Osserviamo che con semplici restrizioni sul dominio e codominio di una funzione è possibile renderla biiettiva e quindi invertibile. Si tenga presente che ciò non è sempre possibile e neanche sempre facile. I motivi per cui le funzioni inverse sono importanti sarà chiarito più avanti quando si risolveranno alcuni particolari tipi di equazioni.

[7] Questo punto risulta molto delicato per la comprensione dello studente: sembra infatti che il cambiamento di lettere sia del tutto arbitrario; in effetti lo è.

Esercizi

Esercizio 3.5.1. Verificare che la funzione

$$\begin{aligned} f: \quad & \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{4}\right\} \\ & x \longmapsto x^2 + x \end{aligned}$$

è biunivoca.
Determinarne la funzione inversa, verificando che $f^{-1} \circ f = I$ e che $f \circ f^{-1} = I$, dove I è la funzione *identica*.

Esercizio 3.5.2. Date le funzioni reali:

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x - 1| \\ g(x) &= x^2 + 2x \\ h(x) &= \frac{2}{3}x - 1 \end{aligned}$$

discuterne la invertibilità, eventualmente restringendo il dominio e/o il codominio per renderle invertibili. Determinarne le funzioni inverse, verificandone la correttezza e tracciarne il grafico.

Esercizio 3.5.3. Date le funzioni :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2 \\ g(x) &= x^2 \\ h(x) &= 3x + 2 \end{aligned}$$

restringerne il dominio all'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ e quindi verificare che $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Esercizio 3.5.4. Date le funzioni reali:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ g(x) &= x - 4 \end{aligned}$$

determinare e confrontare $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 3.5.5. Date le funzioni reali:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ g(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

determinare e confrontare $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 3.5.6. Date le funzioni reali:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x - 1}{5} \\ g(x) &= x^2 \end{aligned}$$

della funzione f determinarne l'invertibilità ed eventualmente l'inversa. Determinare e confrontare le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

3.6 Proprietà notevoli

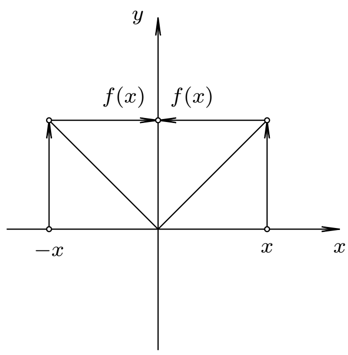
Definizione 3.6.1. Una funzione f si dice *PARI* se

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in \text{ dominio di } f$$

Esempio 3.6.1.

$$\begin{aligned} |\bullet| : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto |x| \end{aligned}$$

La funzione *valore assoluto* è una funzione pari, infatti $|-x| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Osserviamo che il grafico di una funzione **pari** è **simmetrico** rispetto all'asse y.

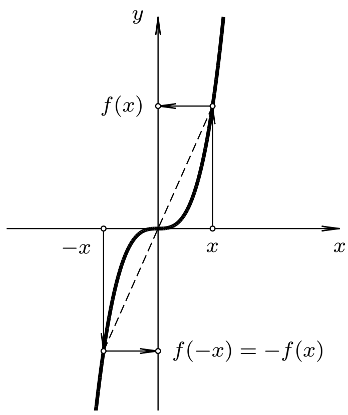
Definizione 3.6.2. Una funzione f si dice *DISPARI* se

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in \text{ dominio di } f$$

Esempio 3.6.2.

$$\begin{aligned} f : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^3 \end{aligned}$$

La funzione *eleva al cubo* è una funzione dispari, infatti $(-x)^3 = -x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Osserviamo che il grafico di una funzione **dispari** è **simmetrico** rispetto all'origine degli assi.

Definizione 3.6.3. Una funzione f si dice *crescente* nell'insieme I se

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

Definizione 3.6.4. Una funzione f si dice *strettamente crescente* nell'insieme I se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

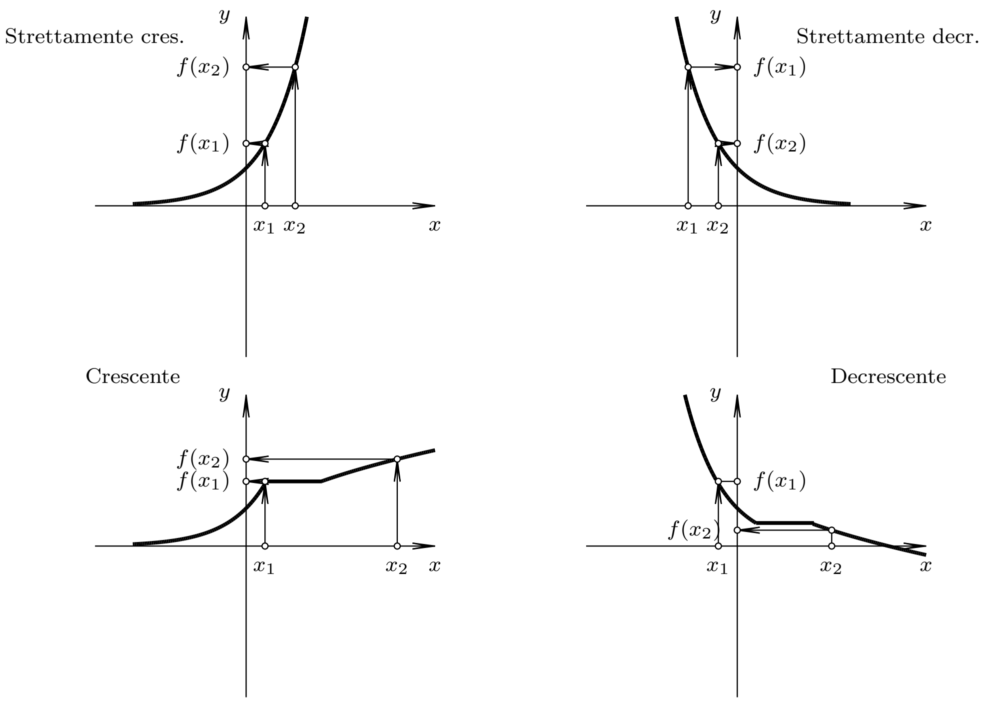
Definizione 3.6.5. Una funzione f si dice *decrescente* nell'insieme I se

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

Definizione 3.6.6. Una funzione f si dice *strettamente decrescente* nell'insieme I se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

Tutto ciò si vede bene dai grafici:



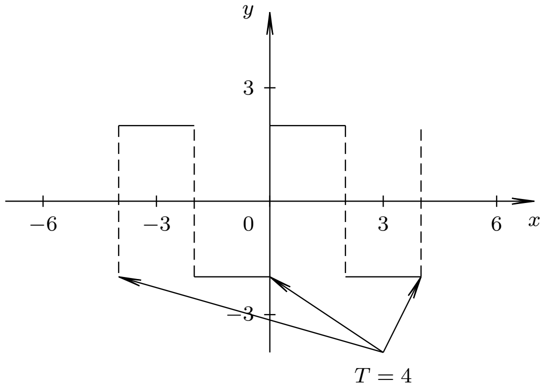
Definizione 3.6.7. Una funzione f si dice *periodica* di periodo T se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \text{ dominio di } f$$

Gli esempi più importanti di funzioni periodiche sono le funzioni goniometriche che si studieranno fra poco e i cui grafici potete osservare qui 3.4

Esempio 3.6.3. Onda quadra di periodo $T = 4$:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } 4n \leq x < 2+4n \\ -2 & \text{per } 2+4n \leq x < 4(n+1) \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$


y
3
−6
−3
0
3
6
x
−3
T = 4

Esercizi

Esercizio 3.6.1. Date le funzioni:

$$f(x) = \big||x-2|-2\big|$$
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ x^2-1 & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$$
$$h(x) = x - 2n \qquad \text{per } n < x \leq 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. indicarne il dominio e tracciarne il grafico
2. dal grafico dedurre gli intervalli di crescenza e decrescenza e l'eventuale periodicità
3. analizzare l'eventuale parità/diparità

Parte II

Funzioni Trascendenti

Capitolo 4

Funzioni trascendenti

4.1 Introduzione

Le funzioni finora incontrate erano di tipo algebrico, cioè esprimibili attraverso un numero finito di operazioni algebriche su $\mathbb{R}$ (addizione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice). Sono algebriche, per esempio, le seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= 2x^3 - 4x^2 + 5 && \text{(polinomiale)} \\
f_2(x) &= \frac{2x+1}{2x-3} && \text{(razionale fratta)} \\
f_3(x) &= \sqrt{x-2} && \text{(irrazionale)}
\end{aligned}
$$

Vogliamo ora introdurre un nuovo tipo di funzioni, non esprimibile come le precedenti, che diremo *funzioni trascendenti*. Si tratta di funzioni dette *esponenziali/logaritmiche* e *goniometriche*. Con la teoria degli sviluppi in serie (somme infinite) vedremo, molto più in là, che anche le funzioni trascendenti si possono esprimere attraverso un numero, però infinito, di operazioni algebriche. Per questo, in generale, il calcolo del valore di tali funzioni in un punto assegnato può avvenire solo per approssimazioni. Vedremo che, per esempio, la funzione che chiameremo esponenziale in base e (numero di Nepero, con il quale prenderemo confidenza fra breve) $f(x) = e^x$ è esprimibile attraverso la seguente somma infinita

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$e \approx 1 + 1 = 2$$

oppure

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ma anche

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \approx \frac{8}{3}$$

e così via, a seconda del grado di precisione voluto.

4.2 Funzioni esponenziali e logaritmiche

4.2.1 Potenze ad esponente naturale, intero e razionale

Definizione 4.2.1. Sia $a \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}^*$; diremo potenza n-esima di base a, e scriveremo a^n, il prodotto di n fattori uguali ad a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ volte}}$$

e assumeremo che $a^1 = a$.

Proprietà:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{P}_1) & a^n \cdot a^m = a^{n+m} & \forall a \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N}^* \\
\mathcal{P}_2) & a^n : a^m = a^{n-m} & \forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall n, m \in \mathbb{N}^*, n > m \\
\mathcal{P}_3) & (a^n)^m = a^{nm} & \forall a \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N}^* \\
\mathcal{P}_4) & (a^n)(b^n) = (ab)^n & \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\
\mathcal{P}_5) & (a^n) : (b^n) = (a : b)^n & \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*
\end{array}$$

Per convenzione si assume che

$$a^0 = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^*$$

così facendo la convenzione è compatibile con la seconda proprietà nel caso $n = m$! Per convenzione si assume che

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}$$

così facendo si è dato significato alle potenze ad esponente intero e la nuova definizione risulta compatibile con le proprietà su esposte. Per convenzione si assume che

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{>}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{Z}$$

così facendo si è dato significato alle potenze con esponente razionale e la nuova definizione risulta compatibile con le proprietà su esposte. Nella pratica la scelta della base potrebbe anche essere meno restrittiva in relazione ai diversi esponenti.

Esempio 4.2.1. $0^{2/3} = \sqrt[3]{0^2} = \sqrt[3]{0} = 0$ mentre $0^{-1/3}$ non esiste in $\mathbb{R}$ perchè non esiste il reciproco di 0 !

Esempio 4.2.2. $(-2)^{1/3} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ mentre $(-2)^{1/2}$ non esiste in $\mathbb{R}$ essendo negativo il radicando e pari l'indice di radice !

Esempio 4.2.3. La funzione $y = x^{1/2}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}^{\geq}$ mentre $y = x^{1/3}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, invece $y = x^{-1/2}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}^{>}$, infine $y = x^{-1/3}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

4.2.2 Potenze ad esponente reale

Teorema 4.2.1 (Teorema di monotonia delle potenze)**.** *Le potenze di un numero reale maggiore di* 1 *crescono al crescere dell'esponente razionale e quelle di un numero reale compreso fra* 0 *e* 1 *decrescono al crescere dell'esponente razionale.*

$$a^r > a^s \Leftrightarrow r > s \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{>}, a > 1, \forall r, s \in \mathbb{Q}$$
$$a^r < a^s \Leftrightarrow r > s \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{>}, 0 < a < 1, \forall r, s \in \mathbb{Q}$$

Definizione 4.2.2. Sia $a \in \mathbb{R}^{>}$ e $\beta \in \mathbb{R}$; si definisce *potenza ad esponente reale* a^{β} l'elemento di separazione delle 2 classi contigue di numeri

$$A = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r \leq \beta\}$$

e

$$B = \{a^s | s \in \mathbb{Q}, s \geq \beta\}.$$

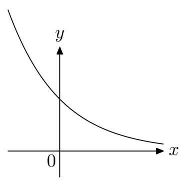
A e B sono separate e godono della proprietà dell'avvicinamento indefinito (perciò ammettono un unico elemento di separazione, a^{β}, appunto). Valgono anche per le potenze ad esponente reale le consuete proprietà delle potenze ed anche il teorema di monotonia sopra citato.

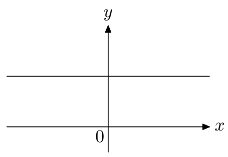
4.2.3 Funzione esponenziale elementare

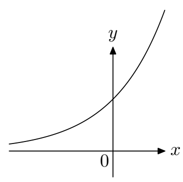
Definizione 4.2.3. Sia $a \in \mathbb{R}^{>}$; diremo funzione esponenziale la funzione definita ponendo

$$\begin{aligned} \exp_a \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = a^x \end{aligned}$$

il cui grafico, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, considerando, rispettivamente, i casi $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$, risulta:







Osserviamo che la funzione è:

monotona decrescente	costante	monotona crescente
assume valori positivi	assume valore 1	assume valori positivi
passa per $(0,1)$		passa per $(0,1)$
asintotica al semiasse		asintotica al semiasse
positivo delle x		negativo delle x
è iniettiva	non è iniettiva	è iniettiva
diventa anche suriettiva	nè suriettiva	diventa anche suriettiva
restringendo il codominio		restringendo il codominio
a $\mathbb{R}^{>}$, quindi invertibile		a $\mathbb{R}^{>}$, quindi invertibile

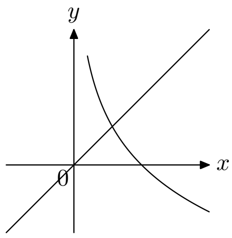
Osservazione: particolarmente frequente risulta l'uso della funzione esponenziale in base e (detto numero di Nepero); essendo $e \approx 2.7$, la funzione esponenziale che ne risulta è crescente. Analogamente per la base 10, anche questa molto usata.

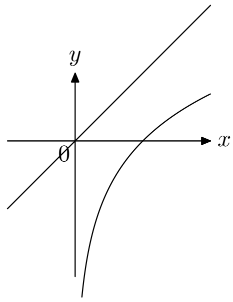
4.2.4 Funzione logaritmica

Definizione 4.2.4. Sia $a \in \mathbb{R}^{>}, a \neq 1$; diremo funzione inversa della funzione esponenziale o *funzione logaritmica*, la funzione definita ponendo

$$\begin{aligned} \exp_a^{-1} = \log_a \colon \mathbb{R}^{>} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \exp_a^{-1}(x) = \log_a x \end{aligned}$$

il cui grafico, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, considerando, rispettivamente, i casi $0 < a < 1$ e $a > 1$, risulta il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, dei grafici precedenti:





Osservazione: particolarmente frequente risulta l'uso della funzione logaritmica in base e (detto numero di Nepero); essendo $e \approx 2.7$, la funzione logaritmica che ne risulta è crescente. Analogamente per la base 10, anche questa molto usata. Si conviene di indicare il logaritmo in base e di x con $\ln x$ e il logaritmo in base 10 di x con $\log x$.

Esempio 4.2.4. $\log_2 8 = 3$ poichè, essendo stata definita la funzione logaritmica come inversa di quella esponenziale, $\log_2 8$ è l'esponente da assegnare alla base 2 per ottenere l'argomento 8. Quindi deve risultare $2^3 = 8$.

Esempio 4.2.5. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ infatti: $3^{-3} = \frac{1}{27}$.

Esempio 4.2.6. $\log_a 1 = 0$ infatti: $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^>, a \neq 1$.

Esempio 4.2.7. $\log_a a = 1$ infatti: $a^1 = a, \forall a \in \mathbb{R}^>, a \neq 1$.

Esempio 4.2.8. $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ infatti: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Dimostriamo ora alcune proprietà dei logaritmi richiamando alcune proprietà degli esponenziali:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{L}_1) & \log_a mn = \log_a m + \log_a n & \forall a \in \mathbb{R}^>, a \neq 1, \forall n, m \in \mathbb{R}^> \\
\mathcal{L}_2) & \log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n & \forall a \in \mathbb{R}^>, a \neq 1, \forall n, m \in \mathbb{R}^> \\
\mathcal{L}_3) & \log_a m^y = y \cdot \log_a m & \forall a \in \mathbb{R}^>, a \neq 1, \forall m \in \mathbb{R}^>, y \in R \\
\mathcal{L}_4) & \log_{a^\alpha} m^\alpha = \log_a m & \forall a \in \mathbb{R}^>, a \neq 1, \forall m \in \mathbb{R}^>, \alpha \in R^* \\
\mathcal{L}_5) & (\log_a b) \cdot (\log_b c) = \log_a c & \forall a, b, c \in \mathbb{R}^>, a, b \neq 1
\end{array}$$

Dim. $\mathcal{L}_1)$

posto $\log_a m = x$	si ha $a^x = m$
posto $\log_a n = y$	si ha $a^y = n$
per la proprietà $\mathcal{P}_1)$ risulta che	$m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
quindi	$x + y = \log_a mn$
da cui	$\log_a m + \log_a n = \log_a mn.$

□

Dim. $\mathcal{L}_2$)

posto $\log_a m = x$	si ha $a^x = m$
posto $\log_a n = y$	si ha $a^y = n$
per la proprietà $\mathcal{P}_2$) risulta che	$\dfrac{m}{n} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
quindi	$x - y = \log_a \dfrac{m}{n}$
da cui	$\log_a m - \log_a n = \log_a \dfrac{m}{n}.$

□

Dim. $\mathcal{L}_3$)

posto $\log_a m = x$	si ha $a^x = m$
elevando ambo i membri alla y	si ha $(a^x)^y = m^y$
per la proprietà $\mathcal{P}_3$) risulta che	$a^{xy} = m^y$
quindi	$xy = \log_a m^y$
da cui	$y \cdot \log_a m = \log_a m^y.$

□

Dim. $\mathcal{L}_4$)

posto $\log_a m = x$	si ha $a^x = m$
elevando ambo i membri alla α	si ha $(a^x)^\alpha = m^\alpha$
per la proprietà $\mathcal{P}_3$) risulta che	$a^{x\alpha} = (a^\alpha)^x = m^\alpha$
quindi	$x = \log_{a^\alpha} m^\alpha$
da cui	$\log_a m = \log_{a^\alpha} m^\alpha.$

□

Dim. $\mathcal{L}_5$) (*Formula del cambiamento di base*)

posto $\log_a b = x$	si ha $a^x = b$
posto $\log_b c = y$	si ha $b^y = c$
per la proprietà $\mathcal{P}_3$) risulta che	$c = b^y = (a^x)^y = a^{xy}$
quindi	$xy = \log_a c$
da cui	$(\log_a b) \cdot (\log_b c) = \log_a c.$

□

4.2.5 Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche elementari

Si tratta di risolvere equazioni e disequazioni del tipo

$$a^x \lesseqgtr b \qquad \log_a x \lesseqgtr b \qquad \text{ove} \quad a \in \mathbb{R}^>, a \neq 1$$

Vediamo come si risolvono attraverso alcuni esempi.

Esercizio 4.2.1.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 && \text{esprimiamo 4 come potenza in base 2} \\ 2^x &= 2^2 && \text{essendo la funzione esponenziale iniettiva} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

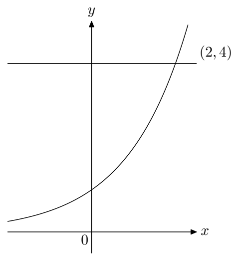
Esercizio 4.2.2.

$$\begin{aligned} 2^x &> 4 && \text{esprimiamo 4 come potenza in base 2} \\ 2^x &> 2^2 && \text{essendo la funzione esponenziale monotona crescente} \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.3.

$$\begin{aligned} 2^x &< 4 && \text{esprimiamo 4 come potenza in base 2} \\ 2^x &< 2^2 && \text{essendo la funzione esponenziale monotona crescente} \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Dal punto di vista grafico è interessante osservare qual è l'interpretazione geometrica degli esempi fatti. Si osserva che l'ascissa del punto P d'intersezione fra le curve di equazione $y = 2^x$ e $y = 4$ è proprio la soluzione dell'equazione.



Esercizio 4.2.4.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^x &= 27 && \text{esprimiamo 27 come potenza in base } \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} && \text{essendo la funzione esponenziale iniettiva} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

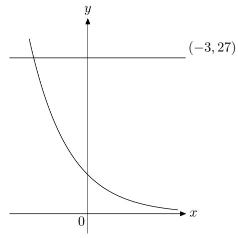
Esercizio 4.2.5.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^x &> 27 && \text{esprimiamo 27 come potenza in base } \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x &> \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} && \text{essendo la funzione esponenziale monotona decrescente} \\ x &< -3 \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.6.

$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 27$	esprimiamo 27 come potenza in base $\frac{1}{3}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$	essendo la funzione esponenziale monotona decrescente
$x > -3$	

Dal punto di vista grafico è interessante osservare qual è l'interpretazione geometrica degli esempi fatti (le unità di misura per i due assi sono diverse). Si osserva che l'ascissa del punto P d'intersezione fra le curve di equazione $y = (\frac{1}{3})^x$ e $y = 27$ è proprio la soluzione dell'equazione.



Esercizio 4.2.7.

$2^x = 0$	non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$	quindi l'equazione è impossibile

Esercizio 4.2.8.

$2^x = -8$	non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$	quindi l'equazione è impossibile

Esercizio 4.2.9.

$2^x < 0$	non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$	quindi la disequazione è impossibile

Esercizio 4.2.10.

$2^x \leq 0$	non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$	quindi la disequazione è impossibile

Esercizio 4.2.11.

$2^x > 0$	non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$	quindi la disequazione è sempre verificata

Esercizio 4.2.12.

$2^x \geq 0$	non possiamo esprimere 0 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$	quindi la disequazione è sempre verificata

Esercizio 4.2.13.

$2^x < -8$	non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$	quindi la disequazione è impossibile

Esercizio 4.2.14.

$2^x \leq -8$	non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma
$2^x > 0 \quad \forall x$	quindi la disequazione è impossibile

Esercizio 4.2.15.

$2^x > -8$ — non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma

$2^x > 0 \quad \forall x$ — quindi la disequazione è sempre verificata

Esercizio 4.2.16.

$2^x \geq -8$ — non possiamo esprimere -8 come potenza in base 2 ma

$2^x > 0 \quad \forall x$ — quindi la disequazione è sempre verificata

Esercizio 4.2.17.

$2^x = 7$ — esprimiamo 7 come potenza in base 2

$2^x = 2^{\log_2 7}$ — essendo la funzione esponenziale iniettiva

$x = \log_2 7$

Esercizio 4.2.18.

$2^x < 3$ — esprimiamo 3 come potenza in base 2

$2^x < 2^{\log_2 3}$ — essendo la funzione esponenziale monotona crescente

$x < \log_2 3$

Esercizio 4.2.19.

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 5$ — esprimiamo 5 come potenza in base $\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ — essendo la funzione esponenziale monotona decrescente

$x < \log_{\frac{1}{3}} 5$

Esercizio 4.2.20.

$e^{2x} - 3e^x - 4 \leq 0$

poniamo $e^x = t$ ed otteniamo:

$t^2 - 3t - 4 \leq 0$

$-1 \leq t \leq 4$

da cui, ritornando alla variabile x, si ha:

$-1 \leq e^x \leq 4$

ed infine, tenendo conto che $e^x > 0$ per ogni x reale:

$x \leq \ln 4$.

Esercizio 4.2.21.

$\log_2 x = 3$ — C.E.: $x > 0$

$\log_2 x = \log_2 2^3$ — avendo espresso 3 come logaritmo in base 2

$x = 8$ — soluzione accettabile

Esercizio 4.2.22.

$\log_3 x > -1$ — C.E.: $x > 0$

$\log_3 x > \log_3 3^{-1}$ — avendo espresso -1 come logaritmo in base 3

$x > \frac{1}{3}$ — confrontando con le condizioni

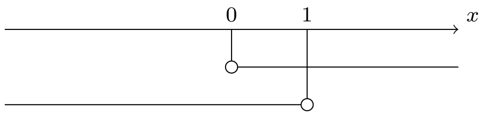
$x > \frac{1}{3}$

Esercizio 4.2.23.

$\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ C.E.: $x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0$ avendo espresso 0 come logaritmo in base $\frac{1}{2}$

$x < 1$ ma confrontando con le condizioni



risulta $0 < x < 1$

Esercizio 4.2.24.

$\ln(-x) + \ln(x+3) - \ln(x+5) = \ln(-x-2)$ C.E.: $\begin{cases} x < 0 \\ x > -3 \\ x > -5 \\ x < -2 \end{cases}$

$-3 < x < -2$

$\ln \frac{(-x)(x+3)}{x+5} = \ln(-x-2)$ avendo usato due proprietà dei logaritmi

$\frac{(-x)(x+3)}{x+5} = (-x-2)$

$-x^2 - 3x = -x^2 - 7x - 10$

$4x = -10$

$x = -\frac{5}{2}$ e confrontando con il C.E.

risulta accettabile!

Esercizio 4.2.25.

$\log_3 x \cdot \log_x 9 = \sqrt{x+3}$ C.E.: $\begin{cases} x > 0\,,\, x \neq 1 \\ x \geq -3 \end{cases}$

$x > 0\,,\, x \neq 1$

$\log_3 9 = \sqrt{x+3}$ avendo usato una proprietà dei logaritmi

$2 = \sqrt{x+3}$

$x + 3 = 4$

$x = 1$ ma confrontando con il C.E.

risulta non accettabile!

Esercizio 4.2.26.

$\log_3(x-2) - \log_3 x + 1 < \log_3(4-x)$ C.E.: $\begin{cases} x > 2 \\ x > 0 \\ x < 4 \end{cases}$

$2 < x < 4$

$\log_3(x-2) - \log_3 x + \log_3 3 < \log_3(4-x)$ avendo espresso 1 come logaritmo in base 3

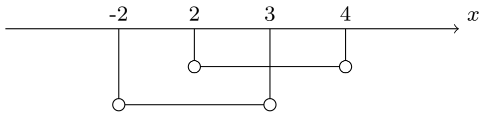
$\log_3(x-2) + \log_3 3 < \log_3(4-x) + \log_3 x$

$\log_3 3(x-2) < \log_3 x(4-x)$ avendo usato una proprietà dei logaritmi

$3(x-2) < x(4-x)$ avendo mantenuto il verso essendo la base maggiore di 1

$x^2 - x - 6 < 0$

$-2 < x < 3$ ma confrontando con il C.E.



risulta $2 < x < 3$

Esercizio 4.2.27.

$1 + 2\log_9 x^2 \leq \log_3(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ C.E.: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x > -1 \\ x > -2 \end{cases}$

$x > -1\,,\ x \neq 0$

$\log_3 3 + 2\log_9 x^2 \leq \log_3(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ avendo espresso 1 come logaritmo in base 3

$\log_3 3 + \log_3 x^2 \leq \log_3(x+1) + \log_3(x+2)$

$\log_3 3x^2 \leq \log_3(x^2+3x+2)$ avendo usato alcune proprietà dei logaritmi

$3x^2 \leq x^2 + 3x + 2$ avendo mantenuto il verso essendo la base maggiore di 1

$2x^2 - 3x - 2 \leq 0$

$-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$ ma confrontando con il C.E.

risulta $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\,,\ x \neq 0$

Esercizio 4.2.28.

$2\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x+7)$ C.E.: $\begin{cases} x > -2 \\ x > -\frac{7}{4} \end{cases}$

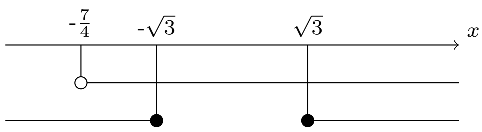
$x > -\dfrac{7}{4}$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2 \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x+7)$ avendo usato una proprietà dei logaritmi

$(x+2)^2 \geq 4x+7$ avendo cambiato il verso essendo la base compresa fra 0 e 1

$x^2 - 3 \geq 0$

$x \leq -\sqrt{3}\,,\ x \geq \sqrt{3}$ ma confrontando con il C.E.



risulta $-\dfrac{7}{4} < x \leq -\sqrt{3},\ x \geq \sqrt{3}$

Esercizio 4.2.29.

$\log_x(2x-1) > 1$

Le eventuali soluzioni si ottengono dall'unione di quelle dei seguenti sistemi

$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x-1 > 0 \\ \log_x(2x-1) > \log_x x \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x > 1 \\ 2x-1 > 0 \\ \log_x(2x-1) > \log_x x \end{cases}$

in essi si è tenuto conto delle C.E. e dei due casi possibili per la base; perciò si ha:

$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x-1 > 0 \\ 2x-1 < x \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x > 1 \\ 2x-1 > 0 \\ 2x-1 > x \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ x < 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$

risulta $\dfrac{1}{2} < x < 1\,,\; x > 1$

cioè: $\quad x > \dfrac{1}{2}\,,\; x \neq 1$

Esercizio 4.2.30.

$\log\log(x^2-15) < 0$

Scrivendo 0 come logaritmo in base 10, risulta evidentemente:

$\log\log(x^2-15) < \log 1$

le eventuali soluzioni si ottengono risolvendo il seguente sistema

$\begin{cases} x^2-15 > 0 \\ \log(x^2-15) > 0 \\ \log\log(x^2-15) < \log 1 \end{cases}$

in cui si è già tenuto conto delle C.E. e da cui si ha

$\begin{cases} x^2-15 > 0 \\ \log(x^2-15) > \log 1 \\ \log(x^2-15) < 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-15 > 0 \\ x^2-15 > 1 \\ \log(x^2-15) < \log 10 \end{cases}$

ed, eliminando la prima disequazione che è inclusa nella seconda, si ha:

$\begin{cases} x^2-15 > 1 \\ x^2-15 < 10 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 > 16 \\ x^2 < 25 \end{cases}$

risulta $16 < x^2 < 25$

cioè: $\quad -5 < x < -4\,,\; 4 < x < 5$

Esercizio 4.2.31.

$\ln^2 x - \ln x - 2 \geq 0$ C.E.: $x > 0$

poniamo $\ln x = t$ ed otteniamo:

$t^2 - t - 2 \geq 0$

$t \leq -1, t \geq 2$

da cui, ritornando alla variabile x, si ha:

$\ln x \leq -1, \ln x \geq 2$

ed infine, intersecando con le condizioni di esistenza:

$0 < x \leq e^{-1}, x \geq e^2.$

4.2.6 Esercizi sulle equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche elementari

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche elementari o riconducibili a tali, usando, eventualmente, le proprietà studiate:

1)	$2^x = 64$	$[x = 6]$
2)	$\dfrac{1}{3^x} = 81$	$[x = -4]$
3)	$\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{5}$	$[x = \dfrac{2}{3}]$
4)	$\dfrac{6^x \cdot 6^{2x-3}}{6^{1-x}} = 36$	$[x = \dfrac{3}{2}]$
5)	$3^{\sqrt{x^2-2x}} = 3^{\sqrt{3}}$	$[x = 3, -1]$
6)	$3^{2x} - 3^x - 6 = 0$	$[x = 1]$
7)	$3^{x-3} + \dfrac{3^{x-2}}{6} = 2^{x-2} - 2^{x-3}$	$[x = 2]$
8)	$3^x \leq \dfrac{1}{5}$	$[x \leq \log_3 \dfrac{1}{5}]$
9)	$\left(\dfrac{1}{10}\right)^x > \dfrac{1}{1000}$	$[x < 3]$
10)	$2^{\lvert x-3 \rvert} < 4$	$[1 < x < 5]$
11)	$\dfrac{(2^x - 1) \cdot (3^x + 1)}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x - \dfrac{1}{27}}$	$[0 \leq x < 3]$
12)	$2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 3 \leq 0$	$[-1 \leq x \leq 0]$
13)	$3^{2x} - 2 \cdot 6^x + 2^{2x} > 0$	$[\forall x \in \mathbb{R}^*]$
14)	$\log_3(3x - 4) = 2$	$[x = \dfrac{13}{3}]$
15)	$\log_5(2x - \sqrt{1 + 2x}) = 1$	$[x = 4]$
16)	$2 \log_{\frac{2}{3}}(x - 1) = -2$	$[x = \dfrac{5}{2}]$
17)	$\log_3 \lvert 3 - 2x \rvert = 2$	$[x = -3, 6]$
18)	$\log_{\frac{1}{2}}(3x + 5) < 1$	$[x > -\dfrac{3}{2}]$
19)	$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} 4 < 0$	$[x > \dfrac{1}{4}]$

20) $\log_2(1-x^2)-1<0$ $[-1<x<1]$

21) $\log_3\log_3(2x-5)<0$ $[3<x<4]$

22) $\log^2_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x-2\leq 0$ $[\frac{1}{3}\leq x\leq 9]$

23) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x^2-8)>0 \\ \log_3(2+x^2)>1 \end{cases}$ $[-3<x<-2\sqrt{2};2\sqrt{2}<x<3]$

25) $\dfrac{\log_3(2x+1)}{\log_5(2-x)}\leq 0$ $[-\frac{1}{2}<x\leq 0,1<x<2]$

26) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geq\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ $[x>3]$

27) $\log_2 x+\log_x 2=\dfrac{17}{4}$ $[x=\sqrt[4]{2},16]$

28) $\log_3 x\cdot\log_x 9=\sqrt{x+3}$ $[\nexists x\in\mathbb{R}]$

29) $\ln(-x)+\ln(x+3)-\ln(x+5)=\ln(-x-2)$ $[x=-\frac{5}{2}]$

30) $\log_6(x-1)+log_6(x-2)<1$ $[2<x<4]$

31) $log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)+log_2(x-2)\leq log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ $[x>2]$

32) $(log_{\frac{1}{2}}x)^2+log_{\frac{1}{2}}x-2\geq 0$ $[0<x\leq\frac{1}{2},x\geq 4]$

33) $\begin{cases} \log^2_5 x+\log_5 x-2>0 \\ \log\log(x^2-15)<0 \end{cases}$ $[\nexists x\in\mathbb{R}]$

34) $\dfrac{|2^x-3|-1}{e^x\cdot|\log_3|x||\cdot(x-2)^2}\leq 0$ $[1<x<2]$

35) $\dfrac{3}{3^x-1}-\dfrac{2\cdot 3^x}{3^x+1}\geq 0$ $[0<x\leq 1]$

4.2.7 Esercizi vari sulle funzioni esponenziali e logaritmiche

Facendo uso delle definizioni e delle formule studiate, risolvere i seguenti quesiti:

1. Rappresenta graficamente a partire dai grafici elementari:
   (a) $y=2^{1-x}$
   (b) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x-1|}$
   (c) $y=e^{|x|-1}$
   (d) $y=\log_2|x|-4$

(e) $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} (x-4) \right|$

(f) $y = \ln(|x| - 4)$

2. Risolvi per via grafica:

(a) $2^x \geq -x + 3$

(b) $|\log_2 x| \leq x^2 - 6x + 9$

$[x \geq 1;\ \alpha \leq x \leq 2, x \geq \beta \text{ con } 0 < \alpha < \frac{1}{2}, 4 < \beta < 5]$

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta:

(a) $e^{\ln x} = x$

(b) $\ln e^x = x$

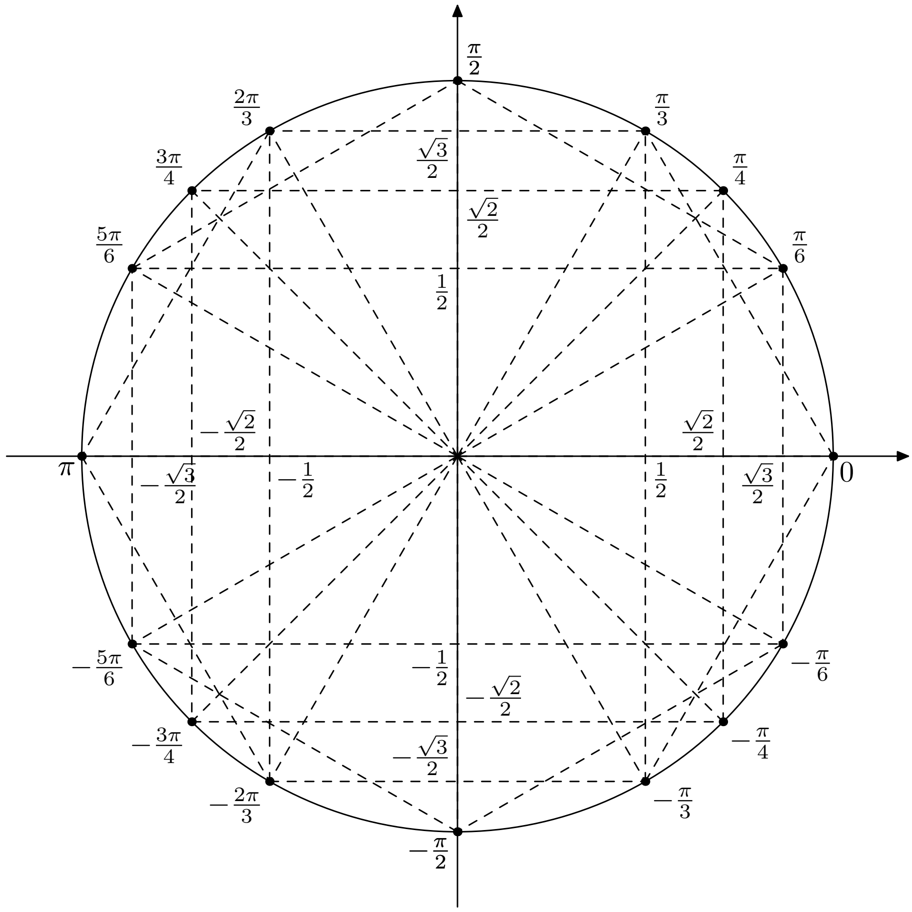
(c) $\ln x - \ln(x-2) = \ln \frac{x}{x-2}$

(d) $\ln x^2 = 2 \ln x$

(e) $\log_3 x \cdot \log_x 9 = 2$

(f) $\ln(x+1) - \ln(1-x) = \ln \frac{x+1}{1-x}$

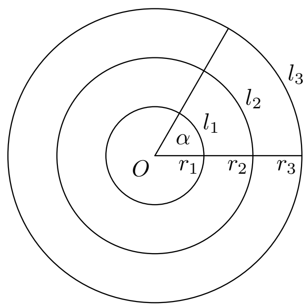
4.3 Funzioni goniometriche



[1]

4.3.1 Introduzione alla goniometria

Consideriamo le circonferenze concentriche in O di raggio $r_i > 0$; l'angolo al centro α individua su ciascuna gli archi l_i.



Dalla geometria elementare sappiamo che gli insiemi

$$R = \{r_1, r_2, r_3, ...\}$$

e

$$L = \{l_1, l_2, l_3, ...\}$$

[1]Figura trovata all'indirizzo: `http://melusine.eu.org/syracuse/metapost/cours/gosse/trigo.html`

sono 2 classi di grandezze direttamente proporzionali. Pertanto si ha che:

$$l_1 : r_1 = l_2 : r_2 = l_3 : r_3 = ...$$

tale rapporto è costante ed origina la seguente

Definizione 4.3.1. diremo *misura in radianti* di un angolo al centro di una circonferenza il rapporto (costante) fra l'arco da esso individuato e il raggio.

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Osservazione: la misura in radianti, essendo rapporto di grandezze omogenee, risulta un numero puro.

Determiniamo ora la misura in radianti di alcuni angoli notevoli. Dalla geometria elementare sappiamo che la lunghezza della circonferenza di raggio r è

$$\mathcal{C} = 2\pi r$$

L'angolo giro, angolo al centro corrispondente a tale arco, misura in radianti

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Si ricavano quindi facilmente le misure in radianti dell'angolo piatto

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

dell'angolo retto

$$\frac{l}{r} = \frac{\frac{\pi}{2} r}{r} = \frac{\pi}{2}$$

e, in generale, mediante la proporzione

$$\alpha \div \pi = \alpha^\circ \div 180^\circ$$

si può ricavare la misura in radianti di un angolo, nota quella in gradi, o viceversa.

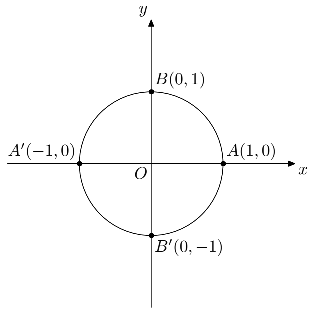
Osservazione: dalla teoria della misura è noto che il rapporto fra 2 grandezze omogenee è uguale al rapporto fra le relative misure rispetto a qualunque unità di misura

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{mis(\mathcal{A})}{mis(\mathcal{B})}$$

α°	α
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$
135°	$3\pi/4$
150°	$5\pi/6$
180°	π
...	...

Dalle osservazioni fatte fin qui, non è restrittivo limitarsi a lavorare con la circonferenza di raggio $r = 1$.

Definizione 4.3.2. Diremo *circonferenza goniometrica* la circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano Oxy.



Osservazione. Poichè $\alpha = \frac{l}{r}$, lavorando con la circonferenza goniometrica, angolo e arco hanno la stessa misura.

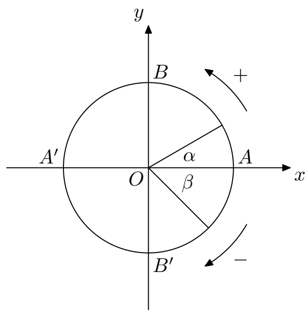
Per posizionare un angolo α, misurato in radianti, al centro della circonferenza goniometrica, abbiamo bisogno di alcune convenzioni:

1. il primo lato dell'angolo coincide con il semiasse positivo delle x;
2. assumiamo come verso di percorrenza positivo degli archi quello antiorario.

A è origine degli archi

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

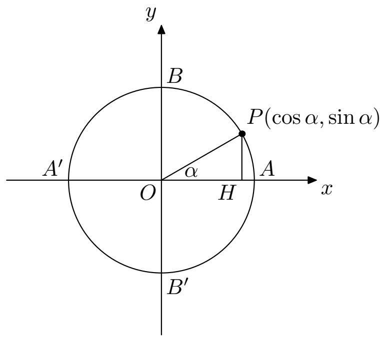
$$\beta = -\frac{\pi}{4}$$



Detto P il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo α e la circonferenza goniometrica, diamo le seguenti definizioni.

Definizione 4.3.3. Diremo *seno* di un angolo α (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, l'ordinata del punto P.

Definizione 4.3.4. Diremo *coseno* di un angolo α (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, l'ascissa del punto P.



Teorema 4.3.1. *Prima relazione fondamentale della goniometria*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \forall\alpha$$

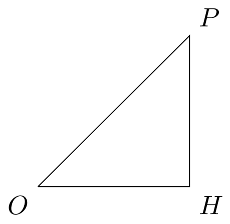
Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPH:

$$OH^2 + PH^2 = OP^2$$

da cui la tesi. $\square$

4.3.2 Richiami geometrici

Ricordiamo alcune classiche applicazioni del Teorema di Pitagora. Consideriamo il triangolo rettangolo isoscele:



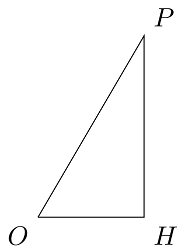
$$\widehat{O} \cong \widehat{P} \cong \pi/4$$

$$\widehat{H} \cong \pi/2$$

$$\overline{OP} = 1$$

$$\overline{OP} = \overline{OH}\sqrt{2}$$

Consideriamo il triangolo rettangolo semi-equilatero:



$$\widehat{O} \cong \pi/3$$

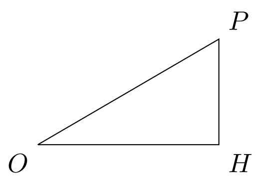
$$\widehat{P} \cong \pi/6$$

$$\widehat{H} \cong \pi/2$$

$$\overline{OP} = 1$$

$$\overline{PH} = \overline{OH}\sqrt{3}$$

Consideriamo il triangolo rettangolo semi-equilatero:



$$\widehat{O} \cong \pi/6$$

$$\widehat{P} \cong \pi/3$$

$$\widehat{H} \cong \pi/2$$

$$\overline{OP} = 1$$

$$\overline{OH} = \overline{PH}\sqrt{3}$$

Se i triangoli sopra considerati vengono ora riferiti alla circonferenza goniometrica in modo che OH si sovrapponga al semiasse positivo delle x e OP coincida con un suo raggio, si ottiene facilmente la seguente tabella di valori delle funzioni goniometriche seno e coseno di angoli notevoli:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0

Osservazione:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

poichè il punto P di riferimento è lo stesso. Analogamente sarà:

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Questa relazione ci consente di osservare che seno e coseno sono funzioni dell'angolo α, definite come segue:

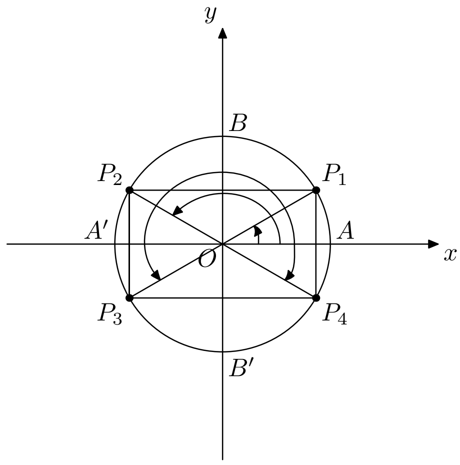
$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sin x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \cos x \end{aligned}$$

ove si è inteso essere x la misura in radianti dell'angolo x; diremo pertanto che tali funzioni godono della proprietà di periodicità con periodo $T = 2\pi$, esssendo questo il minimo dell'insieme $\{2k\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$.

4.3.3 Archi associati (per seno e coseno)

In questa sezione, mostreremo come il calcolo delle funzioni goniometriche seno e coseno di particolari archi sia riconducibile a conoscenze geometriche elementari.

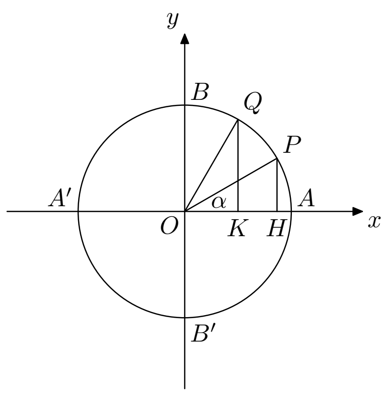
Consideriamo un angolo α e il punto P_1 ad esso associato, il suo supplementare $\pi - \alpha$ associato a P_2, l'angolo $\pi + \alpha$ associato a P_3 e l'esplementare di α associato a P_4.



Dal grafico si deduce facilmente che:

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha) = -\sin(-\alpha) = -\sin(2\pi - \alpha)$$
$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\pi + \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha)$$

Consideriamo ora un angolo α e il punto P ad esso associato, il suo complementare $\pi/2 - \alpha$ associato a Q.



Osserviamo che i triangoli OPH e OQK sono congruenti:

1. $OP \cong OQ$ (raggi stessa circonferenza)

2. $O\widehat{H}P \cong O\widehat{K}Q \cong \pi/2$
3. $H\widehat{O}P \cong O\widehat{Q}K \cong \alpha$

Si deduce quindi che:

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$$

Ciò giustifica il nome dato alla funzione goniometrica coseno che dal latino significa *complementi sinus* (cioè seno del complementare).

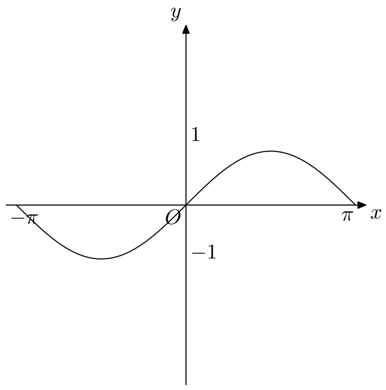
Osservazione:

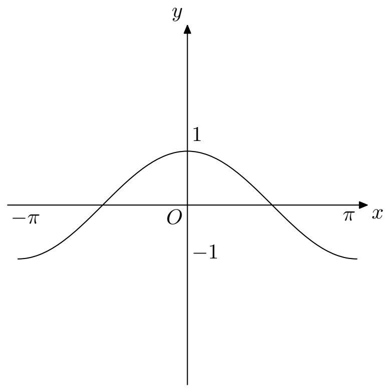
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Queste proprietà ci consentono di concludere che le funzioni seno e coseno sono rispettivamente *dispari* e *pari*.

Esamiamo ora i grafici delle funzioni seno e coseno detti rispettivamente *sinusoide* e *cosinusoide*. La periodicità delle funzioni ci permette di rappresentarle in un qualunque intervallo di ampiezza 2π e la loro simmetria ci suggerisce di scegliere $[-\pi, \pi]$.

Grafici sinusoide e cosinusoide

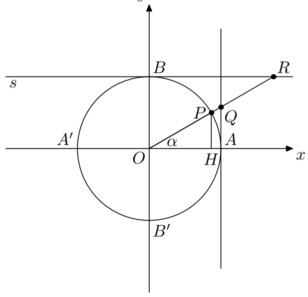




Detti P il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo α e la circonferenza goniometrica, Q il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo α o il suo prolungamento e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A di coordinate $(1, 0)$, R il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo α o il suo prolungamento e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto B di coordinate $(0, 1)$, diamo le seguenti definizioni.

Definizione 4.3.5. Diremo *tangente* di un angolo α (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, l'ordinata del punto Q.

Definizione 4.3.6. Diremo *cotangente* di un angolo α (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, l'ascissa del punto R.



$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$Q(1, \tan\alpha)$

$R(\cot\alpha, 1)$

Teorema 4.3.2 (Seconda relazione fondamentale della goniometria)**.**

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \forall\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. Consideriamo i triangoli rettangoli OHP e OAQ; essi sono simili:

1. $O\widehat{H}P \cong O\widehat{A}Q \cong \frac{\pi}{2}$
2. $P\widehat{O}H \cong Q\widehat{O}A \cong \alpha$
3. $O\widehat{P}H \cong O\widehat{Q}A \cong \frac{\pi}{2} - \alpha$

pertanto i lati corrispondenti sono in proporzione:

$$PH : OH = QA : OA$$

da cui facilmente si ricava la tesi. □

Teorema 4.3.3 (Terza relazione fondamentale della goniometria)**.**

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \forall\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente. □

Osservazione: dalle suddette relazioni si deduce che:

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1, \qquad \forall\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0	0	1	0	non esiste
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	1	0	non esiste	0

Osservazione:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

poichè il punto P di riferimento è lo stesso. Analogamente sarà:

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

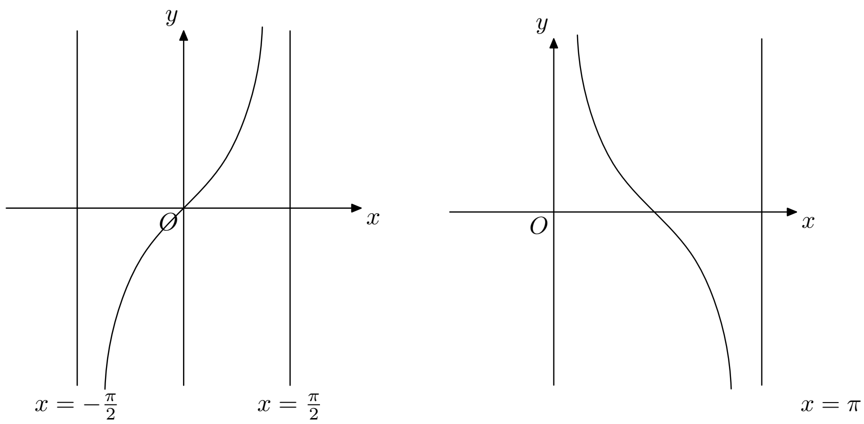
Questa relazione ci consente di osservare che tangente e cotangente sono funzioni dell'angolo α, definite come segue:

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \tan x$$

$$\cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \cot x$$

ove si è inteso essere x la misura in radianti dell'angolo x; diremo pertanto che tali funzioni godono della proprietà di periodicità con periodo $T = \pi$, esssendo questo il minimo dell'insieme $\{k\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$.

Grafici tangentoide e cotangentoide



Osservazione. Sono definite anche altre due funzioni goniometriche, dette rispettivamente *secante* e *cosecante*, legate alle precedenti nel modo seguente:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \forall\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \qquad \forall\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Omettiamo definizioni e dimostrazioni di tali relazioni, dette rispettivamente *quarta e quinta relazione fondamentale della goniometria.*

4.3.4 Archi associati (per tangente e cotangente)

In questa sezione, mostreremo come il calcolo delle funzioni goniometriche tangente e cotangente di particolari archi sia riconducibile a conoscenze geometriche e goniometriche elementari. Dalle relazioni fondamentali e dalle considerazioni sugli archi associati fatte su seno e coseno, si deduce facilmente che:

$$\tan\alpha = -\tan(\pi-\alpha) = \tan(\pi+\alpha) = -\tan(-\alpha) = -\tan(2\pi-\alpha)$$

$$\cot\alpha = -\cot(\pi-\alpha) = \cot(\pi+\alpha) = -\cot(-\alpha) = -\cot(2\pi-\alpha)$$

Allo stesso modo, dalle relazioni fondamentali e dalle considerazioni sugli archi complementari fatte su seno e coseno, si deduce facilmente che:

$$\tan(\pi/2-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot(\pi/2-\alpha) = \tan\alpha$$

Ciò giustifica il nome dato alla funzione goniometrica cotangente che dal latino significa *complementi tangens* (cioè tangente del complementare).

Osservazione:

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Queste proprietà ci consentono di concludere che le funzioni tangente e cotangente sono *dispari.*

Esamiamo ora i grafici delle funzioni tangente e cotangente detti rispettivamente *tangentoide* e *cotangentoide.* La periodicità delle funzioni ci permette di rappresentarle in un qualunque intervallo di ampiezza π e la loro simmetria ci suggerisce di scegliere $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

4.3.5 Funzioni inverse

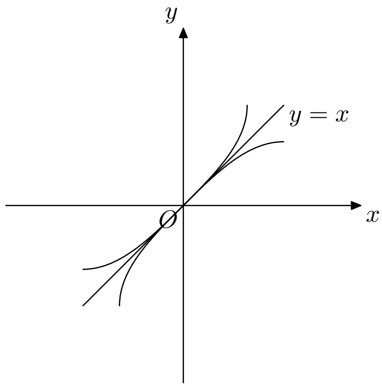
In questa sezione, renderemo biiettive le funzioni goniometriche e definiremo le loro inverse. Consideriamo quindi la seguente restrizione della funzione $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} \sin\colon [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto y = \sin x \end{aligned}$$

La funzione goniometrica $y = \sin x$ con le restrizioni operate sul dominio e sul codominio risulta biiettiva e quindi invertibile. Notiamo che essa è anche monotona crescente.

Definizione 4.3.7. Diremo funzione inversa della funzione goniometrica $y = \sin x$ o funzione *arcoseno*, la funzione così definita

$$\begin{aligned} \arcsin\colon [-1, 1] &\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x &\longmapsto y = \arcsin x \end{aligned}$$



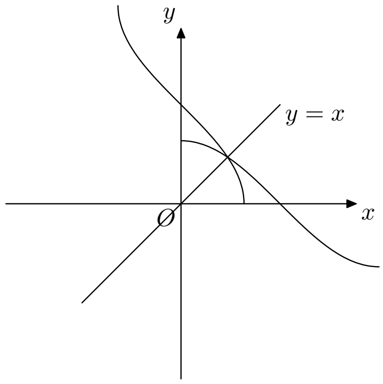
Consideriamo quindi la seguente restrizione della funzione $y = \cos x$.

$$\begin{aligned} \cos\colon [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto y = \cos x \end{aligned}$$

La funzione goniometrica $y = \cos x$ con le restrizioni operate sul dominio e sul codominio risulta biiettiva e quindi invertibile. Notiamo che essa è anche monotona decrescente.

Definizione 4.3.8. Diremo funzione inversa della funzione goniometrica $y = \cos x$ o funzione *arcocoseno*, la funzione così definita

$$\begin{aligned} \arccos\colon [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto y = arc \cos x \end{aligned}$$



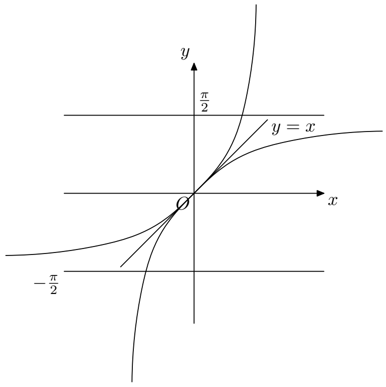
Consideriamo quindi la seguente restrizione della funzione $y = \tan x$.

$$\begin{aligned} \tan\colon]-\pi/2, \pi/2[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \tan x \end{aligned}$$

La funzione goniometrica $y = \tan x$ con le restrizioni operate sul dominio e sul codominio risulta biiettiva e quindi invertibile. Notiamo che essa è anche monotona crescente.

Definizione 4.3.9. Diremo funzione inversa della funzione goniometrica $y = \tan x$ o funzione *arcotangente*, la funzione così definita

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[\\ x &\longmapsto y = \arctan x \end{aligned}$$



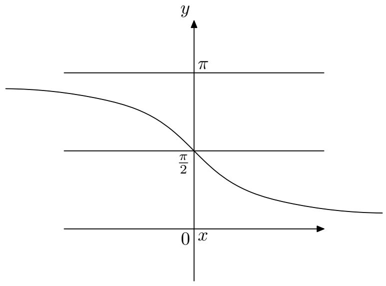
Consideriamo quindi la seguente restrizione della funzione $y = \cot x$.

$$\begin{aligned} \cot\colon]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \cot x \end{aligned}$$

La funzione goniometrica $y = \cot x$ con le restrizioni operate sul dominio e sul codominio risulta biiettiva e quindi invertibile. Notiamo che essa è anche monotona decrescente.

Definizione 4.3.10. Diremo funzione inversa della funzione goniometrica $y = \cot x$ o funzione *arcocotangente*, la funzione così definita

$$\begin{aligned} \text{arccot}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow]0, \pi[\\ x &\longmapsto y = \text{arccot } x \end{aligned}$$



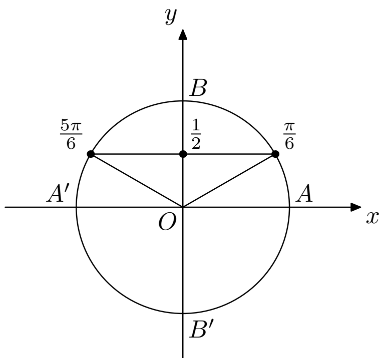
4.3.6 Equazioni e disequazioni goniometriche elementari

Sono del tipo $\sin x \lesseqgtr b$, $\cos x \lesseqgtr b$, $\tan x \lesseqgtr b$ e $\cot x \lesseqgtr b$. Per la loro risoluzione si proceda come negli esempi seguenti.

Esercizio 4.3.1. $\sin x = \dfrac{1}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

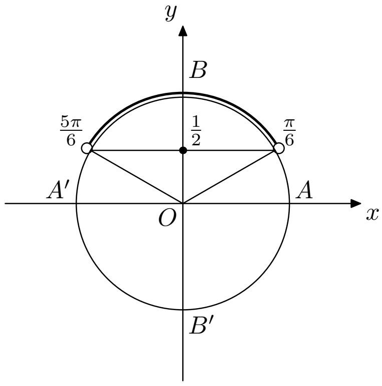
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



Esercizio 4.3.2. $\sin x > \dfrac{1}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



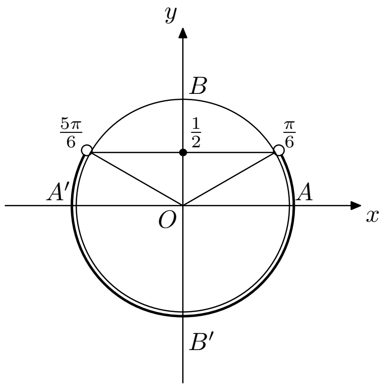
Esercizio 4.3.3. $\sin x < \frac{1}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$$

oppure:

$$\frac{-7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$



Osservazione: la soluzione di una disequazione goniometrica è generalmente un'unione di intervalli limitati; la periodicità della funzione consente una scrittura sintetica mediante la scelta di uno qualunque di questi intervalli.

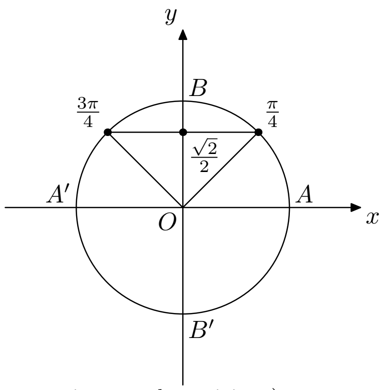
Esercizio 4.3.4. $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$
$$2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

cioè

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi,$$
$$x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$$



ove si intende che $k \in \mathbb{Z}$ (di seguito intenderemo senz'altro sottintesa tale posizione).

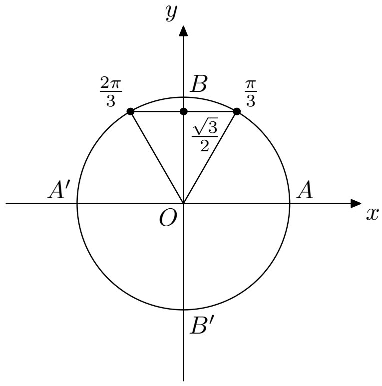
Esercizio 4.3.5. $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$
$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

cioè

$$x = k\pi,$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$



Esercizio 4.3.6. $\tan(x + \frac{\pi}{6}) > \frac{\sqrt{3}}{3}$

poniamo $x + \frac{\pi}{6} = t$, ottenendo $\tan t > \frac{\sqrt{3}}{3}$
Riferiamoci ora alla circonferenza goniometrica come in figura

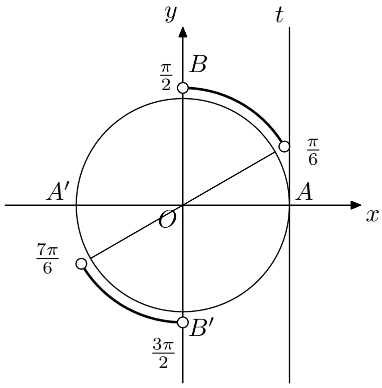
$$\frac{\pi}{6} + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

da cui

$$k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$$



Esercizio 4.3.7. $2\sin^2 x - \sin x - 1 \geq 0$

poniamo

$$\sin x = t \qquad 2t^2 - t - 1 \geq 0$$

le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$t_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \quad t_2 = 1$$

quindi la disequazione è verificata per:

$$t \leq -\frac{1}{2}; \qquad t \geq 1$$

per la posizione fatta

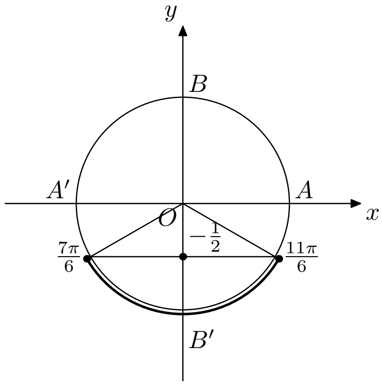
$$\sin x \leq -\frac{1}{2}; \qquad \sin x \geq 1$$

ovvero, vista la definizione di seno di un angolo

$$\sin x \leq -\frac{1}{2}; \qquad \sin x = 1$$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$



Esercizio 4.3.8. $2\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$

poniamo

$$\cos x = t \qquad 2t^2 - t - 1 < 0$$

le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$t_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad t_2 = 1$$

quindi la disequazione è verificata per:

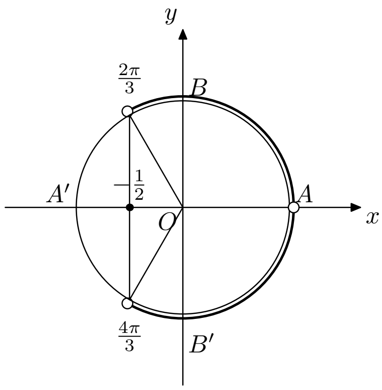
$$-\frac{1}{2} < t < 1$$

per la posizione fatta

$$-\frac{1}{2} < \cos x < 1$$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura

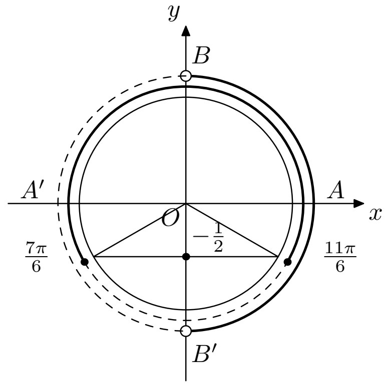
$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x \neq 2k\pi$$



Esercizio 4.3.9. $\dfrac{2\sin x + 1}{\cos x} \geq 0$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura e studiamo il segno dei fattori riportandolo in un grafico di segno

$$2\sin x + 1 \geq 0$$
$$\sin x \geq -\frac{1}{2}$$
$$\cos x > 0$$



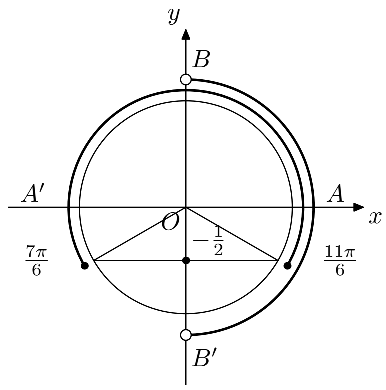
le soluzioni sono:

$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$
$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$

Esercizio 4.3.10. $\begin{cases} 2\sin x + 1 \geq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura e risolviamo separatamente le 2 disequazioni riportandone le soluzioni in un grafico di sistema

$$2\sin x + 1 \geq 0$$
$$\sin x \geq -\frac{1}{2}$$
$$\cos x > 0$$



le soluzioni sono:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

4.3.7 Formule goniometriche

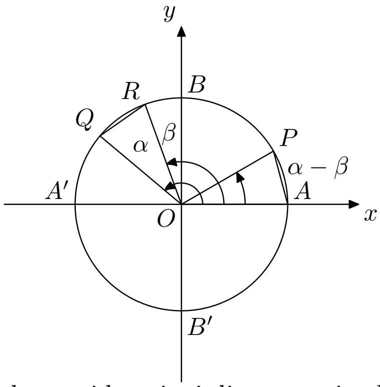
Dimostreremo di seguito alcune formule di particolare rilevanza per le molteplici applicazioni all'interno di equazioni e disequazioni goniometriche.

4.3.8 Formule di addizione e sottrazione

1. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
2. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
3. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
4. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Dim. (1.)

Riferiamoci alla circonferenza goniometrica come in figura



$$A(1,0)$$
$$P(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$$
$$Q(\cos\alpha,\sin\alpha)$$
$$R(\cos\beta,\sin\beta)$$

da considerazioni di geometria elementare si deduce che

$$d(A,P) = d(Q,R)$$

e ricordando la formula della distanza fra 2 punti del piano si ottiene:

$$\sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta)} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$

da cui

$$\cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) =$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

$$\underbrace{\cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)}_{1} + 1 - 2\cos(\alpha-\beta) =$$
$$= \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1} + \underbrace{\cos^2\beta + \sin^2\beta}_{1} - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

avendo usato la 1^a relazione fondamentale e semplificando

$$-2\cos(\alpha-\beta) = -2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

infine dividendo per -2 ambo i membri si ottiene la tesi, ovvero

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

□

Dim. (2.)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta)) = \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

avendo usato la formula precedente, la parità della funzione coseno e la disparità della funzione seno. □

Dim. (3.)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \cos(\pi/2-(\alpha-\beta)) = \cos((\pi/2-\alpha)+\beta) = \\ &= \cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta-\sin(\pi/2-\alpha)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

avendo usato le formule precedenti e le proprietà delle funzioni coseno e seno. □

Dim. (4.)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos(\pi/2-(\alpha+\beta)) = \cos((\pi/2-\alpha)-\beta) = \\ &= \cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta+\sin(\pi/2-\alpha)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

avendo usato le formule precedenti e le proprietà delle funzioni coseno e seno. □

Osservazione: le formule relative alle funzioni tangente e cotangente si ricavano usando le relazioni fondamentali:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} = \\ &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi/2+k\pi\end{aligned}$$

avendo opportunamente diviso numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$ e posto le necessarie condizioni di esistenza. Analogamente si ricavano tutte le altre.

Esercizio 4.3.11. $\sqrt{3}\sin x-\cos x>1$

osserviamo che $\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}$ e sostituiamo quindi nella disequazione:

$$\tan\frac{\pi}{3}\sin x-\cos x>1$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x-\cos x>1$$

moltiplichiamo ambo i membri per $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ e otteniamo:

$$\sin x\sin\frac{\pi}{3}-\cos x\cos\frac{\pi}{3}>\frac{1}{2}$$

moltiplichiamo ambo i membri per -1 e utilizziamo la formula di addizione per il coseno:

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) < -\frac{1}{2}$$

la disequazione così ottenuta è del tipo sopra svolto ed ha come soluzione:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

da cui:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

4.3.9 Formule di duplicazione

1. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}$

Dim. (1.)

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

avendo utilizzato le formule di addizione. Inoltre, usando la 1^a relazione fondamentale, si ottengono le altre forme equivalenti:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

□

Dim. (2.)

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

avendo utilizzato le formule di addizione. □

Osservazione: le formule relative alle funzioni tangente e cotangente si ricavano usando le relazioni fondamentali:

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \quad \alpha \neq \pi/4 + k\pi/2\end{aligned}$$

avendo opportunamente diviso numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$ e posto le necessarie condizioni di esistenza. Analogamente si ricavano tutte le altre.

Esercizio 4.3.12. $\sin 2x = \sin x$ utilizziamo la formula di duplicazione per il seno:

$$2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

raccogliamo $\sin x$ a fattor comune:

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

per la legge di annullamento del prodotto otteniamo:

$$\sin x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

da cui:

$$x = k\pi, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Proponiamo ora per lo stesso esercizio una diversa strategia risolutiva:

$$\sin 2x = \sin x$$

osserviamo che 2 angoli hanno lo stesso seno quando sono uguali oppure quando sono supplementari (a meno di multipli interi di 2π) e quindi:

$$2x = x + 2k\pi, \quad 2x = (\pi - x) + 2k\pi$$

da cui:

$$x = 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$$

notiamo che le soluzioni ottenute sono del tutto equivalenti alle precedenti.

4.3.10 Formule di bisezione

$$1. \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

Dim. (1.)

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

avendo utilizzato le formule di duplicazione.

□

Dim. (2.)

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

avendo utilizzato le formule di duplicazione.

□

Osservazione: le formule relative alle funzioni tangente e cotangente si ricavano usando le relazioni fondamentali:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \qquad \forall\alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \qquad \forall\alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \forall\alpha \neq k\pi$$

avendo usato le formule di bisezione per ottenere la prima delle tre forme equivalenti e avendo moltiplicato numeratore e denominatore opportunamente per $1+\cos\alpha$ (rispettivamente per $1-\cos\alpha$) per ottenenere la 2^a e la 3^a e posto le necessarie condizioni di esistenza. Analogamente si ricavano tutte le altre.

Esercizio 4.3.13. $\cos^2\dfrac{x}{2}=\cos x$

utilizziamo la formula di bisezione relativa al coseno: $\dfrac{1+\cos x}{2}=\cos x$ usando opportunamente i principi di equivalenza, otteniamo: $\cos x=1$ da cui: $x=2k\pi$.

4.3.11 Formule di prostaferesi

1. $\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ $\quad\forall p,q\in\mathbb{R}$
2. $\sin p-\sin q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$ $\quad\forall p,q\in\mathbb{R}$
3. $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ $\quad\forall p,q\in\mathbb{R}$
4. $\cos p-\cos q=-2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$ $\quad\forall p,q\in\mathbb{R}$

Dim. (1.)

Riprendiamo le formule di addizione e sottrazione relative alla funzione seno:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

sommando membro a membro otteniamo:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad (1)$$

ponendo

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$$

risulta che

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$$

da cui sostituendo nella (1) si ottiene la tesi. □

Osservazione: le altre 3 formule si ricavano in modo del tutto analogo, considerando a coppie le formule di addizione o sottrazione relative alla sola funzione seno o coseno e sommando oppure sottraendo opportunamente membro a membro.

Osservazione: le formule di prostaferesi relative alle funzioni tangente e cotangente si ricavano usando le relazioni fondamentali e le formule dimostrate.

$$\begin{aligned}\tan p+\tan q&=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\cos p\cos q}=\\ &=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q} \qquad \forall p,q\neq\pi/2+k\pi\end{aligned}$$

Analogamente si ricavano tutte le altre.

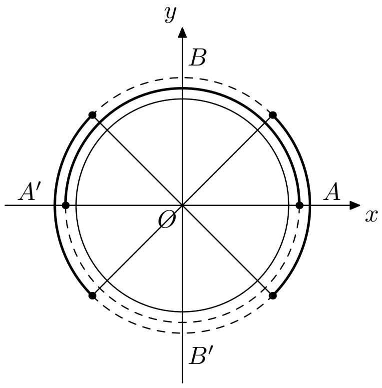
Esercizio 4.3.14. $\sin 3x - \sin x > 0$

utilizziamo la 2^a formula di prostaferesi e otteniamo:

$$2\cos 2x \sin x > 0$$

come visto precedentemente, ci riferiamo alla circonferenza goniometrica come in figura e studiamo il segno dei fattori riportandolo in un grafico di segno:

$$\cos 2x \geq 0$$
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$\sin x \geq 0$$



le soluzioni sono:

$2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$.

4.3.12 Formule di Werner

Sono le formule inverse delle precedenti.

1. $\sin\alpha\cos\beta = 1/2(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$ $\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
2. $\cos\alpha\cos\beta = 1/2(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ $\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
3. $\sin\alpha\sin\beta = -1/2(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$ $\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Dim. (1.2.3.)

Si applicano le formule di prostaferesi al secondo membro.
Si farà uso di tali formule prevalentemente nel calcolo integrale.

□

4.3.13 Formule razionali in tangente

1. $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad \forall\alpha \neq \pi + 2k\pi$

2. $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad \forall\alpha \neq \pi + 2k\pi$

Dim. (1.)

$$\sin\alpha = \sin 2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

che è la tesi, con le dovute condizioni di esistenza. □

Dim. (2.)

$$\cos\alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

che è la tesi, con le dovute condizioni di esistenza. □

Esercizio 4.3.15. $\sqrt{3}\sin x - \cos x > 1$

utilizziamo le formule razionali in $\tan\frac{x}{2}$ e, sotto la condizione $x \neq \pi + 2k\pi$ cui è vincolato l'uso delle stesse, otteniamo:

$$\sqrt{3}\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} > 1$$

moltiplicando ambo i membri per $1+\tan^2\frac{x}{2}$ si ha:

$$2\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} - 1 + \tan^2\frac{x}{2} > 1 + \tan^2\frac{x}{2}$$

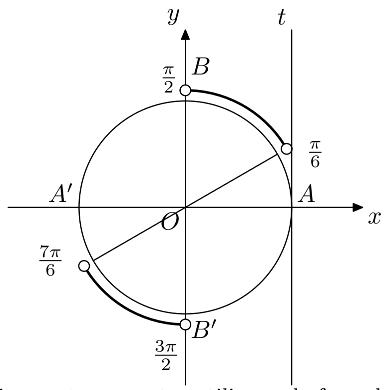
semplificando e razionalizzando otteniamo:

$$\tan\frac{x}{2} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Riferiamoci ora alla circonferenza goniometrica come in figura

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

da cui $$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$



non rimane ora che controllare se le condizioni aggiuntive poste per poter utilizzare le formule razionali costituiscono delle soluzioni. Sostituendo $x = \pi + 2k\pi$ nella disequazione data, si ottiene: $0 + 1 > 1$ che è evidentemente assurda. Pertanto le soluzioni sono:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

che coincidono con quelle trovate utilizzando le formule di addizione. Proponiamo ora, per lo stesso esercizio, una ulteriore strategia risolutiva che richiede conoscenze elementari di geometria analitica.

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x > 1$$

la disequazione risulta equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x - \cos x > 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

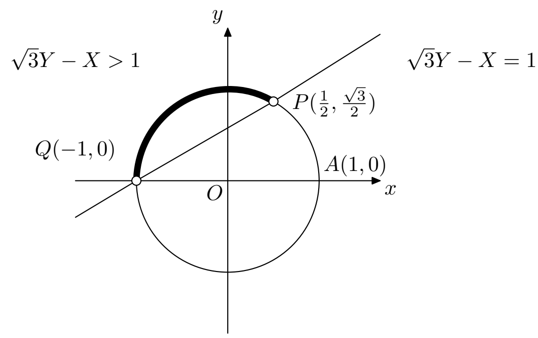
ponendo $\sin x = Y$ e $\cos x = X$ e sostituendo nel sistema si ha:

$$\begin{cases} \sqrt{3}Y - X > 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

Riferiamoci ora alla circonferenza goniometrica come in figura

I punti della circonferenza di equazione $Y^2 + X^2 = 1$ comuni al semipiano di equazione $\sqrt{3}Y - X > 1$ sono tutti e soli quelli dell'arco PQ non passante per A; essendo infine i punti P e Q associati agli angoli $\frac{\pi}{3}$ e π rispettivamente, le soluzioni sono:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi.$$



4.3.14 Esercizi sulle identità goniometriche

Facendo uso delle relazioni fondamentali e delle formule goniometriche, verificare le seguenti identità:

1) $\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin^3\alpha=\sin\alpha$ $[\forall\alpha]$

2) $\cot\alpha+\dfrac{1}{\cot\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$ $[\forall\alpha\neq k\frac{\pi}{2}]$

3) $\dfrac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}+1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}$ $[\forall\alpha\neq k\frac{\pi}{2}]$

4) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ $[\forall\alpha,\beta]$

5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}+\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}+\dfrac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)}=0$ $[\forall\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}]$

6) $\sin\alpha\cos 2\alpha-\cos\alpha\sin 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ $[\forall\alpha]$

7) $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}=\tan\alpha\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ $[\forall\alpha\neq k\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z},k\neq 4h,h\in\mathbb{Z}]$

8) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ $[\forall\alpha]$

9) $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\cot\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$ $[\forall\alpha\neq k\frac{\pi}{2}]$

10) $\tan\alpha\sin 4\alpha=4\cos^2\alpha+2\sin^2 2\alpha-4$ $[\forall\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi]$

4.3.15 Esercizi introduttivi di goniometria

Facendo uso delle relazioni fondamentali e delle formule goniometriche, risolvere i seguenti quesiti:

1. Sapendo che $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ e che il secondo lato dell'angolo appartiene al III quadrante, determina $\sin\alpha,\cos\alpha,\cot\alpha$ e $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Sapendo che $\cot\alpha=-\dfrac{1}{4}$ e che il secondo lato dell'angolo appartiene al IV quadrante, determina $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ e $\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.
3. Siano dati la circonferenza goniometrica, la retta r passante per l'origine O e formante con il semiasse positivo delle x un angolo α tale che $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$, la retta s passante per l'origine e perpendicolare ad r, i punti P_1 e P_3 (intersezioni di r con la circonferenza goniometrica nel primo e terzo quadrante rispettivamente), i punti P_2 e P_4 (intersezioni di s con la circonferenza goniometrica nel secondo e quarto quadrante rispettivamente), il punto Q (intersezione di r con la verticale passante per $A(1,0)$), il punto R (intersezione di r con l'orizzontale passante per $B(0,1)$); determinare:
   (a) $\sin\alpha,\cos\alpha,\cot\alpha$

(b) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right), \cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right), \cot\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right), \tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) area e perimetro di $P_1P_2P_3P_4$

(d) area e perimetro di OAQ e di OBR.

4. Calcola:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\cot\frac{\pi}{6}} - \tan\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{6} + \cos^2\frac{5\pi}{6} =$$

5. Calcola:

$$\frac{\sin^2(\alpha-6\pi)+\cos^2(-\alpha-2\pi)}{\sin(3\pi-\alpha)} + \frac{\cot(\alpha-3\pi)}{\cos(-\alpha)} =$$

6. Rappresenta graficamente a partire dai grafici elementari:

(a) $y = \sin\dfrac{x}{2}$

(b) $y = 3\cos 2x$

(c) $y = -1 - \cos x$

(d) $y = \sin|x|$

(e) $y = \left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right|$

(f) $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

4.3.16 Esercizi sulle equazioni e disequazioni goniometriche elementari

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni goniometriche elementari o riconducibili a tali:

1)	$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$[x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi]$
2)	$\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$	$[-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi]$
3)	$\tan x < 0$	$[-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi]$
4)	$\cot x \leq \sqrt{3}$	$[\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \pi + k\pi]$
5)	$\sin 3x = -1$	$[x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3}]$
6)	$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \geq -\dfrac{1}{2}$	$[-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi]$
7)	$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$[-\dfrac{3\pi}{4} + k\pi \leq x \leq k\pi]$
8)	$\cos x < -2$	$[\nexists x \in \mathbb{R}]$
9)	$\sin x > -1$	$[\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi]$
10)	$\cos x \geq -\sqrt{3}$	$[\forall x \in \mathbb{R}]$
11)	$2\lvert\sin x\rvert - \sqrt{3} < 0$	$[-\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi]$

12)	$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geq 0$	$[x = 2k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi]$
13)	$2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$	$[-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi]$
14)	$\dfrac{2\sin x + 1}{\cos x} \geq 0$	$[-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \leq x < \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi]$
15)	$\dfrac{1 - \cos x}{\sin x \cos x} \geq 0$	$[k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$
16)	$\dfrac{\tan x - 1}{\tan x} < 0$	$[k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi]$
17)	$\dfrac{2\sin x - \sqrt{3}}{2\cos x + 1} > 0$	$[\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, x \neq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi]$
18)	$\begin{cases} \tan x \geq 1 \\ 2\cos x + \sqrt{2} > 0 \end{cases}$	$[\dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi]$
19)	$\begin{cases} \cos x > 0 \\ 2\sin x + \sqrt{3} \leq 0 \end{cases}$	$[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi]$
20)	$\begin{cases} \tan x \geq -1 \\ \cot x < \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$	$[\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \leq x < \pi + k\pi]$

4.3.17 Esercizi sulle equazioni e disequazioni goniometriche

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni goniometriche facendo anche uso delle formule o particolari artifici:

1)	$\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$	$[x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi]$
2)	$2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - 2 \leq 0$	$[\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]$
3)	$\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$
4)	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$	$[2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
5)	$\cos^2 2x - \sin^2 2x + 1 = 0$	$[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}]$
6)	$\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x \geq -\frac{1}{2}$	$[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi]$
7)	$\sin 2x = 2(1 - \cos^2 x)$	$[x = k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$
8)	$\sin x + \cos x > 0$	$[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi]$

9)	$\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} > 0$	$[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
10)	$\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > 0$	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
11)	$\sin^2 x - \cos^2 x > 0$	$[\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi]$
12)	$\sin^4 x - \cos^4 x < 0$	$[-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi]$
13)	$\sin^3 x - \cos^3 x > 0x$	$[\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$
14)	$\cos 2x + \cos x = \cos\frac{3x}{2}$	$[x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi]$
15)	$\cos 2x = 3 - 5\sin x$	$[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$
16)	$\cos 5x + \cos 3x = \sin 3x + \sin x$	$[x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}]$
17)	$\sin x \cos x \leq \frac{1}{4}$	$[\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{13\pi}{12} + k\pi]$
18)	$2(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) + 1 \geq 0$	$[-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi]$
19)	$\sin^2\frac{x}{2} + \cos x - 1 \leq 0$	$[\forall x \in \mathbb{R}]$
20)	$\sin^2\frac{x}{2} + \cos x - 1 \geq 0$	$[x = 2k\pi]$

4.3.18 Esercizi vari

Facendo uso di quanto visto sulle funzioni goniometriche, risolvere i seguenti esercizi:

1. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:
   (a) $y = sinx + cosx$
   (b) $y = sinx - \sqrt{3}cosx$
   (c) $y = sin(x + \frac{\pi}{6}) - cos(x + \frac{\pi}{6})$
   (d) $y = asinx + bcosx$ con $a, b \in \mathbb{R}$
   (e) $y = \arcsin|x|$
   (f) $y = \arccos|x|$
   (g) $y = \arctan x + \frac{\pi}{2}$
   (h) $y = \arcsin(x + 1)$
   (i) $y = \arccos x - 1$

   (j) $y = |\arctan x|$
   (k) $y = \sin \arcsin x$
   (l) $y = \cos \arcsin x$

2. Calcolare $\sin \dfrac{\pi}{12}$
3. Calcolare $\cos \dfrac{11\pi}{12}$
4. Calcolare $\tan \dfrac{\pi}{8}$
5. Calcolare $\cot \dfrac{9\pi}{8}$

$$[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1]$$

4.3.19 Esercizi riassuntivi proposti

Facendo uso di quanto visto sulle funzioni trascendenti, risolvere i seguenti esercizi:

1)	$2 - \frac{1}{5^{1-2x}} = \frac{1}{25^{1-2x}}$	$[x = \frac{1}{2}]$
2)	$\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x-3) > 0$	$[3 < x < \frac{7}{2}]$
3)	$\frac{16 - 8x + x^2}{3^x - \sqrt{3}} \leq 0$	$[x < \frac{1}{2}, x = 4]$
4)	$2^{x+2} - 2^{x+1} - 2^x - 2^{x-1} - 2^{x-2} = 1$	$[x = 2]$
5)	$\log_2 \frac{1+x}{1-x} + 1 < 0$	$[-1 < x < -\frac{1}{3}]$
6)	$\frac{9^x - 4 \cdot 3^x + 3}{\log_{\frac{1}{3}} \lvert x\rvert} \geq 0$	$[-1 < x < 0]$
7)	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{9-x^2}} < 32$	$[-3 \leq x \leq 3]$
8)	$\left(\frac{3}{2}\right)^{\lvert x^2-4\rvert} \leq \frac{243}{32}$	$[-3 \leq x \leq 3]$
9)	$\begin{cases} 3^{x^2} - 81 < 0 \\ 1 - \log_2(2x-1) > 0 \end{cases}$	$[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}]$
10)	$\log_3(x-2) - \log_3 x + 1 < \log_3(4-x)$	$[2 < x < 3]$
11)	$2\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x+7)$	$[-\frac{7}{4} < x \leq -\sqrt{3}, x \geq \sqrt{3}]$
12)	$\log_4 \lvert x\rvert \cdot \log_{\lvert x\rvert}(x^2+1) = \frac{1}{2}$	$[\{\}]$
13)	$1 + 2\log_9 x^2 \leq \log_3(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$	$[-\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \text{ ma } x \neq 0]$
14)	$\ln x - 2\log_x e = 1$	$[x = e^2, x = \frac{1}{e}]$

15) $\dfrac{\log_2(5x-x^2)-2}{3^{\frac{x}{x^2-4}}} \geq 0$ $[1 \leq x \leq 4 \text{ ma } x \neq 2]$

16) $\log_x(2x-1) > 1$ $[x > \dfrac{1}{2} \text{ ma } x \neq 1]$

17) $\sin 5x - 1 = 0$ $[x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}]$

18) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $[-\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi]$

19) $3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ $[x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi]$

20) $\sin 2x = 2\cos x$ $[x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$

21) $\dfrac{1-2\sin x}{\tan x - 1} \leq 0$ $[\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi]$

22) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin x > 1$ $[2k\pi < x < \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi]$

23) $\dfrac{\sin 3x + \sin x}{2\sin^2 x \cos x} \geq 0$ $[k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$

20) $2\sin x = \sin 2x$ $[x = k\pi]$

21) $\dfrac{1-2\cos x}{\tan x} \leq 0$ $[2k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi]$

22) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos x > 1$ $[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi]$

23) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \cos 3x} < 0$ $[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, x \neq \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi]$

24) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

25) $\ln(\cos^2 x - 3) = 2$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

26) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\tan x) \geq -1$ $[k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{3} + k\pi]$

27) $\dfrac{\sin 6x - \sin 2x}{(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)} \geq 0$ $[k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}]$

28) $\log_{\frac{1}{2}}(1 - \sin x) \geq 1$ $[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi]$

29) $\dfrac{2\sin x \cos^2 x}{\cos 3x + \cos x} \geq 0$ $[k\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$

30) $\cot^2 x - (\sqrt{3} - 1)\cot x - \sqrt{3} = 0$ $[x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi]$

31) $\dfrac{2\sin x + \sqrt{2}}{\tan x - \sqrt{3}} \leq 0$ $[-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi]$

32) $|\ln(3^x - 2)| < 1$ $\quad [\log_3\left(2 + \frac{1}{e}\right) < x < \log_3(2 + e)]$

33) $3^{\sin 2x} \leq 1$ $\quad [\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi]$

34) $\frac{5^{\sin x}}{5^{\cos x}} \leq 5$ $\quad [-\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

35) $2^{\sqrt{\sin x - \cos x}} \leq 2$ $\quad [\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$

36) $\frac{e^{|\sin x|} - \sqrt{e}}{e^{\cot x} - 1} \geq 0$ $\quad [\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \leq x < \pi + k\pi]$

37) $\log_2\left(6^{2x} - 3 \cdot 6^x\right) \leq \log_2(6^x + 3) + \log_2(6^x - 4)$ $\quad [x \geq 1]$

38) $\log_2 x + \log_x 2 \leq 2$ $\quad [0 < x < 1, x = 2]$

39) $\log_2 x \cdot \log_x 2 \leq 2$ $\quad [x > 0, x \neq 1]$

40) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|x| + 1}{|x| + 2} > 1$ $\quad [\nexists x \in \mathbb{R}]$

Parte III

Geometria Analitica

Il nome Geometria Analitica rivela la natura stessa del legame intrinseco fra l'algebra e la geometria: è infatti questo l'ambito in cui l'aspetto di calcolo assume una configurazione grafica e alle curve rappresentate nel piano si fa corrispondere una equazione. Il metodo delle coordinate cartesiane (o di Cartesio) è lo strumento con il quale è possibile realizzare tali trasformazioni. In un crescendo di costruzioni geometriche, le coordinate di un punto, l'equazione di una retta (equazione di primo grado), l'equazione di una conica (equazione di secondo grado) prendono forma e traducono il legame tra le incognite in immagini che concretizzano le proprietà fondamentali degli enti geometrici analizzati.

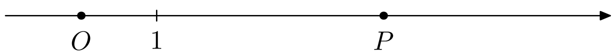
Capitolo 5

Il piano cartesiano

5.1 Punti e segmenti

Definizione 5.1.1. Si dice **sistema di riferimento di ascisse** o **asse di ascisse**, una retta orientata sulla quale è fissato un punto O detto origine e una unità di musura.

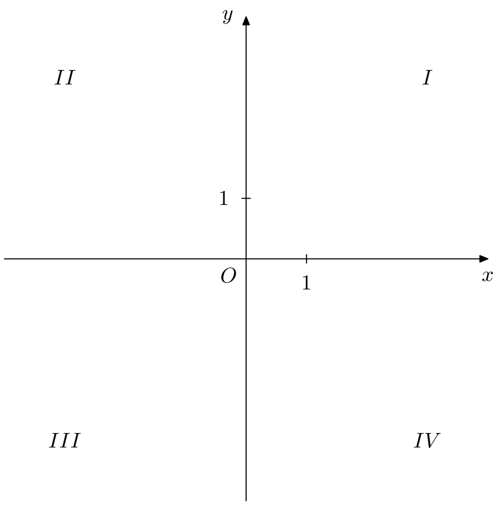
Nasce in tal modo una corrispondenza biunivoca (o funzione biiettiva) fra i punti della retta e i numeri reali, che associa ad ogni punto P della retta un numero reale.



Definizione 5.1.2. Preso un punto P su un asse di ascisse, si dice **coordinata ascissa di** P, o semplicemente **ascissa**, e si scrive x_P, la misura del segmento OP rispetto alla unità di misura, se P segue O; l'opposto di tale misura se P precede O.

Definizione 5.1.3. Si dice **sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico** l'insieme di 2 rette orientate e perpendicolari, sulle quali è fissata la stessa unità di misura. Il punto O d'intersezione delle rette, chiamate assi rispettivamente delle ascisse (o delle x) e delle ordinate (o delle y), viene detto origine del sistema.

Gli assi dividono il piano in 4 angoli retti detti, rispettivamente, I, II, III e IV quadrante.

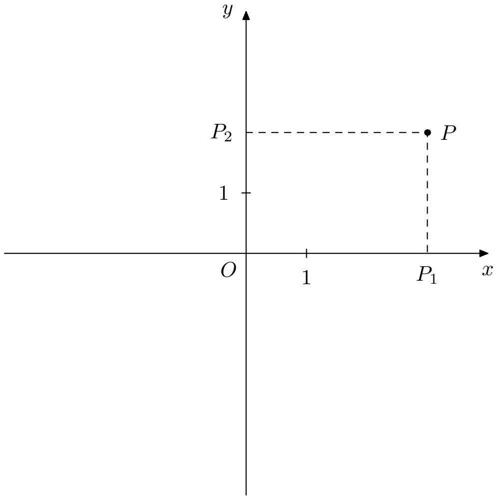


Nasce in tal modo una corrispondenza biunivoca (o funzione biiettiva) fra i punti del piano α e le coppie ordinate di numeri reali, che associa ad ogni punto P del piano la coppia ordinata (x, y) di numeri reali le cui componenti sono rispettivamente le ascisse dei punti P_1 e P_2 (nel senso della definizione 2.1.2), proiezioni ortogonali del punto P rispettivamente sugli assi x e y.

Convenzionalmente, per evitare ogni ambiguità, x ed y vengono dette ascissa ed ordinata di P.

$$\alpha \to \mathbb{R}^2$$

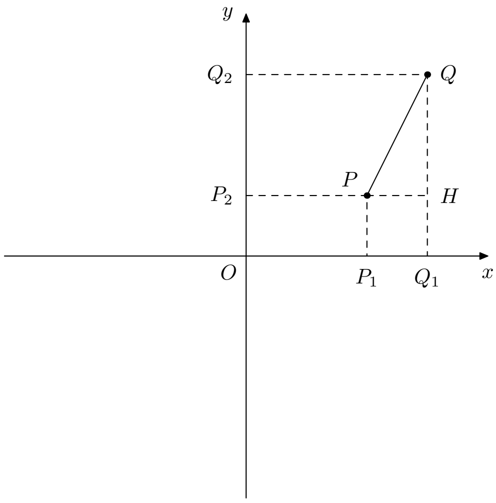
$$P \longmapsto (x, y)$$



Teorema 5.1.1. *Dati 2 punti $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ risulta che la loro distanza è*

$$d(P, Q) = \overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Dimostrazione. Consideriamo 2 punti P e Q come in figura e sia H il punto di intersezione delle parallele agli assi rispettivamente x ed y condotte da P e da Q.



Il triangolo PHQ risulta evidentemente rettangolo ed è applicabile ad esso il teorema di Pitagora:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HQ}^2$$

Osserviamo che:

$$\overline{PH} = \overline{P_1Q_1} = |\overline{OQ_1} - \overline{OP_1}| = |x_Q - x_P|$$
$$\overline{HQ} = \overline{P_2Q_2} = |\overline{OQ_2} - \overline{OP_2}| = |y_Q - y_P|$$

dove notiamo che la presenza del modulo è motivata dalla assoluta generalità delle posizioni dei punti P e Q nel piano.

Sostituendo nella relazione precedente, si ha:

$$\overline{PQ}^2 = |x_Q - x_P|^2 + |y_Q - y_P|^2$$

Estraendo infine la radice quadrata di entrambi i membri ed eliminando i moduli, essendo essi elevati alla seconda, otteniamo:

$$d(P,Q) = \overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

□

Osservazione. Nel caso in cui $x_Q = x_P$, cioè il segmento PQ risulta parallelo all'asse y, la formula precedente si riduce a

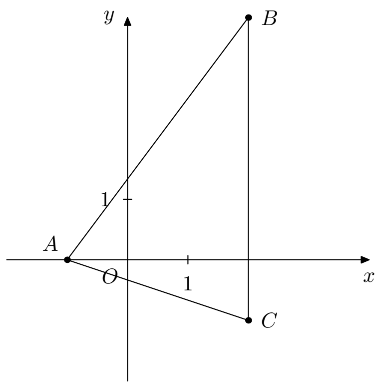
$$d(P,Q) = \overline{PQ} = |y_Q - y_P|$$

Nel caso in cui $y_Q = y_P$, cioè il segmento PQ risulta parallelo all'asse x, la formula precedente si riduce a

$$d(P,Q) = \overline{PQ} = |x_Q - x_P|$$

Esercizio 5.1.1. Dati i punti $A(-1,0)$, $B(2,4)$ e $C(2,-1)$, calcolare il perimetro del triangolo ABC.

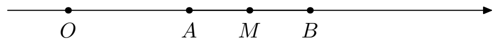
Calcoliamo le misure dei tre lati:
$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{0+25} = \sqrt{25} = 5$
$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
Pertanto risulta:
$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 5 + 5 + \sqrt{10} = 10 + \sqrt{10}$
Naturalmente il calcolo di $\overline{BC}$ poteva essere fatto più semplicemente con la formula ridotta
$\overline{BC} = |y_B - y_C| = |4 - (-1)| = 5$.



Definizione 5.1.4. Si dice **punto medio di un segmento** di estremi A, B il punto M di AB tale che $AM \cong MB$.

Teorema 5.1.2. *Dato il segmento AB di punto medio M e un punto O appartenete alla retta per AB, risulta che* $OM \cong \dfrac{OA + OB}{2}$.

Dimostrazione. Riferiamoci alla figura ove, per semplificare la dimostrazione, la retta è considerata orientata:



$$OM \cong \frac{OM + OM}{2} \cong \frac{OA + AM + OB - MB}{2} \cong \frac{OA + OB}{2}$$

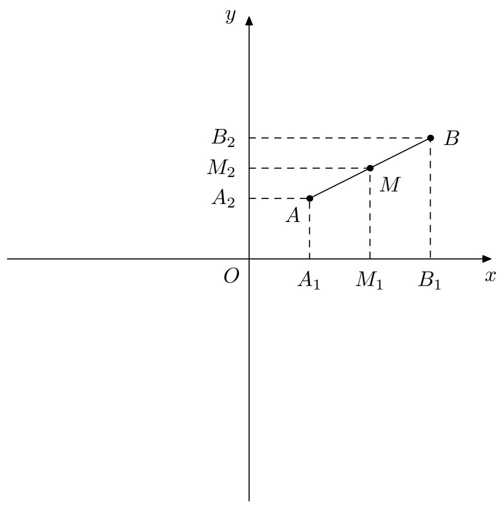
□

Osservazione. Se la retta orientata è un asse di ascisse di origine O e x_A e x_B sono le ascisse di A e B, risulta evidentemente che l'ascissa di M è $\frac{x_A + x_B}{2}$.

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, determiniamo ora le coordinate del punto medio M del segmento AB.

Teorema 5.1.3. *Dati i punti $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ il loro punto medio è $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.*

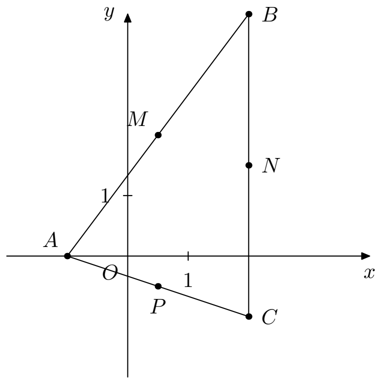
Dimostrazione. Riferiamoci alla figura



Poichè M è il punto medio di AB, per il teorema di Talete, si ha che M_1 lo è di A_1B_1 e M_2 lo è di A_2B_2. Per l'osservazione precedente $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$. □

Esercizio 5.1.2. Dati i punti $A(-1, 0)$, $B(2, 4)$ e $C(2, -1)$, calcolare i punti medi dei lati del triangolo ABC. Chiamiamo rispettivamente M, N, P i punti medi dei lati AB, BC e AC.

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$
$$N\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = N\left(\frac{2+2}{2}, \frac{4-1}{2}\right) = N\left(\frac{4}{2}, \frac{3}{2}\right) = N\left(2, \frac{3}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = P\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0-1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$



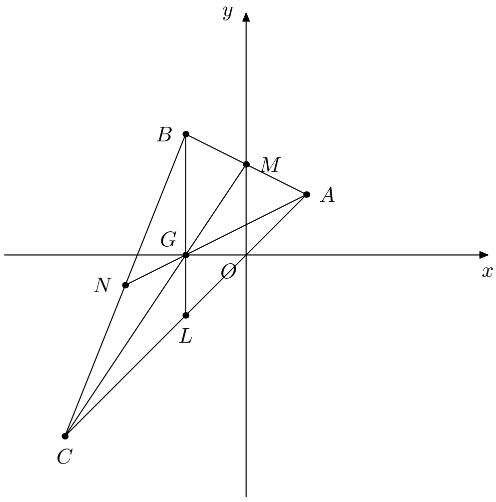
Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, determiniamo ora le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici A, B, C.

Teorema 5.1.4. *Dati i punti $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ il loro baricentro è*

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

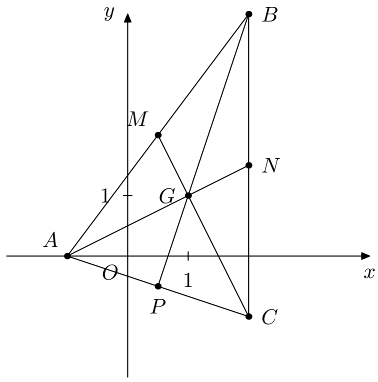
.

Omettiamo la dimostrazione.



Esercizio 5.1.3. Dati i punti $A(-1, 0)$, $B(2, 4)$ e $C(2, -1)$, calcolare il baricentro del triangolo ABC.

Chiamiamo rispettivamente M, N, P i punti medi dei lati AB, BC e AC e G il barcentro del triangolo. Utilizzando la formula precedente, si ha:
$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = G\left(\frac{-1+2+2}{3}, \frac{0+4-1}{3}\right) = G\left(\frac{3}{3}, \frac{3}{3}\right) = G(1, 1)$



Esercizi proposti

1. Verificare che il triangolo determinato dai tre punti $A(-1, 1)$, $B(1, 5)$ e $C(5, -2)$ è rettangolo in A.

   (*Dovrà essere verificata la relazione del Teorema di Pitagora*).

2. Verificare che il quadrilatero determinato dai quattro punti $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$, $C(4, -1)$ e D$(2, 1)$ è un parallelogramma.

   (*I lati opposti dovranno essere congruenti*).

3. Verificare che il quadrilatero determinato dai quattro punti $A(-1, -1)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$ e D$(1, 3)$ è un rettangolo.

   (*Oltre alla congruenza dei lati opposti dovrà essere verificata la congruenza delle diagonali*).

4. Verificare che il quadrilatero determinato dai quattro punti $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(0, -2)$ e D$(3, 0)$ è un quadrato.

   (*I lati dovranno essere congruenti e la misura delle diagonali si dovrà ottenere come prodotto della misura del lato per* $\sqrt{2}$).

5. Dopo aver verificato che il triangolo determinato dai tre punti $A(3, 4)$, $B(-1, 1)$ e $C(3, -1)$ è isoscele, calcolarne l'area.

   (*La mediana relativa alla base di un triangolo isoscele è anche... oppure, scegliendo come base AC... Area*=10).

6. Calcolare il perimetro del triangolo determinato dai tre punti $A(2, 1)$, $B(6, 4)$ e $C(2, 7)$ e verificare che il perimetro del triangolo determinato dai punti medi dei tre lati è uguale alla sua metà.

   ($2p(ABC) = 16$).

7. Determinare il baricentro del triangolo determinato dai tre punti $A(0, -5)$, $B(-2, 7)$, $C(5, 1)$. Detto, inoltre, M il punto medio del lato AB calcolare la misura della mediana CM e verificare che le aree dei triangoli ACM e MCB sono uguali.

   (*Il baricentro è* $G(1, 1)$, $CM = 6$, *area*(ACM)=18=*area*(ACM)).

8. Dato $A(2, 3)$, determinare l'estremo B del segmento AB di punto medio $M(3, 5)$.

   (*L'estremo cercato è* $B(4, 7)$).

9. Determinare i valori di a e b in modo che il triangolo individuato dai tre punti $A(1, 2)$, $B(2a - 1, 3)$ e $C(1, 2 - b)$ abbia per baricentro il punto $G(1, 1)$.

   (*I valori cercati sono* $a = 1$ *e* $b = 4$).

10. Determinare le coordinate dei punti C e D che dividono in tre parti congruenti il segmento di estremi $A(-1,1)$ e $B(5,4)$. Facoltativamente, generalizzare il problema con $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.
    (*I due punti cercati sono* $C(1,2)$ *e* $D(3,3)$*; in generale* $C(\frac{2x_A+x_B}{3}, \frac{2y_A+y_B}{3})$ *e* $D(\frac{x_A+2x_B}{3}, \frac{y_A+2y_B}{3})$).

11. * Determinare le coordinate dei punti C_1, C_2 ... C_{n-1} che dividono in n parti congruenti il segmento di estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.
    (*I punti cercati sono del tipo* $C_k(\frac{(n-k)x_A+kx_B}{n}, \frac{(n-k)y_A+ky_B}{n})$ *con* $k \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq k \leq n-1$).

Capitolo 6

Le rette

In questo capitolo tratteremo le più semplici curve del piano, ossia le rette, che l'allievo ha già incontrato nello studio della Geometria Euclidea come concetti primitivi.

6.1 Equazioni lineari

Teorema 6.1.1. *Ad ogni equazione di primo grado in x, y del tipo $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, b non contemporaneamente nulli, corrisponde una retta del piano cartesiano e viceversa.*

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che ad ogni equazione di primo grado in x, y del tipo $ax+by+c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, b non contemporaneamente nulli, corrisponde una retta del piano cartesiano.

A tale scopo distinguiamo i seguenti casi:

1. se $a = 0$ allora l'equazione diventa

   $by + c = 0$ cioè $y = -\dfrac{c}{b}$

   tale equazione rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano la cui ordinata è costantemente uguale a $-\dfrac{c}{b}$; si tratta perciò di una retta parallela all'asse delle x.

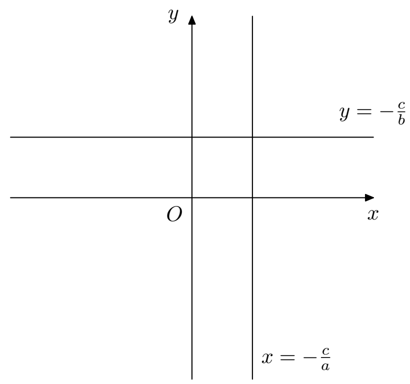
   Nel caso particolare in cui anche $c = 0$, l'equazione diventa $y = 0$ che rappresenta l'asse delle x.

2. se $b = 0$ allora l'equazione diventa

   $ax + c = 0$ cioè $x = -\dfrac{c}{a}$

   tale equazione rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano la cui ascissa è costantemente uguale a $-\dfrac{c}{a}$; si tratta perciò di una retta parallela all'asse delle y.

   Nel caso particolare in cui anche $c = 0$, l'equazione diventa $x = 0$ che rappresenta l'asse delle y.



3. se $c = 0$ allora l'equazione diventa

   $ax + by = 0$

   cioè, supponendo non nulli a, b (altrimenti ci si riconduce ad uno dei casi precedenti)

   $y = -\dfrac{a}{b}x$

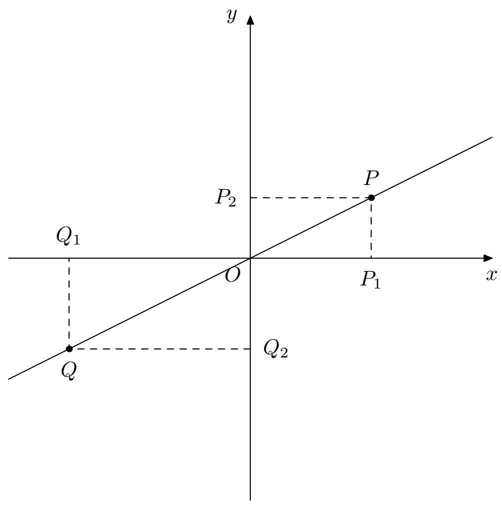
   e ponendo $-\dfrac{a}{b} = m$ si ottiene

   $\dfrac{y}{x} = m$

   tale equazione rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il rapporto fra ordinata e ascissa; dimostriamo che si tratta di una retta passante per l'origine del sistema di riferimento.

   Infatti, presi 2 punti P, Q per i quali risulti costante il rapporto fra ordinata e ascissa, consideriamo i triangoli OP_1P e OQ_1Q essendo P_1 e Q_1 le proiezioni di P e Q rispettivamente sull'asse x.

   Essi sono simili per avere una coppia di lati in proporzione e l'angolo fra essi compreso congruente perchè retto. Pertanto $P_1\widehat{O}P \cong Q_1\widehat{O}Q$ e quindi i punti P, O e Q risultano allineati.



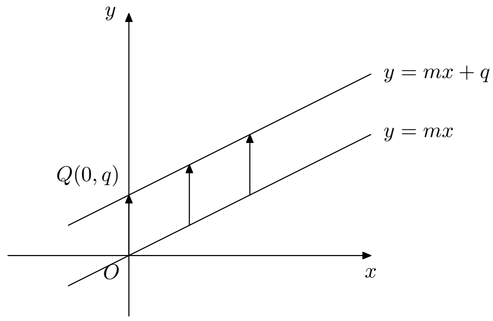
4. se $a, b, c \neq 0$ allora l'equazione è esplicitabile rispetto a ciascuna delle 2 variabili, in particolare rispetto alla y:

   $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

e ponendo $-\dfrac{a}{b} = m$ e $-\dfrac{c}{b} = q$ si ottiene

$y = mx + q$

tale equazione rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano del caso precedente traslati verticalmente della quantità q; pertanto si tratta di una retta non passante per l'origine e non parallela agli assi.

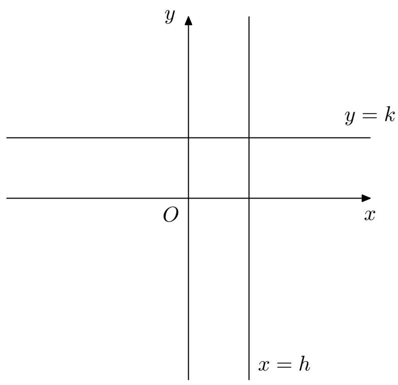


Dimostriamo ora che ad ogni retta del piano cartesiano corrisponde una equazione di primo grado in x, y del tipo $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, b non contemporaneamente nulli.

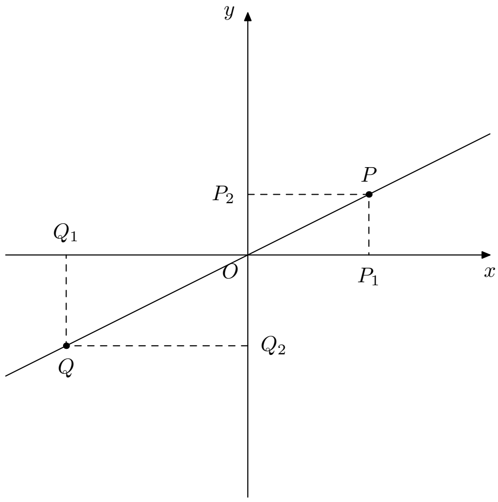
A tale scopo distinguiamo i seguenti casi:

1. Consideriamo una retta parallela all'asse delle x; i suoi punti sono caratterizzati dall'avere ordinata costante. Pertanto sono descritti dall'equazione $y = k$.

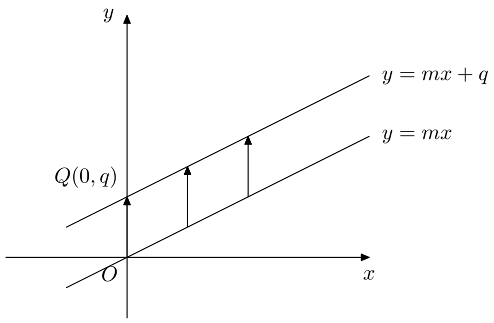
2. Consideriamo una retta parallela all'asse delle y; i suoi punti sono caratterizzati dall'avere ascissa costante. Pertanto sono descritti dall'equazione $x = h$.



3. Consideriamo una retta passante per l'origine. Presi su di essa 2 punti P e Q di proiezioni rispettivamente P_1 e Q_1 sull'asse delle ascisse, osserviamo che i triangoli OP_1P e OQ_1Q sono simili per avere congruenti, oltre all' angolo retto, gli angoli di vertice O. Pertanto i lati corrispondenti sono in proporzione; in particolare $PP_1 : OP_1 = QQ_1 : OQ_1$. Da ciò si deduce che rimane costante il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di un qualunque punto della retta considerata, che è pertanto descritta dall'equazione $\dfrac{y}{x} = m$ ovvero $y = mx$.



4. Consideriamo una retta non passante per l'origine e non parallela agli assi che intersechi l'asse y nel punto $Q(0, q)$. La retta passante per l'origine e ad essa parallela ha equazione $y = mx$ come appena dimostrato nel precedente caso. D'altra parte la retta presa in esame è ottenuta traslando verticalmente la retta per l'origine della quantità q. Essa è pertanto descritta dall'equazione $y = mx + q$.



□

Osservazione. Il coefficiente m della x nell'equazione $y = mx+q$ viene chiamato coefficiente angolare della retta. Vedremo in seguito il suo significato geometrico, ma possiamo fin d'ora osservare che esso è legato alla inclinazione della retta rispetto al semiasse positivo delle x. Risulta evidente pertanto dall'ultimo punto della precedente dimostrazione, che rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare.

Osservazione. Il termine noto q nell'equazione $y = mx + q$ viene chiamato intercetta e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle y.

Osservazione. L'equazione della retta nella forma $ax + by + c = 0$ viene detta implicita; nella forma $y = mx + q$ è detta esplicita.

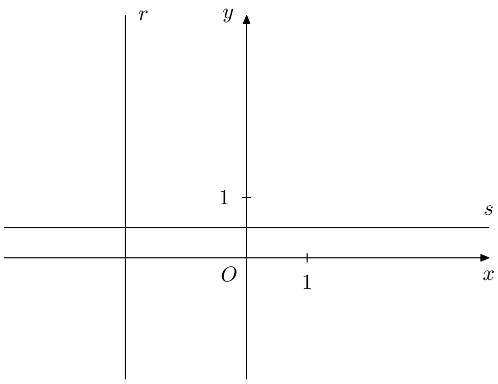
Tutte le rette del piano possono essere rappresentate da una equazione in forma sia implicita che esplicita, tranne le parallele all'asse delle y che non sono esplicitabili.

Esercizio 6.1.1. Tracciare i grafici delle seguenti rette:
$r : x + 2 = 0$
$s : 2y - 1 = 0$
$t : x - y + 3 = 0$

$v : 2x + y = 0$
$w : x + 3y - 3 = 0.$

La retta r è parallela all'asse y; la sua equazione, esplicitata rispetto ad x, risulta $x = -2$.

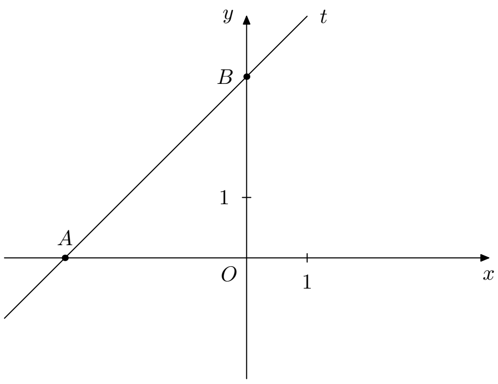
La retta s è parallela all'asse x; la sua equazione, esplicitata rispetto ad y, risulta $y = \frac{1}{2}$.



E' appena il caso di ricordare che per due punti distinti del piano passa una ed una sola retta.

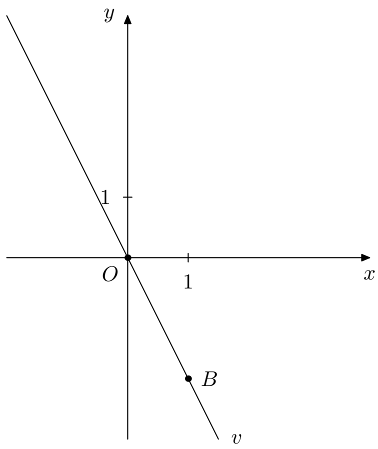
L'equazione della retta t, esplicitata rispetto alla y, risulta $y = x + 3$; determiniamo due punti di t, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
-3	0
0	3



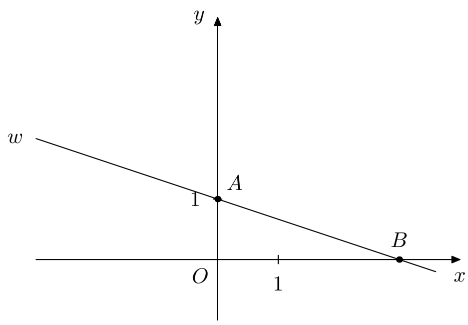
L'equazione della retta v, esplicitata rispetto alla y, risulta $y = -2x$; determiniamo due punti di v, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	0
1	-2



L'equazione della retta w, esplicitata rispetto alla y, risulta $y = \dfrac{3-x}{3}$; determiniamo due punti di w, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	1
3	0



6.2 Relazioni e formule

Definizione 6.2.1. Diremo che **il punto** $P(x_0, y_0)$ **appartiene alla retta** di equazione $ax + by + c = 0$ se le sue coordinate verificano l'equazione.

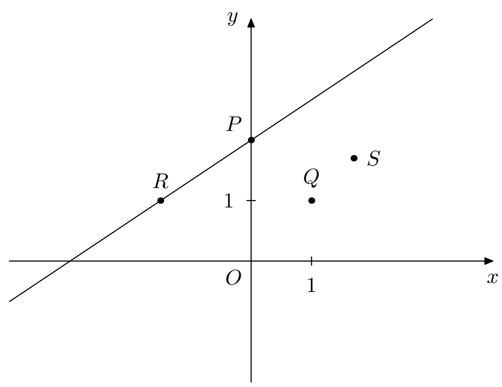
Esercizio 6.2.1. Data la retta di equazione $2x - 3y + 6 = 0$ verificare se i seguenti punti le appartengono: $P(0,2)$, $Q(1,1)$, $R\left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$, $S(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Sostituiamo le coordinate di $P(0,2)$ nell'equazione della retta: $0 - 6 + 6 = 0 \Rightarrow P$ appartiene alla retta data.

Sostituiamo le coordinate di $Q(1,1)$ nell'equazione della retta: $2 - 3 + 6 \neq 0 \Rightarrow Q$ non appartiene alla retta data.

Sostituiamo le coordinate di $R\left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$ nell'equazione della retta: $-3 - 3 + 6 = 0 \Rightarrow R$ appartiene alla retta data.

Sostituiamo le coordinate di $S(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ nell'equazione della retta: $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6 \neq 0 \Rightarrow S$ non appartiene alla retta data.



Definizione 6.2.2. Si dice **fascio improprio di rette** l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una retta data.

Teorema 6.2.1. *L'equazione di un fascio improprio di rette parallele alla retta base di equazione $y = m_0 x$ con m_0 fissato in $\mathbb{R}$ è:*

$$y = m_0 x + k \qquad \text{al variare di } k \text{ in } \mathbb{R}.$$

L'equazione del fascio improprio di rette parallele all'asse y è:

$$x = h \qquad \text{al variare di } h \text{ in } \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Consegue direttamente dal Teorema 6.1.1. □

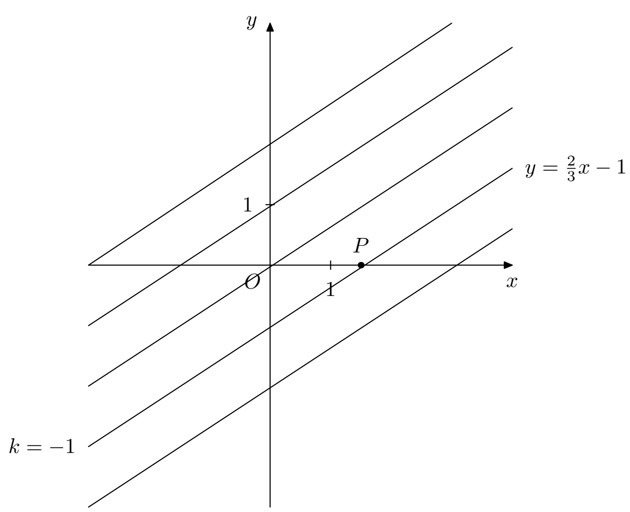
Esercizio 6.2.2. Scrivere l'equazione della retta parallela alla retta di equazione $y = \frac{2}{3}x$ passante per il punto $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

La retta cercata appartiene al fascio improprio di rette parallele alla retta data:

$$\mathcal{F} : y = \frac{2}{3}x + k$$

imponiamo ora il passaggio per P: $0 = 1 + k$

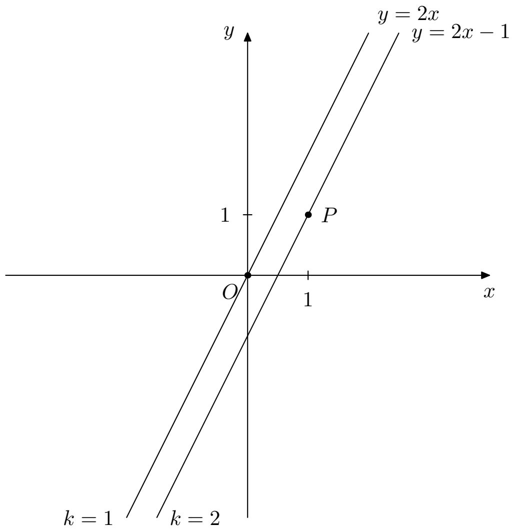
da cui $k = -1$ e quindi l'equazione cercata è $y = \frac{2}{3}x - 1$



Esercizio 6.2.3. Dato il fascio improprio di equazione $F: 2x - y - k + 1 = 0$, determinare le rette:

1. passante per l'origine;
2. passante per $P(1,1)$;
3. che individuano con gli assi cartesiani un triangolo di area 1.

1. Scriviamo l'equazione del fascio in forma esplicita: $y = 2x - k + 1$
   imponiamo il passaggio per $O(0,0)$: $0 = -k + 1$
   da cui $k = 1$ e quindi l'equazione cercata è $y = 2x$;
2. Imponiamo il passaggio per $P(1,1)$: $1 = 2 - k + 1$
   da cui $k = 2$ e quindi l'equazione cercata è $y = 2x - 1$;



3. Ricordiamo che le coordinate degli eventuali punti di intersezione fra due rette sono le soluzioni del sistema lineare formato dalle loro equazioni. Pertanto le coordinate dei punti di intersezione della generica retta del fascio con gli assi cartesiani sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x - k + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

   ossia il punto $A\left(\dfrac{k-1}{2}, 0\right)$
   e la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x - k + 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

   ossia il punto $B(0, 1-k)$.
   L'area del triangolo cercato è pertanto:

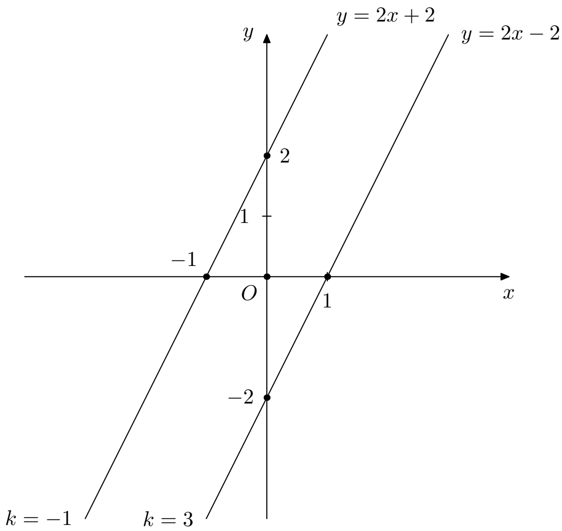
$$\frac{1}{2}|1-k| \cdot \left|\frac{k-1}{2}\right|$$

ed imponendo che essa valga 1, si ha: $\dfrac{|1-k|\cdot|k-1|}{4}=1$

$|k-1|\cdot|k-1|=4$

$(k-1)^2=4$

da cui $k=-1$ oppure $k=3$.



Definizione 6.2.3. Si dice **fascio proprio di rette** l'insieme di tutte le rette del piano passanti per un punto dato, chiamato centro o sostegno del fascio.

Teorema 6.2.2. *L'equazione di un fascio proprio di rette di centro $C(x_0, y_0)$ è:*

$$y-y_0=m(x-x_0) \qquad \textit{oppure} \qquad x=x_0 \qquad\qquad \textit{al variare di } m \textit{ in } \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la generica retta passante per $C(x_0, y_0)$; essa può essere verticale e avere equazione $x = x_0$; altrimenti è del tipo $y = mx + q \quad (*)$. In quest'ultimo caso, dovendo C appartenere alla retta, si ha che

$$y_0 = mx_0 + q$$

da cui $q = y_0 - mx_0$ che sostituito nella equazione $(*)$ dà

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

e, infine, raccogliendo a fattor comune

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

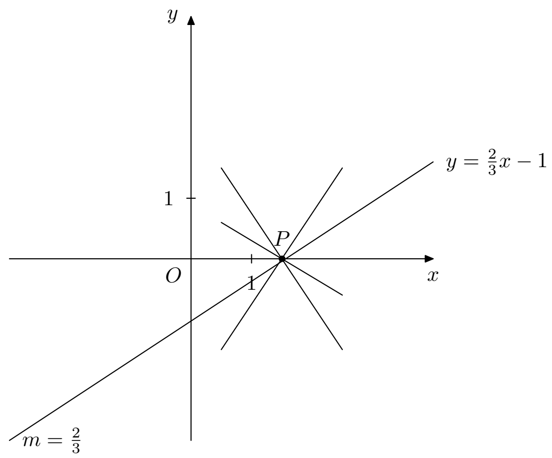
□

Esercizio 6.2.4. Scrivere l'equazione della retta parallela alla retta di equazione $y = \dfrac{2}{3}x$ passante per il punto $P\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

La retta cercata appartiene al fascio proprio di rette di centro il punto P (evidentemente non può essere parallela all'asse y):

$$\mathcal{F}: y - 0 = m\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

imponiamo ora la condizione di parallelismo con la retta data: $m = \dfrac{2}{3}$ e, sostituendo: $y = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ quindi l'equazione cercata è $y = \dfrac{2}{3}x - 1$.



Osservazione. L'equazione della retta passante per i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ è

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ovvero

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Infatti basterà sostituire le coordinate di P_2 nell'equazione del fascio di rette di centro P_1 e ricavare, quindi, il coefficiente angolare m.

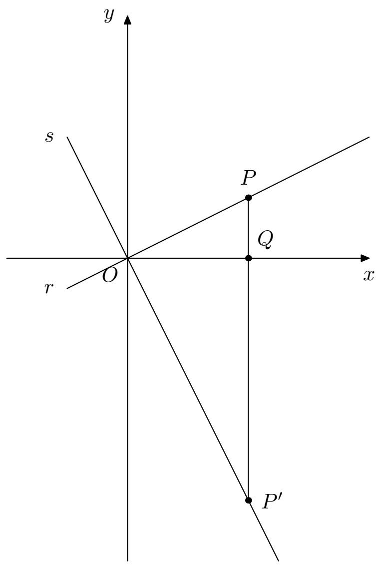
Se $x_1 = x_2$ allora la retta passante per i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è verticale e la sua equazione risulta, ovviamente, $x = x_1$.

Se $y_1 = y_2$ allora la retta passante per i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è orizzontale e la sua equazione risulta, ovviamente, $y = y_1$.

Teorema 6.2.3. *Siano r ed s 2 rette del piano non parallele agli assi di equazione rispettivamente $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$. Esse risultano perpendicolari fra loro se e solo se $m \cdot m' = -1$ ossia $m = -\dfrac{1}{m'}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso in cui r ed s passino per l'origine. Ciò non costituisce una restrizione poichè abbiamo già osservato che rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare.

Proviamo dapprima che se le rette sono perpendicolari allora $m \cdot m' = -1$ (ovviamente, dall'ipotesi segue che m ed m' sono entrambi non nulli).



Con riferimento alla figura osserviamo che P, Q, P' hanno la stessa ascissa x, il triangolo $OP'P$ è rettangolo in O e OQ è la sua altezza relativa all'ipotenusa. Applichiamo, quindi, il 2° teorema di Euclide al triangolo $OP'P$:

$$\overline{OQ}^2 = \overline{PQ} \cdot \overline{QP'}$$

Le ordinate di P e P' sono necessariamente discordi, nel nostro caso risulta essere negativa l'ordinata di P', pertanto risulta:

$$x^2 = mx \cdot (-m'x)$$

semplificando e moltiplicando per -1 otteniamo:

$$m \cdot m' = -1$$

Viceversa, se vale la relazione $m \cdot m' = -1$ allora è vera anche la $x^2 = mx \cdot (-m'x)$, da cui discende che il triangolo $OP'P$ è rettangolo essendo ad esso applicabile il 2° teorema di Euclide. □

Osservazione. Se $m = 0$ allora r è parallela all'asse x ed s è parallela all'asse y ed m' non esiste.

Il caso risulta del tutto simmetrico qualora sia $m' = 0$.

Teorema 6.2.4. *Sia r una retta del piano, non parallela all'asse delle y, di equazione $y = m_1x + q_1$ e sia $P(x_P, y_P)$ un generico punto del piano.*

La distanza di P dalla retta r è

$$\overline{PH} = \frac{|m_1x_P - y_P + q_1|}{\sqrt{m_1^2 + 1}}$$

ove H è il piede della perpendicolare condotta da P ad r.

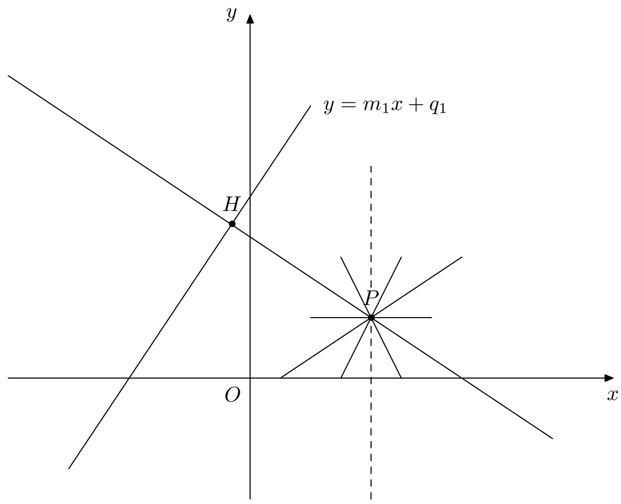
Dimostrazione. Il fascio di rette di centro $P(x_P, y_P)$ ha equazione

$$\mathcal{F} : y - y_P = m(x - x_P)$$

(manca, ovviamente, l'equazione della retta del fascio parallela all'asse delle y, caso che verrà trattato a parte).

Nel caso in cui la retta r sia parallela all'asse delle x, ossia del tipo $y = k$, risulta banalmente $\overline{PH} = |y_P - k|$ come del resto deducibile dalla formula con $m = 0$.

Se r non è parallela all'asse delle x, fra tutte le rette per P scegliamo la perpendicolare ad r, sostituendo m con $-\dfrac{1}{m_1}$ nell'equazione del fascio; infine intersechiamo tale perpendicolare con la retta r ottenendo il punto H.



Mettiamo a sistema l'equazione della retta r con l'equazione del fascio di rette di centro P:

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m(x - x_P) + y_P \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = -\dfrac{1}{m_1}(x - x_P) + y_P \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ m_1x + q_1 = -\dfrac{1}{m_1}x + \dfrac{x_P}{m_1} + y_P \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione fuori dal sistema:

$$\left(m_1 + \frac{1}{m_1}\right)x = \frac{x_P}{m_1} + y_P - q_1$$

da cui

$$x = \frac{\dfrac{x_P + m_1y_P - m_1q_1}{m_1}}{\dfrac{m_1^2+1}{m_1}} = \frac{x_P + m_1y_P - m_1q_1}{m_1^2+1}$$

ritornando al sistema otteniamo le coordinate del punto H:

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_P + m_1y_P - m_1q_1}{m_1^2+1} \\ y_H = \dfrac{m_1x_P + m_1^2y_P + q_1}{m_1^2+1} \end{cases}$$

Infine, utilizzando la formula della distanza fra 2 punti, determiniamo la distanza cercata:

$$\overline{PH} = \sqrt{\left(\frac{m_1^2x_P - m_1y_P + m_1q_1}{m_1^2+1}\right)^2 + \left(\frac{y_P - m_1x_P - q_1}{m_1^2+1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{m_1^4x_P^2 + m_1^2y_P^2 + m_1^2q_1^2 - 2m_1^3x_Py_P + 2m_1^3q_1x_P - 2m_1^2q_1y_P + y_P^2 + m_1^2x_P^2 + q_1^2 - 2m_1x_Py_P - 2q_1y_P + 2m_1q_1x_P}{\left(m_1^2+1\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m_1^2\left(m_1^2+1\right)x_P^2 + \left(m_1^2+1\right)y_P^2 + \left(m_1^2+1\right)q_1^2 - 2m_1\left(m_1^2+1\right)x_Py_P + 2m_1\left(m_1^2+1\right)q_1x_P - 2\left(m_1^2+1\right)q_1y_P}{\left(m_1^2+1\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m_1^2x_P^2 + y_P^2 + q_1^2 - 2m_1x_Py_P + 2m_1q_1x_P - 2q_1y_P}{\left(m_1^2+1\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(m_1x_P - y_P + q_1\right)^2}{\left(m_1^2+1\right)}} =$$

$$= \frac{|m_1x_P - y_P + q_1|}{\sqrt{m^2+1}}$$ come volevasi dimostrare.

Nel caso in cui la retta r sia parallela all'asse delle y, ossia del tipo $x = h$, risulta banalmente $\overline{PH} = |x_P - h|$. $\square$

Osservazione. Nel caso in cui il punto P appartenga alla retta r risulta banalmente $\overline{PH} = 0$ come del resto deducibile dalla formula del teorema essendo nullo il numeratore.

Esempio 6.2.1. Dati la retta r di equazione $y = \frac{3}{2}x + 3$ e il punto $P(2, 1)$ determinare la distanza di P da r.

Applichiamo la formula del teorema:

$$\overline{PH} = \frac{|m_1 x_P - y_P + q_1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\left|\frac{3}{2} \cdot 2 - 1 + 3\right|}{\sqrt{\frac{9}{4} + 1}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{13}{4}}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}.$$

Esercizio 6.2.5. Dopo aver scritto l'equazione della retta s passante per $P(1, 2)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = x - 1$, determinare perimetro ed area del quadrilatero $PQRS$ ove Q è il punto di intersezione della retta r con l'asse delle y, R è il punto di intersezione della retta s con l'asse delle x ed S è il punto di intersezione fra la perpendicolare all'asse delle x passante per R e la parallela all'asse delle x passante per P.

La retta s appartiene al fascio proprio di rette di centro P

$$\mathcal{F} : y = m(x - 1) + 2$$

poichè s è perpendicolare ad r, il suo coefficiente angolare è l'antireciproco di 1 ossia -1. Quindi

$$s : y = -x + 3$$

Per determinare il punto Q, intersechiamo la retta r e l'asse delle y:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ossia $Q(0, -1)$.

Per determinare il punto R, intersechiamo la retta s e l'asse delle x:

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia $R(3, 0)$.

Per determinare il punto S, intersechiamo la retta perpendicolare all'asse x passante per R e la retta perpendicolare all'asse y passante per P:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

ossia $S(3, 2)$.

Per calcolare il perimetro abbiamo bisogno delle misure dei lati:

$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

$\overline{QR} = \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 + 1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

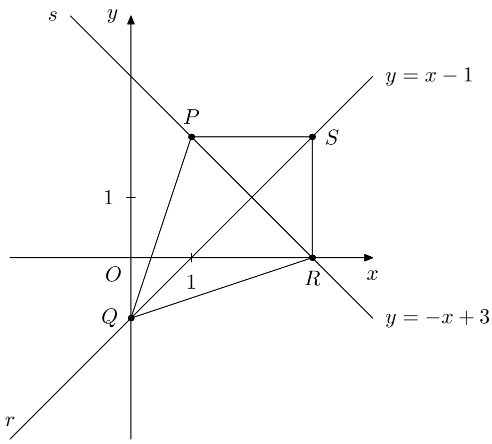
$\overline{RS} = |y_R - y_S| = 2$

$\overline{SP} = |x_S - x_P| = 2$

da cui $2p = 2\sqrt{10} + 4$.

Osserviamo che i lati del quadrilatero sono coppie di lati consecutivi congruenti; le diagonali del quadrilatero sono perpendicolari; si tratta di un romboide, la cui area è calcolabile mediante la formula:

$\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \dfrac{\overline{QS} \cdot \overline{PR}}{2}$
calcoliamo le misure delle diagonali:
$\overline{QS} = \sqrt{(x_Q - x_S)^2 + (y_Q - y_S)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$
$\overline{PR} = \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ l'area richiesta è:
$\mathcal{A} = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 6.$



Esercizi proposti

1. Verificare che nel quadrilatero determinato dai quattro punti $A(3,3)$, $B(3,-2)$, $C(-1,1)$ e $D(-1,6)$ i quattro lati sono congruenti, i lati opposti sono paralleli, le diagonali sono perpendicolari e si dimezzano.

   (*Lato*=5, *diagonale maggiore*=$4\sqrt{5}$, *diagonale minore*=$2\sqrt{5}$, *punto di intersezione delle diagonali* $P(1,2)$).

2. Verificare che il baricentro del triangolo determinato dai tre punti $A(-1,6)$, $B(-2,-1)$ e $C(6,1)$ divide ciascuna mediana in due parti di cui una è doppia dell'altra.

   (*Il baricentro è* $G(1,2)$).

3. Dati i due punti $A(4,1)$ e $B(2,-3)$, determinare il punto P sull'asse delle ascisse e il punto Q sull'asse delle ordinate equidistanti da A e B.

   (*I punti cercati sono* $P(1,0)$ *e* $Q(0,\frac{1}{2})$).

4. Dati i due punti $A(-2,-1)$ e $B(4,0)$ sia C il punto del segmento AB per il quale si abbia $AC = 2BC$. Condotta per C la retta di coefficiente angolare 2 ed indicato con D il suo punto di ascissa nulla, calcolare il rapporto tra l'area del triangolo BCD e quella del triangolo ACD.

   (*Il rapporto è* $\frac{1}{2}$ *e non è necessario calcolare le coordinate dei punti C e D perchè... per chi li avesse comunque trovati risultano* $C(2,-\frac{1}{3})$ *e* $D(0,-\frac{13}{3})$).

5. Dal punto $A(-2,3)$ si conduca la retta passante per il punto medio del segmento avente per estremi i due punti $B(-3,0)$ e $C(3,2)$ indicando con D il suo punto di ordinata nulla. Sempre da A si conduca la perpendicolare alla retta individuata dai punti C e D verificando che le due rette coincidono. Calcolare infine l'area di ciascuno dei quattro triangoli in cui il quadrilatero convesso $ABDC$ è diviso dalle sue diagonali.

   (*Le aree sono* 4, 2, 2 *e* 4).

6. Dati i due punti $A(\frac{7}{2}, -3)$ e $B(\frac{9}{2}, 1)$, sia M il punto medio del segmento AB. Verificare che l'asse del segmento AB passa per l'origine del sistema di riferimento. Condotta da A la parallela all'asse delle ascisse fino ad incontrare in C l'asse delle ordinate, condurre da B la parallela alla retta OM e da O la parallela alla retta AB chiamando D il punto di intersezione di queste ultime due rette. Calcolare l'area del pentagono convesso $OCABD$.

   ($M(4, -1)$, $C(0, -3)$, $D(\frac{1}{2}, 2)$ *e area(*$OCABD$*)=*18).

7. * Dati i due punti $A(-1, 1)$ e $B(5, 3)$, scrivere l'equazione del luogo dei punti C per i quali risulta uguale a 5 l'area del triangolo ABC.

   (*Il punto C dovrà appartenere ad una delle due rette di equazione* $x - 3y - 1 = 0$ *o* $x - 3y + 9 = 0$).

8. * Sia C il punto in cui l'asse del segmento avente per estremi i punti $A(-3, 3)$ e $B(1, 5)$ incontra l'asse delle ascisse e D il punto equidistante da A, B e C. Determinare il rapporto fra l'area del triangolo BCD e quella del triangoo ABD.

   ($D(-\frac{1}{4}, \frac{5}{2})$, *rapporto=*$\frac{5}{6}$).

9. ** Dopo aver verificato che l'equazione parametrica $(p + 3)x - 5py + 1 = 0$ è quella di un fascio proprio di rette e dopo aver calcolato il centro del fascio, verificare che la suddetta equazione non comprende la totalità delle rette del fascio.

   ($C(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{15})$, *manca la retta passante per l'origine*).

10. ** Dopo aver verificato che l'equazione parametrica $(2k - 1)x + (2 - 4k)y + 2k - 3 = 0$ è quella di un fascio improprio di rette, verificare anche che l' equazione data non comprende la totalità delle rette del fascio.

    (*Dovrà essere* $k \neq \frac{1}{2}$, *manca la retta di equazione* $x - 2y + 1 = 0$).

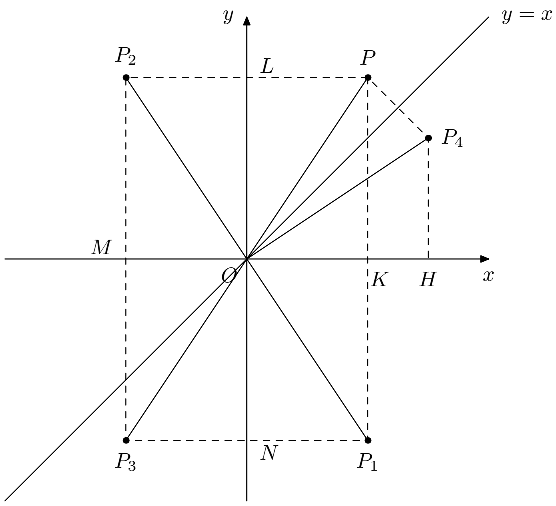
Capitolo 7

Le trasformazioni

In questo capitolo esamineremo alcune trasformazioni del piano allo scopo di semplificare lo studio di particolari curve riconducendolo a casi notevoli.

7.1 Simmetrie

Sia $P(x, y)$ un generico punto del piano; il suo simmetrico rispetto all'asse delle x è $P_1(x, -y)$, rispetto all'asse delle y è $P_2(-x, y)$, rispetto all'origine è $P_3(-x, -y)$, rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante (o I bisettrice) è $P_4(y, x)$.



Dalla figura si deducono facilmente le congruenze dei triangoli POL e P_1ON, POL e P_2OL, POL e P_3ON, POL e P_4OH. Per la dimostrazione dell'ultima congruenza si osservi che il triangolo POP_4 è isoscele sulla base PP_4.

Esempio 7.1.1. Data la retta r di equazione $y = 2x + 2$ scrivere le equazioni delle sue simmetriche rispetto all'asse delle x, all'asse delle y, all'origine, alla I bisettrice e rappresentarle graficamente.

1. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e la sua simmetrica rispetto all'asse delle x.

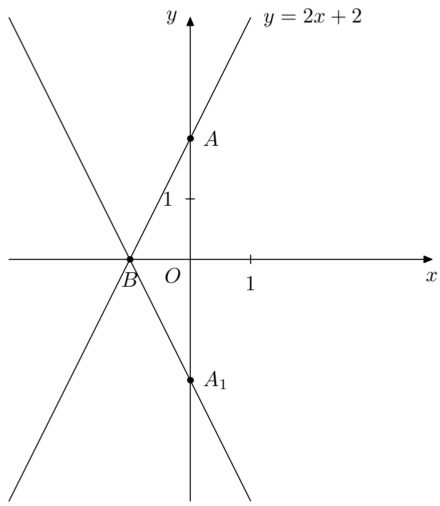
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	2
−1	0

Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i loro simmetrici rispetto all'asse delle x:

x	y
0	−2
−1	0

Chiamiamo A_1 il simmetrico di A e osserviamo che il simmetrico di B è B stesso.



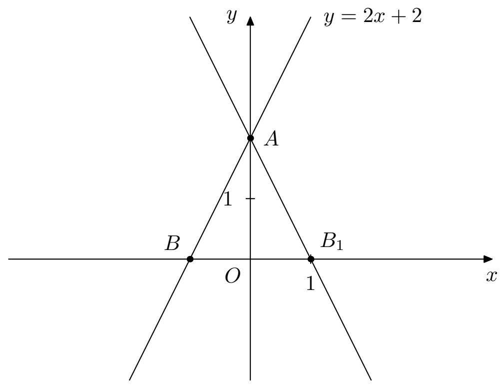
La retta passante per A_1 e B ha equazione $\dfrac{y - y_{A_1}}{y_B - y_{A_1}} = \dfrac{x - x_{A_1}}{x_B - x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y - (-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{x - 0}{-1 - 0}$ quindi l'equazione richiesta è $y = -2x - 2$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire y con $-y$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della simmetrica cercata.

2. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e la sua simmetrica rispetto all'asse delle y. Determiniamo i simmetrici di A e B rispetto all'asse delle y:

x	y
0	2
1	0

Chiamiamo B_1 il simmetrico di B e osserviamo che il simmetrico di A è A stesso.



La retta passante per A e B_1 ha equazione $\dfrac{y-y_A}{y_{B_1}-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_{B_1}-x_A}$ ovvero $\dfrac{y-2}{0-2}=\dfrac{x-0}{1-0}$ quindi l'equazione richiesta è $y=-2x+2$.

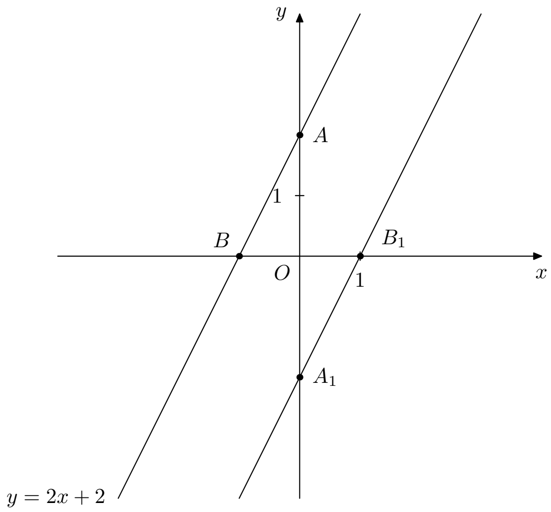
Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire x con $-x$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della simmetrica cercata.

3. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e la sua simmetrica rispetto all'origine.

   Determiniamo i simmetrici di A e B rispetto all'origine:

x	y
0	-2
1	0

   Chiamiamo A_1 il simmetrico di A e B_1 il simmetrico di B .



   La retta passante per A_1 e B_1 ha equazione $\dfrac{y-y_{A_1}}{y_{B_1}-y_{A_1}}=\dfrac{x-x_{A_1}}{x_{B_1}-x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y-(-2)}{0-(-2)}=\dfrac{x-0}{1-0}$ quindi l'equazione richiesta è $y=2x-2$.

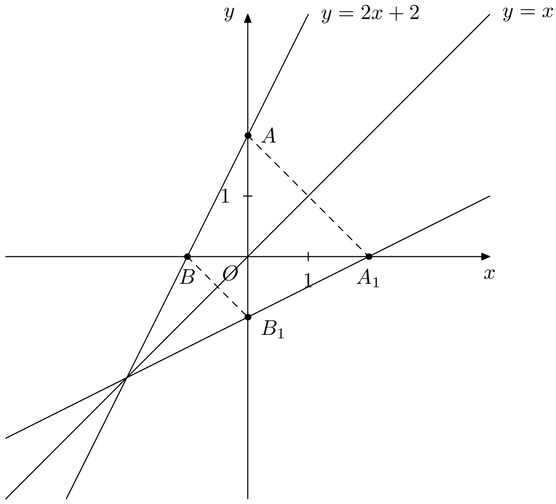
   Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire x con $-x$ e y con $-y$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della simmetrica cercata.

4. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e la sua simmetrica rispetto alla I bisettrice.

   Determiniamo i simmetrici di A e B rispetto alla I bisettrice:

x	y
2	0
0	-1

   Chiamiamo A_1 il simmetrico di A e B_1 il simmetrico di B .

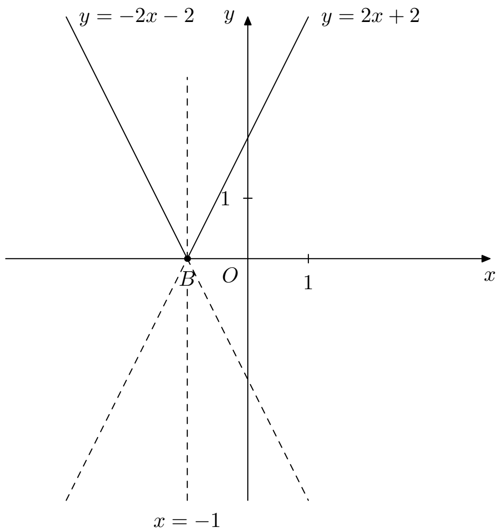


La retta passante per A_1 e B_1 ha equazione $\dfrac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \dfrac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y - 0}{-1 - 0} = \dfrac{x - 2}{0 - 2}$ quindi l'equazione richiesta è $y = \dfrac{x}{2} - 1$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire x con y e y con x nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della simmetrica cercata. Infatti dall'equazione $y = 2x + 2$, scambiando x con y, si ottiene $x = 2y + 2$, da cui $2y = x - 2$ ed infine $y = \dfrac{x}{2} - 1$.

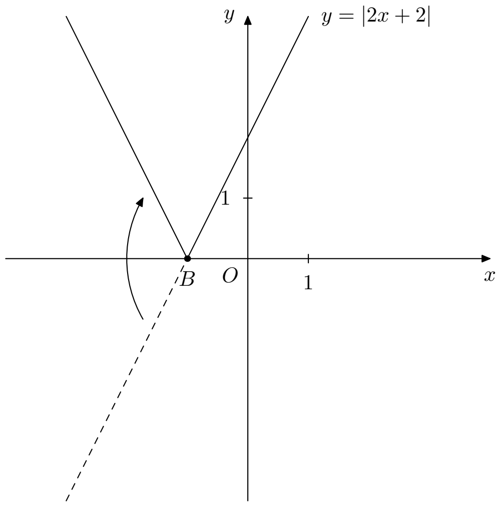
Esempio 7.1.2. Data la retta r di equazione $y = 2x + 2$, rappresentare graficamente le funzioni di equazione $y = |2x + 2|$ e $y = 2|x| + 2$.

1. Definiamo la prima delle funzioni date
   $$y = |2x + 2| = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se} \quad 2x + 2 \geq 0 \\ -2x - 2 & \text{se} \quad 2x + 2 < 0 \end{cases}$$
   ossia
   $$y = |2x + 2| = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se} \quad x \geq -1 \\ -2x - 2 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$
   Si tratta, quindi, di 2 semirette che possiamo disegnare utilizzando i grafici del precedente esercizio.



Il grafico della funzione assegnata è costituito dalle 2 semirette a tratto continuo.

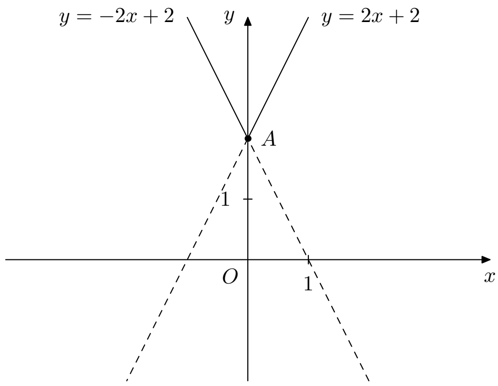
Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato disegnare il grafico della funzione senza modulo, ossia $y = 2x + 2$, eliminare la parte di grafico collocata sotto l'asse delle x e sostituirla con la sua simmetrica rispetto allo stesso asse.



2. Passiamo alla seconda parte dell'esercizio.

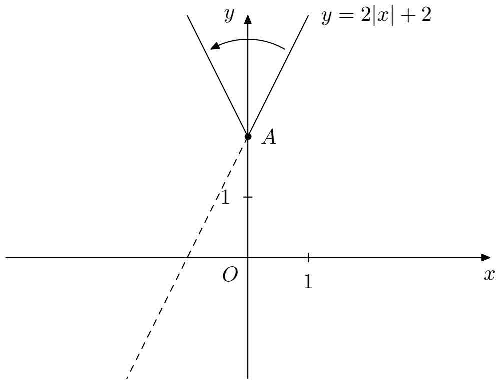
$$y = 2|x| + 2 = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -2x + 2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Si tratta, quindi, di 2 semirette che possiamo disegnare utilizzando i grafici del precedente esercizio.



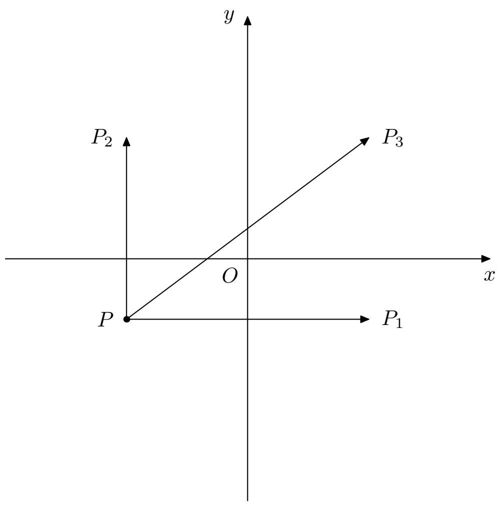
Il grafico della funzione assegnata è costituito dalle 2 semirette a tratto continuo.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato disegnare il grafico della funzione senza modulo, ossia $y = 2x + 2$, eliminare la parte di grafico collocata a sinistra dell'asse delle y e simmetrizzare la parte restante rispetto all'asse delle y.



7.2 Traslazioni

Sia $P(x, y)$ un generico punto del piano; se operiamo una traslazione orizzontale otteniamo $P_1(x + a, y)$; se operiamo una traslazione verticale otteniamo $P_2(x, y + b)$; se operiamo una traslazione sia orizzontale che verticale otteniamo $P_3(x + a, y + b)$.



Osserviamo che se $a > 0$ la traslazione orizzontale è verso destra, se $a < 0$ la traslazione orizzontale è verso sinistra; se $b > 0$ la traslazione verticale è verso l'alto, se $b < 0$ la traslazione verticale è verso il basso.

Esempio 7.2.1. Data la retta r di equazione $y = 2x + 2$ scrivere le equazioni della retta traslata verso destra di 2, di quella traslata verso il basso di 1 e di quella traslata sia verso destra di 2 che verso il basso di 1.

1. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella traslata verso destra di 2.

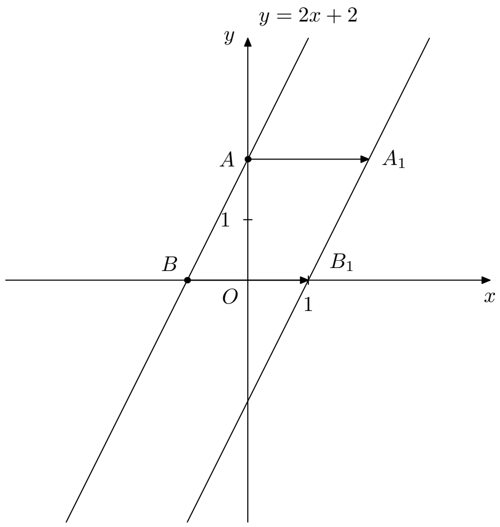
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	2
-1	0

   Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i punti traslati verso destra di 2:

x	y
2	2
1	0

Chiamiamo A_1 e B_1 tali punti.



La retta passante per A_1 e B_1 ha equazione $\dfrac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \dfrac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y-2}{0-2} = \dfrac{x-2}{1-2}$ quindi l'equazione richiesta è $y = 2x - 2$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire x con $x - 2$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della retta cercata. Infatti dall'equazione $y = 2x+2$, sostituendo x con $x - 2$, si ottiene $y = 2(x - 2) + 2$, da cui $y = 2x - 4 + 2$ ed infine $y = 2x - 2$.

2. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella traslata verso il basso di 1.

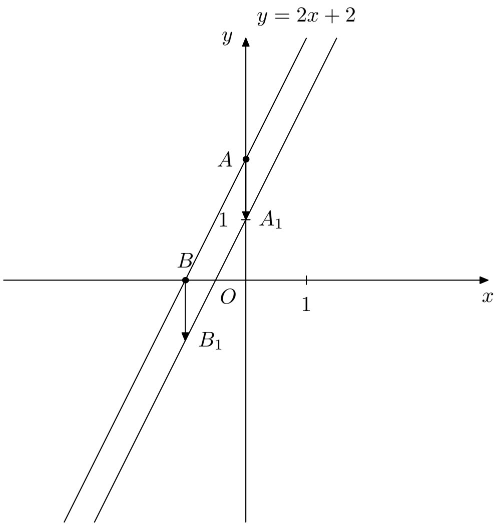
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	2
-1	0

   Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i punti traslati verso il basso di 1:

x	y
0	1
-1	-1

   Chiamiamo A_1 e B_1 tali punti.



La retta passante per A_1 e B_1 ha equazione $\dfrac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \dfrac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y-1}{-1-1} = \dfrac{x-0}{-1-0}$ quindi l'equazione richiesta è $y = 2x + 1$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire y con $y + 1$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della retta cercata. Infatti dall'equazione $y = 2x+2$, sostituendo y con $y + 1$, si ottiene $y + 1 = 2x + 2$, da cui $y = 2x + 2 - 1$ ed infine $y = 2x + 1$.

3. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella traslata verso destra di 2 e verso il basso di 1.

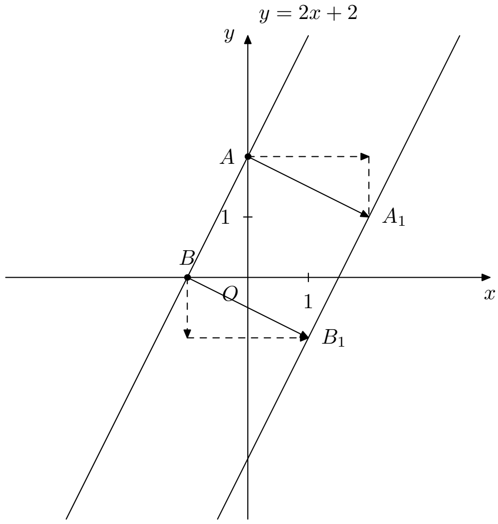
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	2
-1	0

   Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i punti traslati verso destra di 2 e verso il basso di 1:

x	y
2	1
1	-1

   Chiamiamo A_1 e B_1 tali punti.



La retta passante per A_1 e B_1 ha equazione $\dfrac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \dfrac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y-1}{-1-1} = \dfrac{x-2}{1-2}$ quindi l'equazione richiesta è $y = 2x - 3$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire x con $x - 2$ e y con $y + 1$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della retta cercata. Infatti dall'equazione $y = 2x+2$, sostituendo x con $x-2$ e y con $y+1$, si ottiene $y+1 = 2(x-2)+2$, da cui $y = 2x-4+2-1$ ed infine $y = 2x - 3$.

Osservazione. In generale vale la seguente regola pratica:
dati i numeri reali a e b,

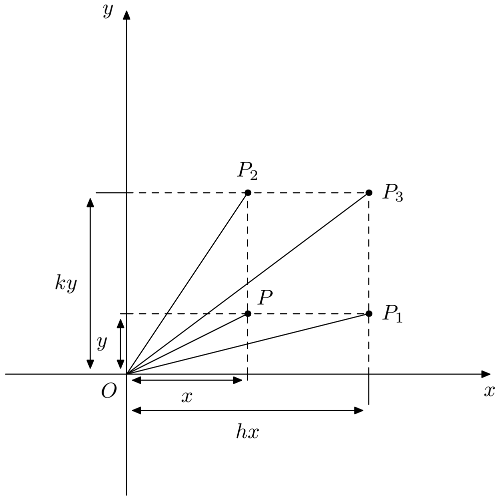
1. per ottenere una traslazione orizzontale di a basta sostituire x con $x - a$ nell'equazione della curva data (se $a > 0$ allora la traslazione è verso destra, se $a < 0$ allora la traslazione è verso sinistra);

2. per ottenere una traslazione verticale di b basta sostituire y con $y - b$ nell'equazione della curva data (se $b > 0$ allora la traslazione è verso l'alto, se $b < 0$ allora la traslazione è verso il basso).

Evidentemente i casi $a = 0$ e $b = 0$ corrispondono alle traslazioni nulle.

7.3 Cambio di scala

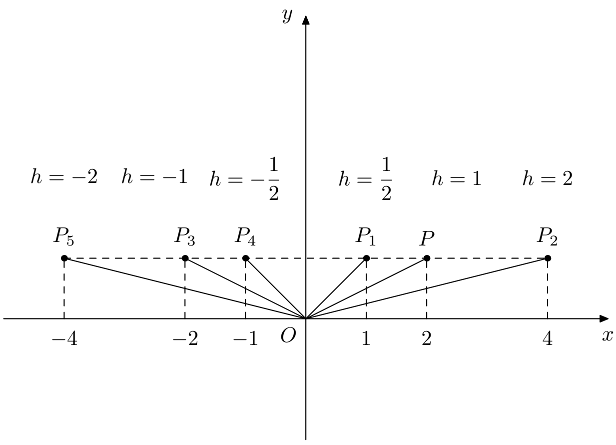
Sia $P(x, y)$ un generico punto del piano; se operiamo un cambio di scala rispetto alle ascisse otteniamo $P_1(hx, y)$; se operiamo un cambio di scala rispetto alle ordinate otteniamo $P_2(x, ky)$; se operiamo un cambio di scala sia rispetto alle ascisse che rispetto alle ordinate otteniamo $P_3(hx, ky)$. Supponiamo $h, k \in \mathbb{R}^*$.



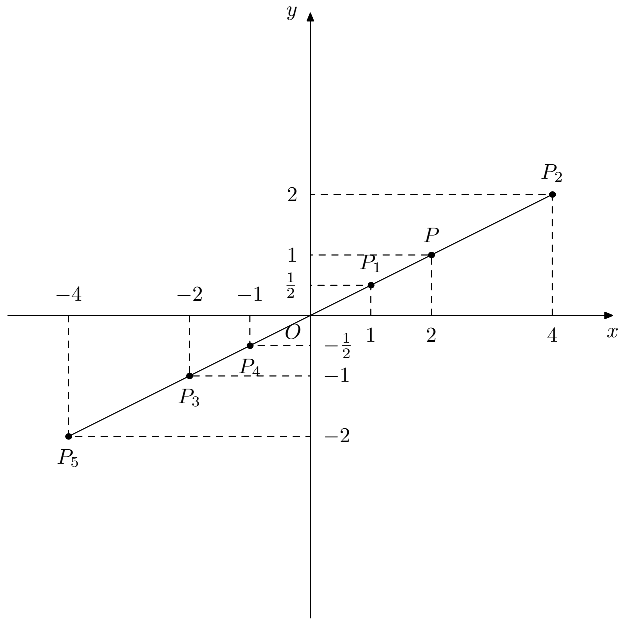
Osserviamo che se $h > 0$ il trasformato P_1 appartiene allo stesso quadrante; se $h < 0$ il trasformato del punto P appartiene al quadrante simmetrico rispetto all'asse delle y; in particolare, se $h = 1$ il punto P non varia, se $h = -1$ il punto P viene trasformato nel suo simmetrico rispetto all'asse delle y; se $|h| < 1$ la distanza dall'origine del trasformato è minore della distanza dall'origine di P (parleremo di contrazione); se $|h| > 1$ la distanza dall'origine del trasformato è maggiore della distanza dall'origine di P (parleremo di dilatazione).

Osserviamo che se $k > 0$ il trasformato P_2 appartiene allo stesso quadrante; se $k < 0$ il trasformato del punto P appartiene al quadrante simmetrico rispetto all'asse delle x; in particolare, se $k = 1$ il punto P non varia, se $k = -1$ il punto P viene trasformato nel suo simmetrico rispetto all'asse delle x; se $|k| < 1$ la distanza dall'origine del trasformato è minore della distanza dall'origine di P (parleremo di contrazione); se $|k| > 1$ la distanza dall'origine del trasformato è maggiore della distanza dall'origine di P (parleremo di dilatazione).

Rappresentiamo in figura i trasformati di P rispetto alle ascisse con diversi valori di h.



Osservazione. Se $h = k$ il cambio di scala rispetto ai due assi utilizza la stessa costante di proporzionalità e quindi O, P e il trasformato di P sono allineati. In tal caso parleremo di omotetia di rapporto h.



Esempio 7.3.1. Data la retta r di equazione $y = 2x + 2$ scrivere le equazioni della retta trasformata mediante dilatazione di rapporto 2 rispetto alle ascisse, di quella trasformata mediante contrazione di rapporto $\dfrac{1}{2}$ rispetto alle ordinate, di quella trasformata contemporaneamente mediante dilatazione di 2 rispetto alle ascisse e contrazione di $\dfrac{1}{2}$ rispetto alle ordinate e di quella trasformata mediante omotetia di rapporto -2.

1. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella trasformata mediante dilatazione di rapporto 2 rispetto alle ascisse.

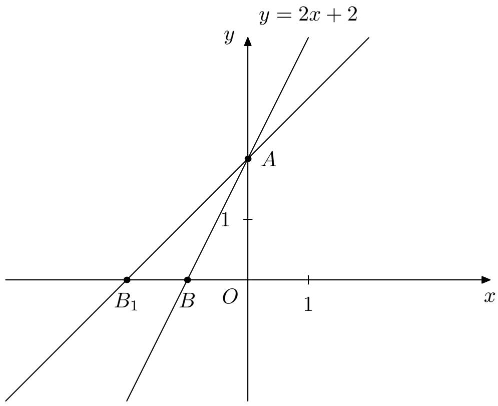
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	2
-1	0

   Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i punti trasformati:

x	y
0	2
-2	0

   Chiamiamo B_1 il trasformato di B e osserviamo che il trasformato di A è A stesso.



La retta passante per A e B_1 ha equazione $\dfrac{y - y_A}{y_{B_1} - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_{B_1} - x_A}$ ovvero $\dfrac{y - 2}{0 - 2} = \dfrac{x - 0}{-2 - 0}$ quindi l'equazione richiesta è $y = x + 2$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire x con $\dfrac{x}{2}$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della retta cercata. Infatti dall'equazione $y = 2x + 2$, sostituendo x con $\dfrac{x}{2}$, si ottiene $y = 2\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2$ ed infine $y = x + 2$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che il segmento AB viene trasformato nel segmento AB_1 che risulta chiaramente dilatato rispetto al precedente.

2. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella trasformata mediante contrazione di rapporto $\dfrac{1}{2}$ rispetto alle ordinate.

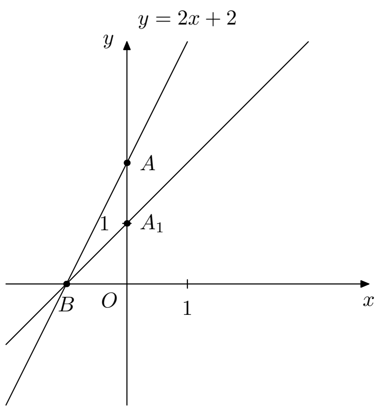
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	2
-1	0

   Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i punti trasformati:

x	y
0	1
-1	0

   Chiamiamo A_1 il trasformato di A e osserviamo che il trasformato di B è B stesso.



La retta passante per A_1 e B ha equazione $\dfrac{y-y_{A_1}}{y_B-y_{A_1}}=\dfrac{x-x_{A_1}}{x_B-x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y-1}{0-1}=\dfrac{x-0}{-1-0}$ quindi l'equazione richiesta è $y=x+1$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire y con $2y$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della retta cercata. Infatti dall'equazione $y=2x+2$, sostituendo y con $2y$, si ottiene $2y=2x+2$ ed infine $y=x+1$.

Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che il segmento AB viene trasformato nel segmento A_1B che risulta chiaramente contratto rispetto al precedente.

3. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella trasformata contemporaneamente mediante dilatazione di 2 rispetto alle ascisse e contrazione di $\dfrac{1}{2}$ rispetto alle ordinate.

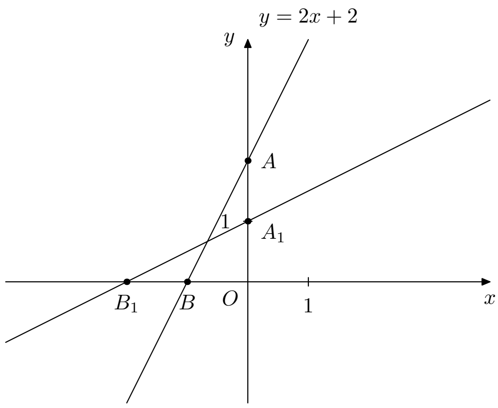
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	2
-1	0

   Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i punti trasformati:

x	y
0	1
-2	0

   Chiamiamo A_1 e B_1 tali punti.



   La retta passante per A_1 e B_1 ha equazione $\dfrac{y-y_{A_1}}{y_{B_1}-y_{A_1}}=\dfrac{x-x_{A_1}}{x_{B_1}-x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y-1}{0-1}=\dfrac{x-0}{-2-0}$ quindi l'equazione richiesta è $y=\dfrac{x}{2}+1$.

   Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire x con $\dfrac{x}{2}$ e y con $2y$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della retta cercata. Infatti dall'equazione $y=2x+2$, sostituendo x con $\dfrac{x}{2}$ e y con $2y$, si ottiene $2y=2\left(\dfrac{x}{2}\right)+2$, da cui $2y=x+2$ ed infine $y=\dfrac{x}{2}+1$.

   Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che il segmento AB viene trasformato nel segmento A_1B_1 che risulta contemporaneamente dilatato di 2 e contratto di $\dfrac{1}{2}$ quindi congruente al precedente.

4. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella trasformata mediante omotetia di rapporto -2.

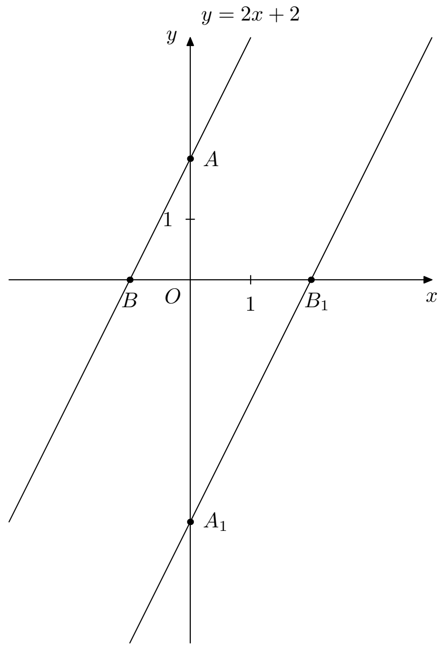
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	2
-1	0

   Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i punti trasformati:

x	y
0	-4
2	0

   Chiamiamo A_1 e B_1 tali punti.



   La retta passante per A_1 e B_1 ha equazione $\dfrac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \dfrac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y-(-4)}{0-(-4)} = \dfrac{x-0}{2-0}$ quindi l'equazione richiesta è $y = 2x - 4$.

   Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che sarebbe bastato sostituire x con $-\dfrac{x}{2}$ e y con $-\dfrac{y}{2}$ nell'equazione della retta r per ottenere l'equazione della retta cercata. Infatti dall'equazione $y = 2x + 2$, sostituendo x con $-\dfrac{x}{2}$ e y con $-\dfrac{y}{2}$, si ottiene $-\dfrac{y}{2} = 2\left(-\dfrac{x}{2}\right) + 2$, da cui $-y = -2x + 4$ ed infine $y = 2x - 4$.

   Osservazione. Dall'esempio proposto deduciamo che il segmento AB viene trasformato nel segmento A_1B_1 che risulta chiaramente dilatato rispetto al precedente. Inoltre la retta r e la sua trasformata sono parallele e, come già noto dallo studio della geometria, i triangoli OAB e OA_1B_1 sono simili.

Osservazione. In generale vale la seguente regola pratica:
dati i numeri reali non nulli h e k,

1. per ottenere un cambio di scala rispetto alle x di rapporto h basta sostituire x con $\dfrac{x}{h}$ nell'equazione della curva data (se $|h| > 1$ allora si ha una dilatazione, se $|h| < 1$ si ha una contrazione);
2. per ottenere un cambio di scala rispetto alle y di rapporto k basta sostituire y con $\dfrac{y}{k}$ nell'equazione della curva data (se $|k| > 1$ allora si ha una dilatazione, se $|k| < 1$ si ha una contrazione).

Evidentemente i casi $h = 1$ e $k = 1$ si riducono alle identità;
i casi $h = -1$ e $k = -1$, come precedentemente analizzato, si riducono alle simmetrie rispetto all'asse y e rispetto all'asse x.

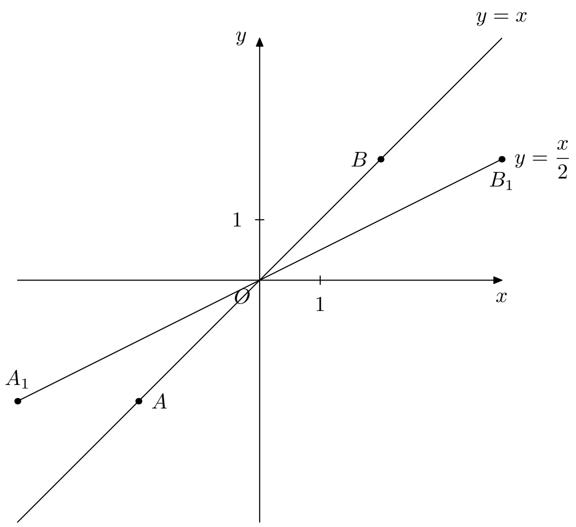
Esercizio 7.3.1. Rappresentare graficamente la curva di equazione $y = \left|\left|\dfrac{x-2}{2}\right| - 1\right|$.

La curva richiesta si ottiene con l'applicazione successiva delle seguenti trasformazioni alla retta di equazione $y = x$:

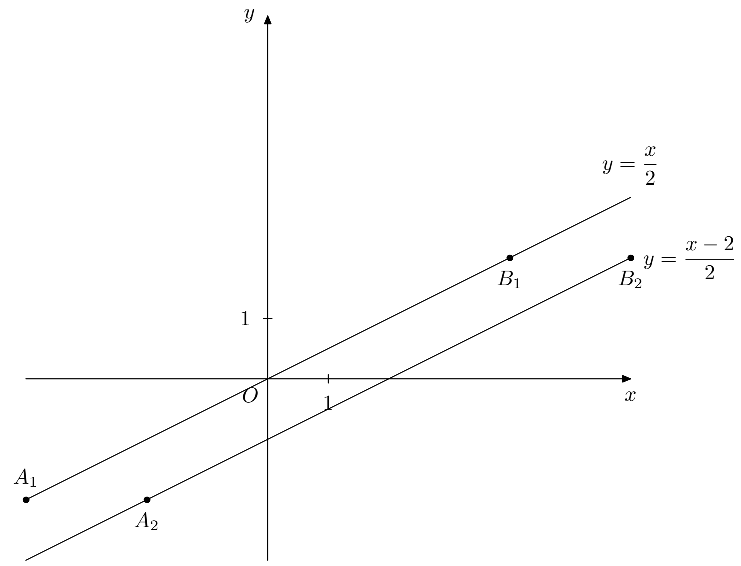
1. una dilatazione di rapporto 2 rispetto alle ascisse (oppure, indifferentemente, una contrazione di rapporto $\dfrac{1}{2}$ rispetto alle ordinate);
2. una traslazione verso destra di 2;
3. una simmetria della parte di grafico con ordinata negativa rispetto all'asse delle x lasciando invariata la rimanente;
4. una traslazione verso il basso di 1;
5. una simmetria della parte di grafico con ordinata negativa rispetto all'asse delle x lasciando invariata la rimanente.

Infatti, si ha che:

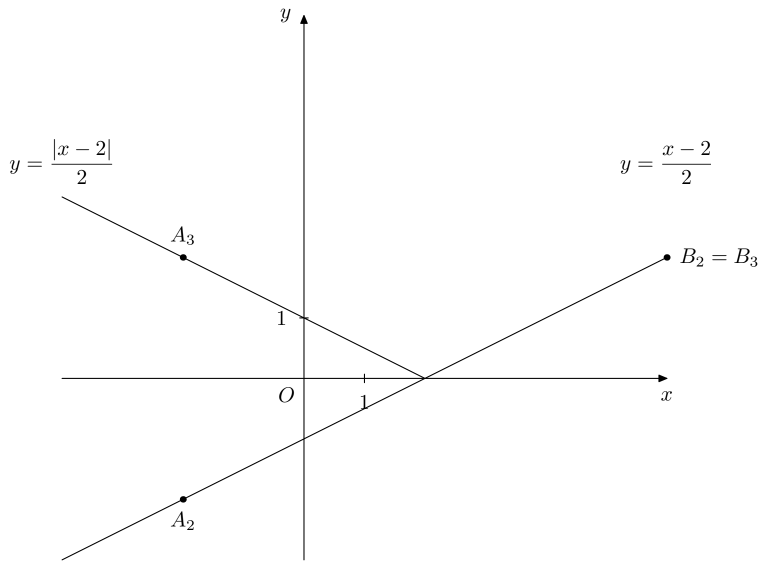
1. per operare la dilatazione richiesta è sufficiente sostituire x con $\dfrac{x}{2}$ nell'equazione $y = x$, ottenendo $y = \dfrac{x}{2}$;



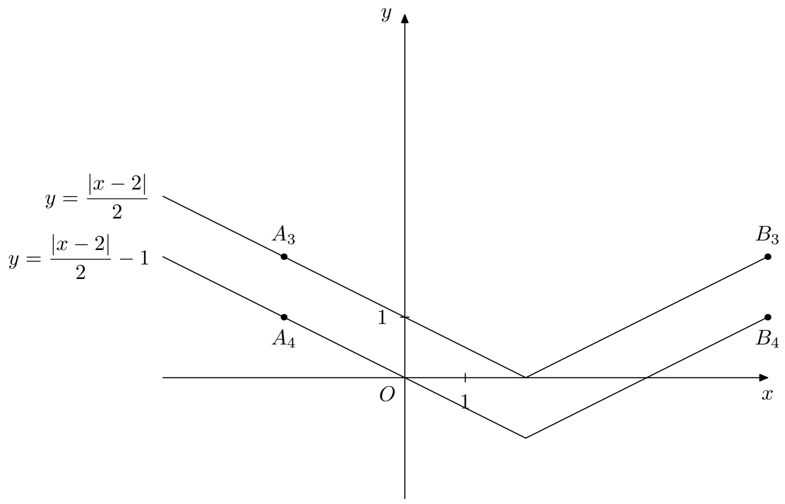
2. per operare la traslazione richiesta è sufficiente sostituire x con $x-2$ nell'equazione $y = \dfrac{x}{2}$, ottenendo $y = \dfrac{x-2}{2}$;



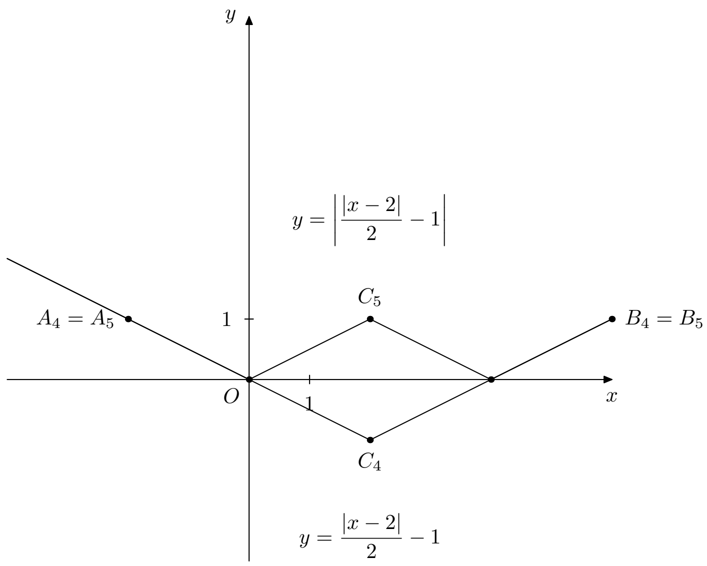
3. per operare la simmetria richiesta è sufficiente applicare il valore assoluto al secondo membro dell'equazione $y = \dfrac{x-2}{2}$, ottenendo $y = \left|\dfrac{x-2}{2}\right|$;



4. per operare la traslazione richiesta è sufficiente sostituire y con $y+1$ nell'equazione $y = \left|\dfrac{x-2}{2}\right|$, ottenendo $y+1 = \left|\dfrac{x-2}{2}\right|$ cioè $y = \left|\dfrac{x-2}{2}\right| - 1$;



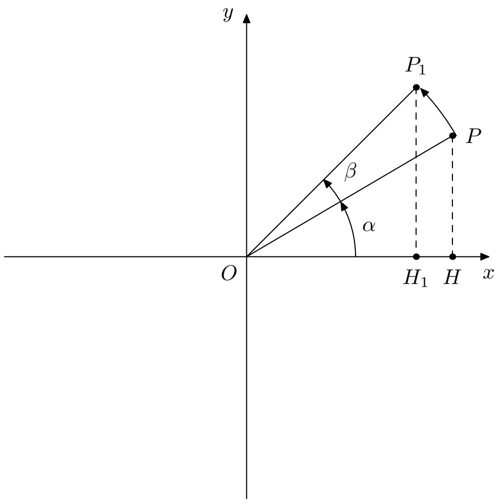
5. per operare la simmetria richiesta è sufficiente applicare il valore assoluto al secondo membro dell'equazione $y = \left|\frac{x-2}{2}\right| - 1$, ottenendo $y = \left|\left|\frac{x-2}{2}\right| - 1\right|$.



7.4 Rotazioni

Sia $P(x, y)$ un generico punto del piano; se operiamo una rotazione del segmento OP rispetto all'origine O di angolo β otteniamo $P_1(x_1, y_1)$; ci proponiamo di dimostrare che

$$\begin{cases} x_1 = xcos\beta - ysen\beta \\ y_1 = xsen\beta + ycos\beta \end{cases}$$

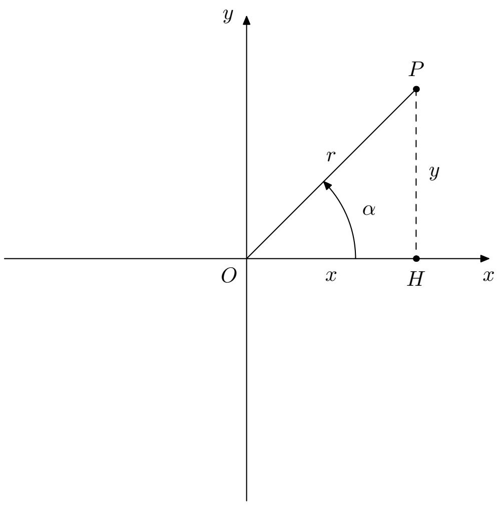


Anteponiamo alla dimostrazione una definizione.

Il punto P del piano è individuato univocamente dalle sue coordinate cartesiane (x, y) come visto all'inizio del capitolo. Alternativamente, è possibile individuarlo mediante coordinate polari (r, α), legate alle precedenti coordinate dalle relazioni

$$\begin{cases} x = rcos\alpha \\ y = rsen\alpha \end{cases}$$

ove $r \in R^{\geq}$ e $0 \leq \alpha < 2\pi$.



Rinviamo per una trattazione più completa al capitolo **Numeri complessi**.

Riprendiamo la dimostrazione, facendo riferimento alle figure e alla definizione precedenti ed alle formule di addizione e di sottrazione per il coseno e per il seno:

$$\begin{cases} x_1 = rcos(\alpha + \beta) = r(cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta) = xcos\beta - ysen\beta \\ y_1 = rsen(\alpha + \beta) = r(sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta) = xsen\beta + ycos\beta \end{cases}$$

Esempio 7.4.1. Data la retta r di equazione $y = \frac{x}{4} - 1$ scrivere l'equazione della trasformata mediante rotazione rispetto all'origine di $\frac{\pi}{2}$.

Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella trasformata mediante rotazione.

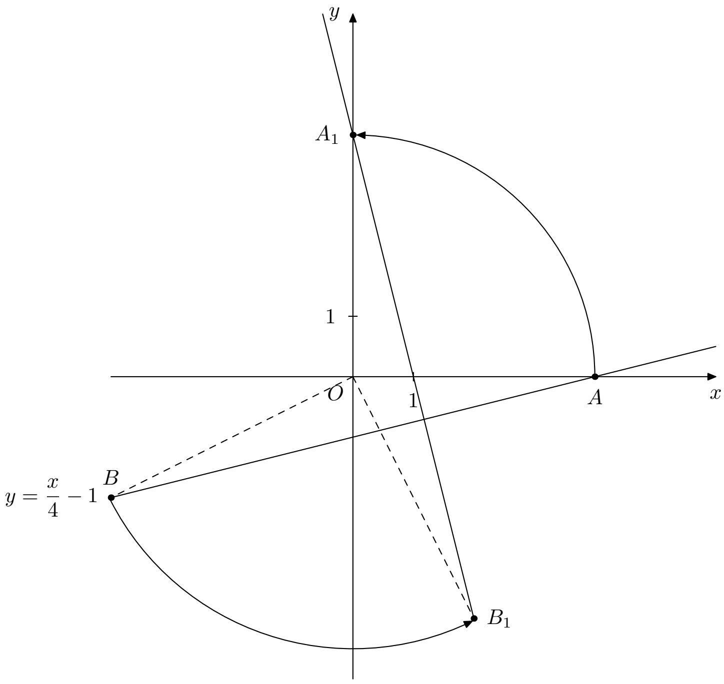
Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
4	0
−4	−2

Detti, rispettivamente, A e B tali punti di r, determiniamo i punti trasformati:

x	y
0	4
2	−4

Chiamiamo A_1 e B_1 i trasformati di A e di B.



La retta passante per A_1 e B_1 ha equazione $\dfrac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \dfrac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}$ ovvero $\dfrac{y-4}{-4-4} = \dfrac{x-0}{2-0}$ quindi l'equazione richiesta è $y = -4x + 4$.

Osservazione. Dalle formule di trasformazione, con $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$\begin{cases} x_1 = -y \\ y_1 = x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = y_1 \\ y = -x_1 \end{cases}$$

infine, sostituendo nell'equazione della retta r, otteniamo $-x_1 = \dfrac{y_1}{4} - 1$ da cui $y_1 = -4x_1 + 4$ che è effettivamente l'equazione della retta richiesta, naturalmente eliminando gli indici.

Osservazione. La retta r e la sua trasformata sono effettivamente perpendicolari,infatti i loro coefficienti angolari sono antireciproci.

Esercizio 7.4.1. Data la retta r di equazione $y = \sqrt{3}x$ scrivere l'equazione delle trasformate mediante rotazione rispetto all'origine di $\frac{2\pi}{3}$ e di $-\frac{2\pi}{3}$.

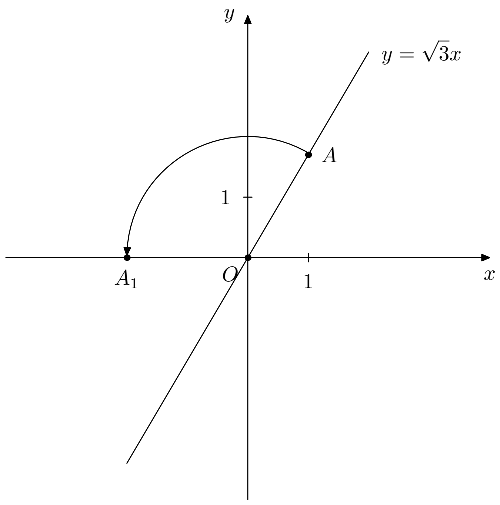
1. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella trasformata mediante rotazione di $\frac{2\pi}{3}$.
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	0
1	$\sqrt{3}$

   Detti, rispettivamente, O e A tali punti di r, determiniamo i punti trasformati:

x	y
0	0
-2	0

   Chiamiamo A_1 il trasformato di A e osserviamo che il trasformato di O è O stesso.



   La retta passante per O e A_1 ha equazione $y = 0$ essendo, evidentemente, coincidente con l'asse delle ascisse.

   Osservazione. In questo caso non è conveniente utilizzare le formule di trasformazione

   $$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

   direttamente nell'equazione della retta r in quanto risulta laborioso ottenere le relazioni inverse.

   Osservazione. Una retta passante per l'origine viene trasformata in una retta anch'essa passante per l'origine.

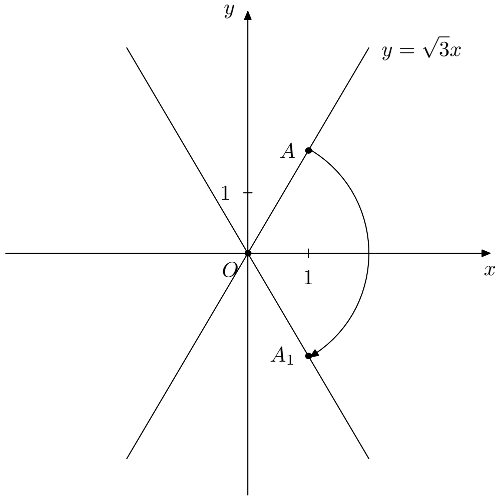
2. Dapprima rappresentiamo graficamente la retta data e quella trasformata mediante rotazione di $-\frac{2\pi}{3}$.
   Determiniamo due punti di r, sostituendo alla variabile indipendente x due valori qualunque e ricavando i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

x	y
0	0
1	$\sqrt{3}$

Detti, rispettivamente, O e A tali punti di r, determiniamo i punti trasformati:

x	y
0	0
1	$-\sqrt{3}$

Chiamiamo A_1 il trasformato di A e osserviamo che il trasformato di O è O stesso.



La retta passante per O e A_1 ha equazione $y = -\sqrt{3}x$ essendo, evidentemente, simmetrica della retta r rispetto all'asse x.

Osservazione. Anche in questo caso non è conveniente utilizzare le formule di trasformazione

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

direttamente nell'equazione della retta r in quanto risulta laborioso ottenere le relazioni inverse.

Esercizi proposti

1. Dato il segmento di estremi $O(0,0)$ e $A(2,-3)$ e il suo trasformato BC mediante una traslazione verso destra di 3 e una traslazione verso l'alto di 4, calcolare il perimetro del parallelogramma $OACB$.

   $(2p(OACB) = 10 + 2\sqrt{13})$.

2. Determinare i punti di intersezione tra il grafico della funzione di equazione $y = ||x| - 1|$ e il grafico della retta di equazione $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$.

   (*I punti di intersezione sono* $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *e* $C(2,1)$).

3. Calcolare l'area del triangolo determinato dalla retta di equazione $y = -x - 1$, dalla sua simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e dalla retta parallela all'asse delle ascisse passante per $A(0,3)$.

   (*L'area richiesta* è 16).

4. Dopo aver calcolato le coordinate dei punti A_1, B_1 e C_1 trasformati di $A(-1,1)$, $B(-4,1)$ e $C(-1,5)$ mediante un'omotetia di rapporto -2, verificare che il rapporto fra le aree dei triangoli individuati è il quadrato del rapporto fra i perimetri.

   $(Area(ABC) = 6,\ Area(A_1B_1C_1) = 24,\ 2p(ABC) = 12$ *e* $2p(A_1B_1C_1) = 24)$.

5. Dato il rettangolo di vertici $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$ e $D(2,3)$ calcolare le coordinate dei vertici del trasformato $A_1B_1C_1D_1$ mediante una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ e di $A_2B_2C_2D_2$ mediante una rotazione di $-\pi$. Calcolare, quindi, area e perimetro del triangolo AB_2C_1.

   $(Area(AB_2C_1) = 12,\ 2p(AB_2C_1) = 6 + \sqrt{17} + \sqrt{41})$.

6. Dato il trapezio di vertici $A(2,0)$, $B(5,0)$, $C(4,-2)$ e $D(3,-2)$ calcolare le coordinate dei vertici del trasformato $A_1B_1C_1D_1$ mediante una simmetria rispetto alla prima bisettrice e di $A_2B_2C_2D_2$ mediante una simmetria rispetto alla seconda bisettrice. Verificare, quindi, che l'asse di BB_1 è la I bisettrice e che l'asse di DD_2 è la II bisettrice. Quale trasformazione permette di passare da $A_1B_1C_1D_1$ a $A_2B_2C_2D_2$?

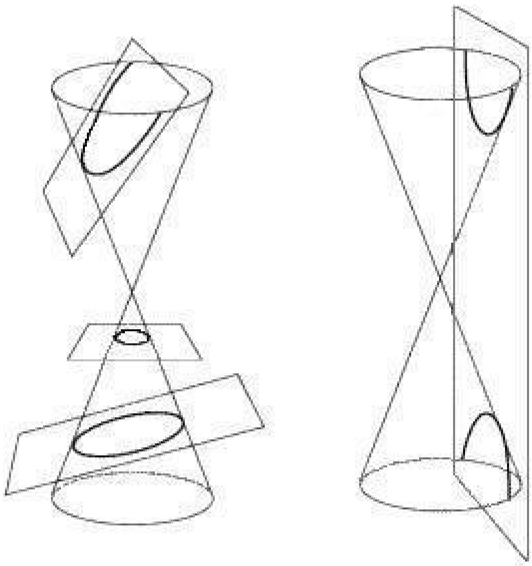
   (*Si tratta di una simmetria rispetto all'origine*).

Capitolo 8

Le coniche

8.1 Introduzione

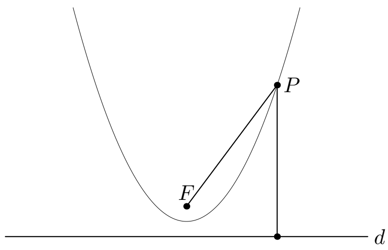
In questo capitolo esamineremo alcune curve piane notevoli, chiamate sezioni coniche o più semplicemente coniche. Il nome deriva dal fatto che esse sono originate dall'intersezione fra una superficie conica indefinita a 2 falde e un piano non passante per il vertice del cono.



Ciascuna delle precedenti curve può essere anche definita come luogo geometrico di punti del piano come vedremo nel seguito.

8.2 La parabola

Definizione 8.2.1. Diremo **parabola** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta fissa d detta direttrice.

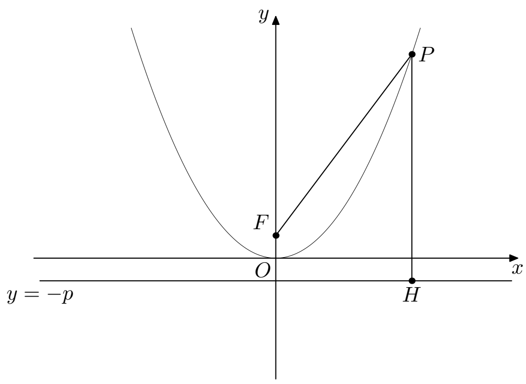


Osservazione. La parabola è una curva aperta, simmetrica rispetto alla retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice. Chiameremo vertice l'intersezione di tale asse di simmetria con la parabola stessa.

Teorema 8.2.1. *In un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano $F(0, p)$ il fuoco e $d : y = -p$ la direttrice della parabola $\mathcal{P}$.*

Dimostriamo che l'equazione della parabola è $y = ax^2$ ove $a = \dfrac{1}{4p}$.

Dimostrazione. Sia $P(x, y)$ il generico punto del piano; $P \in \mathcal{P}$ se e solo se $\overline{PF} = \overline{PH}$ essendo H la proiezione ortogonale di P su d.



$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$
$$\overline{PH} = |y+p|$$

uguagliando i secondi membri ed elevando al quadrato:

$$(\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 = (|y+p|)^2$$

sviluppando i prodotti notevoli:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

semplificando ed esplicitando rispetto ad y si ha:

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

infine, ponendo $a = \dfrac{1}{4p}$ si conclude. □

Osservazione. Il vertice della parabola considerata nella dimostrazione del teorema coincide con l'origine del sistema di riferimento e il suo asse di simmetria coincide con l'asse delle y.

Osservazione. Quando risulta $a > 0$ cioè, equivalentemente, $p > 0$, il fuoco sta sopra la direttrice e diremo che la parabola volge la concavità verso l'alto. Quando risulta $a < 0$ cioè, equivalentemente, $p < 0$, il fuoco sta sotto la direttrice e diremo che la parabola volge la concavità verso il basso. Ovviamente, dalla posizione fatta, non potrà mai essere $a = 0$.

Operiamo ora una traslazione della parabola in modo che il nuovo vertice sia $V(x_V, y_V)$. Come già visto nel capitolo delle trasformazioni del piano, è sufficiente sostituire x con $x - x_V$ e y con $y - y_V$ nell'equazione di $\mathcal{P}$:

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

sviluppando i calcoli ed esplicitando rispetto alla y risulta

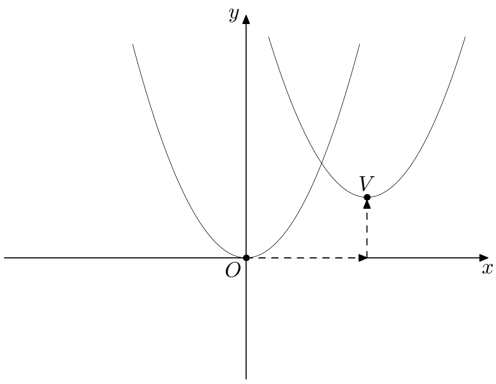
$$y = ax^2 - 2axx_V + ax_V^2 + y_V$$

poniamo ora $b = -2ax_V$ e $c = ax_V^2 + y_V$, ottenendo quindi la forma canonica o normale dell'equazione generica di una parabola con asse parallelo all'asse delle y:

$$\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$$

di vertice $V(x_V, y_V)$ essendo $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Infatti, dalle posizioni precedenti $b = -2ax_V$ e $c = ax_V^2 + y_V$, ricaviamo $x_V = -\dfrac{b}{2a}$, sostituiamo nella seconda relazione $c = a(-\dfrac{b}{2a})^2 + y_V$, ottenendo così anche $y_V = -a\dfrac{b^2}{4a^2} + c = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ da cui si conclude utilizzando la ben nota posizione $\Delta = b^2 - 4ac$.



Osservazione. Il vertice è un punto della parabola ed è quindi preferibile, calcolatane l'ascissa, otternerne l'ordinata per sostituzione.

Esempio 8.2.1. Disegnare il grafico della parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2 - x - 2$.

Dapprima calcoliamo le coordinate del vertice: $V\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$.

Ovviamente l'asse di simmetria della parabola ha equazione $x = \dfrac{1}{2}$.

Osserviamo che, essendo $a = 1 > 0$, la concavità è rivolta verso l'alto e poichè l'ordinata del vertice è negativa, la parabola interseca sicuramente l'asse delle x in due punti distinti A e B, di cui calcoliamo le coordinate.

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} = \langle {-1 \atop 2} \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti cercati sono, quindi, $A(-1,0)$ e $B(2,0)$.

Osserviamo che, in generale, la parabola può intersecare l'asse delle x in 2 punti distinti o in 2 punti coincidenti o in nessun punto, come risulta evidente risolvendo l'equazione di 2° grado associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

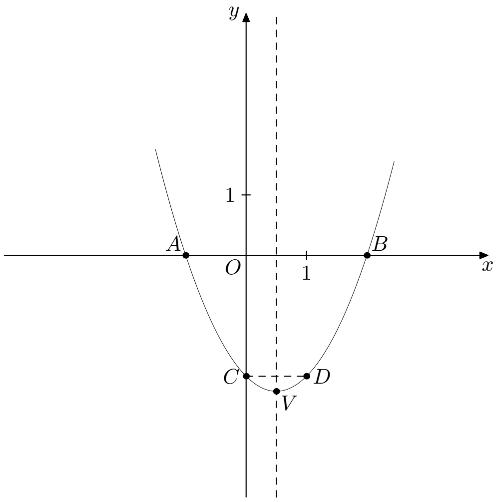
.

Determiniamo ora il punto C di intersezione con l'asse delle y, osservando che esso esiste sempre.
$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$
Il punto cercato è, quindi, $C(0,-2)$.
Osserviamo che, in generale, il punto di intersezione della parabola con l'asse delle y è

$$C(0,c)$$

.

Calcoliamo anche le coordinate del punto D simmetrico di C rispetto all'asse della parabola: $D(1,-2)$.



Esercizio 8.2.1. Determinare e rappresentare graficamente la parabola $\mathcal{P}$ con asse parallelo all'asse delle y passante per $A(-1,0)$, $C(0,3)$ e $D\left(\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$.

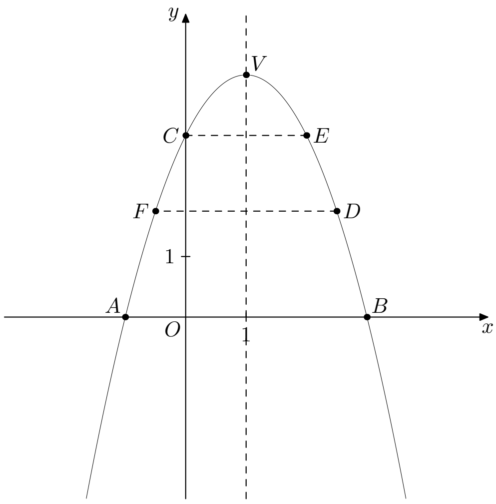
La parabola cercata ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

; imponiamo il passaggio per i punti dati:
passaggio per $A(-1,0)$: $0 = a - b + c$
passaggio per $C(0,3)$: $3 = c$
passaggio per $D\left(\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$: $\frac{7}{4} = \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c$
mettendo a sistema le 3 condizioni:
$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 3 \\ \frac{7}{4} = \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c \end{cases}$ $\begin{cases} a - b = -3 \\ 25a + 10b = -5 \\ c = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a - b = -3 \\ 5a + 2b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$
la parabola ha equazione

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

il suo vertice è $V(1,4)$ e l'asse ha equazione $x = 1$. Per rappresentare con maggior precisione la parabola richiesta, determiniamo anche le coordinate dei simmetrici rispetto all'asse dei punti dati: $B(3,0)$ è il simmetrico di A, $E(2,3)$ lo è di C e $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ di D.



Esercizio 8.2.2. Determinare e rappresentare graficamente la parabola $\mathcal{P}$ con asse parallelo all'asse delle y di vertice $V(0,-1)$ e passante per $P(4,3)$.

La parabola cercata ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

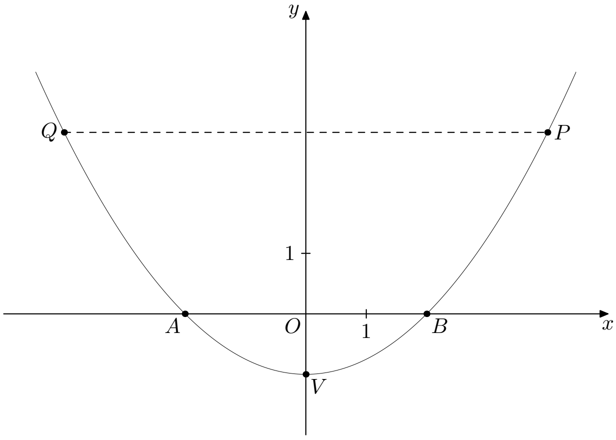
imponiamo il passaggo per i punti dati:
passaggio per $V(0,-1)$: $-1 = c$
passaggio per $P(4,3)$: $3 = 16a + 4b + c$
ricordiamo inoltre che l'ascissa del vertice è data dalla formula $x_V = -\frac{b}{2a}$, da cui $0 = -\frac{b}{2a}$;
mettendo a sistema le 3 condizioni:

$$\begin{cases} c = -1 \\ 16a + 4b + c = 3 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

la parabola ha equazione

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

il suo asse coincide con l'asse delle y, i suoi punti di intersezione con l'asse delle x si determinano, come visto precedentemente, risolvendo l'equazione associata $x^2 - 4 = 0$: $A(-2,0)$ e $B(2,0)$; il simmetrico di P è $Q(-4,3)$.



Esercizio 8.2.3. Data la parabola di base di equazione $y = x^2$, calcolare l'area del triangolo individuato dalle tangenti alla parabola $\mathcal{P}$, ottenuta traslando quella data verso il basso di 1, condotte dal punto $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e la secante nei punti di tangenza.

L'equazione della parabola $\mathcal{P}$ si ottiene sostituendo $y + 1$ ad y nell'equazione della parabola di base:

$$y + 1 = x^2$$

e quindi

$$y = x^2 - 1$$

.

Il fascio di rette di centro $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ ha equazione

$$\mathcal{F} : y - (-1) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

(manca, ovviamente, l'equazione della retta del fascio parallela all'asse delle y, che scriviamo a parte: $x = \frac{1}{2}$ e che, comunque, essendo una retta verticale, non può essere tangente alla parabola $\mathcal{P}$).

Mettiamo a sistema l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con l'equazione del fascio di rette di centro P:

$$\begin{cases} y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 \\ m\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 = x^2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 \\ x^2 - mx + \frac{1}{2}m = 0 \end{cases}$$

Le ascisse dei punti di intersezione fra $\mathcal{P}$ e la generica retta del fascio $\mathcal{F}$ si ottengono risolvendo la seconda equazione del sistema e sono reali e coincidenti (vale a dire la retta in questione è tangente) se il Δ di tale equazione è nullo. Riacaviamo quindi Δ ed imponiamo che sia 0:

$m^2 - 2m = 0$ da cui $m_1 = 0$ ed $m_2 = 2$; abbiamo così ricavato i coefficienti angolari delle due rette del fascio $\mathcal{F}$ che risultano essere tangenti a $\mathcal{P}$; scriviamo ora le equazioni di tali rette tangenti:

$$t_1 : y = -1$$

$$t_2 : y = 2x - 2$$

Determiniamo ora le coordinate dei punti di tangenza fra $\mathcal{P}$ e t_1:

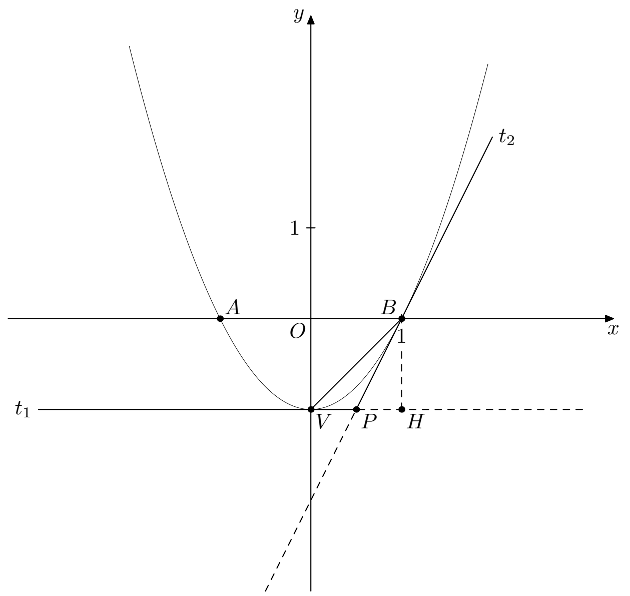
$$\begin{cases} y = -1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ -1 = x^2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

il punto di tangenza coincide con $V(0,-1)$;
determiniamo ora le coordinate dei punti di tangenza fra $\mathcal{P}$ e t_2:
$\begin{cases} y = 2x-2 \\ y = x^2-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x-2 \\ 2x-2 = x^2-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x-2 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$
il punto di tangenza è $B(1,0)$.

L'area richiesta è quella del triangolo VPB, per calcolare la quale è conveniente prendere come base VP e come altezza la distanza di B dalla retta di equazione $y=-1$: $\overline{VP} = \frac{1}{2}$, $\overline{BH} = 1$ quindi

$$\mathcal{A} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2} = \frac{1}{4}$$

.



Esercizio 8.2.4. Data la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2 - 2x$, determinare le equazioni delle parabole $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ rispettivamente ruotate di $\frac{\pi}{2}$ e di $-\frac{\pi}{2}$.

1. Dalle formule di trasformazione, con $\beta = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\begin{cases} x_1 = -y \\ y_1 = x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = y_1 \\ y = -x_1 \end{cases}$$

infine, sostituendo nell'equazione della parabola $\mathcal{P}$, otteniamo: $-x_1 = (y_1)^2 - 2y_1$ da cui $x_1 = -y_1^2 + 2y_1$ che è l'equazione della parabola richiesta, naturalmente eliminando gli indici.

$$\mathcal{P}_1 : x = -y^2 + 2y$$

Per rappresentare graficamente $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$, determiniamo alcuni punti notevoli della prima e i corrispondenti trasformati della seconda:

x	y
1	-1
0	0
2	0
3	3
-1	3

chiamiamo tali punti rispettivamente $V(1,-1)$ (il vertice), $O(0,0)$ e $B(2,0)$ (le intersezioni con l'asse x), $C(3,3)$ e $D(-1,3)$.

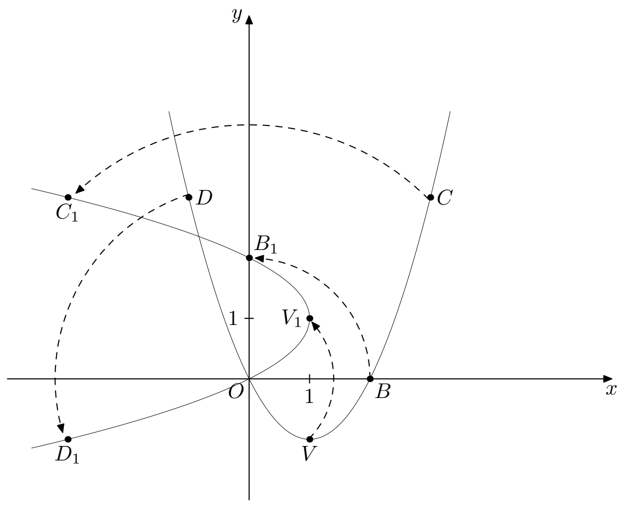
x	y
1	1
0	0
0	2
-3	3
-3	-1

chiamiamo tali punti rispettivamente $V_1(1,1)$ (il vertice), $O(0,0)$ e $B_1(0,2)$ (le intersezioni con l'asse y), $C_1(-3,3)$ e $D_1(-3,-1)$.

Osservazione. La parabola $\mathcal{P}_1$ ha asse di simmetria parallelo all'asse delle x, la sua equazione è del tipo

$$x = ay^2 + by + c$$

e si ottiene dalla generica equazione di una parabola con asse parallelo all'asse delle y semplicemente scambiando x con y. Tutte le formule precedenti sono riutilizzabili previo scambio dei ruoli delle due variabili.



2. Dalle formule di trasformazione, con $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = -x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -y_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

infine, sostituendo nell'equazione della parabola $\mathcal{P}$, otteniamo: $x_1 = (-y_1)^2 - 2(-y_1)$ da cui $x_1 = y_1^2 + 2y_1$ che è l'equazione della parabola richiesta, naturalmente eliminando gli indici.

$$\mathcal{P}_2 : x = y^2 + 2y$$

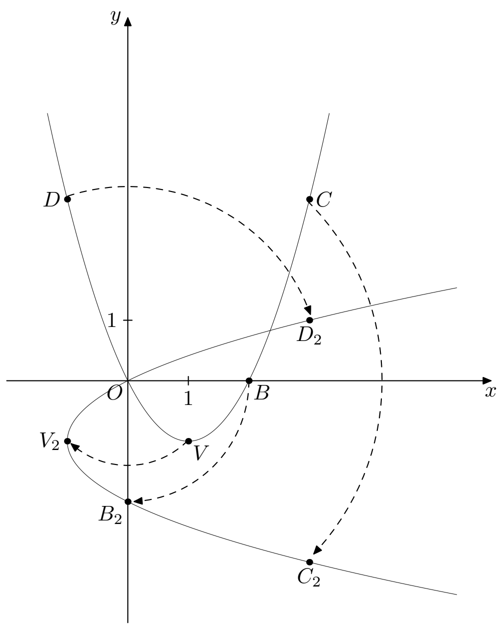
Per rappresentare graficamente $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_2$, riutilizziamo i punti notevoli della prima e i corrispondenti trasformati della seconda:

x	y
1	−1
0	0
2	0
3	3
−1	3

chiamiamo tali punti rispettivamente $V(1,-1)$ (il vertice), $O(0,0)$ e $B(2,0)$ (le intersezioni con l'asse x), $C(3,3)$ e $D(-1,3)$.

x	y
−1	−1
0	0
0	−2
3	−3
3	1

chiamiamo tali punti rispettivamente $V_2(-1,-1)$ (il vertice), $O(0,0)$ e $B_2(0,-2)$ (le intersezioni con l'asse y), $C_2(3,-3)$ e $D_2(3,1)$.



Esercizio 8.2.5. Disegnare il grafico della funzione di equazione $y = x^2 - 3|x| + 2$.

$$y = x^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

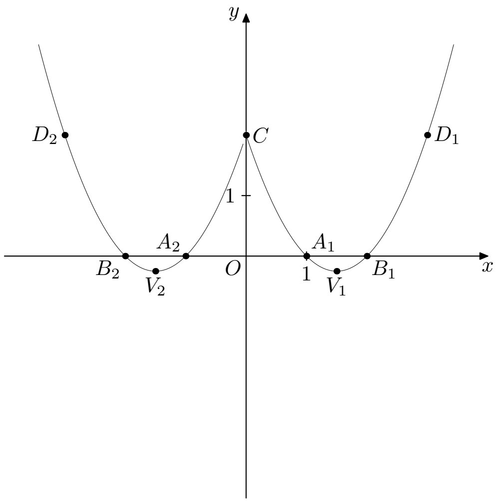
Determiniamo alcuni punti delle 2 parabole, disegnandone quindi i grafici facendo attenzione ad eliminare le parti non richieste.

x	y
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$
1	0
2	0
0	2
3	2

chiamiamo tali punti rispettivamente $V_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (il vertice), $A_1(1,0)$ e $B_1(2,0)$ (le intersezioni con l'asse x), $C(0,2)$ e $D_1(3,2)$.

x	y
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$
-1	0
-2	0
0	2
-3	2

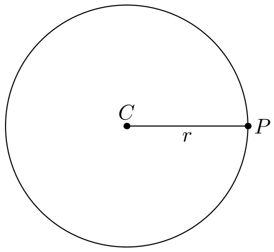
chiamiamo tali punti rispettivamente $V_2\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (il vertice), $A_2(-1,0)$ e $B_2(-2,0)$ (le intersezioni con l'asse x), $C(0,2)$ e $D_2(-3,2)$.



Osservazione. Sarebbe bastato osservare che la funzione data è pari e, quindi, disegnare il grafico della parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 2$ in corrispondenza alle sole ascisse positive o nulle ed infine simmetrizzarlo rispetto all'asse delle ordinate.

8.3 La circonferenza

Definizione 8.3.1. Diremo **circonferenza** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso C detto centro. Tale distanza comune viene detta raggio.

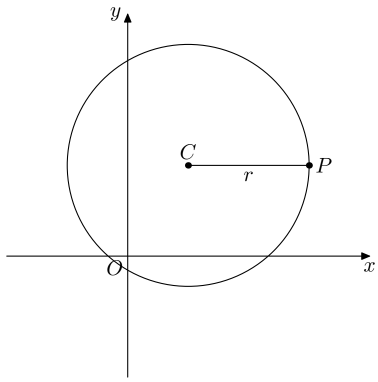


Osservazione. La circonferenza è una curva chiusa, simmetrica rispetto al centro e rispetto ad ogni retta passante per il centro.

Teorema 8.3.1. *In un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano $C(\alpha, \beta)$ il centro ed r il raggio della circoferenza $\mathcal{C}$.*

Dimostriamo che l'equazione della circoferenza è $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ove $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$ e $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$.

Dimostrazione. Sia $P(x, y)$ il generico punto del piano; $P \in \mathcal{C}$ se e solo se $\overline{PC} = r$.



$$\overline{PC} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

uguagliando ad r ed elevando al quadrato:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

sviluppando i prodotti notevoli:

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$$

disponendo in modo diverso i termini:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

infine, ponendo $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$ e $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$ si conclude. □

Osservazione. Dalle posizioni $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$ e $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$ si ottengono le relazioni inverse $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\frac{b}{2}$ e $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$.

Le equazioni della circonferenza nelle forme

$$\mathcal{C} : (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \quad (1)$$

oppure

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (2)$$

si dicono canoniche o normali.

Osservazione. Al variare dei valori dei coefficienti delle equazioni (1) o (2) si possono ottenere alcuni casi notevoli che esamineremo ora; è bene, tuttavia, tenere presente che essi sono sempre riconducibili al caso generale.

1. se $\alpha = \beta = 0$ o, equivalentemente, $a = b = 0$ allora il centro della circonferenza coincide con l'origine; l'equazione (1) diventa $x^2 + y^2 = r^2$ e la (2) si riduce a $x^2 + y^2 + c = 0$;
2. se $\alpha = 0$ o, equivalentemente, $a = 0$ allora il centro della circonferenza appartiene all'asse delle y;
3. se $\beta = 0$ o, equivalentemente, $b = 0$ allora il centro della circonferenza appartiene all'asse delle x;
4. se $c = 0$ allora la circonferenza passa per l'origine del sistema di riferimento (come si deduce facilmente anche dal fatto che le coordinate $(0, 0)$ verificano la sua equazione);
5. se $\alpha = 0$ o, equivalentemente, $a = 0$ e $c = 0$ allora il centro della circonferenza appartiene all'asse delle y, la circonferenza passa per l'origine e il raggio è uguale al modulo dell'ordinata del centro; l'equazione (1) diventa $x^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ e la (2) si riduce a $x^2 + y^2 + by = 0$;
6. se $\beta = 0$ o, equivalentemente, $b = 0$ e $c = 0$ allora il centro della circonferenza appartiene all'asse delle x, la circonferenza passa per l'origine e il raggio è uguale al modulo dell'ascissa del centro; l'equazione (1) diventa $(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$ e la (2) si riduce a $x^2 + y^2 + ax = 0$;
7. se $r = 0$ allora la circonferenza degenera in un solo punto coincidente con il suo centro.

Osservazione. L'equazione nella forma (2) potrebbe rappresentare l'insieme vuoto qualora nel ricavare il raggio si ottenga la radice quadrata di un numero negativo.

Esempio 8.3.1. Disegnare il grafico della circonferenza di equazione $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$.

Ci riconduciamo alla forma (1):

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

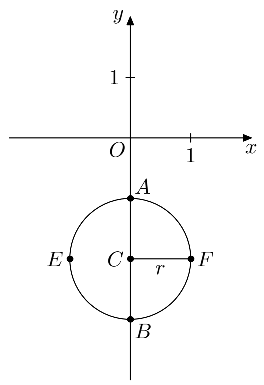
e utilizziamo il metodo cosiddetto del completamento dei quadrati:

$$x^2 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 3 = 0$$
$$(x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

e ricaviamo $\alpha = 0$, $\beta = -2$ e $r = 1$; calcoliamo ora qualche altro punto della circonferenza per rappresentarla graficamente.

x	y
0	−1
0	−3
−1	−2
1	−2

chiamiamo tali punti rispettivamente $A(0, -1)$, $B(0, -3)$, $E(-1, -2)$ ed $F(1, -2)$.



Alternativamente, si potevano utilizzare le relazioni inverse ottenute sopra per ricavare le coordinate del centro e la misura del raggio dall'equazione di partenza nella forma (2):

$$\alpha = -\frac{a}{2} = 0, \beta = -\frac{b}{2} = -2, r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \sqrt{4-3} = 1$$

Esercizio 8.3.1. Determinare e rappresentare graficamente la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(-2, 0)$ e raggio $r = 2$. Determinare e rappresentare, inoltre, le equazioni delle rette tangenti alla $\mathcal{C}$ passanti per il punto $P(3, 2)$.

Utilizziamo l'equazione di una circonferenza nella forma (1):

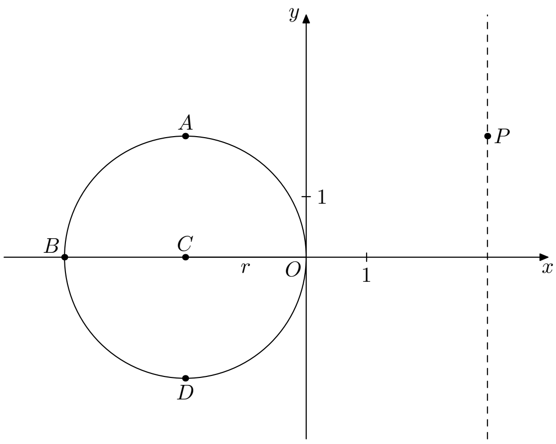
$$(x+2)^2 + y^2 = 4$$

e, svolgendo i calcoli, si ottiene

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

che è la forma (2) semplificata di uno dei casi notevoli.

Per rappresentare con maggior precisione la circonferenza richiesta, determiniamo graficamente per simmetria le coordinate di qualche altro punto.



Il fascio di rette di centro $P(3, 2)$ ha equazione

$$\mathcal{F} : y - 2 = m(x - 3)$$

(manca, ovviamente, l'equazione della retta del fascio parallela all'asse delle y, che scriviamo a parte: $x = 3$ e che evidentemente non può essere tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$).

Mettiamo a sistema l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ con l'equazione del fascio di rette di centro P:

$\begin{cases} y = m(x-3) + 2 \\ x^2 + y^2 + 4x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = mx - 3m + 2 \\ x^2 + m^2x^2 + 9m^2 + 4 - 6m^2x + 4mx - 12m + 4x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = mx - 3m + 2 \\ (1+m^2)x^2 + 2(2 + 2m - 3m^2)x + 9m^2 - 12m + 4 = 0 \end{cases}$

Le ascisse dei punti di intersezione fra $\mathcal{C}$ e la generica retta del fascio $\mathcal{F}$ si ottengono risolvendo la seconda equazione del sistema e sono reali e coincidenti (vale a dire la retta in questione è tangente) se il Δ (in questo caso il $\frac{\Delta}{4}$) di tale equazione è nullo. Ricaviamo quindi $\frac{\Delta}{4}$ ed imponiamo che sia 0:

$$(2 + 2m - 3m^2)^2 - (1 + m^2)(9m^2 - 12m + 4) = 0$$

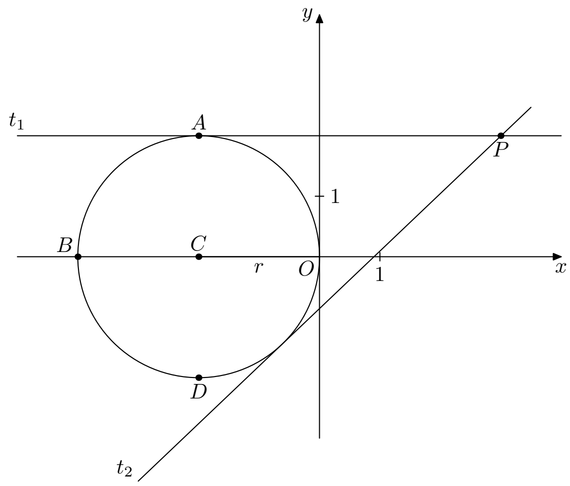
$$(4 + 4m^2 + 9m^4 + 8m - 12m^2 - 12m^3) - (9m^2 - 12m + 4 + 9m^4 - 12m^3 + 4m^2) = 0$$

$$-21m^2 + 20m = 0$$

da cui $m_1 = 0$ ed $m_2 = \dfrac{20}{21}$

abbiamo così ricavato i coefficienti angolari delle due rette del fascio $\mathcal{F}$ che risultano essere tangenti a $\mathcal{C}$; scriviamo ora le equazioni di tali rette tangenti:

$$t_1 : y = 2$$
$$t_2 : y = \frac{20}{21}x - \frac{6}{7}$$



Esercizio 8.3.2. Determinare e rappresentare graficamente la circonferenza $\mathcal{C}$ passante per $A(6, 1)$, $B(5, 4)$ e $D(4, 5)$.

La circonferenza cercata ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

imponiamo il passaggo per i punti dati:
passaggio per $A(6, 1)$: $36 + 1 + 6a + b + c = 0$
passaggio per $B(5, 4)$: $25 + 16 + 5a + 4b + c = 0$
passaggio per $D(4, 5)$: $16 + 25 + 4a + 5b + c = 0$
mettendo a sistema le 3 condizioni si ha:

$$\begin{cases} 6a + b + c = -37 \\ 5a + 4b + c = -41 \\ 4a + 5b + c = -41 \end{cases}$$

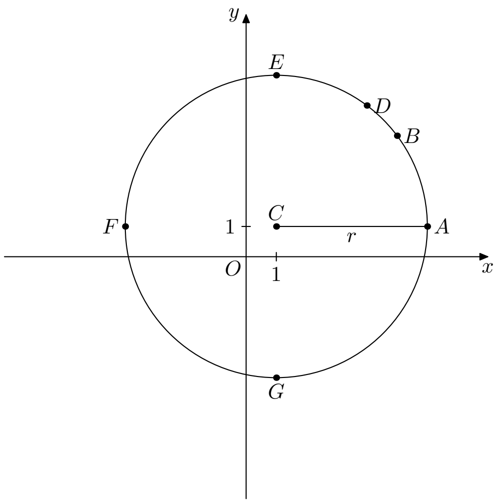
e sottraendo membro a membro le equazioni a due a due (prima e seconda, seconda e terza):

$$\begin{cases} a - 3b = 4 \\ a - b = 0 \\ 6a + b + c = -37 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2 \\ a = b \\ 6a + b + c = -37 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = -23 \end{cases}$$

la circonferenza cercata ha equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$$

il suo centro è $C(1, 1)$ e il raggio è $r = 5$. Per rappresentare con maggior precisione la circonferenza richiesta, determiniamo graficamente per simmetria le coordinate di qualche altro punto.



Osservazione. Qualora risulti $a = b$ nella forma (2), il centro appartiene alla prima bisettrice.

Esercizio 8.3.3. Determinare le equazioni delle circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ($r_1 < r_2$) tangenti ai semiassi positivi di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e passanti per il punto $A(1, 2)$. Calcolare, inoltre, le coordinate dell'ulteriore punto B di intersezione fra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e quelle dei punti di intersezione fra la circonferenza $\mathcal{C}_1$ e la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = -x^2 + 2x + 1$.

Le circonferenze cercate, tangenti ai semiassi positivi, devono avere il centro appartenente alla prima bisettrice e nel primo quadrante, quindi del tipo $C(\alpha, \alpha)$ con $\alpha > 0$ e il raggio $r = \alpha$; pertanto le equazioni sono del tipo:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$$

e, sviluppando i calcoli, si ha:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + \alpha^2 = 0$$

imponendo, ora, il passaggio per $A(1, 2)$ si ottiene:

$$1 + 4 - 2\alpha - 4\alpha + \alpha^2 = 0$$

da cui $\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0$ ed infine $\alpha_{1,2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \right.$

otteniamo, quindi, le equazioni delle due circonferenze cercate:

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$$

Per determinare l'ulteriore punto di intersezione fra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, mettiamo a sistema le 2 equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \end{cases}$$

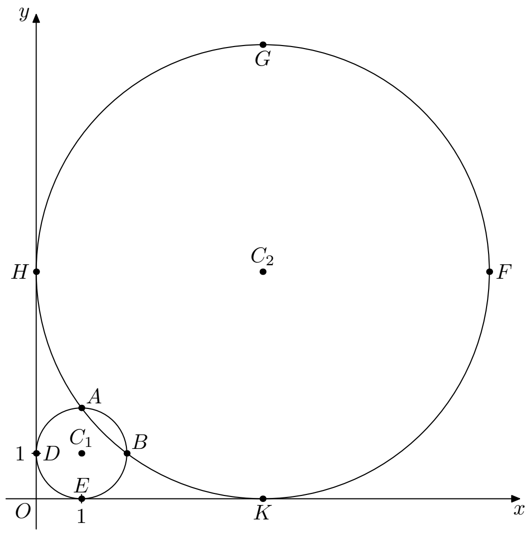
e sottraendo membro a membro si ha:

$$\begin{cases} 8x + 8y - 24 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + (3 - x)^2 - 2x - 2(3 - x) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ 2x^2 - 6x + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 - x \\ x_{1,2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \end{cases}$$

Ritroviamo, naturalmente, le coordinate del punto A: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$

ed inoltre le coordinate dell'ulteriore punto di intersezione B: $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$



Per determinare i punti di intersezione fra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{P}$, mettiamo a sistema le 2 equazioni:

$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ y=-x^2+2x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ x^2-2x+y-1=0 \end{cases}$

e sottraendo membro a membro si ha:

$\begin{cases} y^2-3y+2=0 \\ y=-x^2+2x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} y_{1,2}=\langle^1_2 \\ y=-x^2+2x+1 \end{cases}$

da cui, sostituendo prima $y_1=1$, si ha:

$\begin{cases} y_1=1 \\ -x^2+2x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1=1 \\ x_{1,2}=\langle^0_2 \end{cases}$

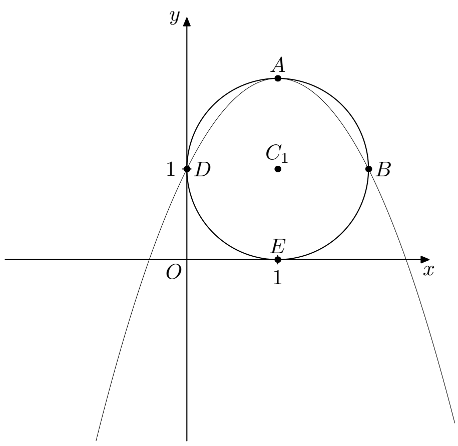
abbiamo così ottenuto le coordinate del punto D: $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=1 \end{cases}$

e le coordinate del punto B già noto: $\begin{cases} x_2=2 \\ y_1=1 \end{cases}$

Sostituendo quindi $y_2=2$ si ha:

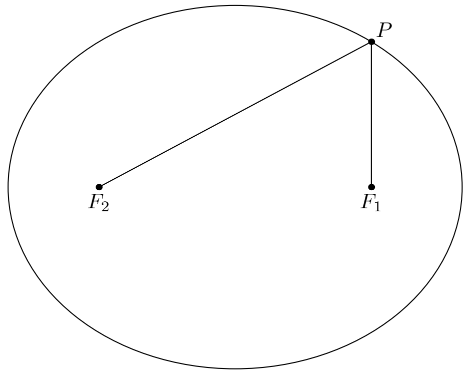
$\begin{cases} y_2=2 \\ -x^2+2x-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_2=2 \\ x_3=x_4=1 \end{cases}$

abbiamo ottenuto le coordinate del punto A già noto con doppia molteplicità: $\begin{cases} x_3=x_4=1 \\ y_2=2 \end{cases}$



8.4 L'ellisse

Definizione 8.4.1. Diremo **ellisse** il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi F_1 ed F_2 detti fuochi. Tale somma costante sia k.

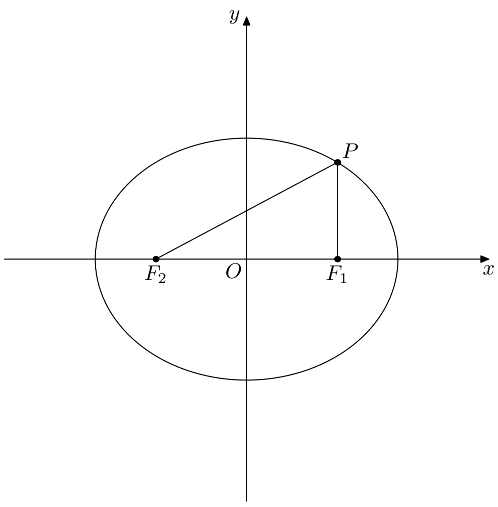


Osservazione. L'ellisse è una curva chiusa, simmetrica rispetto alla retta passante per i fuochi e all'asse del segmento avente i fuochi per estremi. Chiameremo vertici le intersezioni di tali assi di simmetria con l'ellisse stessa.

Teorema 8.4.1. *In un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano $F_1(c, 0)$ ed $F_2(-c, 0)$ (con $c > 0$) i fuochi dell'ellisse $\mathcal{E}$.*

Dimostriamo che l'equazione dell'ellisse è $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $2a = k$ e $b^2 = a^2 - c^2$.

Dimostrazione. Sia $P(x, y)$ il generico punto del piano; $P \in \mathcal{E}$ se e solo se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$.



$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

quindi, ponendo $k = 2a$:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

isolando la prima radice ed elevando al quadrato:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

semplificando ed isolando la radice:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

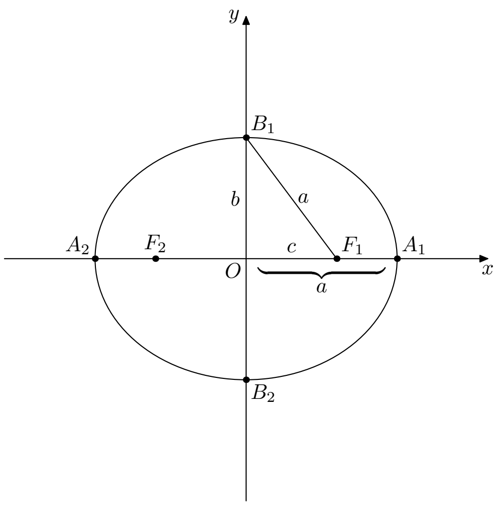
elevando al quadrato (la condizione di realtà è garantita dalla osservazione finale) e semplificando:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

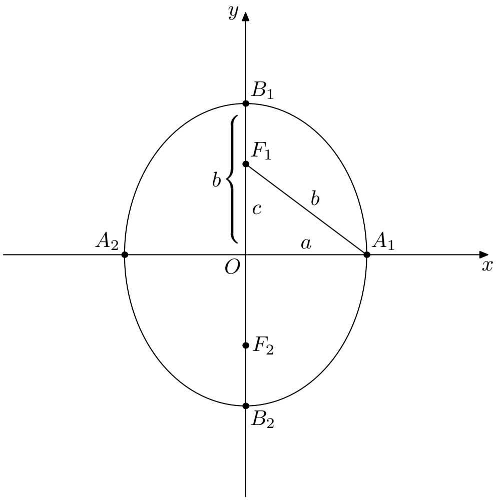
dividendo ambo i membri per $a^2(a^2 - c^2)$ e ponendo $a^2 - c^2 = b^2$ si conclude (si conviene di assumere anche $b > 0$). □

Osservazione. I vertici dell'ellisse considerata nella dimostrazione del teorema coincidono con le sue intersezioni con gli assi del sistema di riferimento e tali assi sono proprio anche gli assi di simmetria della curva.

Osservazione. Quando i fuochi sono posizionati come nella dimostrazione del teorema si dice che l'asse focale coincide con l'asse delle x e l'ellisse è centrata nell'origine; risulta $a > c$ ed anche $a > b$; l'ellisse si presenta schiacciata in orizzontale ed è collocata nel rettangolo delimitato dalle rette di equazioni $x = \pm a$ e $y = \pm b$.



Analogamente, si prova che, quando l'asse focale coincide con l'asse delle y e l'ellisse è centrata nell'origine, risulta invece $b > c$ ed anche $b > a$; l'ellisse si presenta schiacciata in verticale ed è collocata nel rettangolo delimitato dalle rette di equazioni $x = \pm a$ e $y = \pm b$.



L'equazione dell'ellisse nella forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è detta canonica o normale.

I vertici sull'asse x sono $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$; i vertici sull'asse y sono $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.

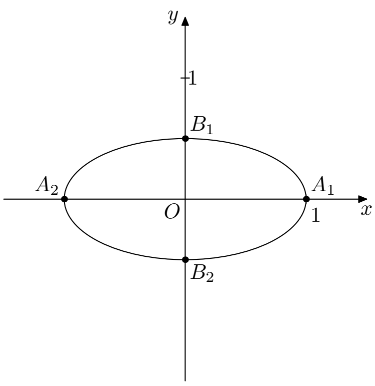
Se l'asse focale coincide con l'asse x, i fuochi sono $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ e $c^2 = a^2 - b^2$;
se l'asse focale coincide con l'asse y, i fuochi sono $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$ e $c^2 = b^2 - a^2$.

Esempio 8.4.1. Disegnare il grafico dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$.

Ci riconduciamo alla forma normale:

$$x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

i vertici sull'asse x sono $A_1(1, 0)$ e $A_2(-1, 0)$; i vertici sull'asse y sono $B_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $B_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$



Esercizio 8.4.1. Disegnare il grafico dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $4x^2 + y^2 = 4$. Determinare, inoltre, le equazioni delle rette tangenti passanti per il punto $P(0, 3)$.

Ci riconduciamo alla forma normale

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

i vertici sull'asse x sono $A_1(1,0)$ e $A_2(-1,0)$; i vertici sull'asse y sono $B_1(0,2)$ e $B_2(0,-2)$

Il fascio di rette di centro $P(0,3)$ ha equazione

$$\mathcal{F} : y - 3 = mx$$

(manca, ovviamente, l'equazione della retta del fascio parallela all'asse delle y, in questo caso proprio l'asse y ma che evidentemente non può essere tangente all'ellisse $\mathcal{E}$).

Mettiamo a sistema l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ con l'equazione del fascio di rette di centro P:

$$\begin{cases} y = mx + 3 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx + 3 \\ x^2 + \dfrac{m^2x^2 + 6mx + 9}{4} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx + 3 \\ (4 + m^2)x^2 + 6mx + 5 = 0 \end{cases}$$

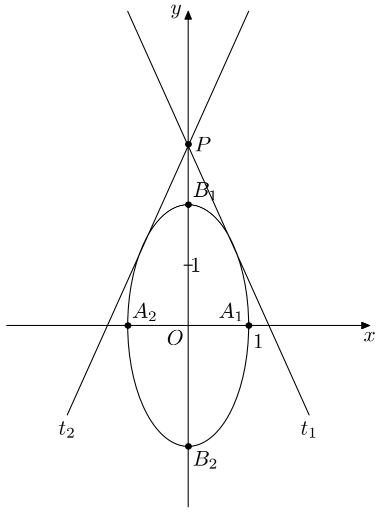
Le ascisse dei punti di intersezione fra $\mathcal{E}$ e la generica retta del fascio $\mathcal{F}$ si ottengono risolvendo la seconda equazione del sistema e sono reali e coincidenti (vale a dire la retta in questione è tangente) se il Δ (in questo caso il $\frac{\Delta}{4}$) di tale equazione è nullo. Riacaviamo quindi $\frac{\Delta}{4}$ ed imponiamo che sia 0:

$$9m^2 - 20 - 5m^2 = 0$$
$$4m^2 - 20 = 0$$
$$m^2 = 5$$

da cui $m_1 = -\sqrt{5}$ ed $m_2 = \sqrt{5}$

abbiamo così ricavato i coefficienti angolari delle due rette del fascio $\mathcal{F}$ che risultano essere tangenti a $\mathcal{E}$; scriviamo ora le equazioni di tali rette tangenti:

$$t_1 : y = -\sqrt{5}x + 3$$
$$t_2 : y = \sqrt{5}x + 3$$



Esercizio 8.4.2. Determinare l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ di vertice $A_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e passante per $P(1,1)$ e le sue intersezioni con la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$.

L'ellisse cercata ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

imponiamo il passaggo per i punti dati:

essendo $A_1\left(\frac{3}{2},0\right)$ un vertice: $a=\frac{3}{2}$
passaggio per $P(1,1)$: $b^2+a^2=a^2b^2$
mettendo a sistema le 2 condizioni:
$\begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b^2+a^2=a^2b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ \frac{5}{4}b^2=\frac{9}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}$
L'ellisse cercata ha equazione

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{5}}=1$$

ossia

$$\mathcal{E}:4x^2+5y^2=9$$

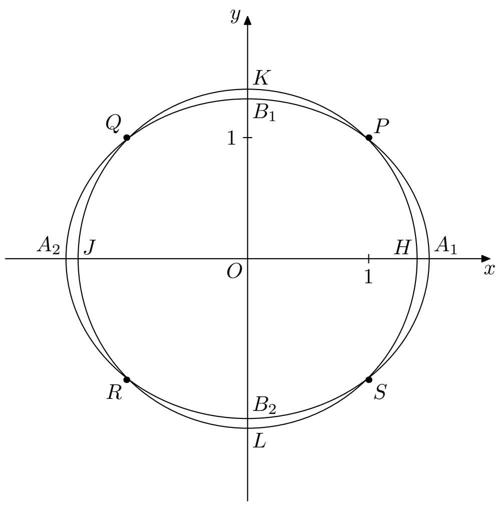
La circonferenza cercata ha equazione

$$(x-0)^2+(y-0)^2=2$$

ossia

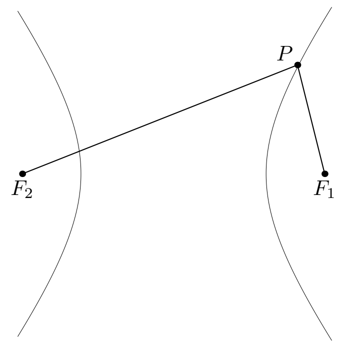
$$\mathcal{C}:x^2+y^2=2$$

Mettiamo ora a sistema le equazioni delle 2 curve:
$\begin{cases} 4x^2+5y^2=9 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2+5y^2=9 \\ 4x^2+4y^2=8 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2+5y^2=9 \\ y^2=1 \end{cases}$
da cui $y_{1,2}=\langle{}^{-1}_{+1}$
e quindi, sostituendo nel sistema, si ottengono i punti richiesti:
$P(1,1)$, $Q(-1,1)$, $R(-1,-1)$ e $S(1,-1)$.



8.5 L'iperbole

Definizione 8.5.1. Diremo **iperbole** il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il modulo della differenza delle distanze da due punti fissi F_1 ed F_2 detti fuochi. Tale differenza costante sia k.

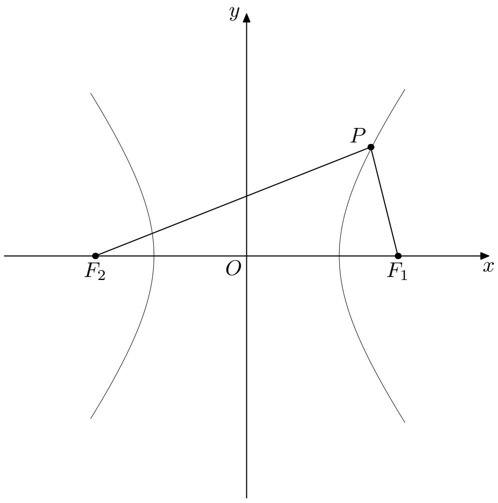


Osservazione. L'iperbole è una curva costituita da due rami aperti, simmetrica rispetto alla retta passante per i fuochi e all'asse del segmento avente i fuochi per estremi. Chiameremo vertici le intersezioni della retta dei fuochi con l'iperbole stessa.

Teorema 8.5.1. *In un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano $F_1(c,0)$ ed $F_2(-c,0)$ (con $c>0$) i fuochi dell'iperbole $\mathcal{I}$.*

Dimostriamo che l'equazione dell'iperbole è $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ con $2a=k$ e $b^2=c^2-a^2$.

Dimostrazione. Sia $P(x,y)$ il generico punto del piano; $P\in\mathcal{I}$ se e solo se $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=k$.



$$\overline{PF_1}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\overline{PF_2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

quindi, ponendo $k=2a$:

$$|\sqrt{(x-c)^2-y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$$

solo per una convenienza di calcolo, anzichè elevare direttamente al quadrato, è preferibile distinguere i casi $\overline{PF_2}>\overline{PF_1}$ o $\overline{PF_1}>\overline{PF_2}$;

supponiamo dapprima che sia $\overline{PF_2} > \overline{PF_1}$:

$$\sqrt{(x+c)^2 - y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

isolando la prima radice ed elevando al quadrato:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

semplificando ed isolando la radice:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

elevando al quadrato (la condizione di realtà è garantita dalla condizione finale) e semplificando:

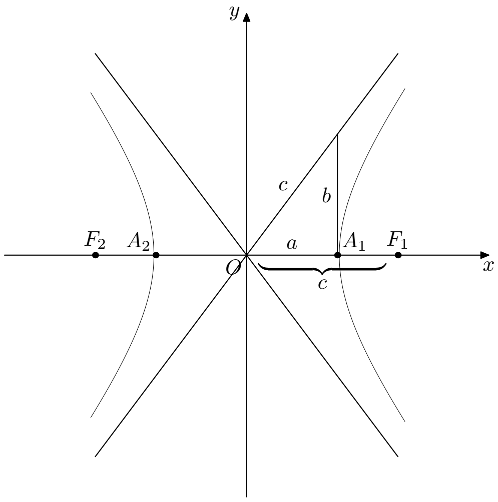
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

dividendo ambo i membri per $a^2(c^2 - a^2)$ e ponendo $c^2 - a^2 = b^2$ si conclude (si conviene di assumere anche $b > 0$).

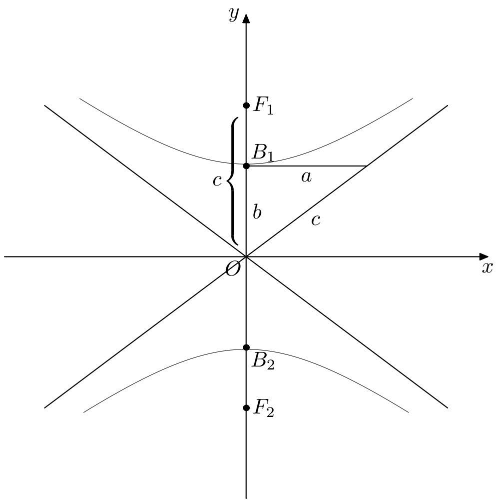
In maniera del tutto analoga, se $\overline{PF_1} > \overline{PF_2}$ si giunge allo stesso risultato. □

Osservazione. I vertici dell'iperbole considerata nella dimostrazione del teorema coincidono con le sue intersezioni con l'asse x del sistema di riferimento e gli assi coordinati sono proprio anche gli assi di simmetria della curva.

Osservazione. Quando i fuochi sono posizionati come nella dimostrazione del teorema si dice che l'asse focale coincide con l'asse delle x e l'iperbole è centrata nell'origine; risulta $c > a$ ed anche $c > b$ e l'iperbole è collocata esternamente alla striscia delimitata dalle rette $x = \pm a$.



Analogamente, si prova che, quando l'asse focale coincide con l'asse delle y e l'iperbole è centrata nell'origine, risulta ancora $c > b$ ed anche $c > a$ e l'iperbole è collocata esternamente alla striscia delimitata dalle rette $y = \pm b$ e la sua equazione è del tipo $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ con $2b = k$ e $a^2 = c^2 - b^2$.



L'equazione dell'iperbole nelle forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (2)$$

è detta canonica o normale.

Nella forma (1) i vertici sono $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$; nella forma (2) i vertici sono $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.
Se l'asse focale coincide con l'asse x, i fuochi sono $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ e $c^2 = a^2 + b^2$;
se l'asse focale coincide con l'asse y, i fuochi sono $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$ e $c^2 = b^2 + a^2$.

Osservazione. L'iperbole è l'unica conica per la quale esistono 2 rette passanti per il centro di simmetria la cui distanza dal generico punto della curva tende a zero. Tali rette sono dette asintoti. Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

in entrambe le forme.

La dimostrazione relativa trascende le attuali conoscenze necessitando della **Teoria dei limiti**.

Risulta interessante notare che le equazioni degli asintoti sono ottenibili semplicemente annullando il complesso dei termini di secondo grado nelle equazioni canoniche (1) e (2).

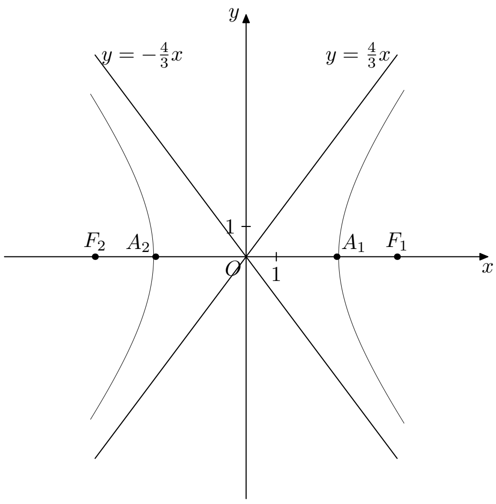
Osservazione. Qualora $a = b$ nell'equazione canonica dell'iperbole, si dice che l'iperbole è equilatera. In tal caso gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti.

Esempio 8.5.1. Determinare vertici, fuochi, asintoti dell'iperbole di equazione $16x^2 - 9y^2 = 144$ e rappresentarla graficamente. Ripetere l'esercizio con l'equazione $16x^2 - 9y^2 = -144$.

Per la prima parte dell'esercizio ci riconduciamo alla forma (1) dividendo per 144 ambo i membri:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

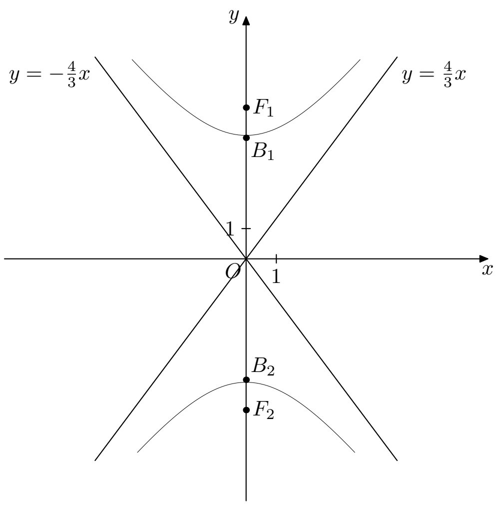
gli asintoti dell'iperbole sono quindi le rette di equazione $y = \pm\frac{4}{3}x$; i vertici sono $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e i fuochi $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$.



Per la seconda parte dell'esercizio ci riconduciamo alla forma (2) dividendo per 144 ambo i membri:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$$

gli asintoti dell'iperbole sono quindi le rette di equazione $y = \pm\frac{4}{3}x$; i vertici sono $B_1(0, 4)$ e $B_2(0, -4)$ e i fuochi $F_1(0, 5)$ e $F_2(0, -5)$.

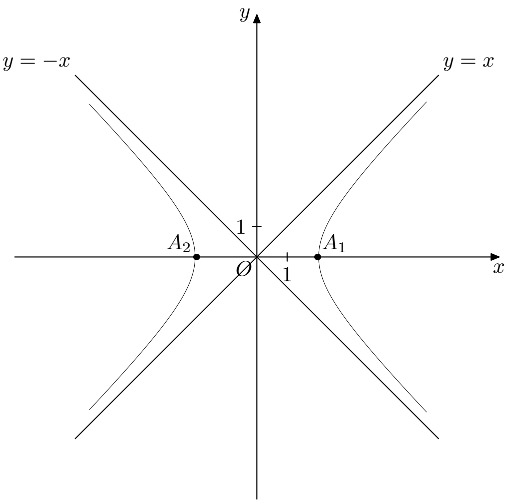


Esercizio 8.5.1 (NOTEVOLE)**.** Data l'iperbole $\mathcal{I}$ di equazione $x^2 - y^2 = 4$, rappresentarla graficamente; determinare, quindi, l'equazione e la rappresentazione grafica dell'iperbole $\mathcal{I}_1$ ruotata di $\frac{\pi}{4}$.

Ci riconduciamo alla forma (1) dividendo per 4 ambo i membri:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

l'iperbole è, evidentemente, equilatera e i suoi asintoti sono quindi le bisettrici dei quadrtanti; i vertici sono $A_1(2, 0)$ e $A_2(-2, 0)$.



Applichiamo le formule relative alla rotazione con $\beta = \dfrac{\pi}{4}$:

$\begin{cases} x_1 = xcos\beta - ysen\beta \\ y_1 = xsen\beta + ycos\beta \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

Sommando dapprima e, poi, sottraendo membro a membro si ha:

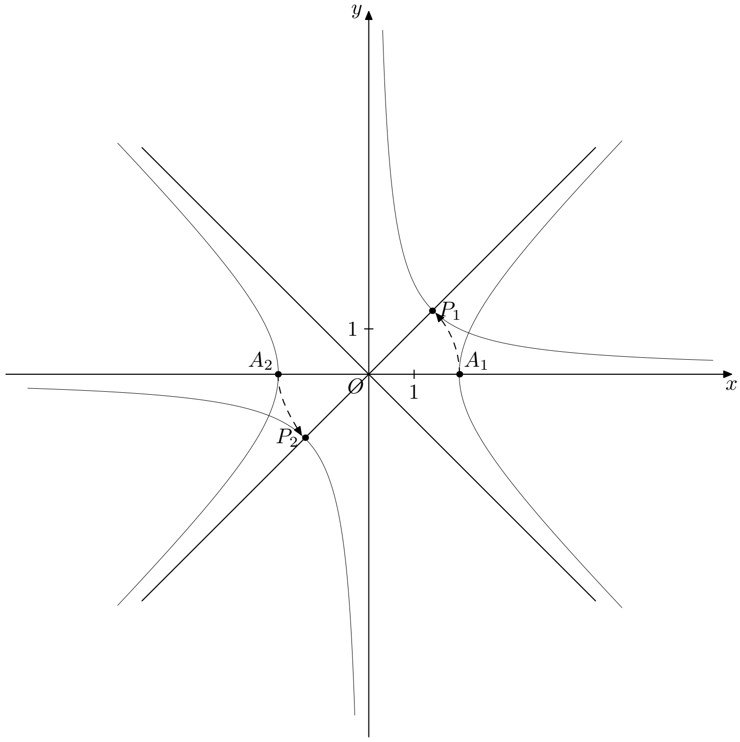
$\begin{cases} x_1 + y_1 = \sqrt{2}x \\ x_1 - y_1 = -\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

sostituendo nell'equazione di $\mathcal{I}$ otteniamo:

$$\left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4$$

sviluppando i calcoli, semplificando ed eliminando gli indici, si ottiene infine

$$\mathcal{I}_1 : xy = 2$$



Osservazione. L'iperbole equilatera di equazione generale $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ovvero $x^2 - y^2 = a^2$ è sempre riconducibile, mediante una rotazione di $\frac{\pi}{4}$, ad una iperbole avente per asintoti gli assi cartesiani la cui equazione è

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

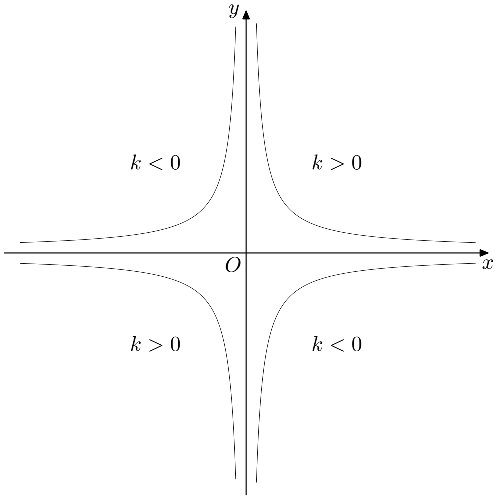
Naturalmente, se la rotazione è invece di $-\frac{\pi}{4}$, l'iperbole equilatera ottenuta ha le stesse caratteristiche della precedente e la sua equazione è

$$xy = -\frac{a^2}{2}$$

Generalmente si assume $\pm\frac{a^2}{2} = k$ e quindi l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti si presenta nella forma

$$xy = k \quad (3)$$

Osserviamo che se $k > 0$ i 2 rami di iperbole giacciono nel I e nel III quadrante; se $k < 0$ giacciono invece nel II e nel IV.



Esercizio 8.5.2 (NOTEVOLE)**.** Data la funzione di equazione $y = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ dimostrare che si tratta di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti traslata e disegnarne il grafico.

$$y = \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{5}{4}}{x+\frac{1}{2}}$$

$$y - \frac{3}{2} = \frac{-\frac{5}{4}}{x+\frac{1}{2}}$$

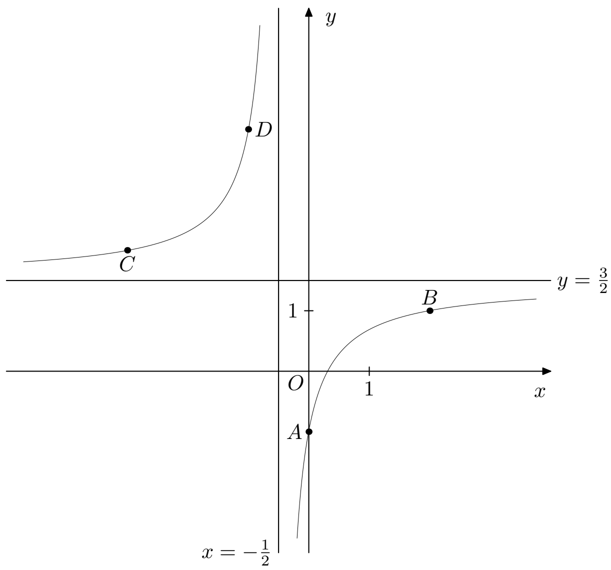
$$\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$$

si deduce che la curva data è un'iperbole, ottenibile mediante semplici traslazioni da quella di base del tipo (3):

$$xy = k$$

con $k = -\dfrac{5}{4}$, come volevasi dimostrare.

Per rappresentarla graficamente trasliamo quindi l'iperbole di base verso sinistra di $\dfrac{1}{2}$ e verso l'alto di $\dfrac{3}{2}$, trovandone anche alcuni punti per un disegno più accurato.



Osservazione. La funzione di equazione $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ e $ad \neq bc$, viene detta funzione omografica ed è una iperbole equilatera riferita ai propri asintoti traslata.

Infatti:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c} + \frac{ad}{c^2} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{\left(\frac{a}{c}x + \frac{ad}{c^2}\right) - \left(\frac{ad}{c^2} - \frac{b}{c}\right)}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad-bc}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

$$y - \frac{a}{c} = \frac{-\frac{ad-bc}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

$$\left(y - \frac{a}{c}\right)\left(x + \frac{d}{c}\right) = -\frac{ad-bc}{c^2} \qquad (*)$$

si deduce che la curva data è un'iperbole, ottenibile mediante semplici traslazioni da quella di base del tipo (3):

$$xy = k$$

con $k = -\dfrac{ad-bc}{c^2}$, come volevasi dimostrare.

Per rappresentarla graficamente trasliamo quindi l'iperbole di base orizzontalmente di $-\dfrac{d}{c}$ e verticalmente di $\dfrac{a}{c}$, trovandone eventualmente alcuni punti per un disegno più accurato.

Nella pratica è sufficiente disegnare gli asintoti

asintoto verticale: $x = -\dfrac{d}{c}$

asintoto orizzontale: $y = \dfrac{a}{c}$

determinare alcuni punti per sostituzione e, quindi, essendo noto l'andamento della curva, disegnarne il grafico.

Infine analizziamo cosa accade nell'equazione $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ nei seguenti casi:

1. se $c = 0$ e $ad \neq bc$ allora l'equazione diventa $y = \dfrac{ax+b}{d}$ che rappresenta graficamente una retta non parallela agli assi;

2. se $c \neq 0$ e $ad = bc$ allora l'equazione diventa $y = \dfrac{a}{c}$ che rappresenta graficamente una retta parallela all'asse delle x;

3. se $c = 0$ e $ad = bc$ allora
   - se $d \neq 0$ allora l'equazione diventa $y = \dfrac{b}{d}$ che rappresenta graficamente una retta parallela all'asse delle x;
   - se $d = 0$ allora la frazione algebrica $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ perde di significato.

Osservazione. Risulta interessante notare che le equazioni degli asintoti sono ottenibili semplicemente annullando il complesso dei termini di secondo grado nell'equazione ($*$), come del resto accade anche per le equazioni canoniche (1), (2) e (3).

Esercizi proposti

1. Dopo aver determinato i punti di intersezione fra la parabola $\mathcal{P}$ con asse parallelo all'asse y passante per $A(1,0)$, $B(3,0)$, $C(0,3)$ e la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $E(2,2)$ e raggio $r = \sqrt{5}$, calcolare l'area del poligono da essi individuato. Facoltativamente, risolvere la disequazione:
$$\frac{x^2 - 4x + 3 - y}{x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3} < 0$$
($\mathcal{P} : y = x^2 - 4x + 3$, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$; *i punti di intersezione sono* A, B, C *e* $D(4,3)$ *e l'area cercata è* 9).

2. Scrivere l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse parallelo all'asse y avente vertice in $V(3,-2)$ e passante per l'origine; detta A l'ulteriore intersezione di $\mathcal{P}$ con l'asse x, determinare sull'arco di parabola OA i punti P tali che sia uguale a $\frac{16}{3}$ l'area del triangolo OPA.
($\mathcal{P} : y = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x$; *i punti cercati sono* $P_1(2, -\frac{16}{9})$ *e* $P_2(4, -\frac{16}{9})$).

3. Data la famiglia di circonferenze di equazione $\mathcal{C}_k : (x-1)^2 + (y-1)^2 = k^2$ con $k \in \mathbb{R}^>$, rappresentare quella con $k = 2$ e determinare i valori di k per i quali l'area della corona circolare individuata da $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_k$ è uguale a 3π.
(*Risulta* $k = 1$ *e* $k = \sqrt{7}$).

4. Siano $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ due iperboli centrate nell'origine con asintoti $y = \pm\frac{3}{4}x$ e vertici rispettivamente in $A_1(-4,0)$ e $A_2(4,0)$ e in $B_1(-2,0)$ e $B_2(2,0)$; determinare le equazioni delle iperboli e delle rispettive tangenti nei vertici.
($\mathcal{I}_1 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, $\mathcal{I}_2 : 9x^2 - 16y^2 = 36$; *le rette cercate hanno equazione* $x = \pm 4$ *e* $x = \pm 2$).

5. * Quali trasformazioni è necessario applicare all'ellisse di base di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ per ottenere l'ellisse di equazione $8x^2 + 9y^2 - 32x - 36y - 4 = 0$?
(*Una traslazione verso destra e verso l'alto di* 2).

6. Calcolare l'area del rettangolo individuato dai 4 punti di intersezione delle due ellissi di equazioni $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ e $4x^2 + y^2 - 4 = 0$.
(*Area*=$\frac{48}{35}\sqrt{6}$).

7. * Dedurre dal grafico di $\mathcal{I}$, funzione omografica di equazione $y = \frac{2x}{x+2}$, il grafico della funzione di equazione $y = \left|\frac{2x}{x+2}\right|$ e discutere l'equazione $\left|\frac{2x}{x+2}\right| = k$ al variare di k in $\mathbb{R}$. Determinare le intersezioni di $\mathcal{I}$ con la circonferenza di centro $C(-2,2)$ e raggio $\sqrt{8}$.

(*L'equazione non ha alcuna soluzione per* $k < 0$*, una soluzione per* $k = 0$ *e per* $k = 2$*, due soluzioni per* $0 < k < 2$ *e per* $k > 2$*; la circonferenza risulta tangente all'iperbole in* O *e nel punto di coordinate* $(-4, 4)$).

8. Determinare le trasformazioni che permettono di passare dalla circonferenza di base centrata nell'origine di raggio 1 alla circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 25 = 0$; siano A e B le intersezioni di $\mathcal{C}$ con la retta di equazione $y = -\frac{x}{2}$ e T l'intersezione doppia della circonferenza con la tangente per l'origine di coefficiente angolare positivo; calcolare, infine, area e perimetro del triangolo ATB.

   (*Una omotetia di rapporto* 5*, una traslazione verso destra di* 7 *e verso il basso di* 1*; i punti di intersezione sono* $A(2, -1)$*,* $B(10, -5)$ *e* $T(4, 3)$*; osservando che* TB *è diametro, si ottengono* $area(ATB) = 20$ *e* $2p(ATB) = 2(3\sqrt{5} + 5)$).

Capitolo 9

I vettori del piano

9.1 Segmenti orientati

9.2 $\mathbb{R}^2$

Capitolo 10

I numeri complessi

10.1 Forma algebrica

Nel corso degli studi fin qui seguito abbiamo spesso incontrato equazioni che risultavano impossibili in un determinato insieme numerico mentre erano determinate in un insieme diverso.

Esempio 10.1.1. $x + 5 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{N}$ ma è determinata con soluzione $x = -5$ in $\mathbb{Z}$

Esempio 10.1.2. $2x + 5 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$ ma è determinata con soluzione $x = -\frac{5}{2}$ in $\mathbb{Q}$

Esempio 10.1.3. $x^2 - 5 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$ ma è determinata con soluzioni $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ in $\mathbb{R}$

A questo punto è lecito chiedersi se l'equazione $x^2 + 1 = 0$ (chiaramente impossibile in $\mathbb{R}$) sia invece risolvibile in qualche altro ampliamento di $\mathbb{R}$.

Definizione 10.1.1. Diremo *unità immaginaria* e la indicheremo con i una delle radici dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. Quindi

$$i^2 = -1.$$

Osservazione. Ovviamente, dalla definizione segue che l'unità immaginaria non appartiene ad $\mathbb{R}$.

Osservazione. Ovviamente, dalla definizione e dalle proprietà delle potenze segue che anche

$$(-i)^2 = -1.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione $x^2 + 1 = 0$ sono $\pm i$.

Definizione 10.1.2. Diremo *numero complesso* (in forma algebrica) ogni combinazione lineare del tipo $a+bi$ ove a, b sono numeri reali.

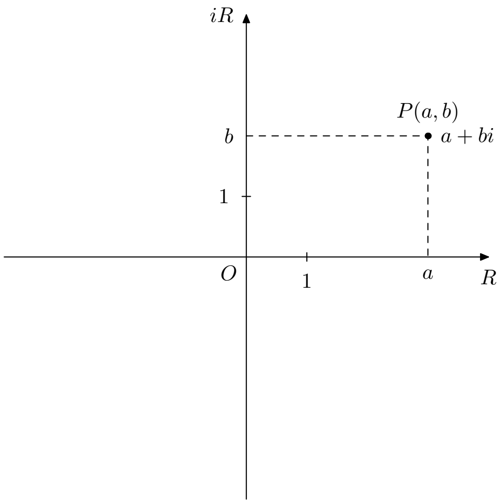
Osservazione. Se $b = 0$ allora si ottiene un numero reale; se $a = 0$ allora si ottiene un numero che diremo immaginario puro.

Spesso il generico numero complesso viene indicato con z.

Si deve al matematico tedesco Gauss la teorizzazione dei numeri complessi e una rappresentazione grafica di tali nuovi enti. Osserviamo che nasce così una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri complessi, che indicheremo con $\mathbb{C}$, e l'insieme dei punti del piano π, che a loro volta sono in biiezione con l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \pi \leftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$a + bi \leftrightarrow P \leftrightarrow (a, b)$$



Procediamo ora definendo le principali operazioni con i numeri complessi in forma algebrica.

Definizione 10.1.3. Dati i numeri complessi $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, diremo *somma* di z_1 e z_2 il numero complesso

$$z_3 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

.

Osservazione. In base alla corrispondenza biunivoca di cui sopra, si definisce in maniera naturale l'operazione di adddizione fra punti del piano e fra coppie ordinate di numeri reali

$$P_1(a_1, b_1) + P_2(a_2, b_2) = P_3(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Si estendono all'insieme dei numeri complessi le consuete proprietà dell'addizione relative ai numeri reali. In particolare:

Definizione 10.1.4. Dato il numero complesso $z = a + bi$, diremo *opposto* di z, e lo indicheremo con $-z$, il numero complesso che sommato a z dà 0, da cui

$$-z = -a - bi$$

.

Osservazione. In base alla corrispondenza biunivoca di cui sopra, si definisce in maniera naturale l'oppposto di un punto del piano e di una coppia ordinata di numeri reali

$$opp(P(a, b)) = Q(-a, -b)$$

Come di consueto la sottrazione fra z_1 e z_2 viene ricondotta all'addizione fra z_1 e l'opposto di z_2:

Definizione 10.1.5. Dati i numeri complessi $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, diremo *differenza* di z_1 e z_2 il numero complesso

$$z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

.

Osservazione. In base alla corrispondenza biunivoca di cui sopra, si definisce in maniera naturale l'operazione di sottrazione fra punti del piano e fra coppie ordinate di numeri reali

$$P_1(a_1, b_1) - P_2(a_2, b_2) = P_3(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$

Di particolare rilievo risultano le seguenti:

Definizione 10.1.6. Dato il numero complesso $z = a + bi$, diremo *coniugato* di z, e lo indicheremo con $\overline{z}$, il numero complesso

$$\overline{z} = a - bi$$

.

Definizione 10.1.7. Dato il numero complesso $z = a + bi$, diremo *modulo* di z, e lo indicheremo con $|z|$, il numero reale

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

.

Osservazione. In base alla corrispondenza biunivoca di cui sopra, si definisce in maniera naturale il coniugato di un punto del piano e di una coppia ordinata di numeri reali

$$coniug(P(a, b)) = Q(a, -b)$$

Procediamo ora con la seconda operazione fondamentale:

Definizione 10.1.8. Dati i numeri complessi $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, diremo *prodotto* di z_1 e z_2 il numero complesso

$$z_3 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

.

Osservazione. In base alla corrispondenza biunivoca di cui sopra, si definisce in maniera naturale l'operazione di moltiplicazione fra punti del piano e fra coppie ordinate di numeri reali

$$P_1(a_1, b_1) \cdot P_2(a_2, b_2) = P_3(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Si estendono all'insieme dei numeri complessi le consuete proprietà della moltiplicazione relative ai numeri reali. In particolare:

Definizione 10.1.9. Dato il numero complesso non nullo $z = a + bi$, diremo *inverso* o *reciproco* di z, e lo indicheremo con $\frac{1}{z}$ o con z^{-1}, il numero complesso che moltiplicato per z dà 1, da cui

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi}$$

.

Per esprimere l'inverso di z nella consueta modalità, è necessario moltiplicare opportunamente, per una stessa quantità non nulla, sia il numeratore che il denominatore:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Osservazione. In base alla corrispondenza biunivoca di cui sopra, si definisce in maniera naturale l'inverso di un punto del piano e di una coppia ordinata di numeri reali

$$inv(P(a, b)) = Q(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2})$$

Come di consueto la divisione fra z_1 e z_2 viene ricondotta alla moltiplicazione fra z_1 e l'inverso di z_2:

Definizione 10.1.10. Dati i numeri complessi $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_2 \neq 0$, diremo *quoziente* fra z_1 e z_2 il numero complesso

$$z_3 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b}{a_2^2 + b_2^2} i$$

.

Infatti, moltiplicando z_1 per l'inverso di z_2 si ha:

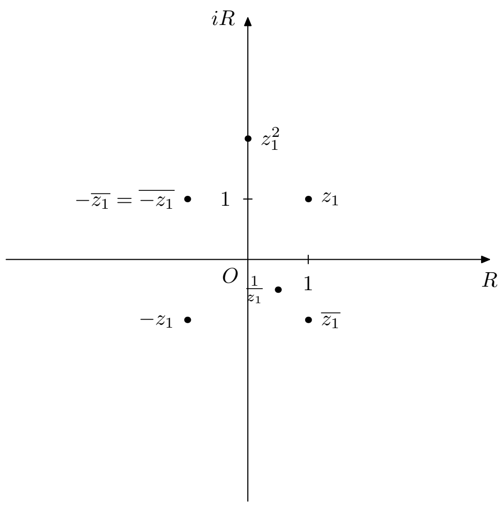
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b}{a_2^2 + b_2^2} i$$

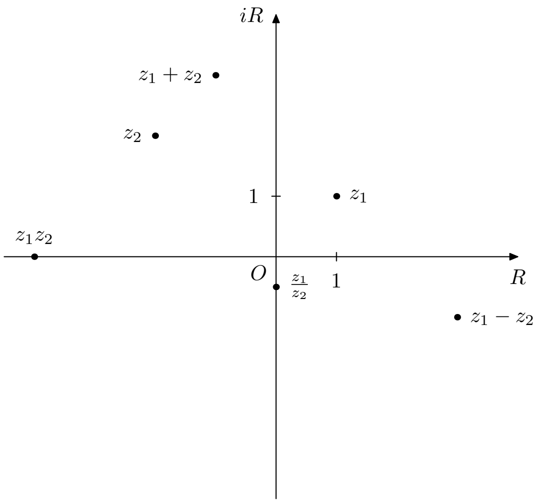
Osservazione. In base alla corrispondenza biunivoca di cui sopra, si definisce in maniera naturale l'operazione di divisione fra punti del piano e fra coppie ordinate di numeri reali

$$P_1(a_1, b_1)/P_2(a_2, b_2) = P_3(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b}{a_2^2 + b_2^2})$$

Esempio 10.1.4. Dato $z_1 = 1 + i$, determinarne l'opposto, il coniugato, l'opposto del coniugato e il coniugato dell'opposto, l'inverso e il quadrato. Dato inoltre $z_2 = -2 + 2i$ determinare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ e $\frac{z_1}{z_2}$.

$z_1 = 1 + i$
$-z_1 = -1 - i$
$\overline{z_1} = 1 - i$
$-\overline{z_1} = -(1 - i) = -1 + i$
$\overline{-z_1} = \overline{-1 - i} = -1 + i$
$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$
$z_1^2 = z_1 \cdot z_1 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$
$z_1 + z_2 = (1 + i) + (-2 + 2i) = -1 + 3i$
$z_1 - z_2 = (1 + i) - (-2 + 2i) = 3 - i$
$z_1 \cdot z_2 = (1 + i)(-2 + 2i) = -2 + 2i - 2i + 2i^2 = -4$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{-2+2i} = \frac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} = \frac{-2-2i-2i-2i^2}{8} = \frac{-4i}{8} = -\frac{1}{2} i$





Esempio 10.1.5. Calcolare le potenze intere dell'unità immaginaria.
Calcoliamo dapprima le potenze naturali:
$i^0 = 1$ (la convenzione usata in campo reale viene ereditata nei complessi)
$i^1 = i$ (come sopra)
$i^2 = -1$ (per definizione)
$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$ (osserviamo che $i^0 = i^4$)
$i^5 = i \cdot i^4 = i$ (osserviamo che $i^1 = i^5$)
è facile dimostrare che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha che

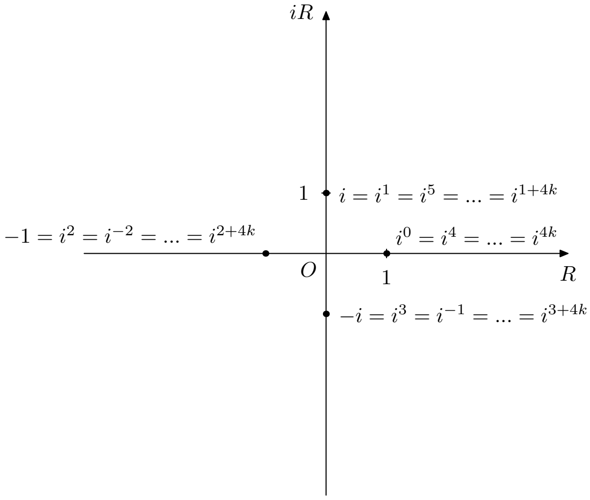
$$i^{4k} = 1$$

$$i^{1+4k} = i$$

$$i^{2+4k} = -1$$

$$i^{3+4k} = -i$$

Calcoliamo ora le potenze intere negative:
$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{i \cdot (-i)} = -i$ (osserviamo che $i^{-1} = i^3$)
$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1$ (osserviamo che $i^{-2} = i^2$)
$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i \cdot i} = i$ (osserviamo che $i^{-3} = i^1$)
è facile verificare che le formule precedenti valgono per ogni $k \in \mathbb{Z}$.



Esempio 10.1.6. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 + z + 1 = 0$.

Usiamo la formula risolutiva generale delle equazioni di secondo grado

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

il delta risulta negativo, pertanto l'equazione non ha soluzioni reali; avendo visto sopra che $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, appare superfluo il doppio segno posto davanti alla radice nella formula generale; dunque sarà sufficiente scrivere

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esempio 10.1.7. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ e rappresentare le soluzioni sul piano di Gauss.

Poniamo, come di consueto, $z^2 = t$ ottenendo:

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

che ha come soluzioni $t_1 = -4$ e $t_2 = 1$. Tornando alla variabile iniziale si ha:

$z^2 = -4 = 4 \cdot (-1)$ da cui

$$z_{1,2} = \pm 2i$$

$z^2 = 1$ da cui

$$z_{3,4} = \pm 1$$

Esempio 10.1.8. Semplificare in $\mathbb{C}$ l'espressione $\frac{1+i}{1-i} + (2-3i)^2 - (3-2i)(i-4)$

$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$

$(2-3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i$

$(3-2i)(i-4) = 3i - 12 - 2i^2 + 8i = -10 + 11i$

$\frac{1+i}{1-i} + (2-3i)^2 - (3-2i)(i-4) = i - 5 - 12i + 10 - 11i = 5 - 22i$

Esempio 10.1.9. Semplificare in $\mathbb{C}$ l'espressione $9 - 13i + \frac{3-5i}{i} + i^8 - (3-2i)^3$

$\frac{3-5i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-3i+5i^2}{i^2} = \frac{-5-3i}{-1} = 5 + 3i$

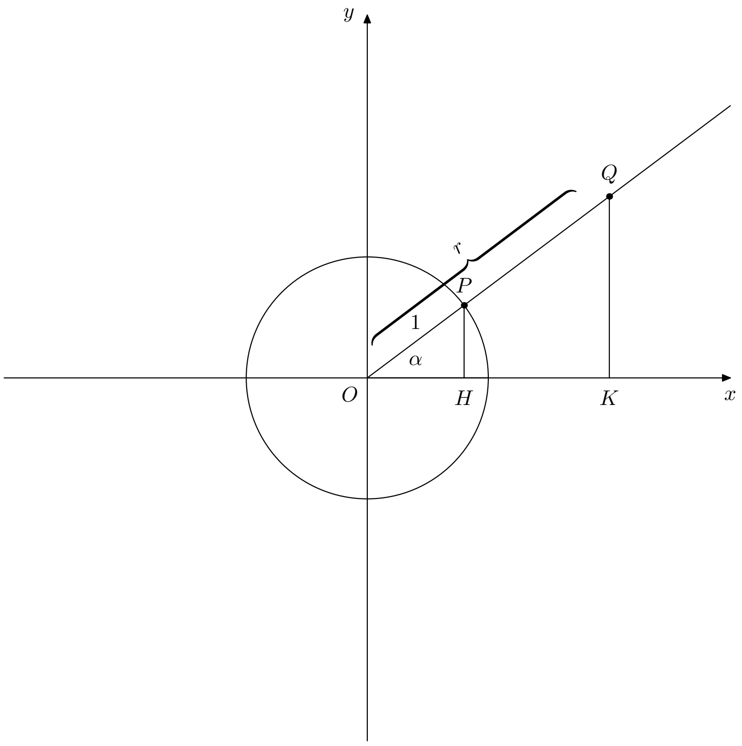
$i^8 = 1$

$(3-2i)^3 = 27 - 18i + 12i^2 - 8i^3 = 27 - 18i - 12 + 8i = 15 - 10i$

$9 - 13i + \frac{3-5i}{i} + i^8 - (3-2i)^3 = 9 - 13i + 5 + 3i + 1 - 15 + 10i = 0$

10.2 Forma trigonometrica ed esponenziale

Riferiamoci alla figura seguente:



il punto P appartiene alla circonferenza goniometrica e, pertanto, risulta

$$P(cos\alpha, sen\alpha)$$

i triangoli OHP e OKQ sono simili, essendo H e K rispettivamente le proiezioni di P e Q sull'asse delle ascisse, quindi hanno i lati corrispondenti in proporzione. Pertanto si ha

$$Q(rcos\alpha, rsen\alpha)$$

essendo r la misura del segmento OQ ovvero la distanza del punto Q dall'origine. Precedentemente le coordinate di Q erano state identificate con la coppia (a, b), da cui si deduce che sussistono le relazioni seguenti:

$$\begin{cases} a = rcos\alpha \\ b = rsen\alpha \end{cases}$$

Elevando al quadrato ciascuna delle uguaglianze e sommando membro a membro si ha $a^2 + b^2 = r^2(sen^2\alpha + cos^2\alpha) = r^2$ ed esplicitando $cos\alpha$ e $sen\alpha$ si ottiene

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \begin{cases} cos\alpha = \frac{a}{r} \\ sen\alpha = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Dividendo membro a membro le ultime 2 uguaglianze si ha $tg\alpha = \frac{b}{a}$ ed infine si ottengono le seguenti relazioni inverse

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ tg\alpha = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Osserviamo che nasce così una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri complessi e le coppie ordinate di $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ ossia le coordinate polari del punto associato al numero complesso:

$$\mathbb{C} \leftrightarrow [0, +\infty[\times [0, 2\pi[$$

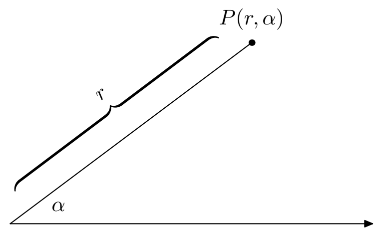
$$a + bi \leftrightarrow (r, \alpha)$$

La corrispondenza è in realtà generalmente biunivoca, poichè il numero complesso $0 + 0i = 0$ ha chiaramente $r = 0$ ma è indefinita α.

La prima coordinata polare r viene anche detta *modulo* e rappresenta la distanza del punto associato al numero complesso dall'origine del sistema di riferimento

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z - 0| = d(z, 0)$$

La seconda coordinata polare α viene anche detta *fase* o *anomalia* e rappresenta l'angolo formato dall'asse polare ovvero il semiasse positivo delle ascisse ovvero il semiasse reale positivo con il segmento congiungente il punto associato al numero complesso.



Esempio 10.2.1. Dati i punti di coordinate cartesiane $A(2, 0)$, $B(0, \frac{1}{2})$, $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D(-1, -1)$ determinarne le coordinate polari.

Esaminiamo il punto A:

$$\begin{cases} r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \\ tg\alpha = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Poichè A appartiene al semiasse positivo delle x si ha che $\alpha = 0$; quindi in coordinate polari $A(2, 0)$.

Esaminiamo il punto B:

$$\begin{cases} r = \sqrt{0^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \\ tg\alpha \text{ non esiste} \end{cases}$$

Poichè B appartiene al semiasse positivo delle y si ha che $\alpha = \frac{\pi}{2}$; quindi in coordinate polari $B(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Esaminiamo il punto C:

$$\begin{cases} r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1 \\ tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Poichè C appartiene al I quadrante si ha che $\alpha = \frac{\pi}{3}$; quindi in coordinate polari $C(1, \frac{\pi}{3})$.

Esaminiamo il punto D:

$$\begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ tg\alpha = 1 \end{cases}$$

Poichè D appartiene al III quadrante si ha che $\alpha = \frac{5}{4}\pi$; quindi in coordinate polari $D(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$.

Le formule di passaggio viste all'inizio

$$\begin{cases} a = rcos\alpha \\ b = rsen\alpha \end{cases}$$

ci permettono di scrivere il numero complesso in *forma trigonometrica*:

$$a + bi = rcos\alpha + irsen\alpha = r(cos\alpha + isen\alpha)$$

ed ancora, usando la formula di Eulero (la cui dimostrazione è rimandata per mancanza di basi teoriche),

$$e^{i\alpha} = cos\alpha + isen\alpha$$

possiamo scrivere il numero complesso anche in *forma esponenziale*:

$$a + bi = re^{i\alpha}$$

Le operazioni di moltiplicazione e divisione risultato particolarmente agevoli se eseguite in forma trigonometrica o esponenziale o, meglio ancora, usando le coordinate polari:

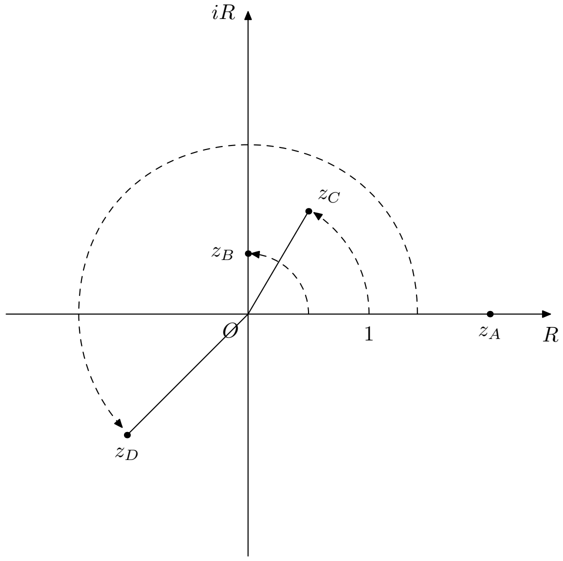
$$z_1 z_2 = r_1(cos\alpha_1 + isen\alpha_1) \cdot r_2(cos\alpha_2 + isen\alpha_2) = r_1 r_2(cos(\alpha_1 + \alpha_2) + isen(\alpha_1 + \alpha_2))$$
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\alpha_1} r_2 e^{i\alpha_2} = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$$
$$P_1(r_1, \alpha_1) P_2(r_2, \alpha_2) = Q(r_1 r_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\alpha_1 + isen\alpha_1)}{r_2(cos\alpha_2 + isen\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\alpha_1 - \alpha_2) + isen(\alpha_1 - \alpha_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\alpha_1}}{r_2 e^{i\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}$$
$$\frac{P_1(r_1, \alpha_1)}{P_2(r_2, \alpha_2)} = Q(\frac{r_1}{r_2}, \alpha_1 - \alpha_2)$$

La dimostrazione delle formule scritte sopra è riconducibile, nella forma esponenziale, ad un banale utilizzo delle proprietà delle potenze; nella forma trigonometrica ci si deve ricondurre all'uso, meno immediato, delle formule di addizione e sottrazione per il seno ed il coseno.

Esercizio 10.2.1. Dati i punti di coordinate cartesiane $A(2,0)$, $B(0, \frac{1}{2})$, $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D(-1,-1)$ determinarne le coordinate polari. Nell'esercizio precedente sono state determinate le coordinate polari dei punti dati in coordinate cartesiane $A(2,0)$, $B(0, \frac{1}{2})$, $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D(-1,-1)$; scrivere i numeri complessi associati a ciascuno di essi in forma algebrica, goniometrica ed esponenziale.

$$z_A = 2 + 0 \cdot i = 2(cos0 + isen0) = 2e^{i \cdot 0}$$
$$z_B = 0 + \frac{1}{2} \cdot i = \frac{1}{2}(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$
$$z_C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i = 1(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}) = 1e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$
$$z_D = -1 - 1 \cdot i = \sqrt{2}(cos\frac{5}{4}\pi + isen\frac{5}{4}\pi) = \sqrt{2} e^{i \cdot \frac{5}{4}\pi}$$



Esaminiamo ora le operazioni di elevamento a potenza e di estrazione di radice; essendo l'elevamento a potenza una operazione di moltiplicazione si ha:

$$z^n = [r(cos\alpha + isen\alpha)]^n = r^n(cosn \cdot \alpha + isenn \cdot \alpha)$$

$$z^n = [re^{i\alpha}]^n = r^n e^{i \cdot n \cdot \alpha}$$

Le formule, dette di De Moivre, sono valide per n intero (nel caso in cui n sia negativo o nullo, dovrà essere $z \neq 0$ e quindi $r \neq 0$).

L'operazione di estrazione di radice di un numero complesso va eseguita utilizzando le forme trigonometrica ed esponenziale nella formula di De Moivre come di seguito illustrato:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + isen(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n})), \quad k = 0..(n-1)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}}, \quad k = 0..(n-1)$$

cioè in forma estesa le n radici n-esime di z sono:

$$z_0 = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\alpha}{n} + isen\frac{\alpha}{n})$$

$$z_1 = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}) + isen(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}))$$

$$...$$

$$z_{n-1} = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\alpha}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}) + isen(\frac{\alpha}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}))$$

oppure, in forma esponenziale:

$$z_0 = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\alpha}{n}}$$

$$z_1 = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}}$$

$$...$$

$$z_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{(\frac{\alpha}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n})}$$

La dimostrazione discende direttamente dalle formule di De Moivre relative all'elevamento a potenza.

Esercizio 10.2.2. Determinare le radici quarte di $z = -1+i\sqrt{3}$ ossia risolvere l'equazione $z^4 = -1+i\sqrt{3}$.

Dapprima determiniamo z in forma trigonometrica, ottenendo $z = 2(cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3})$ ove risulta evidente che $r = 2$ e $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; pertanto si ha:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}(cos(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + k\frac{2\pi}{4}) + isen(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + k\frac{2\pi}{4})), \quad k = 0..3$$

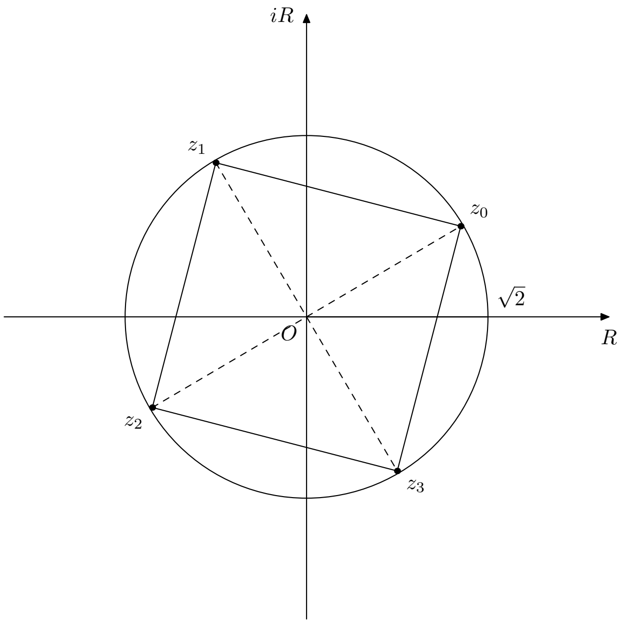
ovvero in forma estesa le radici richieste sono:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}(cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + isen\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}) = \sqrt[4]{2}(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(cos(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + \frac{2\pi}{4}) + isen(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + \frac{2\pi}{4})) = \sqrt[4]{2}(cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3})$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}(cos(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + 2\frac{2\pi}{4}) + isen(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + 2\frac{2\pi}{4})) = \sqrt[4]{2}(cos\frac{7\pi}{6} + isen\frac{7\pi}{6})$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}(cos(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + 3\frac{2\pi}{4}) + isen(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + 3\frac{2\pi}{4})) = \sqrt[4]{2}(cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3})$$



Esercizio 10.2.3. Risolvere le equazioni $z^3 = 1$, $z^3 = -1$, $z^6 = 1$.

Risolviamo la prima equazione

$$z^3 = 1$$

dapprima determiniamo 1 in forma trigonometrica, ottenendo $1 = cos0 + isen0$ ove risulta evidente che $r = 1$ e $\alpha = 0$; pertanto si ha:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}(cos(\frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3})), \quad k = 0..2$$

ovvero in forma estesa le radici richieste sono:

$$z_0 = \sqrt[3]{1}(cos0 + isen0) = 1$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1}(cos(0 + 2\frac{\pi}{3}) + isen(0 + 2\frac{\pi}{3})) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}(cos(0 + 4\frac{\pi}{3}) + isen(0 + 4\frac{\pi}{3})) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Risolviamo la seconda equazione

$$z^3 = -1$$

dapprima determiniamo -1 in forma trigonometrica, ottenendo $-1 = cos\pi + isen\pi$ ove risulta evidente che $r = 1$ e $\alpha = \pi$; pertanto si ha:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1}(cos(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3})), \quad k = 0..2$$

ovvero in forma estesa le radici richieste sono:

$$z_0 = \sqrt[3]{1}(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

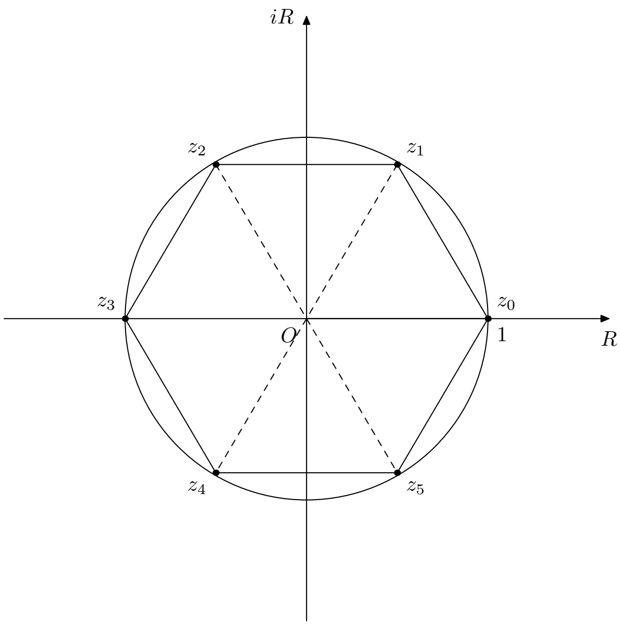
$$z_1 = \sqrt[3]{1}(cos(\frac{\pi}{3} + 2\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3} + 2\frac{\pi}{3})) = -1$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}(cos(\frac{\pi}{3} + 4\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3} + 4\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per risolvere la terza equazione notiamo che

$$z^6 - 1 = (z^3 + 1)(z^3 - 1)$$

e che, quindi, le sue soluzioni si ottengono unendo le soluzioni delle due equazioni precedenti.



Osservazione. Essendo anche $z^6 - 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)(z - 1)(z^2 + z + 1)$, si dimostra facilmente che il trinomio di secondo grado $z^2 - z + 1$ ammette le radici complesse coniugate z_1 e z_5 e il trinomio $z^2 + z + 1$ le soluzioni z_2 e z_4.

Esercizio 10.2.4. Determinare i numeri complessi z la cui distanza da $z_0 = 1 + i$ è uguale a 2.

Siano P e P_0 i punti associati rispettivamente a z e z_0; ricaviamo la distanza di z da z_0 ovvero di P da P_0 cioè

$$d(z, z_0) = d(P, P_0) = \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2}$$

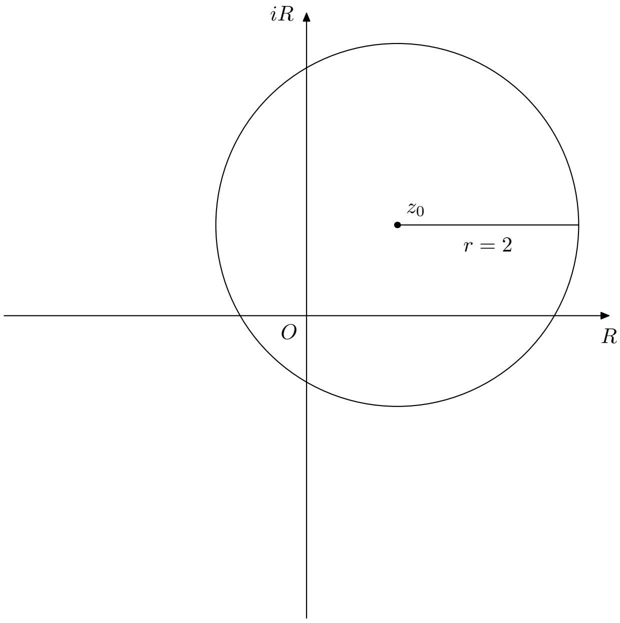
imponendo che tale distanza sia uguale a 2, risulta

$$\sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2} = 2$$

da cui

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = 4$$

che rappresenta l'equazione della circonferenza di centro z_0 e raggio 2.



Osservazione. Generalizziamo, quindi, la distanza di un numero complesso dall'origine (ossia il suo modulo) e scriviamo la distanza fra due numeri complessi qualsiasi:

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = |(a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i)| = |(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = d(P_1, P_2)$$

Parte IV

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Integrazione - Matematica 5 Statistica descrittiva
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

Settembre 2012

Dipartimento di Matematica
ITIS V.Volterra
San Donà di Piave