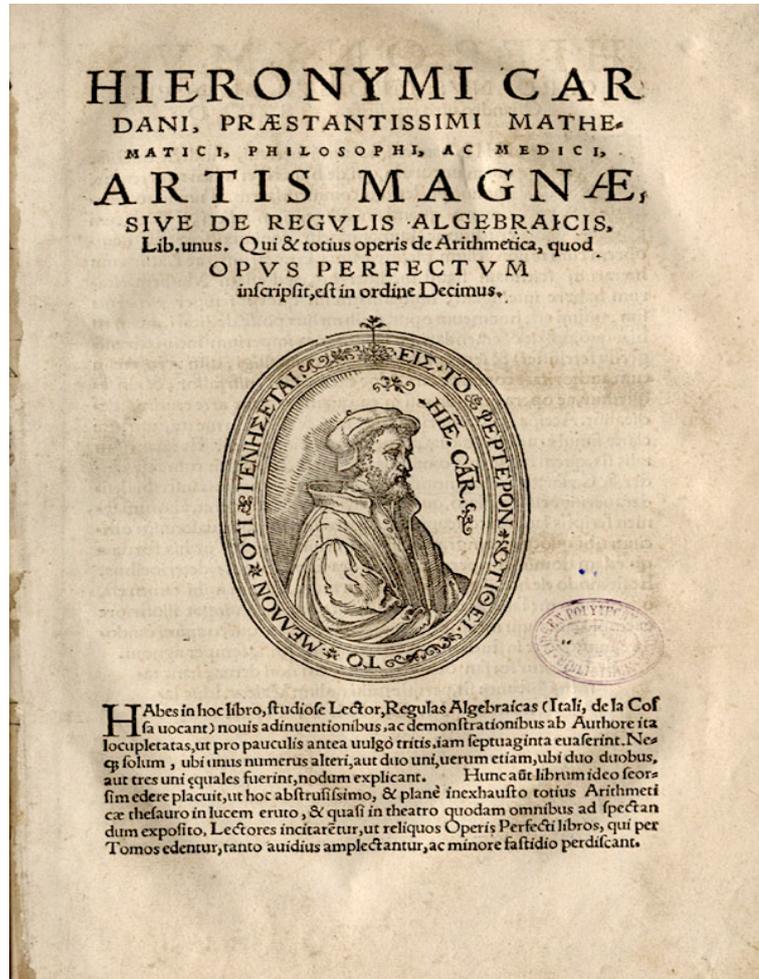


Matematica 2

Dipartimento di Matematica



ITIS V. Volterra
San Donà di Piave

Versione [12-13][S-All]



Indice

I	ALGEBRA	1
1	DISEQUAZIONI	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Disequazioni in una incognita	3
1.3	Sistemi di disequazioni	12
1.4	Equazioni e disequazioni con moduli	15
1.5	Esercizi riepilogativi	31
2	SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI	33
2.1	Introduzione	33
2.2	Sistemi lineari di due equazioni in due incognite	37
2.3	Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite	50
2.4	Problemi	51
2.5	Esercizi riepilogativi	54
3	I NUMERI REALI	56
4	RADICALI	58
4.1	Generalità	58
4.2	Semplificazione di un radicale	60
4.3	Moltiplicazione e divisione tra radicali	63
4.4	Trasporto di un fattore sotto radice	67
4.5	Trasporto di un fattore fuori di radice	69
4.6	Potenza di un radicale	71
4.7	Radice di un radicale	72
4.8	Addizione algebrica di radicali	74
4.9	Razionalizzazione del denominatore di una frazione	75
4.10	Radicali quadratici doppi	76
4.11	Potenze ad esponente razionale	77
4.12	Equazioni, disequazioni, sistemi a coefficienti irrazionali	78
4.13	Esercizi: operazioni in \mathbb{R}	81
4.14	Esercizi riepilogativi	83
5	Equazioni di secondo grado	89
5.1	Risoluzione di una equazione di secondo grado	89
5.2	Relazioni tra i coefficienti di un'equazione e le sue soluzioni	93
5.3	Scomposizione in fattori di un trinomio di secondo grado	94
5.4	Regola di Cartesio	95
5.5	Equazioni parametriche	96
5.6	Sistemi di secondo grado di due equazioni in due incognite	98

5.7	Problemi di secondo grado	100
5.8	Esercizi riepilogativi	102
6	Disequazioni di secondo grado	106
6.1	Introduzione	106
6.2	Risoluzione di una disequazione di secondo grado	108
6.3	Esercizi riepilogativi	113
7	Equazioni e disequazioni di grado superiore al secondo grado	116
7.1	Equazioni	116
7.2	Disequazioni	119
7.3	Esercizi riepilogativi	122
II	GEOMETRIA	123
8	La circonferenza	124
8.1	Prime definizioni e proprietà	124
8.2	Intersezioni di rette e circonferenze	130
8.3	Angoli al centro ed alla circonferenza	132
8.4	Il teorema delle tangenti	140
8.5	Intersezioni di circonferenze	146
9	Poligoni inscritti e circoscritti	148
9.1	Definizioni generali	148
9.2	Quadrilateri inscritti e circoscritti	149
10	Equiestensione di figure piane	155
10.1	Relazioni di equivalenza	155
10.2	Estensione di figure geometriche	156
10.3	Figure equiscomponibili	158
10.4	I teoremi di Euclide e di Pitagora	164
10.5	Due teoremi di Pappo	171
11	Misura di grandezze geometriche	172
11.1	Lunghezza di segmenti	172
11.2	Ampiezza di angoli	172
11.3	Area di superfici	173
11.4	Grandezze geometriche omogenee	173
11.5	Grandezze direttamente proporzionali	175
11.6	Il teorema di Talete	176
12	Similitudine	181
12.1	Prime definizioni e proprietà	181
12.2	I criteri di similitudine per i triangoli	183
12.3	Applicazioni della similitudine al triangolo rettangolo	187
12.4	Applicazioni della similitudine alla circonferenza	190
III	Contributi	195

Parte I

ALGEBRA

Capitolo 1

DISEQUAZIONI

1.1 Introduzione

Definizione 1.1.1. Si dice *disequazione* una disuguaglianza tra due espressioni algebriche.

Dette A e B le due espressioni algebriche, la disequazione si presenterà nella forma:

$$A < B \quad \text{oppure} \quad A > B$$

E' consuetudine considerare disequazioni anche le relazioni: $A \leq B$ e $A \geq B$ che consentono l'uguaglianza dei due membri.

Sono esempi di disequazioni:

$$\begin{aligned} 5x - 2 &< 3x + 4 \\ \frac{x - 1}{x} &> \frac{2}{3} \\ 2x - \frac{1}{2}y &\leq 3x + 1 \end{aligned}$$

Analogamente a quanto detto in relazione alle equazioni, assumiamo che:

(a) un numero (coppia, terna ... di numeri) si dice *soluzione* di una disequazione se, sostituito nei due membri, rende vera la disuguaglianza.

Il lettore volenteroso verifichi quali dei seguenti numeri sono soluzione delle prime due disequazioni dell'esempio:

$$1, \frac{7}{2}, 3, 100, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

e quali delle seguenti coppie sono soluzione della terza disequazione:

$$(0, 0), (-3, 2), (3, -8), \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$$

E' opportuno sottolineare che il numero 3 è soluzione della prima disequazione (la verifica porta a $13 \leq 13$), ma non della seconda (la verifica porta a $\frac{2}{3} > \frac{2}{3}$) in quanto solo la prima disequazione contempla l'uguaglianza dei due membri.

(b) Risolvere una disequazione significa determinare l'insieme di tutte le sue soluzioni.

(c) Con riferimento alla sua forma algebrica una disequazione potrà essere intera o fratta.

(d) Con riferimento alle lettere presenti potrà essere numerica o letterale.

(e) Due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

1.2 Disequazioni in una incognita

Il metodo per risolvere una disequazione, analogamente a quanto visto con le equazioni, consiste nel trasformarla in una ad essa equivalente della quale sia immediato determinare le soluzioni. A questo scopo si usano i *principi di equivalenza delle disequazioni*:

Teorema 1.2.1 (Primo principio di equivalenza). *Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di una disequazione una stessa espressione algebrica (purchè esista per gli stessi valori per i quali esistono i due membri) si ottiene una disequazione equivalente a quella iniziale.*

Questo teorema ha come conseguenze pratiche il *principio del trasporto* e quello di *cancellazione*.

Teorema 1.2.2 (Secondo principio di equivalenza). *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per una stessa espressione algebrica non nulla (purchè esista per gli stessi valori per i quali esistono i due membri) si ottiene una disequazione equivalente a quella iniziale, ma con verso cambiato se la quantità è negativa.*

La necessità di cambiare il verso della disequazione nel caso si moltiplichi o si divida per una quantità negativa, risulta evidente applicando il secondo principio, per esempio, alla relazione $5 < 7$; se moltiplichiamo i due membri per -2 è scorretto, mantenendo il verso, scrivere $-10 < -14$, la disuguaglianza corretta è invece $-10 > -14$.

Disequazioni intere

In questo paragrafo proponiamo la risoluzione, mediante alcuni esempi, di disequazioni intere.

Esempio 1.2.1.

$$(x - 1)^2 + 5x < x^2 - 3$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + 5x < \cancel{x^2} - 3$$

$$3x + 1 < -3$$

$$3x < -4$$

$$x < -\frac{4}{3}$$

E' evidente che la disequazione finale e, quindi, quella di partenza, ha come insieme di soluzioni $S = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x < -\frac{4}{3} \right\}$ e pertanto essa ha infinite soluzioni.

Esempio 1.2.2.

$$\frac{2x - 3}{2} \geq 1 - \frac{x + 3}{10} \quad m.c.d. = 10$$

$$10x - 15 \geq 10 - x - 3$$

$$10x - 15 \geq -x + 7$$

$$11x \geq 22$$

$$x \geq 2$$

(spesso si tralascia la scrittura insiemistica)

Esempio 1.2.3.

$$(2x - 1)^3 + 2 > 2x(2x + 1)(2x - 1) - 3(3 - 2x)^2$$

$$\cancel{8x^3} - \cancel{12x^2} + 6x - 1 + 2 > \cancel{8x^3} - 2x - 27 + 36x - \cancel{12x^2}$$

$$6x + 1 > 34x - 27$$

$$-28x > -28$$

$$x < 1$$

(Ricorda: il verso è cambiato perchè abbiamo diviso per una quantità negativa).

Anche con le disequazioni è possibile isolare l'incognita in modo che il suo coefficiente risulti positivo, trasportandola nel membro più opportuno. Con riferimento all'ultimo esempio da $6x + 1 > 34x - 27$ avremmo potuto ricavare, eseguendo mentalmente i calcoli e leggendo la relazione da destra a sinistra, $28x < 28$ da cui $x < 1$.

Esempio 1.2.4.

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right) < \frac{x + 3}{6}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} < \frac{x + 3}{6} \quad \text{m.c.d.}=6$$

$$3x - 2x < x + 3$$

$$x < x + 3$$

$$0 < 3$$

La disequazione ottenuta, e quindi quella iniziale, è verificata qualsiasi sia il valore assegnato all'incognita (la relazione ottenuta non dipende infatti da x). L'insieme delle sue soluzioni è dunque:

$$S = \mathbb{Q} \quad \text{spesso sintetizzato con la scrittura } \forall x$$

Facciamo notare che se la disequazione avesse avuto verso opposto la relazione finale $0 > 3$ sarebbe risultata impossibile pertanto la disequazione non avrebbe avuto soluzioni ossia $S = \emptyset$.

Esempio 1.2.5.

$$2(x - 2)^2 + 5x + 3x(1 - x) > (x + 4)(4 - x) - 8$$

$$2x^2 - 8x + 8 + 5x + 3x - 3x^2 > -x^2 + 16 - 8$$

$$-x^2 + 8 > -x^2 + 8$$

$$0 > 0$$

La disequazione ottenuta, e quindi quella iniziale, è impossibile in quanto non è mai verificata (anche in questo caso la relazione è indipendente da x).

L'insieme delle soluzioni è pertanto $S = \emptyset$ spesso sintetizzato con la scrittura $\nexists x$.

Osservazione. Se nell'ultimo esempio ci fosse stato \geq anzichè $>$ avremmo ottenuto $0 \geq 0$ che è sempre verificata ($\forall x$) in quanto è unione di due relazioni: $0 > 0$ e $0 = 0$ (quest'ultima sempre verificata)

Esempio 1.2.6.

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{1}{4}\right) \left(y + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16} - y &\geq \left(y - \frac{1}{5}\right) \left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{10} \\ y^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - y &\geq y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{5}y - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ -10y &\geq 5y - 2y \\ 13y &\leq 0 \\ y &\leq 0 \end{aligned}$$

Esercizio 1.2.1.

$$\begin{aligned} 3 - 2x < 1; \quad 7 - 3x < 2 + 5x; \quad (x - 1)^2 + (x - 3)^2 \leq 2(x + 1)^2 + 3; \quad (x - 1)^2 - (2x + 1)^2 \leq 2 - 3x(x + 2) \\ \frac{1}{3}x - \frac{5}{6} > \frac{5}{24} \left(\frac{48}{5}x - 24\right); \quad \frac{5x - 1}{6} - \frac{3x - 1}{2} > \frac{x - 1}{4}; \quad \frac{1}{2}x - 1 - \frac{2 - x}{3} > \frac{5x - 1}{6} \end{aligned}$$

Alle disequazioni intere è naturale estendere la definizione di forma normale e quella di grado date per le equazioni. Gli esempi sinora svolti si riferivano a disequazioni intere di primo grado.

Risolvere disequazioni intere di grado superiore una volta che sono state portate a forma normale (cioè del tipo $P(x) \leq 0$ oppure $P(x) \geq 0$) equivale a determinare per quali valori dell'incognita il polinomio $P(x)$ è positivo, negativo o nullo, il che significa studiare il *segno* di $P(x)$. Per fare questo è sufficiente scomporre il polinomio in fattori e, confrontando i segni di questi ultimi, applicare le regole sul segno di un prodotto.

Per chiarire la procedura descritta procediamo ora con un esempio nel quale verrà illustrato il metodo operativo per eseguirla.

Esempio 1.2.7.

$$x^2 + x \geq 3 - x$$

portiamo la disequazione a forma normale:

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

scomponiamo in fattori il polinomio:

$$(x + 3)(x - 1) \geq 0$$

Per studiare il segno dei fattori conveniamo di determinare i valori dell'incognita che li rendono positivi o nulli (≥ 0); in tal modo si ricavano anche i valori, complementari dei precedenti, che li rendono negativi. Pertanto:

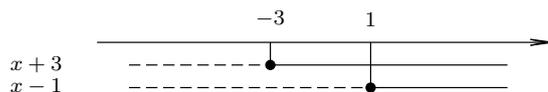
primo fattore:

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

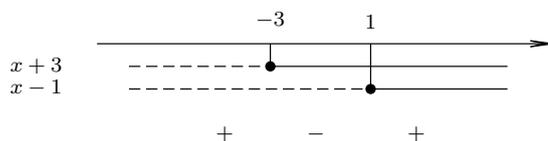
secondo fattore:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

Per confrontare i segni dei fattori si ricorre ad una rappresentazione grafica detta *Grafico di segno*. Essa consiste nel tracciare, con riferimento ad un sistema di ascisse, per ogni fattore una linea orizzontale continua in corrispondenza dei valori per i quali il fattore è positivo, tratteggiata dove esso è negativo; indichiamo inoltre con un pallino pieno il valore che annulla il fattore. Applicando quanto descritto all'esempio, otteniamo:



Nel grafico di segno si individuano 3 'zone' (prima di -3 , tra -3 e 1 , dopo di 1) in ciascuna delle quali, applicando le regole sul segno del prodotto, possiamo stabilire il segno del polinomio della forma normale che conveniamo di riassumere con i simboli $+$ oppure $-$ collocandoli sotto ad ogni zona alla quale si riferiscono. Il grafico di segno nella sua forma definitiva diventa:



Possiamo pertanto stabilire che il polinomio è:

positivo per $x < -3$ oppure $x > 1$

negativo per $-3 < x < 1$

nullo per $x = -3$ oppure $x = 1$

Nella disequazione ridotta a forma normale veniva richiesto di individuare i valori che rendevano positivo o nullo il polinomio. Possiamo dunque concludere che la soluzione della disequazione è

$$x \leq -3 \vee x \geq 1$$

Osservazione. Qualora la disequazione precedente in forma normale fosse stata una delle seguenti:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

è evidente che il metodo risolutivo sarebbe rimasto il medesimo, ma sarebbero cambiate ovviamente le soluzioni dedotte dal grafico di segno. Avremmo infatti ottenuto rispettivamente:

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$-3 < x < 1$$

$$x < -3 \vee x > 1$$

Il procedimento per risolvere una disequazione intera di grado maggiore di 1 può essere così riassunto:

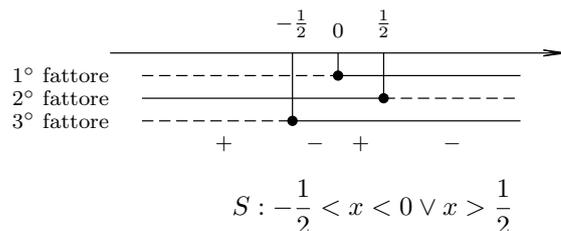
1. riduzione della disequazione a forma normale
2. scomposizione in fattori del polinomio ottenuto
3. studio del segno di ogni fattore
4. rappresentazione dei segni dei fattori nel grafico di segno
5. lettura delle soluzioni.

Esempio 1.2.8.

$$x - 4x^3 < 0$$

$$x(1 - 4x^2) < 0$$

$$x(1 - 2x)(1 + 2x) < 0$$

1° fattore: $x \geq 0$ 2° fattore: $1 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$ 3° fattore: $1 + 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ **Esempio 1.2.9.**

$$x^4 + 3x(x - 2) > 1 + 2x(x - 1) + x^2 - 4x$$

$$x^4 + 3x^2 - 6x > 1 + 2x^2 - 2x + x^2 - 4x$$

$$x^4 + \cancel{3x^2} - \cancel{6x} > \cancel{3x^2} - \cancel{6x} + 1$$

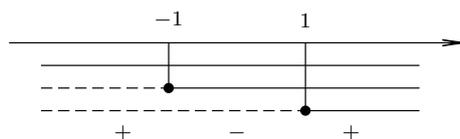
$$x^4 - 1 > 0$$

$$(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) > 0$$

studiamo il segno dei fattori senza enumerarli

 $x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow \forall x$ in quanto il valore minimo di questa somma è 1 $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

é prassi consolidata non indicare il fattore al quale si riferisce la linea di segno.



$$S : x < -1 \vee x > 1$$

Osservazione. Il fattore $x^2 + 1$, in quanto sempre positivo, avrebbe potuto essere trascurato perchè non influenza il segno del polinomio, oppure semplificato applicando il secondo principio di equivalenza.

Esempio 1.2.10.

$$27x^4 - 2 \leq x(54x^2 - 1)$$

$$27x^4 - 2 \leq 54x^3 - x$$

$$27x^4 - 54x^3 + x - 2 \leq 0$$

$$27x^3(x - 2) + 1(x - 2) \leq 0$$

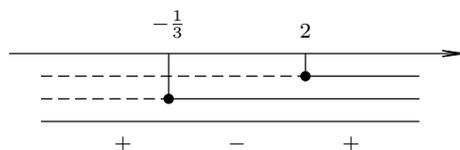
$$(x - 2)(27x^3 + 1) \leq 0$$

$$(x - 2)(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) \leq 0$$

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

$9x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow \forall x$ (la dimostrazione che i 'falsi quadrati' sono sempre positivi, verrà data nei prossimi capitoli)



$$S : -\frac{1}{3} \leq x \leq 2$$

Osservazione. I falsi quadrati e le somme di quantità positive (vedi ultimi due esempi) in quanto positivi per ogni valore della x , volendo, possono essere trascurati.

Esempio 1.2.11.

$$(25x^2 - 10x + 1)(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) > 0$$

$$(5x - 1)^2(x + 2)^3 > 0$$

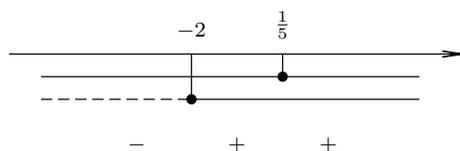
Per studiare il segno di questi fattori è sufficiente ricordare che le potenze con esponente pari non sono mai negative mentre quelle con esponente dispari mantengono il segno della base, pertanto:

$$(5x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$$

pur essendo formalmente corretta, questa scrittura non è del tutto esauriente perchè non esplicita il valore che annulla il fattore. Scegliamo allora di indicare tale valore tra parentesi per poter rappresentare in modo completo il segno del fattore nel grafico; scriviamo pertanto:

$$(5x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \text{ (si annulla per } x = \frac{1}{5}\text{)}$$

$$(x + 2)^3 \geq 0 \Rightarrow x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$



$$S : x > -2 \wedge x \neq \frac{1}{5} \quad \text{che si può anche scrivere} \quad -2 < x < \frac{1}{5} \vee x > \frac{1}{5}$$

Esempio 1.2.12.

$$(2x^5 - x^4)(3 - x)^5(x - 2)^2 \geq 0$$

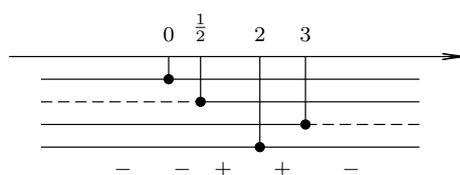
$$x^4(2x - 1)(3 - x)^5(x - 2)^2 \geq 0$$

$$x^4 \geq 0 \Rightarrow \forall x \text{ (si annulla per } x = 0\text{)}$$

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$(3 - x)^5 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$(x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \text{ (si annulla per } x = 2\text{)}$$



$$S : x = 0 \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

Esempio 1.2.13.

$$(x - 2)(x - 1) \geq 1 - x$$

$$x^2 - \cancel{x} - 2x + 2 \geq 1 - \cancel{x}$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow S : \forall x$$

Non serve esplicitare il valore che annulla il fattore perchè, per determinare la soluzione, non è necessaria la rappresentazione grafica.

Si invita a prendere visione con attenzione del prossimo esempio nel quale ogni disequazione è ricondotta allo studio della potenza di un unico fattore:

Esempio 1.2.14.

$$(2x + 1)^2 > 0 \Rightarrow S : \forall x \neq -\frac{1}{2}$$

$$(3x - 5)^5 \leq 0 \Rightarrow S : x \leq \frac{5}{3}$$

$$(x - 3)^4 < 0 \Rightarrow S : \cancel{\forall} x$$

$$(2 - 7x)^3 > 0 \Rightarrow S : x < \frac{2}{7}$$

$$(2 - x)^2 \leq 0 \Rightarrow S : x = 2$$

$$x^4 \geq 0 \Rightarrow S : \forall x$$

Esercizio 1.2.2.

$$(9x^2 - 25)(6 - 2x) \geq 0; \quad -x(x - 2)(x + 1) > 0; \quad x^2 - 7x + 10 < 0; \quad (x^2 + x - 6)(x^2 - x - 6) > 0$$

$$(x + 1)^3(x - 1)^2 > 0; \quad x^2(1 - x)^2(2 - x)^5 \leq 0; \quad x^2(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) \leq 0; \quad (2x - 1)^2 \leq 0$$

$$(5 - 3x)^4 > 0; \quad (1 - 3x)^3 \geq 0; \quad (6x + 13)^6 < 0; \quad x^3 + 8 > 0; \quad x^4 \geq 81; \quad 1 \leq x^6$$

$$2x \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right] \geq 0; \quad 1 - 2x + 3(2x - 1)^2 < 0; \quad 2x^3 - x^2 - 7x + 6 > 0$$

Disequazioni fratte

Ogni disequazione fratta, mediante il primo principio e i calcoli algebrici, può essere portata ad una delle forme:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

E' opportuno far notare che $B(x)$ non può essere semplificato, come accadeva con le equazioni, in quanto anch'esso influisce sul segno della frazione.

Risulta evidente che la risoluzione di una disequazione fratta è riconducibile alla determinazione del segno di una frazione e, poichè le regole sul segno di un quoziente sono le stesse relative al segno di un prodotto, possiamo utilizzare la stessa procedura descritta per le disequazioni di grado superiore al primo.

Possiamo così schematizzare:

1. riduzione della disequazione fratta ad una delle forme:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

2. scomposizione in fattori di $A(x)$ e $B(x)$.

3. studio del segno dei fattori ricordando che i fattori a denominatore non possono annullarsi perchè, se ciò accadesse, la frazione perderebbe di significato.

4. realizzazione del grafico di segno.

5. lettura delle soluzioni.

A questo punto procediamo con alcuni esempi chiarificatori.

Esempio 1.2.15.

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{2x - 3x^2} \leq 0$$

la disequazione si presenta già nella forma $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$

Scomponendo in fattori:

$$\frac{(x-6)(x-1)}{x(2-3x)} \leq 0 \quad C.E. \ x \neq 0; x \neq \frac{2}{3}$$

$$x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$$

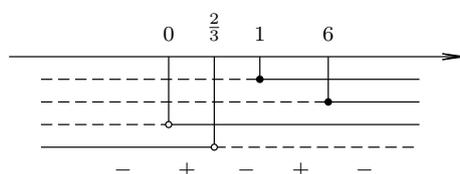
$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$x > 0$$

$$2 - 3x > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

ogni fattore al denominatore deve essere posto > 0 e non ≥ 0 in quanto non può annullarsi. In tal modo vengono ribadite le C.E. che pertanto potrebbero essere omesse perchè già esplicite nello studio del segno di tali fattori.

Sulla riga di segno di ciascun fattore a denominatore conveniamo di indicare con un pallino vuoto i valori che lo annullano in quanto sono da escludere (nel nostro caso 0 e $\frac{2}{3}$).



$$S : x < 0 \vee \frac{2}{3} < x \leq 1 \vee x \geq 6$$

Esempio 1.2.16.

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10} < 0$$

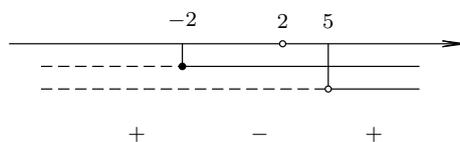
$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-5)(x-2)} < 0 \quad C.E. \ x \neq 2; x \neq 5$$

$$\frac{(x+2)}{(x-5)} < 0$$

Osservazione (importante). La condizione $x \neq 5$, formalmente corretta, è dal punto di vista pratico, contenuta nello studio del segno di $x - 5$ e quindi avremmo potuto ometterla. (D'ora in poi condizioni di questo tipo non verranno più esplicitate). Diversamente la condizione $x \neq 2$ è indispensabile in quanto il fattore $x - 2$ non compare più nella frazione ottenuta. Nel grafico di segno conveniamo di indicare tale C.E. indispensabile con un pallino vuoto in corrispondenza del 2 sul sistema di ascisse di riferimento.

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$$



$$S : -2 < x < 5 \wedge x \neq 2 \quad \text{che si può anche scrivere} \quad S : -2 < x < 2 \vee 2 < x < 5$$

Esempio 1.2.17.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} > \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x-1} > 0$$

$$\frac{2x - 2 + x^2 - x - 2x}{2x(x-1)} > 0$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)} > 0$$

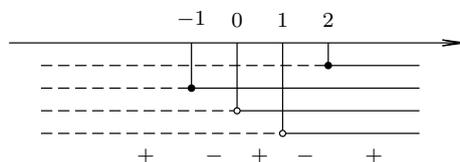
$$\frac{(x-2)(x+1)}{2x(x-1)} > 0$$

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$x > 0$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$



$$S : x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee x > 2$$

Esempio 1.2.18.

$$\frac{1}{x} \leq \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\frac{1}{x} \leq -\frac{x}{(x-1)^2} \leq 0$$

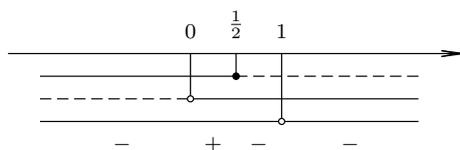
$$\frac{x^2 - 2x + 1 - x^2}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$$\frac{-2x + 1}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$$-2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$x > 0$$

$$(x-1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \neq 1$$



$$S : x < 0 \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \vee x > 1 \quad \text{si può anche scrivere} \quad x < 0 \vee (x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 1)$$

Esercizio 1.2.3.

$$\frac{3x-1}{x-3} \geq 0; \quad \frac{(1-x)(x^2+4)}{3+2x} \geq 0; \quad \frac{(x-1)^3}{2(2x-5)} < 0; \quad \frac{4x^2-1}{x-1} \leq 0; \quad \frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6} \geq 0$$

$$\frac{5}{4-x^2} + \frac{x}{x+2} \leq 1; \quad \frac{3}{x} - \frac{x-1}{2-x} \leq \frac{x+1}{x-2}; \quad \frac{2}{x-3} - \frac{2x-5}{x^2-9} \geq 0; \quad \frac{2x^3-x^2-6x}{6x-8-x^2} \geq 0$$

1.3 Sistemi di disequazioni

Definizione 1.3.1. Si dice *sistema* di disequazioni un insieme di disequazioni.

E' pertanto un sistema di disequazioni il seguente:

$$\left\{ (x+1)^2 - 5 < x^2 + 4, 3x + \frac{1}{2} > 0, 4x + 5 \geq 7 \right\}$$

che è consuetudine indicare in modo più chiaro:

$$\begin{cases} (x+1)^2 - 5 < x^2 + 4 \\ 3x + \frac{1}{2} > 0 \\ 4x + 5 \geq 7 \end{cases}$$

Definizione 1.3.2. Una soluzione di un sistema di disequazioni è un valore che è soluzione di tutte le disequazioni che lo compongono.

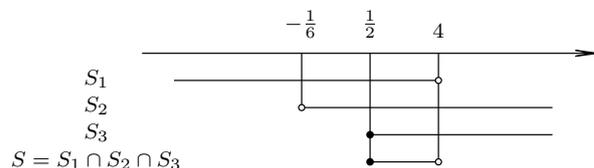
Per risolvere un sistema, cioè determinare l'insieme di tutte le sue soluzioni, è sufficiente individuare l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di tutte le disequazioni componenti; pertanto risolta singolarmente ogni disequazione, si determina l'intersezione delle soluzioni come studiato nel corso del primo anno (matematica 1 capitolo 2 paragrafo 4.1).

Il grafico che viene usato allo scopo viene chiamato grafico di intersezione o di sistema; con riferimento al sistema iniziale, procediamo come segue:

$$\text{prima disequazione: } x^2 + 2x + 1 - 5 < x^2 + 4 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow S_1 : x < 4$$

$$\text{seconda disequazione: } 3x > -\frac{1}{2} \Rightarrow S_2 : x > -\frac{1}{6}$$

$$\text{terza disequazione: } 4x \geq 2 \Rightarrow S_3 : x \geq \frac{1}{2}$$



$$S : \frac{1}{2} \leq x < 4$$

Nei prossimi esempi non indicheremo più i nomi degli insiemi soluzione nel grafico di intersezione e non rappresenteremo la linea che indica l'intersezione delle soluzioni scrivendole direttamente osservando il grafico.

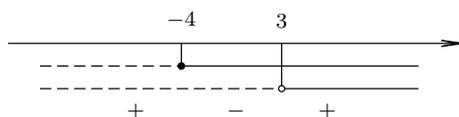
Esempio 1.3.1.

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x-3} \leq 1 \\ (x-2)^2 - 4(x+1) > x^2 + 16 \end{cases}$$

prima disequazione:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-3} - 1 &\leq 0 \\ \frac{2x+1-x+3}{x-3} &\leq 0 \\ \frac{x+4}{x-3} &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+4 \geq 0 &\Rightarrow x \geq -4 \\ x-3 > 0 &\Rightarrow x > 3 \end{aligned}$$

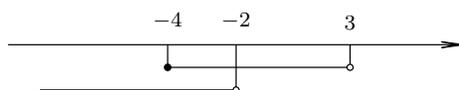


$$S_1 : -4 \leq x < 3$$

seconda disequazione:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 - 4x &> x^2 + 16 \\ -8x &> 16 \\ S_2 : x &< -2 \end{aligned}$$

intersechiamo le soluzioni:



$$S : -4 \leq x < -2$$

Esempio 1.3.2.

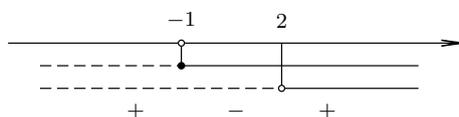
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-2} + \frac{2}{x^2-x-2} \geq \frac{2x}{(1+x)(2-x)} \\ x^2 - 6x + 9 > 0 \\ \frac{1}{x} \geq -1 \end{cases}$$

prima disequazione:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1 + 2 + 2x}{(x-2)(x+1)} &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-2)(x+1)} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x-2)(x+1)} \geq 0 \quad C.E. x \neq -1$$

$$\begin{aligned} x+1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq -1 \\ x-2 > 0 &\Rightarrow x > 2 \end{aligned}$$



$$S_1 : x < -1 \vee x > 2$$

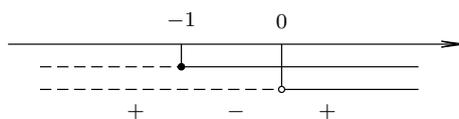
seconda disequazione:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &> 0 \\ S_2 : \forall x &\neq 3 \end{aligned}$$

terza disequazione:

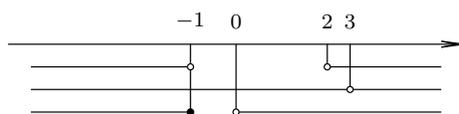
$$\frac{1+x}{x} \geq 0$$

$$\begin{aligned} 1+x \geq 0 &\Rightarrow x \geq -1 \\ x > 0 & \end{aligned}$$



$$S_3 : x \leq -1 \vee x > 0$$

intersechiamo le soluzioni:



$$S : x < -1 \vee (x > 2 \wedge x \neq 3)$$

Esercizio 1.3.1.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x - 3 \geq 0 \\ x + 2 < 0 \\ -7x - 3 \leq 0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{x-3}{2} + \frac{2-x}{4} \leq \frac{x-1}{8} \\ \frac{x-3}{2} < x + \frac{2x}{3} \end{cases} ; \begin{cases} \frac{6x-15}{2-x} \leq 0 \\ \frac{2-8x}{2x+8} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0 \\ x - 2 \leq \frac{1}{3}x - 4 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{x+3}{x+1} \geq 2 \\ \frac{x-1}{(x^2-4)(x+2)} < 0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{x+3}{x-3} - \frac{x+1}{2x-6} > \frac{1}{2} \\ \frac{x+1}{x^2-6x+9} \geq 0 \\ -6x^2 \leq 0 \end{cases}$$

1.4 Equazioni e disequazioni con moduli

E' possibile estendere la definizione di modulo di un numero, data nel primo volume, ad una espressione algebrica nel modo seguente:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases} \quad 1$$

$A(x)$ viene detto *argomento* del modulo.

Proponiamo i seguenti esempi chiarificatori:

$$|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } 2x - 5 \geq 0 \text{ ossia } x \geq \frac{5}{2} \\ -(2x - 5) & \text{se } 2x - 5 < 0 \text{ ossia } x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$|3 - 4x| = \begin{cases} 3 - 4x & \text{se } x \leq \frac{3}{4} \\ -3 + 4x & \text{se } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$|x^2 + 1| = x^2 + 1$ abbiamo un solo caso in quanto $A(x)$ non è mai negativo.

Osservazione. Dalla definizione risulta evidente che un modulo è una quantità non negativa qualunque sia il valore della variabile (ovviamente purchè esista l'argomento).

Per semplificare un'espressione contenente delle quantità in modulo è opportuno trasformarla in una scrittura equivalente costituita dall'unione di altre espressioni senza moduli. Il caso più semplice in cui è presente un unico modulo, poichè esso può dare origine a due casi, si può ridurre all'unione di due espressioni non contenenti moduli come illustrato nel prossimo esempio

Esempio 1.4.1. Dopo aver semplificato l'espressione $E(x) = |x - 2| + x - 5$, calcolarne il valore per $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

Poichè

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

l'espressione è equivalente a:

$$E(x) = \begin{cases} E_1(x) = x - 2 + x - 5 = 2x - 7 & \text{se } x \geq 2 \\ E_2(x) = -x + 2 + x - 5 = -3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$E(0) = E_2(0) = -3 \text{ essendo } 0 < 2$$

$$E(2) = E_1(2) = E_2(2) = -3 \text{ essendo } 2 \text{ il valore che annulla l'argomento del modulo}$$

$$E(3) = E_1(3) = -1 \text{ essendo } 3 \geq 2$$

E' facile comprendere che più sono i moduli presenti nell'espressione, maggiore è il numero delle 'sottoespressioni' la cui unione equivale all'espressione iniziale. Per la loro determinazione si ricorre ad un opportuno grafico in cui vengono rappresentati i segni degli argomenti dei moduli.

¹ si potrebbe anche scrivere $A(x) \leq 0$ in quanto se $A(x) = 0$ allora $-A(x) = A(x) = 0$

Illustriamo il procedimento mediante il seguente esempio:

Esempio 1.4.2.

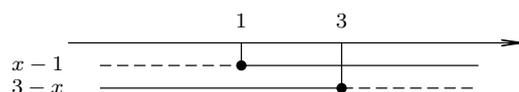
$$E(x) = |x - 1| + 3x - |3 - x| + 1$$

Segno degli argomenti dei moduli:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

La rappresentazione dei segni riportata nel seguente grafico:



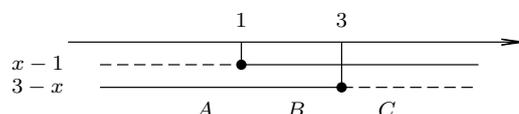
consente di individuare 3 casi possibili e quindi di trasformare $E(x)$ nell'unione di 3 espressioni:

$$E(x) = \begin{cases} E_1(x) = -x + 1 + 3x - (-x + 3) + 1 = 3x - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ E_2(x) = x - 1 + 3x - (-x + 3) + 1 = 5x - 3 & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ E_3(x) = x - 1 + 3x - (x - 3) + 1 = 3x + 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Osservazione. Il grafico utilizzato per il confronto dei segni degli argomenti dei moduli, non va confuso con il grafico di segno delle disequazioni, pur avendo la stessa struttura.

Per evitare ambiguità, ma non solo per questo, (come vedremo più avanti) è spesso utile contrassegnare ogni zona di tale grafico con una etichetta (solitamente le prime lettere dell'alfabeto).

In tal modo, con riferimento all'esempio precedente, il grafico assumerà questa forma:



Quanto visto per le espressioni contenenti moduli si estende in modo naturale alle equazioni e disequazioni con moduli. Quindi ogni equazione e disequazione di tal genere verrà trasformata nell'unione di più equazioni e disequazioni come viene chiarito qui di seguito.

Equazioni

Illustriamo il procedimento da usare per la risoluzione di equazioni con moduli mediante gli esempi che seguono:

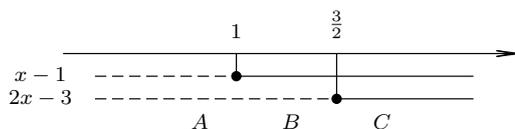
Esempio 1.4.3.

$$|x - 1| = 4 - |2x - 3|$$

Studiamo e rappresentiamo il segno degli argomenti dei moduli:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$



Analizziamo ogni sottocaso risolvendo l'equazione che per esso si ottiene ricorrendo ad un sistema, detto *sistema misto*, contenente una condizione, che esplicita il sottocaso, ed una equazione.

$$\text{A: } \begin{cases} x \leq 1 \\ -x + 1 = 4 - (-2x + 3) \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ -x + 1 = 4 + 2x - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{è accettabile in quanto soddisfa la condizione } x \leq 1$$

$$\text{B: } \begin{cases} 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ x - 1 = 4 - (-2x + 3) \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ x - 1 = 4 + 2x - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{non accettabile}$$

$$\text{C: } \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x - 1 = 4 - (2x - 3) \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x - 1 = 4 - 2x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x = \frac{8}{3} \end{cases} \quad \text{accettabile}$$

L'insieme soluzione dell'equazione iniziale è l'unione delle soluzioni ottenute nei tre sottocasi svolti; dunque:

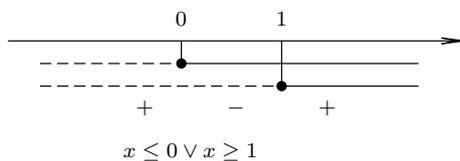
$$S = \left\{ 0, \frac{8}{3} \right\} \quad \text{si può anche scrivere } S : x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$$

Esempio 1.4.4.

$$|x^2 - x| - 2 = |x - 2|$$

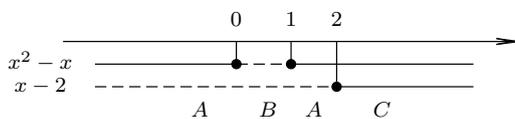
Segno degli argomenti:

$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x - 1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0; x \geq 1$$



$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

Rappresentazione del segno degli argomenti:



$$\text{A: } \begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2 \\ x^2 - \cancel{x} - 2 = \cancel{x} + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2 \\ (x + 2)(x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2 \\ x = 2 \vee x = -2 \end{cases} \quad \text{entrambe accettabili}$$

$$\text{B: } \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + x - 2 = -x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow \cancel{x} \quad (\text{falso quadrato}) \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x - 2 = x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x(x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x = 0 \text{ non accettabile} \vee x = 2 \text{ non accettabile} \end{cases}$$

$$S : x = -2 \vee x = 2$$

Esempio 1.4.5.

$$\frac{|x-3| - x^2}{|x-1|} = 1 - |x-1| \quad C.E. x \neq 1$$

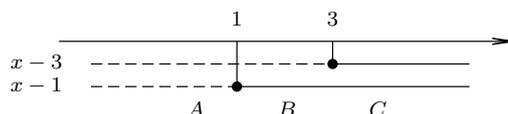
$$\begin{aligned} |x-3| - x^2 &= |x-1| - |x-1|^2 \\ |x-3| - \cancel{x^2} &= |x-1| - \cancel{x^2} + 2x - 1 \\ |x-3| &= |x-1| + 2x - 1 \end{aligned}$$

Segno degli argomenti:

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

Rappresentazione del segno degli argomenti:



$$A: \begin{cases} x \leq 1 \\ -x + 3 = -x + 1 + 2x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{non accettabile}$$

$$B: \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ -x + 3 = x - 1 + 2x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \text{accettabile}$$

$$C: \begin{cases} x > 3 \\ x - 3 = x - 1 + 2x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{non accettabile}$$

$$S : x = \frac{5}{4}$$

Esempio 1.4.6.

$$(|x+2|)^2 = |x^2+2| - 3|x| + |-3|$$

Si possono togliere i moduli a $|x^2+2|$ e a $|-3|$ in quanto i loro argomenti sono rispettivamente positivo e negativo.

$$|x|^2 + 4|x| + 4 = x^2 + 2 - 3|x| + 3$$

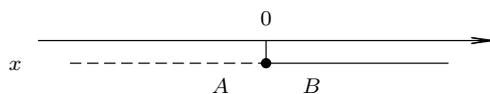
poichè $|x|^2 = x^2$ (prova a verificarlo) possiamo scrivere:

$$\cancel{x^2} + 4|x| + 4 = \cancel{x^2} - 3|x| + 5$$

$$7|x| - 1 = 0$$

Segno dell'argomento e sua rappresentazione:

$$x \geq 0$$



$$A: \begin{cases} x \leq 0 \\ -7x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x = -\frac{1}{7} \end{cases} \quad \text{accettabile}$$

$$B: \begin{cases} x > 0 \\ 7x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x = \frac{1}{7} \end{cases} \quad \text{accettabile}$$

$$S: x = -\frac{1}{7} \vee x = \frac{1}{7}$$

L'equazione svolta nell'ultimo esempio avrebbe potuto essere risolta in modo più sintetico anche come segue:

da $7|x| - 1 = 0$ si ottiene $|x| = \frac{1}{7}$ che permette di concludere che le soluzioni sono $x = \pm \frac{1}{7}$ in quanto affinché un modulo sia uguale a $\frac{1}{7}$ il suo argomento deve valere $\frac{1}{7}$ oppure $-\frac{1}{7}$.

Questa considerazione che ci ha permesso di risolvere in modo elegante l'equazione, può essere estesa ad ogni equazione riconducibile alla forma $|A(x)| = k$ con k costante, distinguendo i seguenti casi:

- 1) se $k < 0$ $|A(x)| = k$ è impossibile perchè un modulo non può essere negativo $\Rightarrow \cancel{x}$
- 2) se $k = 0$ $|A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = 0$
- 3) se $k > 0$ $|A(x)| = k \Rightarrow A(x) = -k \vee A(x) = k$

Esempio 1.4.7.

$$(x+1)^2 - |x-3| = (x+5)(x-5) + 2x$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1 - |x-3| = \cancel{x^2} - 25 + \cancel{2x}$$

$$|x-3| = 26$$

$$x-3 = -26 \vee x-3 = 26$$

$$x = -23 \vee x = 29$$

Esempio 1.4.8.

$$|x^2 - 3x + 1| + 5 = 2$$

$$|x^2 - 3x + 1| = -3 \quad \cancel{x}$$

Esempio 1.4.9.

$$(x-3)^2 - 5x - | -x^2 + 4 | = (x-1)(x+1) - 11x + 10$$

$$\cancel{x^2} - 6x + 9 - 5x - |4 - x^2| = \cancel{x^2} - 1 - 11x + 10$$

$$-11x + 9 - |4 - x^2| = -11x + 1$$

$$|4 - x^2| = 0$$

$$4 - x^2 = 0 \quad (2-x)(2+x) = 0 \quad x = -2 \vee x = 2$$

Esercizio 1.4.1.

$$\begin{cases} |1-x| = |2x-3|; & |2-x| = 5 + |1+2x|; & |3x+1| = 6; & |x^2+3x+2| = -4 \\ \left|2x + \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{2} = 2; & |x^2+7x| = 0; & \frac{|x|}{x-1} = \frac{x+2}{|x|}; & |2x+3| = |-4| \end{cases}$$

Disequazioni

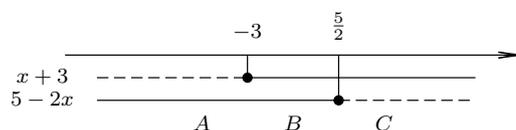
Illustriamo il procedimento da usare per la risoluzione di disequazioni con moduli mediante gli esempi che seguono:

Esempio 1.4.10.

$$2x + |x+3| < |5-2x|$$

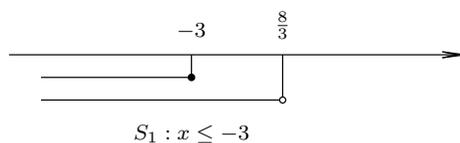
Procediamo, come fatto per le equazioni, allo studio e alla rappresentazione del segno degli argomenti dei moduli:

$$\begin{aligned} x+3 \geq 0 &\Rightarrow x \geq -3 \\ 5-2x \geq 0 &\Rightarrow x \leq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

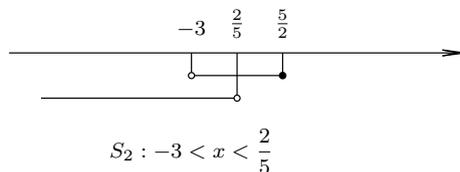


E' sufficiente risolvere ciascuno dei sistemi di disequazioni che si ottengono nei tre sottocasi e unire le soluzioni determinate per ognuno di essi.

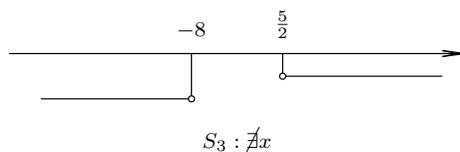
$$A: \begin{cases} x \leq -3 \\ 2x - x - 3 < 5 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -3 \\ x < \frac{8}{3} \end{cases}$$



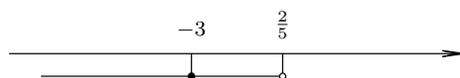
$$B: \begin{cases} -3 < x \leq \frac{5}{2} \\ 2x + x + 3 < 5 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < x \leq \frac{5}{2} \\ x < \frac{2}{5} \end{cases}$$



$$C: \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2x + x + 3 < -5 + 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x < -8 \end{cases}$$



La soluzione S della disequazione, come già anticipato, è data dall'unione di S_1 , S_2 ed S_3 ; per ottenerla può essere utile rappresentare, rispetto ad un sistema di ascisse, su un'unica riga, i tre insiemi ottenuti:



da cui si deduce che:

$$S : x < \frac{2}{5}$$

Esempio 1.4.11.

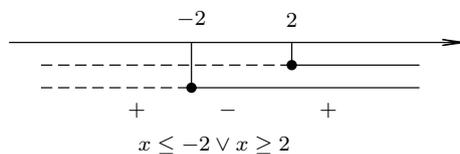
$$|x^2 - 4| \leq |x^2 - 7x|$$

Segno degli argomenti:

$$x^2 - 4 \geq 0 \quad (x - 2)(x + 2) \geq 0$$

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

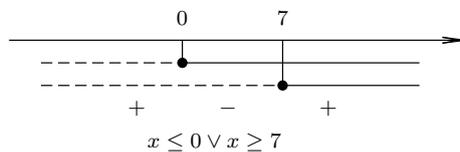
$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$



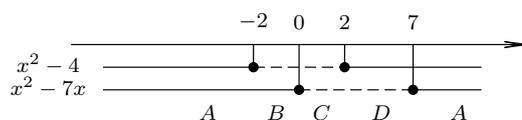
$$x^2 - 7x \geq 0 \quad x(x - 7) \geq 0$$

$$x \geq 0$$

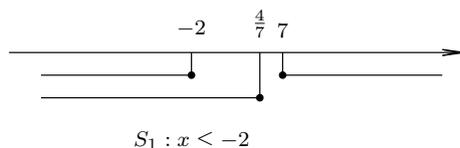
$$x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7$$



Rappresentazione del segno degli argomenti:



$$A: \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 7 \\ x^2 - 4 \leq x^2 - 7x \end{cases} \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 7 \\ x \leq \frac{4}{7} \end{cases}$$

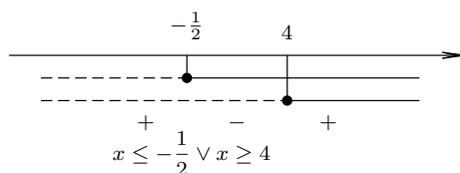


$$B: \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ -x^2 + 4 \leq x^2 - 7x \end{cases} \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ 2x^2 - 7x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

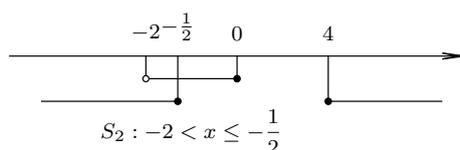
2^a disequazione del caso B: $(2x + 1)(x - 4) \geq 0$

$$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

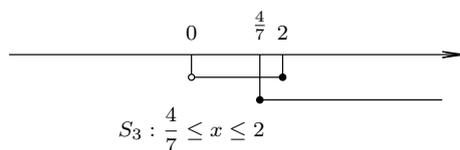
$$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$



intersecando :



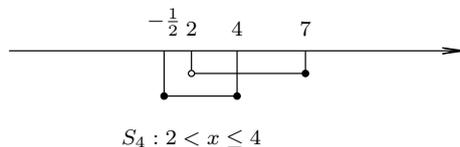
$$C: \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ -x^2 + 4 \leq -x^2 + 7x \end{cases} \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \geq \frac{4}{7} \end{cases}$$



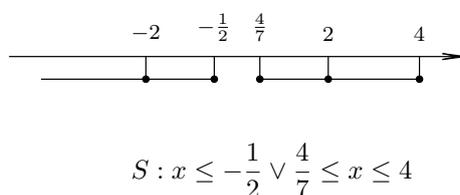
$$D: \begin{cases} 2 < x \leq 7 \\ x^2 - 4 \leq -x^2 + 7x \end{cases} \begin{cases} 2 < x \leq 7 \\ 2x^2 - 7x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

le soluzioni della 2^a disequazione del caso D si possono ricavare dal grafico di segno della 2^a disequazione del caso B

$$\begin{cases} 2 < x \leq 7 \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 4 \end{cases}$$



Unendo le soluzioni :



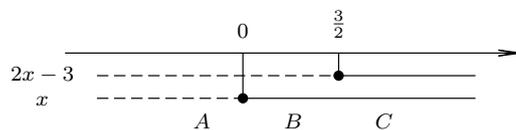
Esempio 1.4.12.

$$|2x - 3| < |x| + x$$

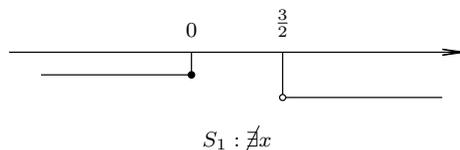
Segno degli argomenti:

$$\begin{aligned} 2x - 3 \geq 0 &\Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Rappresentazione del segno degli argomenti:

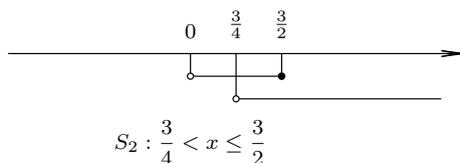


$$A: \begin{cases} x \leq 0 \\ -2x + 3 < -x + x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

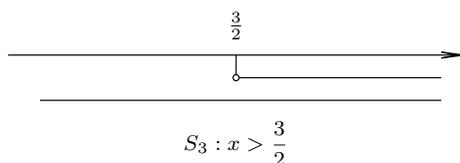


(soluzione che poteva essere facilmente intuita senza ricorrere al grafico di intersezione)

$$B: \begin{cases} 0 < x \leq \frac{3}{2} \\ -2x + 3 < x + x \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x \leq \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

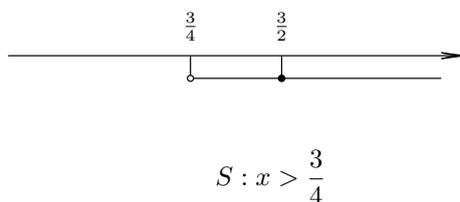


$$C: \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 2x - 3 < x + x \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ -3 < 0 \Rightarrow \forall x \end{cases}$$



(anche in questo caso il grafico di intersezione poteva essere evitato)

Unendo le soluzioni:



Come per le equazioni del tipo $|A(x)| = k$, anche nel caso di disequazioni riconducibili alla forma $|A(x)| < k$ oppure $|A(x)| > k$ con k costante, è possibile determinare le soluzioni in modo più rapido ed elegante pensando alla definizione di modulo e al suo segno come di seguito descritto:

Primo caso:

$$|A(x)| < k$$

1) se $k < 0$ $|A(x)| < k \Rightarrow \cancel{\forall x}$

2) se $k = 0$ $|A(x)| < 0 \Rightarrow \cancel{\forall x}$

3) se $k > 0$ $|A(x)| < k \Rightarrow \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$ equivalente a $-k < A(x) < k$

la seconda forma del caso 3) è preferibile solo se $A(x)$ è un polinomio di primo grado perchè in tal caso è possibile isolare l'incognita (come vedremo negli esempi).

Secondo caso:

$$|A(x)| > k$$

1) se $k < 0$ $|A(x)| > k \Rightarrow \forall x$

2) se $k = 0$ $|A(x)| > 0 \Rightarrow \forall x$ che non annulla $A(x)$

3) se $k > 0$ $|A(x)| > k \Rightarrow A(x) < -k \vee A(x) > k$

Esempio 1.4.13.

$$|x - 2| < 5 \Rightarrow -5 < x - 2 < 5$$

risolvendo simultaneamente le due disequazioni si ottiene:

$$-5 + 2 < x < 5 + 2$$

$$-3 < x < 7$$

Osserviamo che si ottiene (ovviamente) lo stesso risultato con il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 2 > -5 \\ x - 2 < 5 \end{cases}$$

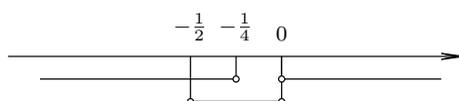
Esempio 1.4.14.

$$\left| \frac{3x+1}{x} \right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{x} > -1 \\ \frac{3x+1}{x} < 1 \end{cases}$$

Risolvendo separatamente ogni disequazione otteniamo:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{4} \vee x > 0 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

e intersecando:



$$S : -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4}$$

Esempio 1.4.15.

$$3 - |5 - 2x| > 6$$

$$|5 - 2x| < -3 \Rightarrow \cancel{A}x$$

Esempio 1.4.16.

$$|3x - 7| > 4 \Rightarrow 3x - 7 < -4 \vee 3x - 7 > 4$$

$$3x < 3 \vee 3x > 11$$

$$x < 1 \vee x > \frac{11}{3}$$

Esempio 1.4.17.

$$\begin{aligned} |25 - 4x^2| > 0 &\Rightarrow \forall x \text{ purchè } 25 - 4x^2 \neq 0 \\ &\Rightarrow (5 - 2x)(5 + 2x) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{5}{2} \wedge x \neq -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

quindi

$$S : \forall x \neq \pm \frac{5}{2}$$

Esempio 1.4.18.

$$(x-2)^2 - 3|x| < x(x-1) - 3x + 8$$

$$\cancel{x^2} - 4x + 4 - 3|x| < \cancel{x^2} - x - 3x + 8$$

$$-4\cancel{x} + 4 - 3|x| < -4\cancel{x} + 8$$

$$|x| > -\frac{4}{3} \Rightarrow \forall x$$

Esempio 1.4.19.

$$\left| \frac{x}{x-2} \right| > -7 \Rightarrow \forall x \neq 2 \text{ (} x \neq 2 \text{ è una condizione di esistenza)}$$

Esempio 1.4.20.

$$|1-x| - 3 \leq 0$$

$$|1-x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 1-x \leq 3 \Rightarrow -4 \leq -x \leq 2 \quad (4 \geq x \geq -2)$$

$$-2 \leq x \leq 4$$

Esempio 1.4.21.

$$|x+5| + 3x \geq 3(x+|x+5|)$$

$$|x+5| + \cancel{3x} \geq \cancel{3x} + 3|x+5|$$

$$2|x+5| \leq 0$$

$$|x+5| \leq 0 \Rightarrow x = -5$$

infatti $|x+5| < 0$ non è mai verificata e quindi la disequazione equivale a $|x+5| = 0$ da cui la soluzione.

Esercizio 1.4.2.

$$|2x-3| > |x+1|; \quad |2-x| + x - 3 \leq 0; \quad |x-2| \geq 3; \quad |2x-5| + 6 < 0; \quad |2x| + 1 > 0$$

$$|x-2| + 3|2-x| > x-2; \quad |x+7| - 2|x+3| \leq x-2; \quad \frac{1}{2} - 2 \left| 1 - \frac{x+2}{x-2} \right| \geq 0; \quad 5 - |2x-7| > |2x-7|$$

Proponiamo ora esercizi più complessi che richiedono l'utilizzo simultaneo delle procedure studiate:

Esempio 1.4.22.

$$\frac{|x-3| - 5}{|4-x|(x^2-x-6)} \geq 0$$

E' necessario scomporre per avere tutti fattori dei quali siamo in grado di studiare il segno.

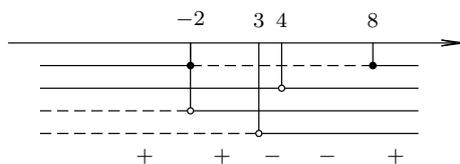
$$\frac{|x-3| - 5}{|4-x|(x+2)(x-3)} \geq 0$$

$$|x-3| - 5 \geq 0 \Rightarrow |x-3| \geq 5 \Rightarrow x-3 \leq -5 \vee x-3 \geq 5 \Rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 8$$

$$|4-x| > 0 \Rightarrow \forall x \neq 4$$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$



$$S : (x < 3 \wedge x \neq -2) \vee x \geq 8$$

Esempio 1.4.23.

$$\frac{(4x^2 - 12x + 9)(|2 - x| - |x + 5| + 1)}{(3 - x)^3(x^2 - 6x + 9)} < 0$$

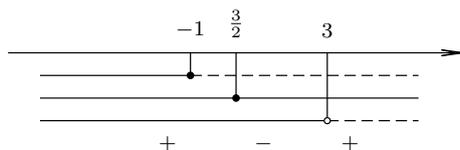
$$\frac{(2x - 3)^2(|2 - x| - |x + 5| + 1)}{(3 - x)^5} < 0$$

$$(2x - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \left(\text{si annulla per } x = \frac{3}{2} \right)$$

$$|2 - x| - |x + 5| + 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$$

(lo si verifichi per esercizio come esposto relativamente alle disequazioni con moduli)

$$(3 - x)^5 > 0 \Rightarrow x < 3$$



$$S : -1 < x < 3 \wedge x \neq \frac{3}{2}$$

Esempio 1.4.24.

$$\begin{cases} \frac{x^8}{3 - |x|} \leq 0 \\ \frac{x^2 + 3x + 2}{5x + 2} > 1 \\ \left| \frac{2x + 1}{x} \right| < 3 \end{cases}$$

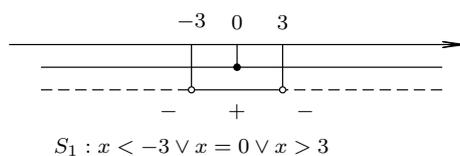
Si risolvono singolarmente le tre disequazioni:

Prima disequazione:

$$\frac{x^8}{3 - |x|} \leq 0$$

$$x^8 \geq 0 \Rightarrow \forall x \text{ (si annulla per } x = 0)$$

$$3 - |x| > 0 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$$



Seconda disequazione:

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{5x + 2} > 1$$

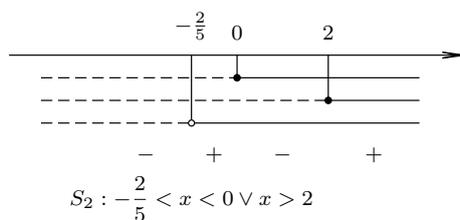
$$\frac{x^2 - 2x}{5x + 2} > 0$$

$$\frac{x(x - 2)}{5x + 2} > 0$$

$$x \geq 0$$

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$5x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$



Terza disequazione:

$$\left| \frac{2x + 1}{x} \right| < 3$$

per risolvere questa disequazione è necessario risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{2x + 1}{x} < 3 \\ \frac{2x + 1}{x} > -3 \end{cases}$$

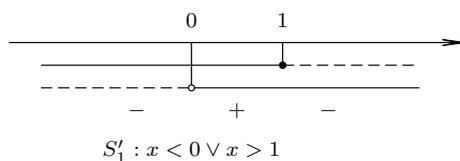
eseguendo i calcoli:

$$\begin{cases} \frac{1 - x}{x} < 0 \\ \frac{5x + 1}{x} > 0 \end{cases}$$

1^a disequazione di quest'ultimo sistema $\frac{1 - x}{x} < 0$

$$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

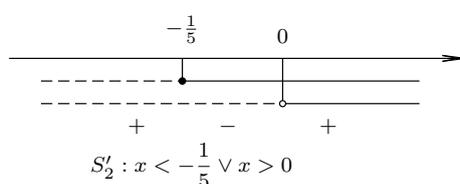
$$x > 0$$



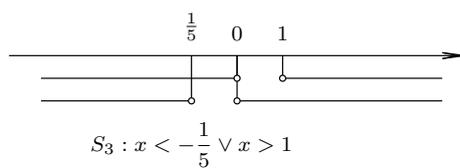
2^a disequazione dell'ultimo sistema $\frac{5x+1}{x} > 0$

$$5x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{5}$$

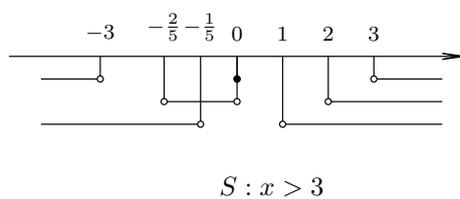
$$x > 0$$



intersecando le soluzioni del sistema risolvente la terza disequazione:



Intersecando le tre soluzioni del sistema iniziale:



1.5 Esercizi riepilogativi

1. $(3x - 2)(4x + 3) + 4x^2 - x < -4(1 - 4x^2)$ $[\forall x]$
2. $(x + 4)(5x - 1) + 2 + 3(4 - x) > x(x + 2) + (2x + 5)^2$ $\left[x < -\frac{5}{2}\right]$
3. $\frac{3x - 1}{5} - 5 < 2x + \frac{2x + 3}{3}$ $[x > -3]$
4. $\frac{2x - 5}{2} + 5x \leq \frac{19}{8} - \frac{6x - 3}{4}$ $\left[x \leq \frac{3}{4}\right]$
5. $\frac{60 - 5x}{6} + \frac{5x - 60}{12} - \frac{x - 6}{6} < \frac{x - 6}{9} + \frac{18 - 2x}{3}$ $[x > 24]$
6. $\left(\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{5} + \frac{7}{5}\right)\left(\frac{9}{5}x + 2\right) < \left(\frac{9}{5}x - 2\right)^2$ $\left[x < \frac{10}{9}\right]$
7. $(3x + 4)^2 > (x + 12)^2$ $[x < -4 \vee x > 4]$
8. $(2x + 1)^2 - 8x < 24 + (x - 2)^2$ $[-3 < x < 3]$
9. $3x^2 + 15x > 0$ $[x < -5 \vee x > 0]$
10. $16x^2 + 24x + 9 < 0$ $[\nexists x]$
11. $\frac{x(x + 1)}{4} \geq \frac{x - 5}{12} + \frac{10x - 5}{6}$ $[x \leq 1 \vee x \geq 5]$
12. $\frac{2(x - 1)(2x + 1)}{10} + 5 \leq x(x + 1)$ $[x \leq -4 \vee x \geq 2]$
13. $-(2x + 3)^3 + 2(x + 1)(4x^2 + 10x + 5) < 55$ $[\forall x]$
14. $\frac{(x + 2)^2}{4} - \frac{(x - 2)(x + 2)}{6} > \frac{4x + 4}{3}$ $[\forall x \neq 2]$
15. $3x^2 - 6x + 3 < 0$ $[\nexists x]$
16. $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 < 0$ $[x < 1 \wedge x \neq 0]$
17. $(3 - x)^4(2 + x)^3(x^2 + 1) \geq 0$ $[x \geq -2]$
18. $(x - 1)^4(x^2 + x - 2)^2 \leq 0$ $[x = -2 \vee x = 1]$
19. $\frac{x}{3x - 1} \geq 0$ $\left[x \leq 0 \vee x > \frac{1}{3}\right]$
20. $\frac{x}{x - 1} > 2$ $[1 < x < 2]$
21. $\frac{x + 1}{x} - \frac{2}{x} > \frac{x + 1}{x - 1}$ $\left[x < 0 \vee \frac{1}{3} < x < 1\right]$
22. $\frac{(x - 3)(x^2 - 6x + 8)}{3x^2 - x} > 0$ $[12-13] - \text{ITIS V. VOLTERRA SAN DONÀ DI P.}$ $\left[0 < x < \frac{1}{3} \vee 2 < x < 3 \vee x > 4\right]$

23. $\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2(x - 1)^3} < 0$ $[x < -2 \vee -1 < x < 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1]$
24. $\begin{cases} 2x - 5 > 3x + 2 \\ 3x - 4 < x + 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x \leq 2x - 2 \\ x - 1 > -7 \end{cases}$ $[x < -7; \emptyset]$
25. $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ (x - 2)(x + 3) \leq (x + 2)^2 \end{cases}$; $\begin{cases} -2x(1 - x^2) \leq 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}(x - 1) > 0 \end{cases}$ $[x \geq 3; x \leq -1 \vee 0 \leq x \leq 1]$
26. $\begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} + \frac{2}{x - 1} > 1 \\ \frac{2}{1 - x} \leq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x - 2}{x^2 - 3x} - \frac{2}{x} \leq 1 \\ \frac{x - 2}{x - 1} > 0 \end{cases}$ $[1 < x < 2; 0 < x < 1 \vee x > 3]$
27. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}(x - 1) \geq 0 \\ (x - 2)x \leq (x + 1)^2 \\ \frac{x + 1}{2} - \frac{x - 3}{6} \leq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + x - 2 \leq 0 \\ x^2 + 3x \geq 0 \\ \frac{1 - x}{x + 3} \geq 0 \end{cases}$ $[-\frac{1}{4} \leq x \leq 0; 0 \leq x \leq 1]$
28. $2| -x| + |3x - 1| = 2 - |1 - x|$ $[0; \frac{1}{2}]$
29. $\frac{|3x + 1| - 2}{x + 3} = 2$ $[7; -\frac{9}{5}]$
30. $\frac{|x + 6| - x}{|4 - x|} = 1$ $[\pm 10; -2]$
31. $\left| \frac{x - 4}{x + 3} + 2 \right| - 3 = 0$ $[-\frac{11}{6}]$
32. $(2 - |x|)^2 + x - 8 = x^2$ $[\emptyset]$
33. $|x^2 + 5x| = 6$ $[-6; -3; -2; 1]$
34. $2|x + 4| - 3 \leq 0$ $[-\frac{11}{2} \leq x \leq -\frac{5}{2}]$
35. $5x - 2 \leq 2|3 - 2x|$ $[x \leq \frac{8}{9}]$
36. $|x + 1| - |x - 2| \geq 0$ $[x \geq \frac{1}{2}]$
37. $2|x| - |x - 2| \leq 2 - |4 - 2x|$ $[x = 0]$
38. $\left| \frac{x - 1}{x} - 2 \right| > 2$ $[-\frac{1}{3} < x < 1 \wedge x \neq 0]$
39. $\frac{3|x + 1| - |x|}{|x| + 1} > 0$ $[x < -\frac{3}{2} \vee x > -\frac{3}{4}]$
40. $\frac{(3 - |x|)(4x^2 - 25)}{|2x + 1|(|x - 3| - 3)} > 0$ [12-13] - ITIS V.VOLTERRA SAN DONÀ DI P. $[-3 < x < -\frac{5}{2} \vee 0 < x < \frac{5}{2} \vee 3 < x < 6]$

Capitolo 2

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

2.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti è stato affrontato lo studio delle equazioni di primo grado e di alcune particolari di grado superiore, contenenti tutte una sola incognita. In questa sezione ci proponiamo di esaminare equazioni in più incognite. Ricordando quanto studiato nel volume 1 capitolo 7, una soluzione di un'equazione in più incognite non è un numero, ma rispettivamente una coppia, terna ... ordinata di numeri, in relazione a quante sono le incognite presenti.

Pertanto con riferimento all'equazione $x^2 - y = 2x$ una soluzione è ad esempio la coppia $(2, 0)$, mentre non è una sua soluzione la coppia $(1, 2)$ (farne la verifica). Con riferimento all'equazione $2x + y - 3z = 0$ è una sua soluzione la terna $(6, -3, 3)$, non è soluzione invece $(1, 5, -2)$.

In generale le equazioni in più incognite hanno infinite soluzioni e sono quindi indeterminate. Infatti con l'esempio che segue è facile convincerci che per ogni valore (scelto tra gli infiniti possibili) attribuito ad una delle incognite è possibile determinare il valore da assegnare alle rimanenti in modo da verificare l'uguaglianza.

Esempio 2.1.1. Data l'equazione: $2x - y + 1 = 0$

se $x = 0$ dall'equazione si ottiene $-y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ quindi $(0, 1)$ è una soluzione

se $x = -2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (-2, -3)$ è una soluzione

se $y = 6 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, 6\right)$ è una soluzione

.....

L'equazione è quindi indeterminata, ma non un'identità perchè esistono oltre alle infinite coppie soluzione, infinite altre che non lo sono come ad esempio: $(0, 0)$; $\left(\frac{1}{2}, 7\right)$; $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

E' bene precisare che non tutte le equazioni in più incognite sono indeterminate perchè esistono casi particolari di equazioni che o non hanno soluzioni (impossibili) o ne hanno in numero finito (determinate).

Esempio 2.1.2. L'equazione $x^2 + y^2 = -7$ non ha soluzioni perchè la somma di quadrati non può essere negativa.

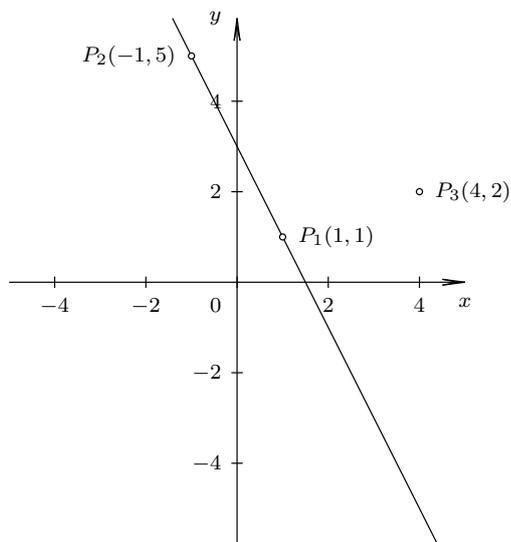
L'equazione $(x + 2)^2 + y^2 = 0$ ha come unica soluzione la coppia $(-2, 0)$ perchè la somma di quadrati è nulla solo se lo sono entrambi gli addendi.

Per lo stesso motivo, l'equazione $(x - 1)^2 + (y^2 - 9)^2 = 0$ ha per soluzioni le due coppie $(1, 3)$ e $(1, -3)$

E' possibile dare un'interpretazione geometrica delle equazioni con due (tre) incognite infatti, poichè ad ogni coppia (terna) ordinata di numeri corrisponde un punto del piano (spazio), all'equazione corri-

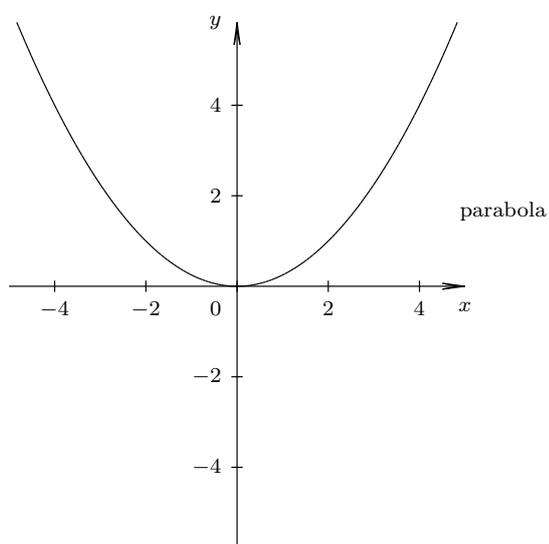
sponderà una *curva* (*superficie*) costituita dall'insieme dei punti le cui coordinate sono soluzione dell'equazione.

Esempio 2.1.3. In laboratorio verificheremo che l'equazione $2x + y - 3 = 0$ ha per rappresentazione grafica la curva:

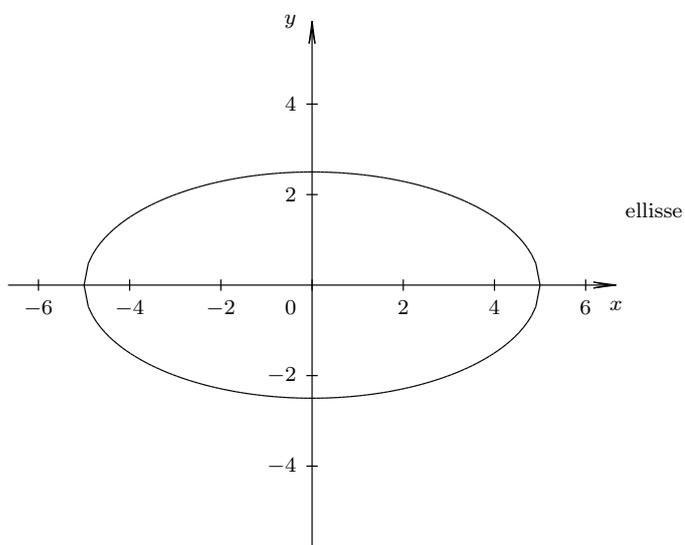


Facciamo notare che i punti $P_1(1, 1)$ e $P_2(-1, 5)$ appartengono alla curva in quanto le loro coordinate sono soluzione dell'equazione, mentre $P_3(4, 2)$ non vi appartiene perchè $(4, 2)$ non è una soluzione dell'equazione.

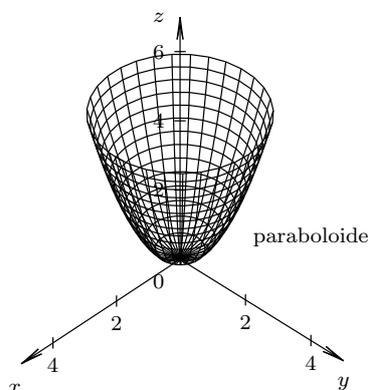
L'equazione $2y - x^2 = 0$ ha per rappresentazione grafica la curva:



L'equazione $x^2 + 4y^2 - 25 = 0$ ha per rappresentazione grafica la curva:



L'equazione $x^2 + y^2 - z = 0$ ha per rappresentazione grafica la superficie:



Abbiamo finora osservato che la maggior parte delle equazioni in più incognite è indeterminata, a questo punto viene naturale affrontare il problema della ricerca delle eventuali soluzioni comuni a più equazioni in più incognite; a tal proposito diamo le seguenti definizioni:

Definizione 2.1.1. Si dice *sistema di equazioni* un insieme di equazioni.

Definizione 2.1.2. Si dice *soluzione* di un sistema di equazioni una coppia, terna ... ordinata di numeri che è soluzione di ogni equazione componente.

Definizione 2.1.3. *Risolvere* un sistema di equazioni significa determinare tutte le sue soluzioni.

Con riferimento all'insieme delle soluzioni un sistema di equazioni può essere classificato come segue:

determinato \Leftrightarrow l'insieme delle soluzioni è non vuoto e di cardinalità finita

impossibile \Leftrightarrow l'insieme delle soluzioni è vuoto

indeterminato \Leftrightarrow l'insieme delle soluzioni ha cardinalità infinita

Per un sistema è possibile dare la seguente definizione di grado:

Definizione 2.1.4. Si dice *grado* di un sistema di equazioni il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Nel caso in cui un sistema abbia grado uno esso si dice *sistema lineare*

Esempio 2.1.4. I sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0 \\ -y^3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - 2x = y \\ 2x = y - z \\ x^2 + y^2 = 4z \end{cases}$$

hanno rispettivamente grado 6, 1, 4.

In questo capitolo ci occuperemo della risoluzione di sistemi lineari di equazioni in cui il numero di incognite è uguale a quello delle equazioni.

2.2 Sistemi lineari di due equazioni in due incognite

I sistemi lineari di due equazioni in due incognite, detti sistemi 2×2 , di cui ci occuperemo in questo paragrafo, essendo lineari devono contenere solo equazioni di primo grado e quindi, dopo aver portato ciascuna equazione a forma normale, si presenteranno nella forma:

$$\Sigma : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q} \\ \text{con } a \text{ e } b \text{ cos\`i come } a' \text{ e } b' \text{ non contemporaneamente nulli} \end{array}$$

detta *forma normale* del sistema.

A volte si preferisce scrivere il sistema nella forma:

$$\Sigma' : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

che continueremo a chiamare forma normale, nella quale i termini noti sono scritti al secondo membro.

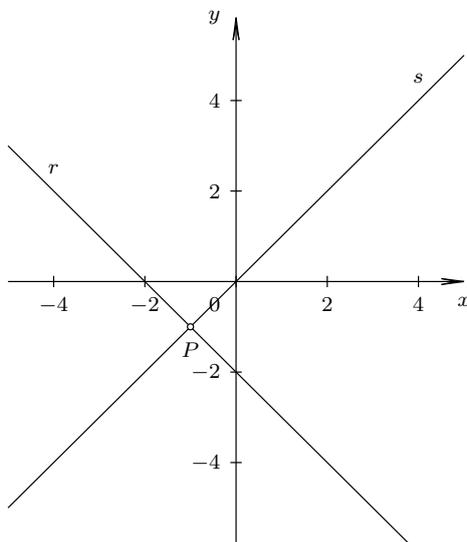
Poichè, come può essere verificato in laboratorio, un'equazione lineare in due incognite ha per grafico una retta, possiamo, ancor prima di imparare a risolvere algebricamente il sistema, dare ad esso e alle sue eventuali soluzioni un significato geometrico.

Possiamo affermare che risolvere un sistema, significa, da un punto di vista grafico, determinare le eventuali intersezioni tra le rette associate alle equazioni componenti.

Esempio 2.2.1. La rappresentazione geometrica del sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 & \rightarrow r \\ x - y = 0 & \rightarrow s \end{cases}$$

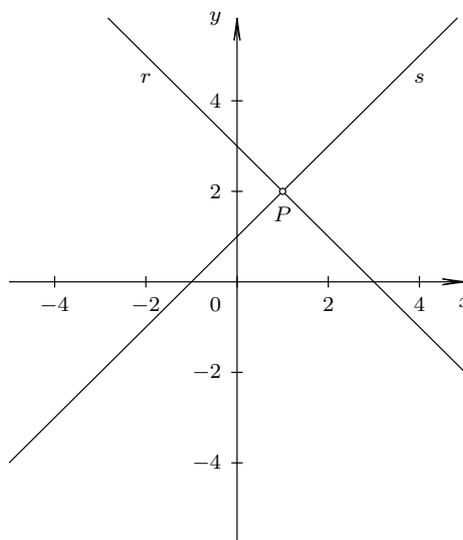
è:



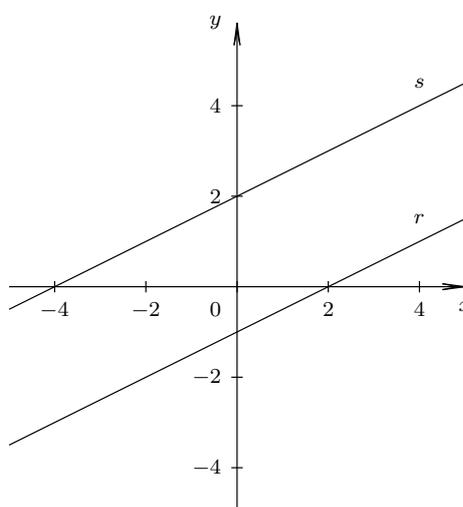
dunque la soluzione del sistema sarà la coppia ordinata costituita dalle coordinate del punto P che in seguito impareremo a determinare algebricamente.

In generale, poichè, come sappiamo dalla geometria, due rette possono essere incidenti o parallele (distinte o coincidenti), un sistema, pensando alla sua interpretazione geometrica, potrà avere:

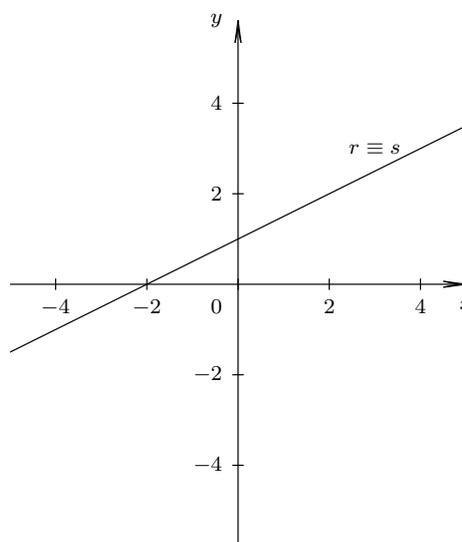
una soluzione se le rette sono
incidenti(sistema determinato)



nessuna soluzione se le rette sono
parallele(sistema impossibile)



infinite soluzioni se le rette sono
coincidenti (sistema indeterminato)



A questo punto la classificazione di un sistema può essere dedotta già dalla sua forma normale, ricorrendo al seguente teorema facilmente verificabile in laboratorio e che sarà dimostrato nella classe terza:

Teorema 2.2.1. Due rette r e s di equazione rispettivamente:

$$ax + by + c = 0 \quad e \quad a'x + b'y + c' = 0$$

per le quali esistano i rapporti $\frac{a}{a'}$ $\frac{b}{b'}$ $\frac{c}{c'}$ sono:

$$\text{incidenti} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

$$\text{parallele distinte} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$\text{parallele coincidenti} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Esempio 2.2.2.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ x + 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

è determinato perchè $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{7}$ essendo $a = 2, b = -3, c = 5, a' = 1, b' = 7, c' = -2$

$$\begin{cases} -x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

è impossibile perchè $\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-5}{2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{6} = 0 \\ -2x - 15y + 1 = 0 \end{cases}$$

è indeterminato perchè $\frac{1/3}{-2} = \frac{5/2}{-15} = \frac{-1/6}{1}$

Esercizio 2.2.1. Stabilisci se i seguenti sistemi sono determinati, indeterminati, impossibili:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -9 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5 = y + 12 \\ x - 3 = y + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x(y - 1) - y(x + 1) = 2 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{4} = 1 \\ \frac{2x-1}{2} - \frac{4y+1}{6} = 1 \end{cases}$$

Procediamo ora alla descrizione dei metodi algebrici per la risoluzione dei sistemi lineari 2×2 .

Metodo di sostituzione

Consiste nell'esplicitare una incognita da un'equazione e sostituirla nell'altra equazione con l'espressione trovata a secondo membro. E' possibile così risolvere l'equazione ottenuta determinando l'unica incognita presente; l'altra verrà calcolata di conseguenza.

Esempio 2.2.3.

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ -x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

essendo $\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{3}$ il sistema è determinato.

Calcoliamo dunque la soluzione.

E' conveniente esplicitare la y dalla prima equazione o la x dalla seconda in modo da ottenere una espressione intera così da semplificare i calcoli.

Scegliamo di esplicitare la y dalla prima equazione:

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ -x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda si ottiene:

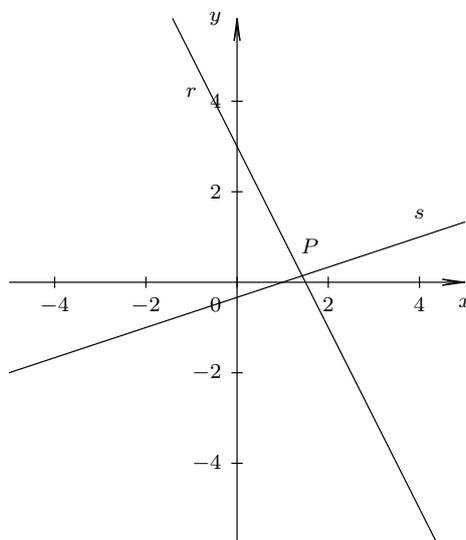
$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ -x + 3(-2x + 3) + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ -7x + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \\ x = \frac{10}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2\left(\frac{10}{7}\right) + 3 \\ x = \frac{10}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{7} \\ x = \frac{10}{7} \end{cases}$$

La soluzione è dunque la coppia ordinata $\left(\frac{10}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

La rappresentazione grafica del sistema è la seguente:



Esempio 2.2.4.

$$\begin{cases} (x+1)^2 - x(x+5y) + 5y(1+x) = 4 \\ \frac{x+2}{5} = 2 - \frac{y+3}{2} \end{cases}$$

condotto a forma normale:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ 2x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

essendo $\frac{2}{2} = \frac{5}{5} \neq \frac{-3}{-1}$ il sistema è impossibile.

Se non operiamo questo controllo possiamo giungere alla stessa conclusione risolvendolo col metodo studiato; esplicitando la x dalla seconda equazione:

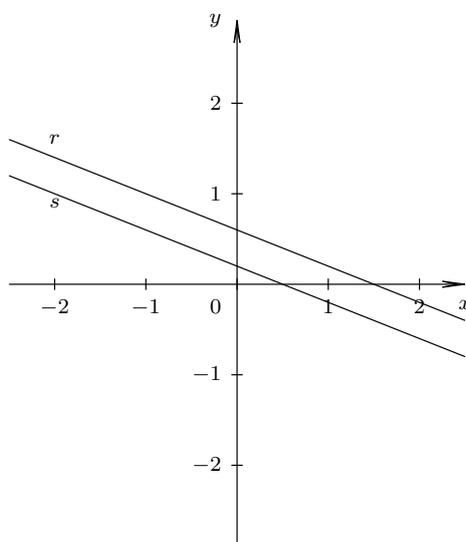
$$\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ x = \frac{-5y+1}{2} \end{cases}$$

Sostituendo nella prima si ottiene:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{-5y+1}{2}\right) + 5y - 3 = 0 \\ x = \frac{-5y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = 0 \text{ impossibile } (\cancel{y}) \\ x = \frac{-5y+1}{2} \end{cases}$$

\Rightarrow sistema impossibile in quanto non si può determinare alcuna coppia che ne sia soluzione.

La rappresentazione grafica del sistema è:



Esercizio 2.2.2. Risolvi, con il metodo di sostituzione, i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 3x = y - 3 \\ x - 5 = 4y - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x - 1) = 3(y + 1) - 10 \\ 3(x + 1) - 2(y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 4 \\ \frac{3x}{2} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3(x-1)}{4} \\ x = \frac{2x+y}{2} \end{cases}$$

Metodo del confronto

Consiste nell'esplicitare la stessa incognita in entrambe le equazioni ed uguagliare i secondi membri trovati così da ottenere un'equazione in una sola incognita che prenda il posto di una delle precedenti. A questo punto si procede come col primo metodo studiato.

Esempio 2.2.5.

$$\begin{cases} 5x - y - 11 = 0 \\ 7x - 3y - 17 = 0 \end{cases}$$

essendo $\frac{5}{7} \neq \frac{1}{3}$ il sistema è determinato.

Esplicitiamo la y :

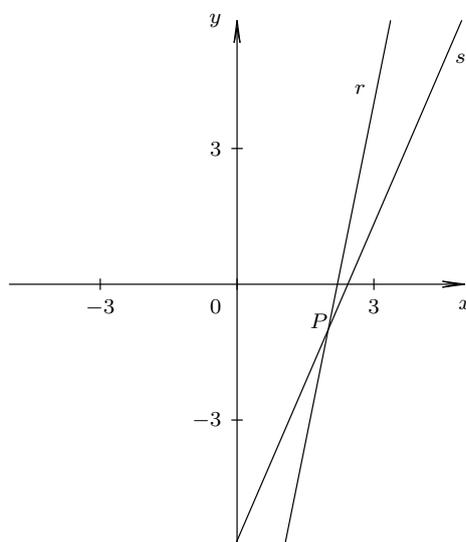
$$\begin{cases} y = 5x - 11 \\ y = \frac{7x - 17}{3} \end{cases}$$

Uguagliando i secondi membri, mantenendo l'equazione più semplice, nel nostro caso la prima, si ottiene:

$$\begin{cases} y = 5x - 11 \\ 5x - 11 = \frac{7x - 17}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 11 \\ 15x - 33 = 7x - 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

La soluzione è dunque la coppia $(2, -1)$.

La rappresentazione grafica del sistema è :



Esempio 2.2.6.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 12x - 8y = 4 \end{cases}$$

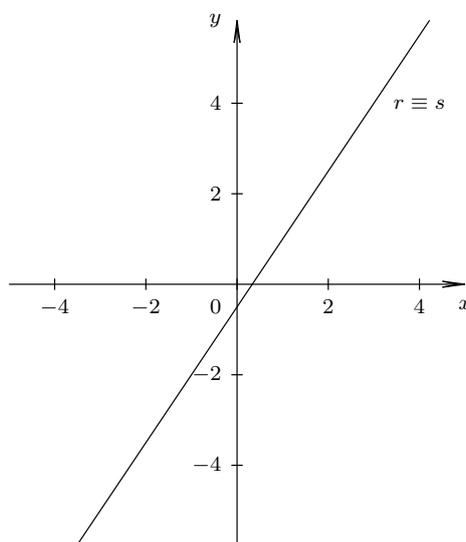
essendo $\frac{3}{12} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$ il sistema è indeterminato.

Anche in questo caso, applicando il metodo del confronto, si arriva alla stessa conclusione, infatti esplicitando la x :

$$\begin{cases} x = \frac{2y+1}{3} \\ x = \frac{8y+4}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2y+1}{3} \\ \frac{2y+1}{3} = \frac{8y+4}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2y+1}{3} \\ \frac{2y+1}{3} = \frac{4(y+2)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2y+1}{3} \\ 0 = 0 \text{ identità } (\forall y) \end{cases}$$

\Rightarrow sistema indeterminato perchè, in corrispondenza agli infiniti valori di y , si ottengono infinite coppie soluzione, tutte del tipo $\left(\frac{2y+1}{3}, y\right)$.

La rappresentazione grafica del sistema (che d'ora in poi non sempre faremo) è:



Esercizio 2.2.3. Risolvi con il metodo del confronto i sistemi:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = x + y - 3 \\ y + 2 = 9x \end{cases} \quad \begin{cases} 2(3x - 2) = y - 1 \\ 3(x + y) + 2(x - y) = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{y-2}{4} = 1 \\ x - \frac{3}{2}y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+2}{3} + \frac{y+5}{6} = 2 \\ \frac{5x+4}{6} + \frac{y-2}{9} = 2 \end{cases}$$

Metodo di combinazione lineare

Definizione 2.2.1. Date le equazioni

$$ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

l'equazione:

$$h(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0 \quad h, k \in \mathbb{Q}$$

si dice loro *combinazione lineare*.

Dato il sistema

$$\Sigma : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

se si considerano i sistemi

$$\Sigma' : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ h(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma'' : \begin{cases} a'x + b'y + c' = 0 \\ h(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0 \end{cases}$$

ottenuti da Σ sostituendo ad una delle equazioni, una loro combinazione lineare, si può enunciare il seguente teorema:

Teorema 2.2.2. $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ sono equivalenti $\forall h, k \in \mathbb{Q}^*$

Dimostrazione. (dimostriamo prima che Σ è equivalente a Σ')

\Rightarrow Sia (\bar{x}, \bar{y}) una soluzione di Σ , allora:

$$\begin{cases} a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \\ a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0 \end{cases}$$

$$\text{da cui } \underbrace{h(a\bar{x} + b\bar{y} + c)}_{=0} + \underbrace{k(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c')}_{=0} = 0 \quad \forall h, k$$

$$\text{quindi } \begin{cases} a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \\ h(a\bar{x} + b\bar{y} + c) + k(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c') = 0 \end{cases}$$

perciò (\bar{x}, \bar{y}) è soluzione di Σ'

\Leftarrow sia (\bar{x}, \bar{y}) una soluzione di Σ' allora:

$$\begin{cases} a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \\ h(a\bar{x} + b\bar{y} + c) + k(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c') = 0 \end{cases}$$

$$\text{pertanto da } \underbrace{h(a\bar{x} + b\bar{y} + c)}_{=0} + k(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c') = 0$$

$$\text{si ottiene } k(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c') = 0$$

$$\text{essendo } k \neq 0 \text{ si ha } a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$$

$$\text{da cui } \begin{cases} a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \\ a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0 \end{cases}$$

perciò (\bar{x}, \bar{y}) è soluzione di Σ

Analoga è la dimostrazione che Σ è equivalente a Σ'' □

Esempio 2.2.7. Detto $\Sigma: \begin{cases} x - 5y - 3 = 0 \\ -2x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$

sono sistemi equivalenti quelli che si ottengono con le seguenti combinazioni lineari:

$$\text{se } h = 1, k = -3 \Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 3 = 0 \\ 1(x - 5y - 3) - 3(-2x + 3y + 6) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 3 = 0 \\ 7x - 14y - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\text{se } h = -2, k = 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 3 = 0 \\ -2(x - 5y - 3) + 5(-2x + 3y + 6) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 3 = 0 \\ -12x + 25y + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\text{se } h = 2, k = 2 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 6 = 0 \\ 2(x - 5y - 3) + 2(-2x + 3y + 6) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 6 = 0 \\ -2x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{se } h = 2, k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 3 = 0 \\ 2(x - 5y - 3) + 1(-2x + 3y + 6) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 3 = 0 \\ -7y = 0 \end{cases}$$

E' facile constatare che tra tutti i sistemi equivalenti il più facile da risolvere è l'ultimo in quanto l'equazione combinazione lineare contiene una sola incognita il cui valore si può determinare in modo immediato.

L'osservazione fatta nell'esempio precedente fornisce l'idea alla base del metodo di combinazione lineare: esso consiste nel trasformare il sistema iniziale in uno equivalente nel quale l'equazione combinazione lineare contenga una sola incognita per poi procedere come con i casi precedenti.

Esempio 2.2.8.

$$\begin{cases} 9x - 4y - 12 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

essendo $\frac{9}{3} \neq \frac{-4}{-1}$ il sistema è determinato

Sostituiamo la prima equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la prima equazione per 1 e la seconda per -4 :

$$\begin{cases} -3x + 12 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

La soluzione è la coppia ordinata $(4, 6)$

Esempio 2.2.9.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 19 = 0 \\ 5x + 9y - 7 = 0 \end{cases}$$

essendo $\frac{3}{5} \neq \frac{-2}{9}$ il sistema è determinato.

Sostituiamo la seconda equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la prima equazione per 5 e la seconda per -3 :

$$\begin{cases} 3x - 2y - 19 = 0 \\ -37y - 74 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 19 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

La soluzione è la coppia $(5, -2)$

In alcuni casi può essere conveniente sostituire entrambe le equazioni componenti il sistema con le due combinazioni lineari, una nella sola x e l'altra nella sola y .

Esempio 2.2.10.

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 5x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

essendo $\frac{1}{5} \neq \frac{3}{1}$ il sistema è determinato.

Sostituiamo la prima equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la prima equazione per 1 e la seconda per -1 e sostituiamo la seconda equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la prima equazione per -5 e la seconda per 1:

$$\begin{cases} -4x + 8 = 0 \\ -4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

La soluzione è la coppia ordinata $(2, -1)$.

Esercizio 2.2.4. Risolvi con il metodo di combinazione lineare i sistemi:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 6x - y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = -4 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2 = y - 2 \\ x + 4 = 2y - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$$

Metodo di Cramer

Il metodo di Cramer trae origine dalla più generale teoria sui sistemi lineari di n equazioni in n incognite che sarà forse sviluppata durante il triennio e che si basa sui concetti di matrice e suo determinante che ora definiremo riferendoci tuttavia solo al caso di due equazioni in due incognite.

Definizione 2.2.2. Si dice *matrice quadrata* di ordine due, una tabella avente due righe e due colonne.

Essa si scrive nella forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ove gli elementi a e b costituiscono la prima riga
 gli elementi c e d costituiscono la seconda riga
 gli elementi a e c costituiscono la prima colonna
 gli elementi b e d costituiscono la seconda colonna
 gli elementi a e d formano quella che viene detta *diagonale principale*
 mentre gli elementi b e c formano la *diagonale secondaria*

Definizione 2.2.3. Si dice *determinante* di una matrice quadrata di ordine due il numero che si ottiene calcolando la differenza tra il prodotto degli elementi della diagonale principale e il prodotto degli elementi della diagonale secondaria.

Detta A la matrice, il suo determinante viene così indicato e calcolato:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Esempio 2.2.11.

$$\text{Data } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ allora } |A| = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 3 + 10 = 13$$

$$\text{Data } B = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/2 \\ 1/2 & -10 \end{pmatrix} \text{ allora } |B| = 3/5 \cdot (-10) - 1/2 \cdot 1/2 = -6 - 1/4 = -25/4$$

$$\text{Data } C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \text{ allora } |C| = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-6) = 12 - 12 = 0$$

Osservazione. Se una matrice ha determinante nullo allora le sue righe e le sue colonne sono direttamente proporzionali. Infatti se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ purchè $c \neq 0 \neq d$ e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ purchè $b \neq 0 \neq d$

Dato il sistema Σ scritto nella forma normale: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ad esso sono associate le seguenti tre matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$$

i cui determinanti vengono indicati rispettivamente con Δ , Δ_x , Δ_y .

Il metodo di Cramer consiste nel risolvere il sistema calcolando Δ , Δ_x , Δ_y e procedendo come di seguito riportato:

$$\text{se } \Delta \neq 0 \Rightarrow \Sigma \text{ è determinato e la sua soluzione è } \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases} \text{ cioè la coppia } \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right)$$

$$\text{se } \Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \Delta_x \neq 0 \text{ e } \Delta_y \neq 0 \Rightarrow \Sigma \text{ è impossibile} \\ \text{se } \Delta_x = 0 \text{ e } \Delta_y = 0 \Rightarrow \Sigma \text{ è indeterminato} \end{cases}$$

(con i sistemi lineari numerici, come quelli sinora risolti, se $\Delta = 0$ allora Δ_x e Δ_y sono entrambi nulli o entrambi diversi da zero quindi, quando $\Delta = 0$, possiamo calcolare solo Δ_x oppure Δ_y)

Osservazione. Una parziale giustificazione del metodo di Cramer si può ottenere dal teorema 1.2.1.e dall'osservazione sul legame tra Δ e la proporzionalità tra i coefficienti.

Esempio 2.2.12. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases}$ essendo $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{4}$ il sistema è determinato

calcoliamo i determinanti:

$$\Delta = 12 + 2 = 14$$

$$\Delta_x = 8 - 1 = 7$$

$$\Delta_y = -3 - 4 = -7$$

la soluzione è $\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{14} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ ossia la coppia $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Esempio 2.2.13. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -6x + 10y = 3 \end{cases}$ essendo $\frac{3}{-6} = \frac{-5}{10} \neq \frac{7}{3}$ il sistema è impossibile.

Risolendolo col metodo di Cramer si arriva (ovviamente) alla stessa conclusione infatti:

$$\Delta = 30 - 30 = 0$$

$$\Delta_x = 70 + 15 = 85 \text{ (se vuoi verifica che anche } \Delta_y \neq 0 \text{)}$$

Poichè $\Delta = 0$ e $\Delta_x \neq 0$ il sistema è impossibile.

Esempio 2.2.14. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -5 \\ \frac{3}{2}y - x = 10 \end{cases}$ ricordiamoci di portarlo a forma normale:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -5 \\ -x + \frac{3}{2}y = 10 \end{cases}$$

essendo $\frac{\frac{1}{2}}{-1} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{-5}{10}$ il sistema è indeterminato.

Anche in questo caso, risolviamolo ugualmente, per esercizio, con il metodo di Cramer:

$$\Delta = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta_x = \frac{-15}{2} + \frac{15}{2} = 0 \text{ (se vuoi verifica che anche } \Delta_y = 0 \text{)}$$

Poichè $\Delta = 0$ e $\Delta_x = 0$ il sistema è indeterminato.

Esercizio 2.2.5. Risolvi con il metodo di Cramer i sistemi:

$$\begin{cases} 7x + y = 31 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y = 5x + y \\ 7x + 1 = 8y - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x + 4}{5} - y = -1 \\ \frac{x - 6}{5} + y = -1 \end{cases}$$

I sistemi risolti finora contenevano equazioni numeriche intere.

Vediamo, a questo punto, degli esempi di sistemi contenenti equazioni fratte e parametriche:

Esempio 2.2.15. $\begin{cases} \frac{x - 1}{2y} = 1 \\ \frac{y + 2}{2} = x \end{cases}$

Il sistema, messo in forma normale diventa:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = -2 \end{cases} \quad \text{C.E: } y \neq 0$$

utilizzando uno dei metodi illustrati si ottiene:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ non accettabile} \Rightarrow \text{sistema impossibile}$$

Esempio 2.2.16. $\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 2 \\ \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$ Il sistema, messo in forma normale diventa:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{C.E: } x \neq \pm y$$

risolvendolo si ottiene:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ accettabile} \Rightarrow \text{la coppia } \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ è soluzione}$$

Esempio 2.2.17. $\begin{cases} 2x + y = 3k - 1 \\ kx - (k+1)y = 1 \end{cases}$

Per la risoluzione di questo sistema parametrico consigliamo di ricorrere al metodo di Cramer:

$$\Delta = -2k - 2 - k = -3k - 2$$

$$\Delta_x = -3k^2 - 3k + k + 1 - 1 = -3k^2 - 2k$$

$$\Delta_y = 2 - 3k^2 + k$$

Se $\Delta \neq 0$ cioè $-3k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq -\frac{2}{3}$ il sistema è determinato e la sua soluzione è:

$$\begin{cases} x = \frac{-3k^2 - 2k}{-3k - 2} = \frac{k(-3k - 2)}{-3k - 2} = k \\ y = \frac{-3k^2 + k + 2}{-3k - 2} = \frac{(-3k - 2)(k - 1)}{-3k - 2} = k - 1 \end{cases}$$

Se $\Delta = 0$ cioè $k = -\frac{2}{3}$ si ottiene:

$$\Delta_x = -3 \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Delta_y = 2 - 3 \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \text{il sistema è indeterminato.}$$

Esempio 2.2.18. $\begin{cases} kx - 2y = 4 \\ -2x + ky = -4 \end{cases}$

$$\Delta = k^2 - 4$$

$$\Delta_x = 4k - 8$$

$$\Delta_y = -4k + 8$$

Se $\Delta \neq 0$ cioè $k^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (k+2)(k-2) \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 2 \Rightarrow$ il sistema è determinato e la sua soluzione è:

$$\begin{cases} x = \frac{4k-8}{k^2-4} = \frac{4(k-2)}{(k+2)(k-2)} = \frac{4}{k+2} \\ y = \frac{-4k+8}{k^2-4} = \frac{-4(k-2)}{(k+2)(k-2)} = \frac{-4}{k+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{k+2} \\ y = -\frac{4}{k+2} \end{cases}$$

Se $\Delta = 0$ k può valere 2 oppure -2

se $k = 2 \Rightarrow \Delta_x = 4 \cdot 2 - 8 = 0$ e $\Delta_y = -4 \cdot 2 + 8 = 0 \Rightarrow$ sistema indeterminato

se $k = -2 \Rightarrow \Delta_x = 4 \cdot (-2) - 8 = -16 \neq 0 \Rightarrow$ sistema impossibile

Esercizio 2.2.6. Risolvi i sistemi:

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x^2 - 2y + 3 \\ x - 1 \end{cases} - x + 1 = 4 \quad \begin{cases} \frac{y}{x-y} - \frac{x}{y-x} = \frac{1}{3} \\ \frac{x}{2x-y} - \frac{y}{y-2x} = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = a \\ 4x - 2y = b \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by = 2ab \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

2.3 Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

I metodi illustrati per la risoluzione dei sistemi lineari 2×2 possono essere adattati anche al caso di sistemi lineari con n equazioni e n incognite. In questo paragrafo risolveremo sistemi lineari 3×3 con i metodi di sostituzione o combinazione lineare eventualmente utilizzandoli entrambi in uno stesso esercizio. La risoluzione col metodo di Cramer verrà affrontata nel corso del triennio.

Esempio 2.3.1.
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

Procedendo col metodo di sostituzione esplicitiamo z dalla terza equazione e la sostituiamo nelle rimanenti:

$$\begin{cases} z = 4x + y \\ 2x + 3y + 4x + y = 7 \\ 2x - y + 2(4x + y) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ 6x + 4y = 7 \\ 10x + y = 6 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni costituiscono un 'sottosistema' 2×2 che possiamo risolvere con uno qualsiasi dei metodi studiati. Proponiamo due svolgimenti, il primo col metodo di sostituzione (a) il secondo con quello di combinazione lineare (b).

(a) esplicitiamo y dalla terza equazione dell'ultimo sistema ottenuto e la sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} z = 4x + y \\ y = -10x + 6 \\ 6x + 4(-10x + 6) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ y = -10x + 6 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

sostituendo il valore di x ottenuto nella seconda equazione ricaviamo il valore di y ed infine possiamo calcolare z :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{la soluzione è la terna } \left(\frac{1}{2}, 1, 3 \right)$$

(b) Sostituiamo la seconda equazione con la combinazione lineare che si ottiene moltiplicando la seconda equazione per 1 e la terza per -4 :

$$\begin{cases} z = 4x + y \\ -34x = -17 \\ 10x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ x = \frac{1}{2} \\ 10x + y = 6 \end{cases}$$

Procedendo come nel caso (a) si ottiene, ovviamente, la stessa soluzione $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$

Per risolvere il sistema ci siamo ricondotti ad un 'sotto sistema' 2×2 ; per raggiungere lo stesso scopo avremmo potuto utilizzare anche il metodo di combinazione lineare. Quindi, considerato il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo la prima equazione con la combinazione lineare ottenuta moltiplicando sia la prima equazione che la terza per 1 e sostituiamo la seconda equazione con la combinazione lineare ottenuta moltiplicando la seconda equazione per 1 e la terza per 2.

$$\text{Si ottiene: } \begin{cases} 6x + 4y = 7 \\ 10x + y = 6 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

Ora si può procedere come già visto.

Esercizio 2.3.1. Risolvi i sistemi 3×3 :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 10 \\ x - y - 2z = -1 \\ 9x + y - 4z = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - y + z = 23 \\ 3y + z = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - 6y + z = -1 \\ 6x - 8y - z = -13 \\ x - 3y + 5z = 22 \end{cases}$$

2.4 Problemi

Nel volume Matematica 1 sono stati affrontati e risolti vari problemi ricorrendo alle equazioni in una incognita. A questo punto siamo in grado di risolvere problemi non facilmente riconducibili ad una sola variabile utilizzando più incognite, purchè per esse si determinino più condizioni (equazioni) da mettere a sistema.

Esempio 2.4.1. Trovare due numeri naturali, sapendo che il doppio della loro somma supera di 55 la loro differenza e che la somma dei $\frac{3}{8}$ del maggiore con il doppio del minore è pari a 25

Il problema presenta due incognite x, y

x = numero maggiore

y = numero minore

$x, y \in \mathbb{N}$ (vincolo)

Dal testo del problema possiamo ricavare le seguenti relazioni (equazioni) tra le incognite:

$$2(x + y) = 55 + (x - y), \quad \frac{3}{8}x + 2y = 25$$

che, messe a sistema, consentono di ricavare i valori richiesti:

$$\begin{cases} 2(x + y) = 55 + (x - y) \\ \frac{3}{8}x + 2y = 25 \end{cases} \Rightarrow \text{mettendo in forma normale si ottiene il sistema:}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 55 \\ 3x + 16y = 200 \end{cases}$$

che risolto (con un metodo a scelta che si consiglia di svolgere per esercizio) dà:

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 5 \end{cases} \text{ conforme al vincolo e quindi accettabile.}$$

Esempio 2.4.2. Un autocarro può trasportare fino a 1500kg di merce. In un primo viaggio, a carico pieno, porta 40 sacchi di riso e 15 sacchi di grano. In un altro viaggio vengono trasportati metà sacchi di

riso e una decina in più di quelli di grano: il carico risulta così alleggerito di $400kgp$. Quanto pesa ciascun sacco di riso o di grano?

Indichiamo con x il peso in kgp di un sacco di riso e con y il peso in kgp di un sacco di grano.

$x, y \in \mathbb{Q}^>$ (con tale simbolo si indicano i razionali positivi)

Sfruttando l'informazione relativa al primo viaggio (a carico pieno) si ottiene:

$$40x + 15y = 1500 \Rightarrow 8x + 3y = 300.$$

Sfruttando l'informazione relativa al secondo viaggio (fatta con 20 sacchi di riso e 25 sacchi di grano per un carico di $1100kg$) si ha:

$$20x + 25y = 1100 \Rightarrow 4x + 5y = 220$$

e risolvendo il sistema: $\begin{cases} 8x + 3y = 300 \\ 4x + 5y = 220 \end{cases}$ si ottiene la soluzione accettabile:

$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$$

Esempio 2.4.3. La somma delle età di Paolo, Giovanni e Luca è 21 anni. Sapendo che il sestuplo dell'età di Paolo è pari alla somma delle età degli altri due e che il doppio della somma delle età di Paolo e Giovanni supera di 9 l'età di Luca, quali sono le età dei tre amici?

x = età Paolo in anni

y = età Giovanni in anni

z = età Luca in anni

$$x, y, z \in \mathbb{N}$$

Dal testo si ricava il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 21 & \text{(ricavata dalla somma delle età)} \\ 6x = y + z & \text{ricavata da 'il sestuplo dell'età di...'} \\ 2(x + y) = 9 + z & \text{ricavata da 'il doppio dell'età di...'} \end{cases}$$

che, risolto (è bene farlo per esercizio perchè 'fidarsi è bene, ma...'), dà la soluzione accettabile:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 11 \end{cases}$$

Esercizio 2.4.1. 1. Qual è la frazione che risulta uguale a 2 se si aggiunge 11 al suo numeratore e risulta uguale ad 1 se si sottrae 4 al suo denominatore?

2. Il fattorino di una ditta provvede a presentare allo sportello di un ufficio postale un certo numero di lettere raccomandate, un certo numero di 'espressi' e 36 lettere normali. Determinare le raccomandate e gli 'espressi' sapendo che il numero delle prime è $\frac{9}{26}$ del totale e che il loro triplo supera di 18 la differenza tra il totale e il numero degli 'espressi'

3. Dieci anni fa l'età di una persona era il doppio di quella dell'altra mentre tra 16 anni, l'età della prima sarà $\frac{4}{3}$ di quella della seconda. Calcolare l'età attuale di ciascuna delle due persone.

2.5 Esercizi riepilogativi

1.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4x - 6y = 4 \end{cases} \begin{cases} x + 2y = 14 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \quad \text{[indeterminato ; (4, 5)]}$$
2.
$$\begin{cases} x = \frac{y-4}{3} + 1 \\ y = \frac{x+3}{3} \end{cases} \begin{cases} \frac{2y}{3} + x + 1 = 0 \\ \frac{y+1}{2} + \frac{x-1}{3} + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{[(0, 1) ; (1, -3)]}$$
3.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y \left(\frac{x}{y} + 3 \right) = 4 \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{y(y-x-1)}{y+1} + x - y + 1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{[(1, 1) ; impossibile]}$$
4.
$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y-1} \\ \frac{1}{x-3} = \frac{y}{y-1} \end{cases} \begin{cases} \frac{2x-y}{x+1} = \frac{1}{3} \\ 10x - 6y = 2 \end{cases} \quad \text{[(2, -1) ; indeterminato]}$$
5.
$$\begin{cases} (y+2)(y-3) - (y-2)^2 + (x+1)^2 = (x+3)(x-3) - \frac{1}{2} \\ \left(y - \frac{1}{2}\right) \left(y + \frac{1}{4}\right) - (y-1)^2 + 2x + 3 = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{[(-1, \frac{1}{2})]}$$
6.
$$\begin{cases} 2(x-1)(x+1) - 3(x-y) = (x-2)(2x+1) \\ 3y - 2x + (x-1)(x+2) = \frac{1}{2}(2x-1)^2 \end{cases} \quad \text{[(\frac{9}{4}, 0)]}$$
7.
$$\begin{cases} \frac{y+1}{x-3} + 3 = \frac{3x^2-11}{x^2-9} + \frac{y-1}{x+3} \\ \frac{y+x-2}{8} - \frac{x-y+1}{6} = \frac{1}{12} \end{cases} \quad \text{[(2, 2)]}$$
8.
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y = 18 \\ x + 2z = 2 \end{cases} \begin{cases} 2x = 1 - y \\ z = 2 - 3y \\ x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{[(8, 2, -3) ; (\frac{4}{25}, \frac{17}{25}, -\frac{1}{25})]}$$
9.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x = 6 - 2y - z \\ z = 3 - \frac{y}{2} \end{cases} \begin{cases} z = 7 - 3y \\ y = 8 - 2x \\ 8x - y + z = 23 \end{cases} \quad \text{[impossibile ; (3, 2, 1)]}$$

Discuti i sistemi parametrici:

10.
$$\begin{cases} 2x - 3ay = 2a \\ x - ay = 2 - a \end{cases} \quad \text{[se } a = 0 \text{ imp.; se } a \neq 0 \text{ (} 6 - 5a, \frac{4(1-a)}{a} \text{)]}$$
11.
$$\begin{cases} kx + y = 2 \\ 4x + ky = 4 \end{cases} \quad \text{[se } k = -2 \text{ imp.; se } k = 2 \text{ ind.; se } k \neq \pm 2 \text{ (} \frac{2}{k+2}, \frac{4}{k+2} \text{)]}$$
12.
$$\begin{cases} (a-2)x + 3y = 6 \\ (a-1)x + 4y = 8 \end{cases} \quad \text{[se } a = 5 \text{ ind.; se } a \neq 5 \text{ (0, 2)]}$$

1. Determinare due numeri naturali il cui quoziente è 5 e la cui differenza è 12 [15 3]
2. Determinare un numero naturale di due cifre sapendo che la loro somma è 12 e che, invertendole, si ottiene un numero che supera di 6 la metà di quello iniziale [84]
3. Determinare la frazione che diventa uguale a $\frac{5}{6}$ aumentando i suoi termini di 2 e diventa invece $\frac{1}{2}$, se i suoi termini si diminuiscono di 2. $\left[\frac{3}{4}\right]$
4. La somma delle età di due coniugi è 65 anni; un settimo dell'età del marito è uguale ad un sesto dell'età della moglie. Determinare le età dei coniugi. [35 30]
5. Un negozio ha venduto scatole contenenti 6 fazzoletti ciascuna ed altre contenenti 12 fazzoletti ciascuna, per un totale di 156 fazzoletti. Il numero delle confezioni da 12 ha superato di 1 la metà di quello delle confezioni da 6. Quante confezioni di ogni tipo si sono vendute? [12 7]
6. Un numero naturale diviso per 3, dà un certo quoziente e resto 1. Un altro numero naturale, diviso per 5, dà lo stesso quoziente e resto 3. Sapendo che i due numeri hanno per somma 188, determinali e calcola il quoziente. [70 118 23]
7. Un secchio pieno di sabbia pesa complessivamente 9 kg, riempito per metà di sabbia pesa 5 kg. Quanto pesa il secchio vuoto? [1 kg]
8. Martino dice a Paola: 'Se mi dai 4 delle tue biglie, ne avremmo lo stesso numero'. Paola risponde: 'Se tu me ne dai 8 io ne avrò il doppio delle tue'. Quante biglie hanno Martino e Paola? [32 40]
9. Quali valori si devono assegnare alle lettere a e b del polinomio $6x^2 + ax + b$ perchè si annulli per $x = \frac{1}{2}$ e per $x = -\frac{2}{3}$ [$a = 1$ $b = -2$]
10. Nella città di Nonfumo gli unici negozi sono tabaccherie e latterie. L'anno scorso le tabaccherie erano $\frac{2}{3}$ delle latterie; quest'anno due tabaccherie sono diventate latterie cosicchè ora le tabaccherie sono solo $\frac{9}{16}$ delle latterie (dall'anno scorso a quest'anno il numero complessivo dei negozi di Nonfumo è rimasto lo stesso). Quante latterie c'erano l'anno scorso a Nonfumo? [30]
11. (IMPEGNATIVO) Un capitano vuole disporre il suo plotone di soldati in modo che essi formino un quadrato. Al primo tentativo riesce ad ottenere la figura desiderata ma avanza 30 soldati; al secondo, per completare il quadrato, avrebbe bisogno di 23 soldati in più. Determinare il numero di soldati del 'poco matematico' capitano. [706]

Capitolo 3

I NUMERI REALI

In questo capitolo ci proponiamo di introdurre l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali come ampliamento e completamento dei razionali senza la pretesa di voler trattare in modo esauriente tale argomento, che verrà ripreso nei prossimi anni, e senza la rigorosità cui non può rinunciare ogni buon matematico, ma che, in questo anno scolastico, porterebbe ad una eccessiva astrazione e complessità. Ci accontenteremo dunque di dare l'idea della necessità di ammettere l'esistenza di 'altri' numeri oltre ai razionali e di come questi numeri possano essere prima definiti e poi approssimati. Questo modo di procedere dovrebbe essere familiare agli studenti perchè è in realtà quello seguito nei precedenti corsi di studi quando, a partire dai naturali \mathbb{N} sono stati introdotti e definiti gli interi \mathbb{Z} e i razionali \mathbb{Q} . In particolare, a partire da \mathbb{N} , poichè il risultato di una sottrazione non è sempre naturale, per esempio $5 - 8 \notin \mathbb{N}$, si sono definiti gli opposti dei numeri naturali che, uniti a questi ultimi, costituiscono il nuovo insieme dei numeri interi \mathbb{Z} ; in tal modo resta definita l'operazione di sottrazione qualsiasi siano i suoi termini, infatti, con riferimento all'esempio precedente, $5 - 8 = -3$. Analogamente, poichè il risultato di una divisione non è sempre intero, per esempio $7 : 2 \notin \mathbb{Z}$, si è resa necessaria la definizione dei numeri razionali \mathbb{Q} come ulteriore ampliamento di \mathbb{Z} . Sono stati pertanto introdotti nuovi numeri per rendere sempre possibile la divisione tra interi, ovviamente con divisore non nullo; con riferimento alla divisione $7 : 2$ il risultato è un nuovo numero la cui scrittura formale è $\frac{7}{2}$.

Come abbiamo visto nel corso del primo anno, un numero razionale può essere rappresentato anche con una scrittura decimale. I numeri decimali ottenuti sono sempre o con un numero finito di cifre dopo la virgola o infinito ma periodico, comunque esprimibili con una scrittura decimale finita. Se consideriamo, infatti, il numero razionale $\frac{1051}{495}$ la sua forma decimale è $2,12323232 \dots$ nella quale ogni cifra è nota; ciò consente di usare la scrittura formale finita $2,1\overline{23}$.

A questo punto è spontaneo chiederci se esistano numeri decimali illimitati aperiodici (che quindi $\notin \mathbb{Q}$) o, parimenti, se si possano incontrare operazioni che non abbiano il risultato all'interno dei numeri razionali per le quali sia dunque necessario l'ampliamento di tale insieme.

A tale proposito ci proponiamo di determinare un numero positivo α che abbia per quadrato 2 (cioè $\alpha^2 = 2$) e allo scopo descriviamo un possibile procedimento per costruirlo.

Poichè $1^2 = 1 < 2$ e $2^2 = 4 > 2 \Rightarrow 1 < \alpha < 2 \Rightarrow \alpha = 1, \dots$

Per determinare la prima cifra decimale di α è sufficiente calcolare i quadrati di

$$1, 1; 1, 2; 1, 3; \dots; 1, 9$$

che sono

$$1, 21; 1, 44; 1, 69; 1, 96; 2, 25; \dots; 3, 61$$

Poichè $1, 4^2 = 1, 96 < 2$ e $1, 5^2 = 2, 25 > 2 \Rightarrow 1, 4 < \alpha < 1, 5 \Rightarrow \alpha = 1, 4 \dots$

Per determinare la seconda cifra decimale di α possiamo procedere allo stesso modo calcolando i quadrati di 1,41; 1,42; ...; 1,49 ed ottenere:

poichè $1,41^2 = 1,9881 < 2$ e $1,42^2 = 2,0164 > 2 \Rightarrow 1,41 < \alpha < 1,42 \Rightarrow \alpha = 1,41\dots$

Continuando questo procedimento (utilizzando un qualsiasi strumento informatico) si determina che, poichè $1,414^2 < 2$ e $1,415^2 > 2 \Rightarrow 1,414 < \alpha < 1,415 \Rightarrow \alpha = 1,414\dots$

⋮

Poichè $1,4142135^2 < 2$ e $1,4142136^2 > 2 \Rightarrow 1,4142135 < \alpha < 1,4142136 \Rightarrow \alpha = 1,4142135\dots$

⋮

Poichè $1,414213562^2 < 2$ e $1,414213563^2 > 2 \Rightarrow 1,414213562 < \alpha < 1,414213563 \Rightarrow \alpha = 1,414213562\dots$

In tal modo possiamo continuare ottenendo per α quante cifre decimali si desiderano. Analizzando le cifre decimali di α ricavate non si riconosce alcuna periodicità. Ciò porta a concludere che α o non è un numero periodico o, se periodico, ha un periodo con molte cifre. Non è ovviamente possibile rispondere alla questione continuando il procedimento descritto per la costruzione di α . E' necessaria dunque una dimostrazione formale che consenta di stabilire se α è periodico e quindi $\in \mathbb{Q}$ oppure se α , non essendo periodico, è un numero che ancora non conosciamo.

Teorema 3.0.1. Se $\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo.

Sia $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha = \frac{m}{n}$ con m, n primi tra loro.

Da $\alpha^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ pari $\Rightarrow m$ pari $\Rightarrow m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Da $m^2 = 2n^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ pari $\Rightarrow n$ pari e ciò contraddice l'ipotesi che m ed n siano primi tra loro perchè entrambi pari. \square

In conclusione il numero cercato α è un numero illimitato aperiodico per il quale non possiamo dare una scrittura decimale completa, ma solo una approssimazione avente il numero di cifre decimali che si desidera. Per indicare α con una scrittura formale finita non possiamo utilizzare la forma decimale perciò introduciamo un nuovo simbolismo, nel nostro caso $\alpha = \sqrt{2}$

Con il teorema abbiamo dimostrato che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e che quindi esistono numeri decimali aperiodici. L'insieme di questi nuovi numeri si chiama *insieme dei numeri irrazionali*. Essi, rappresentati in un sistema di ascisse, riempiono sulla retta i 'buchi' ai quali abbiamo accennato nel primo volume lasciati dai numeri razionali. L'unione dei numeri razionali e degli irrazionali costituisce l'*insieme dei numeri reali* che si indica con \mathbb{R} . Esso si dice *completo* perchè, rappresentato in un sistema di ascisse, copre tutta la retta.

Altri numeri reali irrazionali si possono ricavare in modo analogo a quello seguito per $\sqrt{2}$:

β tale che $\beta^2 = 5 \Rightarrow \beta = 2,236\dots$ indicato con $\sqrt{5}$.

γ tale che $\gamma^3 = 30 \Rightarrow \gamma = 3,107\dots$ indicato con $\sqrt[3]{30}$.

Non dobbiamo però pensare che tutti i numeri irrazionali siano definiti nel modo precedente; ne esistono altri, ed un esempio è $3,14\dots$ indicato col simbolo π ottenuto dal rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.

Capitolo 4

RADICALI

4.1 Generalità

Definizione 4.1.1. Dati $n \in \mathbb{N}^*$ ed $a \in \mathbb{R}^*$, si dice radice ennesima di a (o radicale ennesimo di a) quel numero reale b , se esiste, concorde con a , tale che $b^n = a$.

Il numero b si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$ che si legge radice ennesima di a .

n si dice indice di radice

$\sqrt{\quad}$ si dice segno di radice

a si dice radicando.

In sintesi:

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \quad \text{con } b \text{ e } a \text{ concordi}$$

Conveniamo che:

1) $\sqrt[n]{0} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ in quanto $0^n = 0$

(in tal modo si estende la definizione anche al caso in cui il radicando sia nullo)

2) $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ per economicizzare la scrittura dato che le radici quadrate sono le più utilizzate.

Osserviamo che, dalla definizione, risultano ovvie le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt[n]{a} = a$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Esempio 4.1.1.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ infatti } 2^3 = 8$$

$$\sqrt{9} = 3 \text{ infatti } 3^2 = 9$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1 \text{ infatti } (-1)^5 = -1$$

$$\sqrt[4]{-16} \nexists \text{ in quanto nessun numero elevato alla quarta dà } -16$$

$\sqrt{2}$ esiste ed è positiva infatti $(\sqrt{2})^2 = 2$ come abbiamo visto nel capitolo sui reali, ma per essa non esiste una scrittura semplificata come nei primi tre casi.

$$\sqrt[4]{\frac{625}{81}} = \frac{5}{3} \text{ infatti } \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$$

$$\sqrt[7]{-\frac{1}{128}} = -\frac{1}{2} \text{ infatti } \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}$$

Osservazione. Analizzando l'esempio proposto è immediato generalizzare che:

-se n è pari, $\sqrt[n]{a}$ esiste solo quando $a \geq 0$ (infatti nessuna potenza con esponente pari è negativa) ed il suo valore è positivo o nullo.

-se n è dispari $\sqrt[n]{a}$ esiste $\forall a$ ed il suo valore è concorde con a .

-se n è dispari $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ in quanto $(\sqrt[n]{-a})^n = (-\sqrt[n]{a})^n = -a$, pertanto il segno $-$ può essere portato fuori da una radice di indice dispari.

Per estendere la definizione di radicale ad una espressione algebrica bisogna procedere con cautela perchè potrebbe presentarsi il caso che esso non esista per tutti i valori che si sostituiscono alle lettere presenti; infatti, ricordando l'osservazione precedente, potrebbero esserci dei valori che rendono negativo il radicando di una radice di indice pari. Per chiarire questo concetto si consideri $\sqrt[n]{x+3}$, essa esiste per $x=1, x=0, x=1/2$ mentre non esiste per $x=-4, x=-10/3$ (provare a verificarlo)

E' necessario quindi, in presenza di un radicale di una espressione algebrica, determinare l'insieme dei valori che possono assumere le lettere affinché esso esista. Tale insieme viene detto *campo di esistenza* (abbreviato con C.E.) e le condizioni per determinarlo vengono dette *condizioni di esistenza* (ancora abbreviate con C.E.).

La determinazione delle C.E. di $\sqrt[n]{A}$, in base alla definizione di radicale, può essere così sintetizzata:

se n pari \Rightarrow C.E.: $A \geq 0$ (purchè A esista)

se n dispari \Rightarrow C.E.: $\forall A$ (purchè A esista).

Esempio 4.1.2. Dato il radicale $\sqrt{x-2}$, essendo l'indice pari, il suo campo di esistenza si ottiene imponendo $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Dunque C.E.: $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$ o più sinteticamente C.E.: $x \geq 2$.

Diversamente per il radicale $\sqrt[3]{x-2}$, essendo l'indice dispari, si ha C.E.: \mathbb{R} (oppure $\forall x$)

Esempio 4.1.3. I campi di esistenza dei seguenti radicali :

$$a) \sqrt[4]{x^2-1}, \quad b) \sqrt[3]{\frac{x-3}{2x-1}}, \quad c) \sqrt{3-|x|}, \quad d) \sqrt[4]{\frac{(x^2-6x+9)(x^2+x)}{|2-x|(1-x)}}$$

si ottengono rispettivamente nei seguenti modi: (risolvi le disequazioni per esercizio)

a) C.E. $x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$

b) C.E. $2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

c) C.E. $3-|x| \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

d) C.E. $\frac{(x-3)^2 x(x+1)}{|2-x|(1-x)} \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x = 3$

Nel caso in cui un'espressione contenga più radicali le condizioni di esistenza si ottengono intersecando quelle dei singoli radicali; per determinarle sarà quindi sufficiente risolvere il sistema che contiene tutte le condizioni imposte per ciascun radicale.

Esempio 4.1.4. Data l'espressione:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+2}{2x+1}} - \sqrt{3-x} \cdot \sqrt[10]{2x+1}$$

le C.E. si determinano risolvendo:

$$\begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 3$$

Esercizio 4.1.1. Determina le C.E. dei seguenti radicali:

$$\sqrt[3]{4x-9}; \quad \sqrt{\frac{10}{2x-5}}; \quad \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}; \quad \sqrt{-x^2-5}; \quad \sqrt[6]{\frac{9-5x}{4+3x}}; \quad \sqrt[5]{\frac{9x^2+12x+4}{7-x}}; \quad \sqrt{|x|-3}$$

A questo punto ci proponiamo di semplificare le espressioni algebriche contenenti radicali e per farlo è necessario estendere le operazioni definite per le espressioni algebriche intere e fratte (semplificazione, addizione, moltiplicazione, potenza) anche alle radici. La giustificazione delle regole che d'ora in avanti introdurremo si basa sulla seguente importante implicazione:

$$(\circ) \quad X^k = Y^k \Rightarrow X = Y \text{ purchè } X \text{ e } Y \text{ esistano e siano concordi}$$

Proprietà invariante

$${}^{n \cdot p}\sqrt{A^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{A^m} \quad \forall n, m, p \in \mathbb{N}^* \text{ e purchè i radicali esistano e siano concordi}$$

infatti, posto $X = \sqrt[n \cdot p]{A^{m \cdot p}}$ e $Y = \sqrt[n]{A^m}$ si ha:

$$X^{np} = (\sqrt[n \cdot p]{A^{m \cdot p}})^{np} = A^{mp}$$

$$Y^{np} = (\sqrt[n]{A^m})^{np} = [(\sqrt[n]{A^m})^n]^p = [A^m]^p = A^{mp}$$

poichè $X^{np} = Y^{np}$ \Rightarrow $X = Y$ essendo X e Y concordi,

dunque $\sqrt[n \cdot p]{A^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{A^m}$ per (o) con $k=np$

4.2 Semplificazione di un radicale

L'uguaglianza appena dimostrata consente la *semplificazione di un radicale* così da rendere primi tra loro l'indice della radice e l'esponente del radicando.

Esempio 4.2.1.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{9} &= \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3} \\ \sqrt[6]{16} &= \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[15]{\frac{27}{64}} &= \sqrt[15]{\frac{3^3}{2^6}} = \sqrt[15]{\left(\frac{3}{2^2}\right)^3} = \sqrt[5]{\frac{3}{4}} \\ \sqrt[3]{-125} &= \sqrt[3]{(-5)^3} = -5 \end{aligned}$$

E' importante ribadire (e sottolineare) che nella semplificazione di una radice è indispensabile che il radicale risultante continui ad esistere e sia concorde con quello di partenza per non incorrere in errori grossolani come nei seguenti casi:

$\sqrt[4]{(-7)^2} = \sqrt{-7}$ è ovviamente errata perchè, mentre il primo radicale esiste ed è positivo, il secondo non esiste

$\sqrt[6]{(-7)^2} = \sqrt[3]{-7}$ è anch'essa falsa perchè, mentre il primo radicale esiste ed è positivo, il secondo esiste ma è negativo.

In tali casi dovremo procedere con cautela e così operare:

$$\sqrt[4]{(-7)^2} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt[6]{(-7)^2} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[3]{7} \text{ mantenendo in tal modo l'esistenza e la concordanza di segno.}$$

L'estensione della semplificazione a un radicale di una espressione algebrica è illustrata dai seguenti esempi:

Esempio 4.2.2.

$$\sqrt[10]{32x^5}$$

$$\text{C.E. } 32x^5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\sqrt[10]{32x^5} = \sqrt[10]{(2x)^5} = \sqrt{2x} \text{ il risultato rispetta le C.E. e conserva il segno iniziale.}$$

Esempio 4.2.3.

$$\sqrt[4]{x^2}$$

$$\text{C.E. } x^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$$

In questo caso la semplificazione non va eseguita con leggerezza perchè l'uguaglianza $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$ è vera solo se $x \geq 0$, altrimenti \sqrt{x} non esisterebbe.

Le C.E. consentono tuttavia di assegnare alla x qualsiasi valore reale, dovremo dunque procedere formalmente come segue:

$$\sqrt[4]{x^2} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ricordando la definizione di modulo, possiamo sintetizzare:

$$\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$$

Esempio 4.2.4.

$$\sqrt[6]{x^2}$$

$$\text{C.E. } x^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$$

Anche in questo caso l'uguaglianza $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ è vera solo se $x \geq 0$ altrimenti $\sqrt[3]{x}$ (negativa) non sarebbe concorde con $\sqrt[6]{x^2}$ (positiva)

Per ottenere un'uguaglianza corretta per ogni valore reale di x , come stabilito dalle C.E. iniziali, dovremo procedere come nell'esempio precedente, pertanto:

$$\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}$$

Esempio 4.2.5.

$$\sqrt[9]{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \sqrt[9]{(x-2)^3}$$

$$\text{C.E. } \forall x$$

$$\sqrt[9]{(x-2)^3} = \sqrt[3]{x-2} \text{ il risultato rispetta le C.E. e conserva il segno iniziale.}$$

Esempio 4.2.6.

$$\sqrt[8]{x^6 - 2x^5 + x^4} = \sqrt[8]{x^4(x-1)^2}$$

$$\text{C.E. } x^4(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$$

$$\sqrt[8]{x^4(x-1)^2} = \sqrt[8]{[x^2(x-1)]^2} = \sqrt[4]{x^2|x-1|} \text{ (rifletti sulla necessità del modulo)}$$

Esempio 4.2.7.

$$\sqrt[12]{(x+4)^8}$$

$$\text{C.E. } (x+4)^8 \geq 0 \Rightarrow \forall x$$

$$\sqrt[12]{(x+4)^8} = \sqrt[3]{(x+4)^2} \text{ il risultato rispetta le C.E. e conserva il segno iniziale.}$$

Osservazione. Dagli esempi svolti è possibile convincerci che, solo se si semplifica per un fattore pari può sorgere l'esigenza di usare il modulo per garantire l'uguaglianza.

Esercizio 4.2.1. Semplifica i seguenti radicali:

$$\sqrt{x^4}; \quad \sqrt{y^2}; \quad \sqrt[3]{y^3}; \quad \sqrt[4]{(9x^2 + 30x + 25)^2}; \quad \sqrt[9]{x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3}; \quad \sqrt[3]{27a^3b^6(a-1)^9}$$

$$\sqrt[6]{a^{12}b^6}; \quad \sqrt{a^2 + 4}; \quad \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4}; \quad \sqrt[6]{\frac{4x^4y^2}{9x^2 - 6x + 1}}; \quad \sqrt[8]{\frac{(a^3 - b^3)^2}{a^2 - 2ab + b^2}}$$

L'uguaglianza $\sqrt[n \cdot p]{A^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{A^m}$ che ci ha permesso di semplificare un radicale, letta simmetricamente cioè $\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[n \cdot p]{A^{m \cdot p}}$ consente di portare un radicale ad un indice multiplo di quello iniziale.

Esempio 4.2.8.

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \cdot 2]{3^2} = \sqrt[8]{9}$$

$$\sqrt[3]{-5} = \sqrt[3 \cdot 3]{(-5)^3} = \sqrt[9]{-125} = -\sqrt[9]{125}$$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \sqrt[5 \cdot 2]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[10]{\frac{4}{9}}$$

Anche con questa operazione è necessario procedere con cautela per evitare errori del tipo:

$\sqrt[7]{-3} = \sqrt[7]{2}\sqrt[7]{(-3)^2} = \sqrt[14]{9}$ uguaglianza falsa in quanto il primo radicale è discorde con gli altri;
 $\sqrt[7]{-3} = \sqrt[7]{2}\sqrt[7]{-3^2} = \sqrt[14]{-9}$ uguaglianza falsa in quanto gli ultimi due radicali non esistono.

In tal caso dobbiamo così operare :

$\sqrt[7]{-3} = -\sqrt[7]{3} = -\sqrt[7]{2}\sqrt[7]{3^2} = -\sqrt[14]{9}$ mantenendo in tal modo l'esistenza e la concordanza di segno.

Estendiamo ora la procedura ai radicali di espressioni algebriche illustrando i seguenti esempi:

Esempio 4.2.9.

Trasformare \sqrt{x} in una radice con indice 6

C.E. $x \geq 0$

$\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3}$ il risultato rispetta le C.E. e conserva il segno iniziale.

Esempio 4.2.10.

Trasformare $\sqrt[4]{2(x+10)}$ in una radice di indice 8

C.E. $2(x+10) \geq 0 \Rightarrow x \geq -10$

$\sqrt[4]{2(x+10)} = \sqrt[8]{(2(x+10))^2} = \sqrt[8]{4(x+10)^2}$ il risultato rispetta le C.E. e conserva il segno iniziale.

Esempio 4.2.11.

Trasformare $\sqrt[3]{\frac{4-x}{(2x+3)^2}}$ in una radice di indice 15

C.E. $(2x+3)^2 \neq 0 \Rightarrow \forall x \neq -\frac{3}{2}$

$\sqrt[3]{\frac{4-x}{(2x+3)^2}} = \sqrt[15]{\left(\frac{4-x}{(2x+3)^2}\right)^5} = \sqrt[15]{\frac{(4-x)^5}{(2x+3)^{10}}}$ il risultato rispetta le C.E. e conserva il segno iniziale.

Esempio 4.2.12.

Trasformare $\sqrt[5]{6-x}$ in una radice di indice 20

C.E. $\forall x$

Se trasformassimo semplicisticamente il radicale in $\sqrt[20]{(6-x)^4}$ commetteremmo un errore perchè il risultato sarebbe positivo a differenza di quanto accade per $\sqrt[5]{6-x}$ (che è positivo solo se $6-x > 0 \Rightarrow x < 6$)

Per la trasformazione è quindi necessario conoscere il segno del radicando per poter procedere mantenendo la concordanza di segno. Operativamente:

segno del radicando $6-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$ quindi

$$\sqrt[5]{6-x} = \begin{cases} \sqrt[20]{(6-x)^4} & \text{se } x \leq 6 \\ -\sqrt[20]{(6-x)^4} & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

Esempio 4.2.13.

Trasformare $\sqrt[3]{\frac{4(x-1)}{7-x}}$ in una radice di indice 6

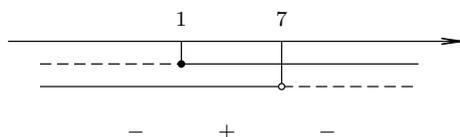
C.E. $7-x \neq 0 \Rightarrow \forall x \neq 7$

Anche in questo caso si presenta il problema dell'esercizio precedente ed è dunque necessario studiare il segno del radicando.

Segno del radicando $\frac{4(x-1)}{7-x} \geq 0$

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$7 - x > 0 \Rightarrow x < 7$$



Il grafico evidenzia che il radicando può essere sia positivo che negativo; per mantenere la concordanza di segno sia hanno dunque due casi:

$$\sqrt[3]{\frac{4(x-1)}{7-x}} = \begin{cases} \sqrt[6]{\frac{16(x-1)^2}{(7-x)^2}} & \text{se } 1 \leq x < 7 \\ -\sqrt[6]{\frac{16(x-1)^2}{(7-x)^2}} & \text{se } x < 1 \vee x > 7 \end{cases}$$

Esempio 4.2.14.

Trasformare $\sqrt[7]{x^2 + 4}$ in una radice di indice 14

C.E. $\forall x$

In questo caso, poichè il segno del radicando è sempre positivo, si ha un solo caso:

$$\sqrt[7]{x^2 + 4} = \sqrt[14]{(x^2 + 4)^2}$$

Osservazione. Gli esempi svolti ci fanno comprendere che, solo nella trasformazione di un radicale da indice dispari a indice pari è necessario studiare il segno del radicando per distinguere eventualmente due casi.

Esercizio 4.2.2. Riconduci ad uno stesso indice i radicali di ciascuno dei seguenti gruppi:

$$\sqrt[8]{2^3 \cdot 3^2}; \quad \sqrt[12]{3^2 \cdot 5^3}; \quad \sqrt[10]{2 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{a^2 b^4 c}; \quad \sqrt[6]{a^3 b^2 c^4}; \quad \sqrt[8]{a^2 b^3 c}; \quad \sqrt[10]{a^5 b^{15}}$$

$$\sqrt{b+1}; \quad \sqrt[4]{b-5}; \quad \sqrt[8]{b-2}$$

$$\sqrt[3]{x^2 + 5x - 6}; \quad \sqrt{x^2 + x - 12}$$

$$\sqrt[4]{\frac{15x-7}{x-6}}; \quad \sqrt[6]{\frac{3-x}{9x+2}}$$

4.3 Moltiplicazione e divisione tra radicali

La moltiplicazione e la divisione tra radicali, fatte salve le C.E., seguono le seguenti regole:

$$(1) \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A \cdot B}$$

$$(2) \sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A : B}$$

infatti, posto $X = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ e $Y = \sqrt[n]{A \cdot B}$ si ha:

$$X^n = \left(\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \right)^n = \left(\sqrt[n]{A} \right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{B} \right)^n = A \cdot B \text{ e}$$

$$Y^n = \left(\sqrt[n]{A \cdot B} \right)^n = A \cdot B$$

poichè $X^n = Y^n$ si deduce che $X = Y$, essendo X e Y concordi, da cui la (1).

Analogamente per la (2)

Esempio 4.3.1.

$$\begin{aligned}\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} &= \sqrt{5 \cdot \frac{7}{5}} = \sqrt{7} \\ \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-2} &= \sqrt[3]{-8} = -2 \\ \sqrt[4]{\frac{125}{3}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} &= \sqrt[4]{\frac{125}{3} : \frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{125}{3} \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} \\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}} : \left(\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-\frac{3}{2}} \right) &: \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{-4 \cdot \frac{3}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4} = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Esempio 4.3.2.

$$\begin{aligned}\bullet \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{3-x}{4x}} &= \\ \text{C.E. } \begin{cases} 2x \geq 0 \\ \frac{3-x}{4x} \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow 0 < x \leq 3 \text{ (lo si verifichi per esercizio)} \\ &= \sqrt{2x \cdot \frac{3-x}{4x}} = \sqrt{\frac{3-x}{2}} \\ \bullet \sqrt[4]{\frac{x}{x^2-1}} : \sqrt[4]{\frac{x}{x^2+2x+1}} &= \sqrt[4]{\frac{x}{(x-1)(x+1)}} : \sqrt[4]{\frac{x}{(x+1)^2}} = \\ \text{C.E. } \begin{cases} \frac{x}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \\ \frac{x}{(x+1)^2} > 0 \end{cases} &\Rightarrow x > 1 \text{ (solo } > \text{ perchè un divisore non può annullarsi)} \\ &= \sqrt[4]{\frac{x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x}} = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \\ \bullet \sqrt[5]{3-x} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{x}{x^2-9}} : \sqrt[5]{\frac{x-2}{x+3}} \right) &= \sqrt[5]{3-x} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{x}{(x+3)(x-3)}} : \sqrt[5]{\frac{x-2}{x+3}} \right) = \\ \text{C.E. } \begin{cases} \forall x \\ \forall x \neq \pm 3 \\ \forall x \neq 2; -3 \end{cases} &\Rightarrow \forall x \neq \pm 3; 2 \\ &= \sqrt[5]{3-x} \cdot \sqrt[5]{\frac{x}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x+3}{x-2}} = \sqrt[5]{(3-x) \cdot \frac{x}{(x-3)(x-2)}} = \sqrt[5]{-\frac{x}{x-2}} = -\sqrt[5]{\frac{x}{x-2}} \text{ (oppure } \sqrt[5]{\frac{x}{2-x}}\end{aligned}$$

Abbiamo sinora eseguito moltiplicazioni e divisioni tra radicali aventi lo stesso indice; nel caso in cui ciò non si verifichi, sarà sufficiente portare tutti i radicali ad uno stesso indice che sia multiplo comune degli indici iniziali e ovviamente tra i multipli comuni possibili converrà scegliere il più piccolo, detto *minimo comune indice* (m.c.i.)

Questo procedimento dovrà tener conto di quanto descritto relativamente alla trasformazione di un radicale in uno ad esso uguale, con indice multiplo; sarà richiesta pertanto la stessa cautela qualora delle radici con indice dispari vengano portate ad indice pari.

Esempio 4.3.3.

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2}$$

$$\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \left(-\sqrt[12]{2^4}\right) \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = -\sqrt[12]{2^4 \cdot \frac{1}{2^3}} = -\sqrt[12]{2}$$

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt[4]{\frac{32}{9}} = \sqrt[12]{(2^2)^4} \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^6} : \sqrt[12]{\left(\frac{2^5}{3^2}\right)^3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{3^6}{2^{15}}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$$

Esempio 4.3.4.

$$\bullet \sqrt[3]{\frac{x}{2x+1}} : \sqrt[5]{2x} =$$

$$\text{C.E.} \begin{cases} \forall x \neq -\frac{1}{2} \\ \forall x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \neq 0; -\frac{1}{2}$$

$$= \sqrt[15]{\left(\frac{x}{2x+1}\right)^5} : \sqrt[15]{(2x)^3} = \sqrt[15]{\frac{x^5}{(2x+1)^5} \cdot \frac{1}{8x^3}} = \sqrt[15]{\frac{x^2}{8(2x+1)^5}}$$

$$\bullet \sqrt[4]{5(3x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1-3x}} =$$

$$\text{C.E.} \begin{cases} (3x-1)^2 \geq 0 \\ \frac{1-x}{1-3x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x < \frac{1}{3} \vee x \geq 1$$

$$= \sqrt[4]{5(3x-1)^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{(1-x)^2}{(1-3x)^2}} = \sqrt[4]{5(3x-1)^2 \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-3x)^2}} = \sqrt[4]{5(1-x)^2}$$

$$\bullet \sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} \cdot \sqrt{3-x} =$$

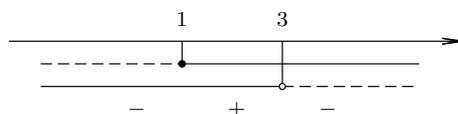
$$\text{C.E.} \begin{cases} \forall x \neq 3 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x < 3$$

Poichè il m.c.i. è 6 il primo radicale verrà trasformato in uno con indice pari, è dunque necessario studiare il segno del suo radicando:

$$\frac{x-1}{3-x} \geq 0$$

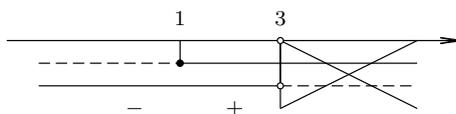
$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$3-x > 0 \rightarrow x < 3$$



Il grafico evidenzia che il radicando può essere sia positivo che negativo.

Prima di procedere alla distinzione dei due casi conseguenti, è indispensabile controllare se essi sono compatibili con le C.E. Poichè queste ultime richiedono $x < 3$, si ottengono effettivamente due casi distinti, uno per $x < 1$ ed uno per $1 \leq x < 3$. Quest'ultimo controllo di compatibilità tra il segno del radicando e le C.E., può essere facilitato eliminando, nel grafico di segno precedente, i valori esclusi dal campo di esistenza. Pertanto tale grafico assumerà la seguente forma:



L'osservazione di tale grafico consente il calcolo del prodotto:

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} \cdot \sqrt{3-x} \begin{cases} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{(3-x)^2}} \cdot \sqrt[6]{(3-x)^3} = \sqrt[6]{(x-1)^2(3-x)} & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ -\sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{(3-x)^2}} \cdot \sqrt[6]{(3-x)^3} = -\sqrt[6]{(x-1)^2(3-x)} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Analizzando gli esempi svolti finora, si comprende che non si perde in chiarezza se si omette il passaggio intermedio in cui tutte radici hanno lo stesso indice. Si potrà dunque scrivere direttamente un unico radicale avente per indice il m.c.i. e per radicando il prodotto o il quoziente dei radicandi, elevati ciascuno al risultato della divisione tra il m.c.i. e l'indice di partenza.

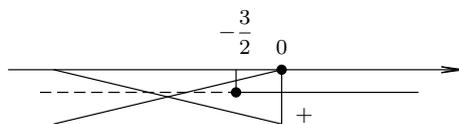
Chiariamo, applicando quanto appena descritto, ad un esempio:

Esempio 4.3.5. $\sqrt[5]{2x+3} \cdot \sqrt[4]{x}$

$$\text{C.E.} \begin{cases} \forall x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

Segno di $2x+3$ e controllo di compatibilità con C.E.:

$$2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$$



Dal grafico deduciamo che il radicando è sempre positivo nelle C.E. pertanto:

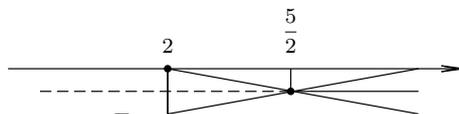
$$\sqrt[5]{2x+3} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[20]{(2x+3)^4 x^5} \text{ se } x \geq 0$$

Esempio 4.3.6. $\sqrt{2-x} : \sqrt[3]{2x-5}$

$$\text{C.E.} \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \forall x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x \leq 2$$

Segno di $2x-5$ e controllo di compatibilità con C.E.:

$$2x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$$



Dal grafico deduciamo che il radicando è sempre negativo nelle C.E. pertanto:

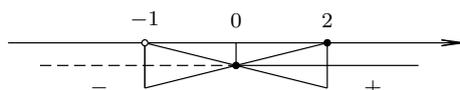
$$\sqrt{2-x} : \sqrt[3]{2x-5} = -\sqrt[6]{(2-x)^3 \cdot \frac{1}{(2x-5)^2}} = -\sqrt[6]{\frac{(2-x)^3}{(2x-5)^2}} \text{ se } x \leq 2$$

Esempio 4.3.7. $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} : \sqrt[6]{\frac{x}{x^3+3x^2+3x+1}} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} : \sqrt[6]{\frac{x}{(x+1)^3}}$

$$\text{C.E.} \begin{cases} \forall x \\ \frac{x-2}{x+1} \geq 0 & \Rightarrow x < -1 \vee x \geq 2 \\ \frac{x}{(x+1)^3} > 0 \end{cases}$$

Segno di x e controllo di compatibilità con C.E.:

$$x \geq 0$$



Dal grafico deduciamo che il radicando può essere sia positivo che negativo nelle C.E. pertanto:

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} : \sqrt[6]{\frac{x}{(x+1)^3}} = \begin{cases} \sqrt[6]{x^2 \frac{(x-2)^3}{(x+1)^3} \cdot \frac{(x+1)^3}{x}} = \sqrt[6]{x(x-2)^3} & \text{se } x \geq 2 \\ -\sqrt[6]{x(x-2)^3} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Esercizio 4.3.1. Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni tra radicali:

$$\sqrt[3]{3x-5} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{3x-5}} \cdot \sqrt{x+2}$$

$$\sqrt{x+1} : \sqrt[3]{x-1}; \quad \sqrt[4]{x-3} : \sqrt[6]{x+2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^2-1}} : \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-1}}$$

$$\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^2-3x+2}{x-3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}$$

4.4 Trasporto di un fattore sotto radice

Dato il prodotto $A\sqrt[n]{B}$, ci proponiamo di trasportare il fattore A sotto il segno di radice; per farlo è sufficiente pensare ad A come $\sqrt[n]{A}$ e procedere come con il prodotto tra radicali. Si avrà pertanto:

$$\forall n \text{ dispari} : A\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n B}$$

$$\forall n \text{ pari} : A\sqrt[n]{B} = \begin{cases} \sqrt[n]{A^n B} & \text{se } A \geq 0 \\ -\sqrt[n]{A^n B} & \text{se } A < 0 \end{cases}$$

se n è pari si possono avere due casi perchè un radicale di indice 1 (dispari) viene trasformato in uno di indice n (pari).

Esempio 4.4.1.

$$7\sqrt[3]{\frac{1}{7}} = \sqrt[3]{7^3 \cdot \frac{1}{7}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$$

$$\frac{5}{4}\sqrt{\frac{8}{25}} = \sqrt{\frac{5^2}{4^2} \cdot \frac{8}{25}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$-3\sqrt[5]{2} = -\sqrt[5]{3^5 \cdot 2} \text{ (oppure } \sqrt[5]{(-3)^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{-3^5 \cdot 2} \text{)}$$

$$-\frac{3}{4}\sqrt{2} = -\sqrt{\frac{3^2}{4^2} \cdot 2} = -\sqrt{\frac{9}{8}}$$

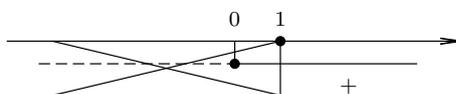
Esempio 4.4.2.

- $x\sqrt{x-1}$

C.E. $x \geq 1$

Segno del fattore da trasportare e controllo di compatibilità con C.E.:

$$x \geq 0$$



Dal grafico deduciamo che il fattore è sempre positivo nelle C.E. pertanto:

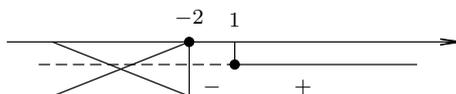
$$x\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2(x-1)} \text{ se } x \geq 1$$

- $(x-1)\sqrt[4]{x+2}$

C.E. $x \geq -2$

Segno del fattore da trasportare e controllo di compatibilità con C.E.:

$$x \geq 1$$



Dal grafico deduciamo che il fattore è sia positivo che negativo nelle C.E. pertanto:

$$(x-1)\sqrt[4]{x+2} \begin{cases} \sqrt[4]{(x-1)^4(x+2)} & \text{se } x \geq 1 \\ -\sqrt[4]{(x-1)^4(x+2)} & \text{se } -2 \leq x < 1 \end{cases}$$

- $\frac{4-x}{x}\sqrt[3]{2x}$

C.E. $\forall x \neq 0$ (condizione dovuta alla frazione, non alla radice)

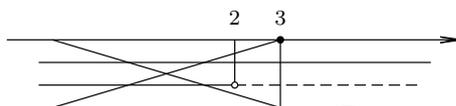
$$\frac{4-x}{x}\sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{\frac{(4-x)^3}{x^3} \cdot 2x} = \sqrt[3]{\frac{2(4-x)^3}{x^2}}$$

$$\bullet \frac{x^2 + 1}{2 - x} \sqrt[6]{x - 3}$$

$$\text{C.E. } x \geq 3$$

Segno del fattore da trasportare e controllo di compatibilità con C.E.:

$$\frac{x^2 + 1}{2 - x} \geq 0$$



Dal grafico deduciamo che il fattore è sempre negativo nelle C.E. pertanto:

$$\frac{x^2 + 1}{2 - x} \sqrt[6]{x - 3} = -\sqrt[6]{\frac{(x^2 + 1)^6(x - 3)}{(2 - x)^6}}$$

Esercizio 4.4.1. Porta sotto il segno di radice il fattore esterno:

$$x^4 \sqrt{\frac{1}{x^3}}; \quad x^3 \sqrt{x^2}; \quad (a - 1) \sqrt{a + 1}$$

$$3x^2 y \sqrt{xy^2}; \quad \frac{2a - 1}{a} \sqrt[3]{\frac{a^2}{4a^2 - 4a + 1}}; \quad \frac{a - 1}{2 - a} \sqrt[3]{\frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 - 2a + 1}}$$

$$\frac{a - 1}{a - 2} \sqrt{\frac{a^2 - 4a + 4}{a - 1}}; \quad \frac{x}{x - 2} \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} - 4$$

4.5 Trasporto di un fattore fuori di radice

Abbiamo visto che non sempre un radicale può essere semplificato; in alcuni casi, tuttavia, è possibile scriverlo ugualmente in maniera più semplice, ricorrendo al trasporto di un fattore fuori di radice, come ora descriveremo.

Dato un radicale del tipo $\sqrt[n]{A^m B}$ con $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$, la divisione tra m ed n permette di determinare q (quoziente) ed r (resto) tali che $m = nq + r$ con $r < n$; possiamo allora scrivere:

$$\sqrt[n]{A^m B} = \sqrt[n]{A^{nq+r} B} = \sqrt[n]{A^{nq} A^r B} = \sqrt[n]{A^{nq}} \sqrt[n]{A^r B}$$

la prima delle due radici, semplificata, può dare come risultato A^q oppure $|A|^q$, pertanto:

$$\sqrt[n]{A^m B} = \begin{cases} A^q \sqrt[n]{A^r B} \\ |A|^q \sqrt[n]{A^r B} \end{cases}$$

Esempio 4.5.1.

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \quad (q = 1, r = 0)$$

$$\sqrt[3]{160} = \sqrt[3]{2^5 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{20} \quad (q = 1, r = 2)$$

$$\sqrt[4]{2^9 \cdot 7^4 \cdot 3^6} = 2^2 \cdot 7 \cdot 3 \sqrt[4]{2 \cdot 3^2} = 84 \sqrt[4]{18}$$

$$\sqrt{\frac{27}{49}} = \sqrt{\frac{3^3}{7^2}} = \frac{3}{7} \sqrt{3}$$

Esempio 4.5.2.

- $\sqrt[3]{5x^3}$
 C.E: $\forall x$
 $\sqrt[3]{5x^3} = x\sqrt[3]{5}$ in quanto $\sqrt[3]{x^3} = x$
- $\sqrt{3x^2}$
 C.E. $3x^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$
 $\sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3}$ in quanto $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\sqrt{x^2(x-1)}$
 C.E. $x^2(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \vee x = 0$
 $\sqrt{x^2(x-1)} = x\sqrt{x-1}$ in quanto $\sqrt{x^2} = x$ con le C.E. poste.
- $\sqrt{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} = \sqrt{(2x-1)^3}$
 C.E. $(2x-1)^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$
 $\sqrt{(2x-1)^3} = (2x-1)\sqrt{2x-1}$ in quanto $\sqrt{(2x-1)^2} = 2x-1$ con le C. E. poste
- $\sqrt[3]{\frac{16x^7(x^2-2x+1)^2}{27(4-x)^6}} = \sqrt[3]{\frac{2^4x^7(x-1)^4}{3^3(4-x)^6}}$
 C.E. $\forall x \neq 4$
 $\sqrt[3]{\frac{2^4x^7(x-1)^4}{3^3(4-x)^6}} = \frac{2x^2(x-1)}{3(4-x)^2} \sqrt[3]{2x(x-1)}$
- $\sqrt[4]{\frac{x^8(3x+5)^{12}}{32}} = \sqrt[4]{\frac{x^8(3x+5)^{12}}{2^5}}$
 C.E. $\frac{x^8(3x+5)^{12}}{2^5} \geq 0 \Rightarrow \forall x$
 $\sqrt[4]{\frac{x^8(3x+5)^{12}}{2^5}} = \frac{x^2|3x+5|^3}{2} \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ (rifletti sull'uso del modulo solo per il fattore $3x+5$)
- $\sqrt{\frac{x^6}{(2x-1)^5}}$
 C.E. $\frac{x^6}{(2x-1)^5} \geq 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \vee x = 0$
 $\sqrt{\frac{x^6}{(2x-1)^5}} = \frac{x^3}{(2x-1)^2} \sqrt{\frac{1}{2x-1}}$
- $\sqrt{\frac{x^6}{(2x+1)^5}}$
 C.E. $\frac{x^6}{(2x+1)^5} \geq 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$
 $\sqrt{\frac{x^6}{(2x+1)^5}} = \frac{|x|^3}{(2x+1)^2} \sqrt{\frac{1}{2x+1}}$

Esercizio 4.5.1. Semplifica i seguenti radicali, portando fuori dal segno di radice i fattori possibili:

$$\sqrt[4]{16a^2}; \quad \sqrt{\frac{a^6}{b^7}}; \quad \sqrt{\frac{8ab^2}{27x^2y}}; \quad \sqrt[5]{x^8 - 2x^7}; \quad \sqrt{a(a-2)(a^3 - 4a)}$$

$$\sqrt[3]{(a^2 - 6a + 9)^2}; \quad \sqrt{a^3 - a^2}; \quad \sqrt[5]{64a^6b^5}; \quad \sqrt[3]{\frac{(a^2 - 2a + 1)^2}{a^6}}$$

4.6 Potenza di un radicale

Vale la seguente regola:

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^k = \sqrt[n]{A^k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ fatte salve le C.E.}$$

infatti, posto $X = \left(\sqrt[n]{A}\right)^k$ e $Y = \sqrt[n]{A^k}$ si ha:

$$X^n = \left[\left(\sqrt[n]{A}\right)^k\right]^n = \left(\sqrt[n]{A}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{A}\right)^n\right]^k = A^k$$

$$Y^n = \left(\sqrt[n]{A^k}\right)^n = A^k$$

poichè $X^n = Y^n \Rightarrow X = Y$ essendo X e Y concordi, da cui la regola.

Esempio 4.6.1.

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\sqrt[5]{-7}\right)^2 = \sqrt[5]{(-7)^2} = \sqrt[5]{49}$$

$$(2\sqrt{5})^3 = 2^3(\sqrt{5})^3 = 2^3\sqrt{5^3} = 2^35\sqrt{5} = 40\sqrt{5}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{11}{5}}\right)^{-4} = \sqrt[3]{\left(\frac{11}{5}\right)^{-4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{11}\right)^4} = \frac{5}{11}\sqrt[3]{\frac{5}{11}}$$

Esempio 4.6.2.

- $(\sqrt{x})^3$

C.E. $x \geq 0$

$$(\sqrt{x})^3 = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$$

- $(\sqrt{x-1})^6$

C.E. $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$$(\sqrt{x-1})^6 = \sqrt{(x-1)^6} = (x-1)^3 \text{ (Il modulo non è necessario per le C.E. poste)}$$

- $\left(\sqrt{3(2x+7)^2}\right)^3$

C.E. $3(2x+7)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x$

$$\left(\sqrt{3(2x+7)^2}\right)^3 = \sqrt{3^3(2x+7)^6} = 3|2x+7|^3\sqrt{3}$$

Questa potenza si poteva calcolare trasportando prima il fattore $(2x+7)^2$ fuori di radice:

$$\left(\sqrt{3(2x+7)^2}\right)^3 = (|2x+7|\sqrt{3})^3 = |2x+7|^3\sqrt{3^3} = 3|2x+7|^3\sqrt{3}$$

Esercizio 4.6.1. Esegui le seguenti potenze ed eventualmente semplifica:

$$(2\sqrt[4]{3})^4; \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2; (a^2b\sqrt[3]{ab})^3; [(x+y)\sqrt{x+y}]^3; (3\sqrt[4]{5}\sqrt{2})^2$$

$$(2\sqrt[3]{2^{-1}} \cdot \sqrt{2})^3; (2 - \sqrt[3]{8})^2; (3\sqrt[3]{2} \cdot 2)^3; \left(ax^2\sqrt[5]{\frac{a^4}{x}}\right)^{10}; (x\sqrt{x})^2 : (x : \sqrt{x})^2$$

4.7 Radice di un radicale

Vale la seguente regola:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[nk]{A} \quad \text{fatte salve le C.E.}$$

infatti, posto $X = \sqrt[k]{\sqrt[n]{A}}$ e $Y = \sqrt[nk]{A}$, si ha:

$$X^{nk} = \left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{A}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{A}}\right)^k\right]^n = \left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$$

$$Y^{nk} = \left(\sqrt[nk]{A}\right)^{nk} = A$$

poichè $X^{nk} = Y^{nk} \Rightarrow X = Y$ essendo X e Y concordi, da cui la regola.

Esempio 4.7.1.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$$

$$\sqrt{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[10]{4} = \sqrt[10]{2^2} = \sqrt[5]{2}$$

$$\sqrt[4]{7\sqrt[3]{\frac{1}{7}}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{7^3\frac{1}{7}}} = \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[6]{7}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\sqrt{6}} = -\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 6}} = -\sqrt[6]{\frac{1}{4}6} = -\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$$

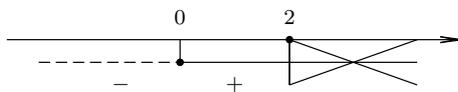
Esempio 4.7.2.

- $\sqrt{\sqrt[4]{1-x}}$
 C.E. $\begin{cases} 1-x \geq 0 \text{ (per l'esistenza di } \sqrt[4]{}) \Rightarrow x \leq 1 \\ \sqrt[4]{1-x} \geq 0 \text{ (per l'esistenza di } \sqrt{}) \Rightarrow \forall x \text{ purchè esista la } \sqrt[4]{} \end{cases} \quad \text{}^1 \Rightarrow x \leq 1$
 $\sqrt{\sqrt[4]{1-x}} = \sqrt[8]{1-x}$
- $\sqrt{x\sqrt[5]{2-x}}$
 C.E. $\begin{cases} \forall x \text{ (per l'esistenza di } \sqrt[5]{}) \\ x\sqrt[5]{2-x} \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \text{ (per l'esistenza di } \sqrt{}) \end{cases} \quad \text{}^2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$
 $\sqrt{x\sqrt[5]{2-x}} = \sqrt{\sqrt[5]{x^5(2-x)}} = \sqrt[10]{x^5(2-x)}$
- $\sqrt[3]{x\sqrt{2-x}}$
 C.E. $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \forall x \text{ (per l'esistenza di } \sqrt[3]{}) \end{cases} \Rightarrow x \leq 2$

¹L'esistenza della radice quarta è garantita dalla prima disequazione del sistema

²Il segno della $\sqrt[5]{2-x}$ dipende dal segno del suo radicando essendo di indice dispari.

per trasportare x sotto radice è necessario studiarne il segno e confrontarlo con le C.E.



$$\sqrt[3]{x\sqrt{2-x}} = \begin{cases} \sqrt[3]{\sqrt{x^2(2-x)}} = \sqrt[6]{x^2(2-x)} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt[3]{-\sqrt{x^2(2-x)}} = -\sqrt[6]{x^2(2-x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.7.1. Scrivi sotto forma di un unico radicale:

$$\sqrt{\sqrt[3]{25a^2}}; \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{24a^6}}; \quad \sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}; \quad \sqrt{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2}}; \quad \sqrt{x\sqrt{x+1}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-2x}}; \quad \sqrt{(x-3)\sqrt[3]{3-x}}; \quad \sqrt{\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt[3]{y^2}}}; \quad \sqrt[4]{\frac{x}{y^2}}$$

Esercizio riepilogativo

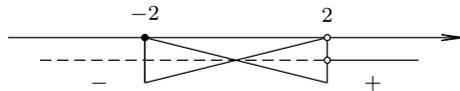
$$\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{x-2}\sqrt[3]{x-2}} : \sqrt[3]{x-2} \right) \cdot (x-2) =$$

C.E.

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-2} \geq 0 \\ \forall x \\ \frac{1}{x-2}\sqrt[3]{x-2} \geq 0 \\ \forall x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \leq -2 \vee x > 2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}} : \sqrt[3]{x-2} \right) \cdot (x-2) =$$

poichè il m.c.i.=6 è necessario studiare il segno del radicando della radice cubica e confrontarlo con le C.E.:



$$= \begin{cases} \left(\sqrt[6]{\frac{(x+2)^3}{(x-2)^3} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}} \right) (x-2) = \sqrt[6]{\frac{(x+2)^3}{(x-2)^7}} \cdot (x-2) & \text{se } x > 2 \\ - \left(\sqrt[6]{\frac{(x+2)^3}{(x-2)^3} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}} \right) (x-2) = -\sqrt[6]{\frac{(x+2)^3}{(x-2)^7}} \cdot (x-2) & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x-2} \sqrt[6]{\frac{(x+2)^3}{x-2}} \cdot (x-2) = \sqrt[6]{\frac{(x+2)^3}{x-2}} & \text{se } x > 2 \\ \frac{1}{x-2} \sqrt[6]{\frac{(x+2)^3}{x-2}} \cdot (x-2) = \sqrt[6]{\frac{(x+2)^3}{x-2}} & \text{se } x \leq -2 \text{ (rifletti sul segno!!)} \end{cases}$$

4.8 Addizione algebrica di radicali

Definizione 4.8.1. Un radicale si dice *irriducibile* se non può essere semplificato e se non si può trasportare fuori di radice alcun fattore.

Esempio 4.8.1.

Sono irriducibili:

$$\sqrt{14}, \quad \sqrt[3]{4}, \quad 7\sqrt[4]{5}, \quad \sqrt[3]{(x+1)^2}$$

sono riducibili, invece:

$$2\sqrt{8}, \quad \sqrt[3]{\frac{125}{2}}, \quad \sqrt{(2-x)^3}, \quad \sqrt[4]{(x+1)^2}$$

in quanto sono rispettivamente riducibili a :

$$4\sqrt{2}, \quad 5\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \quad (2-x)\sqrt{2-x} \quad (C.E. x \leq 2), \quad \sqrt{|x+1|} \quad (C.E. \forall x)$$

Definizione 4.8.2. Due radicali si dicono *simili* se, resi irriducibili, hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

Esempio 4.8.2. Sono simili: $2\sqrt[3]{5}$, $\frac{7}{2}\sqrt[3]{5}$, $-\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{20} (= 2\sqrt[3]{5})$

Conveniamo di chiamare *coefficiente* di un radicale, il fattore per cui esso è moltiplicato. Premesso che l'addizione algebrica si può eseguire solo tra radicali simili, si definisce loro somma algebrica, quel radicale, simile ad essi, avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio 4.8.3.

$$2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{18} - \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} + \frac{11}{2}\sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt[3]{8x} - \sqrt[9]{x^3} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} \quad (C.E. \forall x)$$

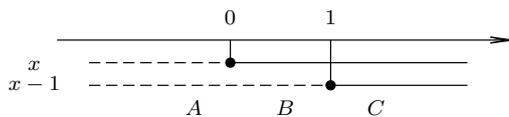
Esempio 4.8.4. $\sqrt{2x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{8(x-1)^2} - 3\sqrt{2} =$

C.E.

$$\begin{cases} 2x^2 \geq 0 \\ 8(x-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x$$

$$= |x|\sqrt{2} + |x-1|\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(|x| + |x-1| - 3)$$

Volendo semplificare ulteriormente il risultato, discutendo i moduli, è necessario studiare il segno dei loro argomenti:



si ottiene quindi:

$$A: \begin{cases} x \leq 0 \\ \sqrt{2}(-x - x + 1 - 3) = \sqrt{2}(-2x - 2) = -2\sqrt{2}(x + 1) \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{2}(x - x + 1 - 3) = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} x > 1 \\ \sqrt{2}(x + x - 1 - 3) = \sqrt{2}(2x - 4) = 2\sqrt{2}(x - 2) \end{cases}$$

Dagli esempi svolti si può notare che l'addizione algebrica tra radicali è analoga a quella tra polinomi; di conseguenza la semplificazione di un'espressione algebrica con radicali seguirà le stesse regole studiate per le espressioni polinomiali. Avremo quindi:

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 = 3 - 4\sqrt{15} + 20 = 23 - 4\sqrt{15}$$

$$(2\sqrt{3} + 6\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 6\sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 - (6\sqrt{2})^2 = 12 - 72 = -60$$

$$(\sqrt{2} - 1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$$

$$(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(5\sqrt{6} - 3) = 10\sqrt{3}\sqrt{6} - 6\sqrt{3} - 15\sqrt{2}\sqrt{6} + 9\sqrt{2} = 30\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + 9\sqrt{2} = 39\sqrt{2} - 36\sqrt{3}$$

Esercizio 4.8.1. Somma i seguenti radicali:

$$3\sqrt[6]{4} - \sqrt[15]{32} + 3\sqrt[12]{16} + \sqrt[3]{250}; \quad \sqrt{405x^5} - \sqrt{180x^3} + \sqrt{5x}; \quad \sqrt[3]{x^6y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{8x^3y^4}$$

$$\sqrt{4 + 4x^2} - \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{9 + 9x^2} + 5\sqrt{1 + x^2}; \quad \sqrt{4a^3 - 8a^2} + \sqrt{4a^3b^2 - 8a^2b^2} - 2\sqrt{9ax^2 - 18x^2}$$

Esercizio 4.8.2. Semplifica le seguenti espressioni:

$$[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{6}](5 + \sqrt{6}); \quad (3\sqrt{2} - 1)^2 - (\sqrt{2} - 1)^2; \quad (\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

$$(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{10}) - (2\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}); \quad (2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3) - (\sqrt{5} + 1)^2 - (\sqrt{5} - 2)^2$$

4.9 Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Con il termine *razionalizzazione* del denominatore di una frazione, intendiamo il procedimento che permette di trasformare una frazione in una, ad essa equivalente, con denominatore razionale (che non contiene radicali). Il procedimento da seguire si basa sulla proprietà invariantiva della divisione.

In questo paragrafo ci limitiamo ad esaminare solo i due casi che si incontrano più frequentemente.

$$1^\circ \text{ caso: } \frac{A}{\sqrt[n]{B^k}} \quad \text{con } k < n$$

per rendere razionale il denominatore è sufficiente trasformarlo in $\sqrt[n]{B^n} = B$. Allo scopo, moltiplichiamo numeratore e denominatore della frazione per $\sqrt[n]{B^{n-k}}$ ottenendo:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^k}} = \frac{A}{\sqrt[n]{B^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{B^{n-k}}}{\sqrt[n]{B^{n-k}}} = \frac{A\sqrt[n]{B^{n-k}}}{\sqrt[n]{B^n}} = \frac{A\sqrt[n]{B^{n-k}}}{B}$$

Esempio 4.9.1.

$$\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{21}{5\sqrt[5]{7}} = \frac{21}{5\sqrt[5]{7}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7^4}} = \frac{21\sqrt[5]{7^4}}{5 \cdot 7} = \frac{3\sqrt[5]{7^4}}{5}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt[6]{108}}{9}$$

$$\frac{14}{\sqrt[3]{2}} = \frac{14}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{14\sqrt[3]{4}}{2} = 7\sqrt[3]{4}$$

$$\frac{2x}{\sqrt[4]{2x^3}} = \frac{2x}{\sqrt[4]{2x^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3x}}{\sqrt[4]{2^3x}} = \frac{2x\sqrt[4]{8x}}{2x} = \sqrt[4]{8x} \quad (\text{C.E. } 2x^3 > 0 \Rightarrow x > 0)$$

$$2^\circ \text{ caso } \frac{A}{B\sqrt{C} \pm D\sqrt{E}}$$

Per rendere razionale il denominatore è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per $B\sqrt{C} \mp D\sqrt{E}$, in tal modo, infatti:

$$\frac{A}{B\sqrt{C} \pm D\sqrt{E}} = \frac{A}{B\sqrt{C} \pm D\sqrt{E}} \cdot \frac{B\sqrt{C} \mp D\sqrt{E}}{B\sqrt{C} \mp D\sqrt{E}} = \frac{A(B\sqrt{C} \mp D\sqrt{E})}{(B\sqrt{C})^2 - (D\sqrt{E})^2} = \frac{A(B\sqrt{C} \mp D\sqrt{E})}{B^2C - D^2E}$$

Esempio 4.9.2.

- $\frac{3}{2\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{3(2\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3(2\sqrt{5} + \sqrt{2})}{20 - 2} = \frac{3(2\sqrt{5} + \sqrt{2})}{18} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{6}$
- $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \cdot \frac{2 - 2\sqrt{6} + 3}{2 - 3} = -5 + 2\sqrt{6}$
- $\frac{\sqrt{2} + 1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + 4 + 3 + 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 5\sqrt{2} + 7$
- $\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+3} + 1} = (\text{C.E. } x \geq -3)$
 $= \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} - 1}{\sqrt{x+3} - 1} = \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x+3} - 1)}{(\sqrt{x+3})^2 - 1^2} = \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x+3} - 1)}{x + 3 - 1} =$
 $= \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+3} - 1)}{(x+2)} = (\text{con l'ulteriore C.E. } x \neq -2)$
 $= (x-2)(\sqrt{x+3} - 1)$

Esercizio 4.9.1. Razionalizza il denominatore delle seguenti frazioni:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \quad \frac{4}{\sqrt[4]{32}}; \quad \frac{2xy}{\sqrt[3]{4x^2y}}; \quad \frac{a^2b^3\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a^5b^5}}; \quad \frac{6x^2y}{\sqrt[4]{32x^5y}}; \quad \frac{\sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{ab}}; \quad \frac{x^2 - y^2}{\sqrt[3]{x+y}}; \quad \frac{25}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{9}{2\sqrt{27} + 4\sqrt{3}}; \quad \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}; \quad \frac{6 - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}; \quad \frac{\sqrt{2} - 7}{\sqrt{2} + 7}; \quad \frac{x+1}{\sqrt{x+4} - \sqrt{3}}; \quad \frac{2+a - \sqrt{8a}}{\sqrt{2} - \sqrt{a}}$$

4.10 Radicali quadratici doppi

Con il termine *radicale quadratico doppio* intendiamo una espressione del tipo:

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{C}}$$

Sono radicali quadratici doppi i seguenti:

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} \quad \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \quad \sqrt{1 + 2\sqrt{5}}$$

poichè $8 + 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} + 1)^2$ allora $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} = \sqrt{7} + 1$

poichè $5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ allora $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Possiamo quindi osservare che un radicale quadratico doppio è semplificabile quando il suo radicando, $A \pm B\sqrt{C}$ può essere scritto come quadrato di una espressione binomiale. Perchè ciò sia possibile è necessario che A sia la somma dei quadrati e che $B\sqrt{C}$ sia il doppio prodotto. Il radicale $\sqrt{1 + 2\sqrt{5}}$ non è dunque semplificabile in quanto non esistono due termini la cui somma dei quadrati sia 1 e il cui doppio prodotto sia $2\sqrt{5}$. Vediamo ora alcuni esempi di semplificazione di radicali doppi:

$$\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$$

è necessario trovare, se esistono, due termini a, b che moltiplicati diano $2\sqrt{2}$ ($a \cdot b = 2\sqrt{2}$) e i cui quadrati abbiano per somma 6 ($a^2 + b^2 = 6$)

essendo il prodotto $2\sqrt{2}$ le possibilità sono : $a = 2\sqrt{2}$ $b = 1$ oppure $a = 2$ $b = \sqrt{2}$.

Dovendo essere $a^2 + b^2 = 6 \Rightarrow a = 2$ $b = \sqrt{2}$ dunque:

$$\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{21 - 6\sqrt{6}}$$

essendo $a \cdot b = -3\sqrt{6}$ le possibilità sono : $a = 3\sqrt{6}$ $b = -1$ oppure $a = 3$ $b = -\sqrt{6}$ oppure $a = 3\sqrt{3}$ $b = -\sqrt{2}$ oppure $a = 3\sqrt{2}$ $b = -\sqrt{3}$.

Dovendo essere $a^2 + b^2 = 21 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$ $b = -\sqrt{3}$ dunque:

$$\sqrt{21 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{(3\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

essendo $a \cdot b = 2\sqrt{5}$ le possibilità sono : $a = 2\sqrt{5}$ $b = 1$ oppure $a = \sqrt{5}$ $b = 2$ oppure $a = \sqrt{10}$ $b = \sqrt{2}$

Dovendo essere $a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow a = \sqrt{5}$ $b = 2$ dunque:

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2} = \sqrt{5} + 2$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

essendo $a \cdot b = \frac{\sqrt{5}}{2}$ le possibilità sono : $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $b = 1$ oppure $a = \sqrt{5}$ $b = \frac{1}{2}$ oppure $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dovendo essere $a^2 + b^2 = 3 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dunque:

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = (\text{razionalizzando}) = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 4.10.1. Trasforma i seguenti radicali doppi nella somma di due radicali semplici:

$$\sqrt{6 - \sqrt{11}}; \quad \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}; \quad \sqrt{11 + \sqrt{21}}; \quad \sqrt{14 - 2\sqrt{13}}; \quad \sqrt{9 + \sqrt{17}}; \quad \sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{6}}; \quad \sqrt{12 + 4\sqrt{5}}$$

4.11 Potenze ad esponente razionale

Vogliamo estendere il concetto di potenza, già noto con esponente intero, al caso in cui l'esponente sia razionale.

Vogliamo dunque dare un significato alla scrittura $a^{\frac{m}{n}}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$ in modo tale che continuino a valere le proprietà delle potenze studiate nel primo volume.

Dovendo dunque valere la terza proprietà, si ha che $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$ e, ricordando che $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$ viene naturale assumere che

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Poichè tale radice potrebbe non esistere (si pensi a $(-3)^{\frac{1}{2}}$) si conviene di assumere tale definizione solo per $a > 0$.

Sarà allora: $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{2^7} = 4\sqrt[3]{2}$$

$-3^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$ (da non confondere con $(-3)^{\frac{1}{2}}$ che non è definita)

In base alla definizione data le espressioni con i radicali possono essere semplificate trasformando ogni radicale in potenza:

$$\sqrt{2^3 \sqrt{2\sqrt{2}}} : (4\sqrt[4]{8}) = \left(2^3 \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(4 \cdot 8^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(2^3 \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(2^2 \cdot 2^{\frac{3}{4}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(2^3 \cdot 2^{\frac{3}{4}} : \left(2^2 \cdot 2^{\frac{3}{4}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(2^{\frac{15}{4}} : 2^{\frac{11}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^1)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{2})$$

Viceversa, ogni espressione con potenze ad esponente razionale, può essere trasformata in una con le radici:

$$\frac{3^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{3}{2}}} (3^2)^{-\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{\sqrt{3} : \sqrt[6]{3^5}}{\sqrt{3^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^2}} : \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$$

$$\frac{\sqrt[6]{3^3} : 3^{\frac{5}{6}}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \cdot 3^2 = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 = \sqrt[6]{\frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3^3}} \cdot 3 = 3\sqrt[6]{\frac{1}{3^5}} = \sqrt[6]{3} (= 3^{\frac{1}{6}})$$

Lo studente scelga la forma che preferisce per la semplificazione di tali espressioni.

Esercizio 4.11.1. Scrivi sotto forma di potenza i seguenti radicali:

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{5^2}}; \quad \sqrt{\frac{1}{2^2} \sqrt[3]{\frac{1}{7}\sqrt{7^3}}}; \quad \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[7]{2^5}; \quad \sqrt[3]{\frac{2^2 \sqrt[4]{2}}{\sqrt{2^3}}}$$

Esercizio 4.11.2. Scrivi sotto forma di radicale le seguenti potenze:

$$\left(2^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad 5^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}; \quad 5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{-1}; \quad \left(3^{-\frac{1}{3}} \cdot 5^3\right)^{-3} \cdot \left(3 \cdot 5^{\frac{5}{3}}\right)^3$$

4.12 Equazioni, disequazioni, sistemi a coefficienti irrazionali

In questo capitolo abbiamo imparato a lavorare con le radici e quindi ad operare nell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} . Viene quindi naturale affrontare lo studio di equazioni, disequazioni e sistemi che abbiano coefficienti e soluzioni non più esclusivamente razionali, come visto nei capitoli 1 e 2, ma reali (e quindi anche irrazionali).

Proponiamo di seguito la risoluzione di alcuni esercizi chiarificatori.

Esempio 4.12.1.

- $(x + \sqrt{2})^2 - 2(x + \sqrt{3})(\sqrt{3} - x) = \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - 1) + 1$
- $x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 - 2(3 - x^2) = 3x^2 - \sqrt{3}x + 1$
- $x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 - 6 + 2x^2 = 3x^2 - \sqrt{3}x + 1$
- $3x^2 + 2x\sqrt{2} - 4 = 3x^2 - \sqrt{3}x + 1$

$$2x\sqrt{2} + x\sqrt{3} = 5$$

$$x(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 5$$

$$x = \frac{5}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{5(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{8 - 3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\bullet \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5} - x} = \frac{x^2 - 5 + 4\sqrt{5}}{x^2 - 5}$$

$$\frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5} - x} = \frac{x^2 - 5 + 4\sqrt{5}}{(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})} \quad (\text{C.E. } x \neq \pm\sqrt{5})$$

$$x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 + 2x + 2\sqrt{5} = x^2 - 5 + 4\sqrt{5}$$

$$-2x\sqrt{5} + 2x = 2\sqrt{5} - 10$$

$$2x(1 - \sqrt{5}) = 2(\sqrt{5} - 5)$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 5}{1 - \sqrt{5}}$$

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \text{razionalizzando } \frac{(\sqrt{5} - 5)(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{\sqrt{5} + 5 - 5 - 5\sqrt{5}}{-4} = \sqrt{5} \text{ (non acc.)} \\ \text{raccogliendo } \sqrt{5} \text{ a numeratore } \frac{\sqrt{5}(1 - \sqrt{5})}{1 - \sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ (non acc.)} \end{array} \right.$$

$$\bullet 3x^2 - 11 + (x - 2)^2 = x(x - 4)$$

$$3x^2 - 11 + x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 7 = 0 \text{ scomponendo in fattori}$$

$$(\sqrt{3}x + \sqrt{7})(\sqrt{3}x - \sqrt{7}) = 0$$

$$\sqrt{3}x + \sqrt{7} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x = -\sqrt{7} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$\sqrt{3}x - \sqrt{7} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$\bullet \begin{cases} x\sqrt{2} - 2y\sqrt{3} = 4 \\ x\sqrt{6} - 3y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ E' possibile utilizzare uno qualsiasi dei metodi studiati}$$

Scegliamo di applicare il metodo di combinazione lineare sostituendo la seconda equazione con quella ottenuta sommando la seconda equazione con la prima moltiplicata per $-\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x\sqrt{2} - 2y\sqrt{3} = 4 \\ 3y = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

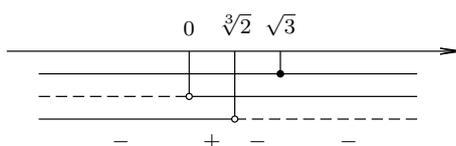
$$\begin{cases} x\sqrt{2} - 2y\sqrt{3} = 4 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sqrt{2} - 2(-\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 4 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sqrt{2} + 6 = 4 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

- $x(1 + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) + (x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) \leq (x - \sqrt{3})^2 - 11 + 4(x\sqrt{5} - 1)$
 $x + 3x\sqrt{5} - 2x\sqrt{3} + x^2 - 8 \leq x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 - 11 + 4x\sqrt{5} - 4$
 $x + 3x\sqrt{5} - 8 \leq -12 + 4x\sqrt{5}$
 $x - x\sqrt{5} \leq -4$
 $x(1 - \sqrt{5}) \leq -4$
 $x \geq \frac{-4}{1 - \sqrt{5}}$ il verso è cambiato perchè il coefficiente $1 - \sqrt{5}$ è negativo
 $x \geq \frac{-4(1 + \sqrt{5})}{-4}$
 $x \geq 1 + \sqrt{5}$
- $\frac{x^2 - 2x\sqrt{3} + 3}{x\sqrt[3]{2} - x^2} \geq 0$
 $\frac{(x - \sqrt{3})^2}{x(\sqrt[3]{2} - x)} \geq 0$
 $(x - \sqrt{3})^2 > 0 \Rightarrow \forall x$ (si annulla per $x = \sqrt{3}$)
 $x > 0$
 $\sqrt[3]{2} - x > 0 \Rightarrow x < \sqrt[3]{2}$



$$S : 0 < x < \sqrt[3]{2} \vee x = \sqrt{3}$$

Esercizio 4.12.1. Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali:

$$x\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = x\sqrt{3}; \quad \sqrt{3}(\sqrt{3} - 3)x - 3 = \sqrt{3}(1 - 2\sqrt{3}) + \sqrt{3}(x - 2) - x$$

$$\sqrt{3}(1 - 2\sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sqrt{3} + 3)x = \sqrt{3}(x + 2) + x - 3, \quad (x - \sqrt{7})^2 - (x - \sqrt{5})^2 + 2 = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{2} + 3} + \frac{x}{\sqrt{2} - 3} + \frac{8}{7} = 0; \quad \frac{2x - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cdot \frac{x + 2}{2} = \frac{\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 4.12.2. Risolvi le seguenti disequazioni a coefficienti irrazionali:

$$x\sqrt{2} + 4 < 3x\sqrt{2} - 4x; \quad 2\sqrt{3}x + 2 + \sqrt{3} \leq x\sqrt{2} + \sqrt{3}(2\sqrt{2} + 1)$$

$$(4x - \sqrt{5})(x - 2\sqrt{5}) - (3\sqrt{5} - 2x)(5\sqrt{5} - 2x) > 7\sqrt{15} - 65$$

$$\frac{x - 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{2x}{\sqrt{2} + 1} > 2 - 2x; \quad \frac{\sqrt{2}(1 - x)}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} \leq \frac{2x}{\sqrt{2} - 1}$$

Esercizio 4.12.3. Risolvi i seguenti sistemi a coefficienti irrazionali:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 2\sqrt{6} \\ x + y = 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 2y\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\ 2x - 3y\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x - (3 - \sqrt{3})y = 1 \\ x - (\sqrt{3} - 1)y = 1 \end{cases}$$

4.13 Esercizi: operazioni in \mathbb{R}

Esercizio 4.13.1. Semplifica i radicali:

$$\sqrt[6]{36} ; \sqrt[12]{900} ; \sqrt[4]{\frac{25}{16}} ; \sqrt[6]{\frac{8}{125}} ; \sqrt[5]{\frac{1}{32}} ; \sqrt{\frac{625}{49}} ; \sqrt[6]{(-2)^4} ; \sqrt{(-9)^2}$$

Esercizio 4.13.2. Ordina i numeri reali dopo averli ridotti allo stesso indice:

1. $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[6]{12}$
2. $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[6]{4}$
3. $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[5]{5}$; $\frac{3}{2}$
4. $\sqrt[3]{6}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt{7}$
5. $-\sqrt[4]{27}$; $-2,2$; $\sqrt[3]{-18}$; $-\sqrt{5}$

Esercizio 4.13.3. Moltiplica, dividi ed eleva a potenza i radicali:

$$1. \sqrt[5]{12}\sqrt[5]{36}\sqrt[5]{18} ; \sqrt[6]{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3} ; \sqrt[3]{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}\sqrt{6}$$

$$[6 ; 3 ; \sqrt[6]{6}]$$

$$2. \sqrt{\frac{5}{12}}\sqrt{\frac{8}{25}}\sqrt{\frac{1}{4}} ; \sqrt{2 \cdot 10^{-1}}\sqrt[3]{2^2 \cdot 10^{-2}}\sqrt[6]{2^{-3} \cdot 10^5} ; \sqrt[6]{2}\sqrt{2}\sqrt[6]{32}$$

$$\left[\sqrt{\frac{1}{30}} ; \sqrt[3]{\frac{2}{5}} ; \sqrt{8} \right]$$

$$3. (\sqrt{8} \cdot \sqrt{48}) : (\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}) ; \sqrt{\frac{5}{4}} : \sqrt[4]{\frac{5}{2}}$$

$$\left[\sqrt{\frac{8}{3}} ; \sqrt[4]{\frac{5}{8}} \right]$$

$$4. (\sqrt[5]{2})^{10} ; (\sqrt[3]{-3})^9 ; (\sqrt[4]{5})^2$$

$$[4 ; -27 ; \sqrt{5}]$$

$$5. (\sqrt{5})^3 : (\sqrt[3]{25})^2 ; \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 : \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$$

$$[\sqrt[6]{5} ; \sqrt[3]{9}]$$

Esercizio 4.13.4. Trasporta fuori radice:

$$1. \sqrt{18} ; \sqrt[3]{24} ; \sqrt[4]{810} ; \sqrt[4]{\frac{32}{81}}$$

$$\left[3\sqrt{2} ; 2\sqrt[3]{3} ; 3\sqrt[4]{10} ; \frac{2}{3}\sqrt[4]{2} \right]$$

$$2. \sqrt[3]{-\frac{81}{80}} ; \sqrt[4]{\frac{100}{2401}} ; -\sqrt[5]{\frac{1}{64}} ; -\sqrt{5000}$$

$$\left[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{10}} ; \frac{1}{7}\sqrt{10} ; -\frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{1}{2}} ; -50\sqrt{2} \right]$$

Esercizio 4.13.5. Esegui le addizioni algebriche:

$$1. 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$$

$$[\sqrt{2}]$$

$$2. 6\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3}$$

$$[7\sqrt[3]{3}]$$

$$3. 11\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - (8\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$$

$$[3\sqrt{5} + 3\sqrt{2}]$$

$$4. 3\sqrt{48} + 2\sqrt{32} + \sqrt{98} - (4\sqrt{27} + \sqrt{450})$$

$$[0]$$

$$5. 2\sqrt[3]{54} - \sqrt[4]{243} + 3\sqrt[4]{48} - \sqrt[3]{250}$$

$$[\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[4]{3}]$$

$$6. 2\sqrt{\frac{27}{8}} + 5\sqrt{\frac{3}{50}} + 7\sqrt{\frac{27}{98}} - 5\sqrt{\frac{147}{50}} - \sqrt{8}$$

$$[-2\sqrt{2}]$$

Esercizio 4.13.6. Semplifica le espressioni:

$$1. (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 2)^2 + \sqrt{48}$$

$$[6]$$

$$2. [(3\sqrt{2} - 2)(2 + 3\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3 - 14] : \sqrt{32}$$

$$\left[-\frac{1}{2} \right]$$

$$3. \sqrt[3]{2\sqrt{2}} + (\sqrt{5} - 2)^2(\sqrt{5} + 2)^2 - [(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})]^2$$

$$[\sqrt{2}]$$

$$4. (\sqrt{6} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) - (2\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{2}(7\sqrt{3} - 3) - 10$$

$$[4(1 - \sqrt{3})]$$

$$5. \sqrt{50} + (3 - 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})(\sqrt{8} - 1) + \sqrt[3]{64}$$

$$[8\sqrt{2}]$$

$$6. (\sqrt{3} + 2)^3 - (\sqrt{3} - 2)^3 - \sqrt{3\sqrt{3} - 4} \cdot \sqrt{3\sqrt{3} + 4} - 40 - (1 + \sqrt{11})^2$$

$$[-3\sqrt{11}]$$

Esercizio 4.13.7. Razionalizza:

$$1. \frac{1}{4\sqrt{2}} ; \frac{3 + \sqrt{3}}{5\sqrt{3}} ; \frac{12}{\sqrt[5]{8}} ; \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{8} ; \frac{\sqrt{3} + 1}{5} ; 6\sqrt[5]{4} ; 2\sqrt[3]{4} \right]$$

$$2. \frac{5}{7 - 2\sqrt{6}} ; \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} ; \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$\left[\frac{7 + 2\sqrt{6}}{5} ; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} ; \sqrt{15} - 4 \right]$$

$$3. \frac{25}{2\sqrt{7} - 3} ; \frac{17}{3\sqrt{6} - 2\sqrt{5}} ; \frac{2}{\sqrt[3]{4}(\sqrt{13} - 2\sqrt{3})}$$

$$\left[5(2\sqrt{7} + 3) ; \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{5}}{2} ; \sqrt[3]{2}(\sqrt{13} + 2\sqrt{3}) \right]$$

$$4. \frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}} ; \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{7}}$$

$$[\sqrt{3} - 1 ; \sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{2}]$$

4.14 Esercizi riepilogativi

Determinare le C.E. delle seguenti espressioni:

$$1. \sqrt{\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 1}} - \sqrt[3]{\frac{2 - x}{x - 3}} + \sqrt[4]{\frac{3x - 2}{4 - x}}$$

$$[1 \leq x < 4 \wedge x \neq 3]$$

$$2. \sqrt[6]{x(x+1)^2(x+2)^4} : \sqrt{x+2}$$

$$[x \geq 0 \vee x = -1]$$

$$3. \frac{\sqrt[4]{x^2 - 6x + 8}}{\sqrt[8]{x}} + \sqrt[3]{x^2 - 4}$$

$$[0 < x \leq 2 \vee x \geq 4]$$

$$4. \quad \sqrt[6]{1 - \frac{4x-4}{x^2}} - \sqrt[5]{\frac{3x-1}{x^2-3x}} \quad [\forall x \neq 0; 3]$$

$$5. \quad \sqrt[5]{\frac{1-7x}{x}} - \sqrt{5-|x|} \quad [-5 \leq x \leq 5 \wedge x \neq 0]$$

$$6. \quad \sqrt{\frac{-x^2+2x-1}{x^2+25}} : \sqrt{x^2-2x+4} \quad [x=1]$$

Semplificare i seguenti radicali:

$$7. \quad \sqrt[4]{16x^{10} - 24x^9 + 9x^8} \quad \left[\sqrt{x^4|4x-3|} \right]$$

$$8. \quad \sqrt[6]{\frac{27x^9(x-1)^6}{(x+3)^3}} \quad \left[\sqrt{\frac{3x^3(x-1)^2}{x+3}} \right]$$

$$9. \quad \sqrt[16]{\frac{9x^4 - 12x^2 + 4}{(25x^2 - 10x + 1)^2}} \quad \left[\sqrt[8]{\frac{|3x^2 - 2|}{(5x-1)^2}} \right]$$

$$10. \quad \sqrt[8]{(4x^2+1)^2 - 16x^2} \quad \left[\sqrt[4]{|4x^2-1|} \right]$$

$$11. \quad \sqrt[3]{x^6(x^3+3x^2+3x+1)} \quad [x^2(x+1)]$$

$$12. \quad \sqrt[10]{\frac{(x^2-1)(x-1)}{4x+4}} \quad \left[\sqrt[5]{\frac{|x-1|}{2}} \right]$$

Semplificare le seguenti espressioni:

$$13. \quad \left(\sqrt[3]{-\frac{x}{6} - \frac{6}{x} + 2} \cdot \sqrt{\frac{6x}{x^2-36}} \right) : \sqrt[6]{\frac{x-6}{36x^2(x+6)^3}} \quad [-\sqrt{6x}]$$

$$14. \quad \sqrt{\frac{a-3}{a+3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{3-a}} \cdot \sqrt[8]{\frac{(a+3)^3}{a^3}} \quad \left[\sqrt[8]{\frac{a(a-3)^2}{a+3}} \right]$$

$$15. \quad \sqrt{\frac{a-3}{a+3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{3-a}} \cdot \sqrt[8]{\frac{a+3}{a^4}} \quad [???$$

$$16. \quad \left(\sqrt[3]{\frac{2a+1}{a-2}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2-5a+2}{2a+1}} \right) : \left(\sqrt[6]{\frac{a-2}{4a^2-1}} \cdot \sqrt[3]{4a^2-4a+1} \right) \quad \left[1 \text{ se } a > 2 \vee -1 \text{ se } -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} \right]$$

17. $\sqrt[3]{4x^2 - 9} \cdot \sqrt{4x^2 - \frac{48x^2 - 54x + 27}{2x + 3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{2x + 3}{2x - 3}}$ $\left[\begin{array}{l} -\sqrt[3]{(2x - 3)^5} \text{ se } x < -\frac{3}{2} \\ \sqrt[3]{(2x - 3)^5} \text{ se } x > \frac{3}{2} \end{array} \right]$
18. $\left(\sqrt[6]{\frac{x - 2}{x^2 - 25}} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 10x + 25} \right) : \left(\sqrt[3]{\frac{x + 5}{x - 2}} \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 10}{x + 5}} \right)$ $[-1 \text{ se } -5 < x < 2 \vee 1 \text{ se } x > 5]$
19. $\sqrt{(x^2 - 9)} \sqrt{\frac{1}{x - 3}} : \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x + 3}} \sqrt{(x^2 + 3x + 9)\sqrt{x - 3}}$ $[x + 3]$
20. $\sqrt[3]{(2x - 1)\sqrt{2x - 1}} \sqrt{(2x - 1)\sqrt{(2x - 1)\sqrt[3]{2x - 1}}} : \sqrt[3]{2x - 1}$ $[(2x - 1)]$
21. $\sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{a} \sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \sqrt[4]{a^3}}$ $[\sqrt[3]{a}]$
22. $\left(\sqrt[3]{x} \sqrt{\frac{1}{x - 2}} \right)^2 \left[\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} \sqrt{x - 2}} \right)^2 \right]^2$ $\left[\sqrt[3]{\frac{x - 2}{x^2}} \right]$
23. $\sqrt[3]{\frac{x}{x + 3}} \left(\sqrt{(x + 3)} \sqrt{\frac{1}{x + 3}} : \sqrt[3]{x} \right)$ $\left[\sqrt[12]{\frac{1}{x + 3}} \right]$
24. $\sqrt{(x + 1)} \sqrt{\frac{1}{x + 1}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} : \left(\sqrt[12]{\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2}} \right)^2$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{\frac{1}{x + 1}} \text{ se } x > 0 \\ -\sqrt[4]{\frac{1}{x + 1}} \text{ se } -1 < x < 0 \end{array} \right]$
25. $[(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)]^2 - 5\sqrt{3} - (1 - \sqrt[4]{9})^2 + 5$ $[5 - 3\sqrt{3}]$
26. $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(\sqrt{6} - 4) - (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - 1)^2 + 5$ $[2 - 14\sqrt{2}]$
27. $\left[\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + (2 - \sqrt{3})^2 \right] (9 + 5\sqrt{3}) + 34$ $[40]$
28. $\left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} - 2 \right)^3 \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{8}$ $[\sqrt{3} - \sqrt{2}]$

$$29. \quad a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{12}} + \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{8}} + a^{\frac{9}{10}} - a^{\frac{2}{5}} : a^{-\frac{1}{2}} \quad \left[a^{\frac{13}{12}} = a^{\sqrt[12]{a}} \right]$$

$$30. \quad \frac{\sqrt{3^4 \sqrt[4]{9^5 \sqrt[3]{3}} : \sqrt[5]{81 \sqrt[3]{9}}}}{\sqrt{\sqrt[5]{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \sqrt[3]{\sqrt[3]{81 \sqrt[4]{27}}}}} \sqrt[5]{3} \quad \left[3^{-\frac{1}{10}} \right]$$

$$31. \quad \frac{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + 1}{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 1} : \frac{\sqrt{49 - 20\sqrt{6}}}{\sqrt{6}} \quad [3]$$

Risolvere:

$$32. \quad 3(x - \sqrt{3} + 1) + x(2\sqrt{3} - 1) = 5 - x\sqrt{3} \quad [1]$$

$$33. \quad (x + \sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = (x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) \quad \left[-\frac{5\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$34. \quad \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(x - \sqrt{3})^2 = -\frac{1}{2} \quad [2 + \sqrt{3}]$$

$$35. \quad 5\sqrt{2}(x + \sqrt{10}) - 10\sqrt{5}(1 + x\sqrt{5}) - 5(\sqrt{2} - 10) = 0 \quad [1]$$

$$36. \quad \sqrt{2}[3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + 5\sqrt{2}(x - \sqrt{2})] = 3(1 - x\sqrt{2})(1 - x) - (3 - 7x) \quad \left[\frac{16(\sqrt{2} - 1)}{3} \right]$$

$$37. \quad \frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)x}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{3} - 1 \quad \left[-\frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3} \right]$$

$$38. \quad \frac{x - 2}{\sqrt{2}} = \frac{x + \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \quad [-\sqrt{2}]$$

$$39. \quad \frac{x\sqrt{6} - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{1 - 3x}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -1 \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$40. \quad \frac{x + \sqrt{5}}{x} - \frac{\sqrt{5}}{x^2 - \sqrt{5}x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{5} - x} \quad [\cancel{x}]$$

$$41. \quad \frac{\sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} + \frac{2x^2}{x^2 - 2} = \frac{2x}{x + \sqrt{2}} \quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{3} \right]$$

42. $\frac{2}{x+2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-x} = \frac{1}{x^2+\sqrt{3}x-6}$ $[1+4\sqrt{3}]$
43. $2(x+\sqrt{6}) \leq (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}(x-3) + 1$ $[x \leq 3]$
44. $(\sqrt{2}+2-x)^2 + (\sqrt{2}-2)^2 - (x-\sqrt{2})^2 > 2(2\sqrt{2}-1)$ $[x < 3-\sqrt{2}]$
45. $\frac{x+1}{1-\sqrt{2}} \leq \frac{1-x}{1+\sqrt{2}}$ $[x \geq -\sqrt{2}]$
46. $\frac{x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{3}} \geq 0$ $\left[x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x \geq \sqrt{3} \right]$
47. $\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}x-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ $\left[\frac{\sqrt{2}-2}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
48. $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}-1} \leq \frac{x+1}{2-2\sqrt{2}} \\ \frac{2}{x} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{x-1} \end{cases}$ $\left[x \leq -\frac{1}{3} \right]$
49. $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x-2+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1} \leq 0 \\ \frac{2}{x-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases}$ $[-\sqrt{3} < x \leq 12-7\sqrt{3}]$
50. $\begin{cases} 5(x-\sqrt{3}) > 2(3x+\sqrt{3}) \\ (2x+\sqrt{3})^2 - (2x-\sqrt{3})^2 \geq 24\sqrt{3} \end{cases}$ $[\nexists x]$

$$51. \begin{cases} (x-1+\sqrt{3})^2 - (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geq 2\sqrt{3}(x-1) + 1 \\ (1-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) < 3 \end{cases} \quad \left[\frac{-5\sqrt{3}-3}{2} < x \leq 3 \right]$$

$$52. \begin{cases} x + \sqrt{5} \geq 1 - \sqrt{5}x \\ \frac{x-1}{\sqrt{2}} - \frac{x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} > 0 \end{cases} \quad [x > 1]$$

$$53. \begin{cases} (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}) - 2x(x+\sqrt{3}) \geq 0 \\ \frac{x^2-3}{x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{2}x} \geq 0 \end{cases} \quad [x \leq -\sqrt{3}]$$

$$54. \begin{cases} |x+\sqrt{2}| \geq 4\sqrt{2} \\ |x| - \frac{\sqrt{5}}{2} \geq 0 \\ |\sqrt{6}-x| \geq -\sqrt{3} \end{cases} \quad [x \leq -5\sqrt{2} \vee x \geq 3\sqrt{2}]$$

$$55. \begin{cases} 5x - y = 5\sqrt{5} - \sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{5} - \sqrt{2} \end{cases} \quad [(\sqrt{5}; \sqrt{2})]$$

$$56. \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{5}y = 2 + \sqrt{2} \\ 5x + (\sqrt{2}-1)y = 5(\sqrt{2}+1) \end{cases} \quad [(\sqrt{2}+1; 0)]$$

$$57. \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}-2\right)x - \sqrt{2}y = 2 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}(x-y-1) = 2(x+1) \end{cases} \quad [\text{Indeterminato}]$$

$$58. \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{y}{\sqrt{3}} \\ y - \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}(x-\sqrt{3}-1) \end{cases} \quad \left[\left(\sqrt{3}+1; \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} \right) \right]$$

$$59. \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \quad \left[\left(\frac{2}{5}; -\frac{\sqrt{6}}{5} \right) \right]$$

Capitolo 5

Equazioni di secondo grado

5.1 Risoluzione di una equazione di secondo grado

Una equazione di secondo grado, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

Abbiamo assunto la condizione $a \neq 0$ poichè, se $a = 0$ l'equazione si riduce ad una di primo grado il cui studio è già stato affrontato nel primo volume. I coefficienti b, c possono, invece, annullarsi rendendo incompleto il polinomio di secondo grado.

Determiniamo le soluzioni, dette anche *radici*, di un'equazione di secondo grado partendo dai casi particolari in cui l'equazione si presenta in forma incompleta.

1) se $c = 0$ l'equazione assume la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

e viene comunemente detta equazione *spuria*.

Per risolverla è sufficiente raccogliere x a fattor comune ottenendo:

$$x(ax + b) = 0$$

da cui si ricavano le due radici (normalmente indicate con x_1, x_2)

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Esempio 5.1.1.

- $2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}$
- $5x - 7x^2 = 0 \Rightarrow x(5 - 7x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{7}$
- $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{15}x = 0 \Rightarrow x(\sqrt{3}x + 2\sqrt{15}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{5}$

In base a quanto descritto possiamo affermare che un'equazione spuria ha sempre due soluzioni delle quali una nulla; l'altra (x_2) può essere determinata mentalmente senza formalizzare il raccoglimento a fattor comune. Pertanto la risoluzione, per esempio di $4x^2 + 7x = 0$, si potrà ottenere scrivendo direttamente: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{7}{4}$

Esercizio 5.1.1. $6x^2 - 13x = 0$ $3x - x^2 = 0$ $\sqrt{3}x^2 - x = 0$ $(x+1)^2 = 3x+1$

2) Se $b = 0$ l'equazione assume la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

e viene comunemente detta equazione *pura*.

Per risolverla è sufficiente esplicitare x^2 e ricordare la definizione di radicale ottenendo:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \text{ da cui } \begin{cases} \text{se } -\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \\ \text{se } -\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$$

Esempio 5.1.2.

- $3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$ (molto spesso sintetizzate con la scrittura $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$)
- $9 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$
- $x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 = -25 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
- $3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

In quest'ultimo esempio l'equazione è sia pura che spuria ($b = c = 0$), essa ha due soluzioni coincidenti, entrambe nulle (si può anche dire che tale equazione ha una soluzione con molteplicità due).

In base a quanto descritto possiamo affermare che un'equazione pura o non ha soluzioni, oppure ne ha due opposte.

In base a tali considerazioni possiamo ora dimostrare quanto affermato nel primo volume: la somma di due quadrati non si annulla mai ed è irriducibile. Infatti da $x^2 + k^2 = 0$ otteniamo $x^2 = -k^2$ banalmente priva di soluzioni reali. Se poi $x^2 + k^2$ fosse riducibile si potrebbe scrivere come prodotto di due fattori di primo grado, ma allora l'equazione $x^2 + k^2 = 0$ avrebbe due soluzioni reali e ciò non è.

Esercizio 5.1.2. $4x^2 - 3 = 0$ $25 - 9x^2 = 0$ $4x^2 + 49 = 0$ $2x(3x - 2) = (x - 2)^2$

Affrontiamo ora la risoluzione di un'equazione di secondo grado *completa* per la quale ricaveremo una *formula risolutiva*.

Data l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Poichè $a \neq 0$ possiamo moltiplicare ambo i membri dell'equazione per $4a$ (secondo principio di equivalenza):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Sommiamo ad ambo i membri b^2 (primo principio di equivalenza):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

Trasportiamo il termine $4ac$ al secondo membro:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Scomponiamo in fattori il primo membro:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Ponendo $2ax + b = y$ otteniamo l'equazione pura:

$$y^2 = b^2 - 4ac$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} & \text{se } b^2 - 4ac \geq 0 \\ \nexists y \in \mathbb{R} & \text{se } b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} & \text{se } b^2 - 4ac \geq 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} & \text{se } b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

Esplicitando x nel caso $b^2 - 4ac \geq 0$ otteniamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L'esistenza delle soluzioni dipende dal segno di $b^2 - 4ac$. Poichè è tale quantità che discrimina l'avere o no soluzioni, essa viene detta *discriminante* dell'equazione di secondo grado ed è comunemente indicata con Δ .

Pertanto possiamo così riassumere quanto ricavato:

$$\text{se } \Delta \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$\text{se } \Delta < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

Osservazione.

Se $\Delta = 0$ l'equazione ha due soluzioni coincidenti in quanto:

$$x_1 = \frac{-b - 0}{2a} = -\frac{b}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

Se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni nell'insieme dei numeri reali; si intuisce, pertanto, che affinché anche tali equazioni abbiano soluzione, sarà necessario ampliare l'insieme numerico. Tale ampliamento verrà trattato nei prossimi anni e porterà alla definizione dei *numeri complessi* che verranno indicati con \mathbb{C} .

Esempio 5.1.3.

$$\bullet \quad 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9 > 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{7 - 3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{7 + 3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

- $-x^2 - 2x + 5 = 0$ (consigliamo di rendere positivo il coefficiente direttivo)

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$\Delta = 4 + 20 = 24 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{6})}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{6} \\ x_2 = -1 + \sqrt{6} \end{cases}$$

- $5x^2 + 2x + 4 = 0$

$$\Delta = 4 - 80 = -76 < 0 \quad \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

- $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$

$$\Delta = (\sqrt{2} + 1)^2 - 4\sqrt{2} = 2 + 1 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} > 0 \text{ (è preferibile } 2 + 1 - 2\sqrt{2} \text{ in cui si riconosce il quadrato di un binomio, ossia } (\sqrt{2} - 1)^2 \text{)}$$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 \pm (\sqrt{2} - 1)}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

- $25x^2 - 20x + 4 = 0$

$$\Delta = 400 - 400 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{50} = \begin{cases} x_1 = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Quest'ultima equazione poteva essere risolta più velocemente riconoscendo il quadrato di un binomio.

Osservazione. La formula risolutiva dell'equazione completa può essere utilizzata anche per le equazioni incomplete, ma, in tal caso, il calcolo verrebbe appesantito.

Esercizio 5.1.3.

$$x^2 + 14x + 45 = 0 \quad 10x^2 - 19x + 6 = 0 \quad 2x^2 - 2x + 5 = 0 \quad 49 + 28x + 4x^2 = 0 \quad 6x^2 - (5 - \sqrt{2})x - 1 = 0$$

La formula risolutiva può essere snellita nei calcoli se b si presenta nella forma:

$b = 2 \cdot k$ con $k \in \mathbb{R}$; in tal caso, infatti, si ha:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \\ &= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{k^2 - ac})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \quad \text{ove } k = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

ossia:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

detta *formula risolutiva ridotta*.

La quantità $k^2 - ac$ viene indicata con $\frac{\Delta}{4}$ in quanto:

$$k^2 - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{b^2}{4} - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4} = \frac{\Delta}{4}$$

Esempio 5.1.4.

$$\bullet \quad 5x^2 - 18x + 16 = 0 \quad k = -9$$

$$\frac{\Delta}{4} = 81 - 80 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{5} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\bullet \quad x^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0 \quad k = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 12 + 4 = 16 > 0$$

$$x_{1,2} = -2\sqrt{3} \pm 4 = \begin{cases} x_1 = -2\sqrt{3} - 4 \\ x_2 = -2\sqrt{3} + 4 \end{cases}$$

Per rendersi conto dell'utilità pratica della formula ridotta, si confrontino i calcoli svolti nell'ultimo esempio con quelli che si ottengono utilizzando la formula risolutiva non ridotta.

$$\text{Esercizio 5.1.4.} \quad 4x^2 + 8x = 77 \quad 8 - 2x - 3x^2 = 0 \quad x^2 - 2\sqrt{2}x - (1 + 2\sqrt{2}) = 0$$

5.2 Relazioni tra i coefficienti di un'equazione e le sue soluzioni

Per rispondere a varie 'problematiche' legate alle equazioni di secondo grado che affronteremo nei prossimi paragrafi, sono utili le seguenti relazioni tra i coefficienti dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e le sue soluzioni (qualora esistano):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Infatti, se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ allora:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Esempio 5.2.1. L'equazione $5x^2 - 4x - 20 = 0$ ha soluzioni reali (verifica che $\Delta > 0$) la cui somma è $x_1 + x_2 = \frac{4}{5}$ e il cui prodotto è $x_1 \cdot x_2 = -\frac{20}{5} = -4$

Con le relazioni precedenti è possibile scrivere un'equazione di secondo grado conoscendo la somma e il prodotto delle sue radici che potranno essere determinate risolvendo l'equazione. Infatti da $ax^2 + bx + c = 0$, dividendo per a , otteniamo

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

se $\Delta \geq 0$ ricordando che $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ possiamo scrivere

$$x^2 - sx + p = 0$$

che, risulta, avrà per radici proprio x_1 e x_2 .

Con questo procedimento è possibile determinare due numeri dei quali si conoscono la somma e il prodotto; infatti se, ad esempio si vogliono trovare due numeri con somma $s = \frac{19}{3}$ e prodotto $p = 2$ è sufficiente risolvere l'equazione $x^2 - \frac{19}{3}x + 2 = 0$ ottenendo $x_1 = \frac{1}{3}$ e $x_2 = 6$.

Esercizio 5.2.1. Determina, senza risolverle, la somma e il prodotto delle radici (se esistono) delle equazioni:

$$25x^2 - 50x + 21 = 0 \quad 2x^2 + 1 - 6x = 0 \quad 15x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (\sqrt{3} - 1)x^2 - \sqrt{3}x - 2(1 - \sqrt{3}) = 0$$

5.3 Scomposizione in fattori di un trinomio di secondo grado

La scomposizione in fattori di un trinomio di secondo grado è stata già affrontata nel corso del primo anno, ma non in modo esaustivo infatti, utilizzando solo i numeri razionali, non si potevano scomporre con la regola somma prodotto tutti i trinomi come, ad esempio, $x^2 - x - 1$. A questo punto, introdotti i numeri reali e utilizzando le equazioni di secondo grado, è possibile determinare una regola generale per scomporre un trinomio di secondo grado oppure stabilire se esso è irriducibile in \mathbb{R} .

Teorema 5.3.1. Dato il trinomio $ax^2 + bx + c$, indicate con Δ, x_1, x_2 il discriminante e le radici dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ si ha:

$$\text{se } \Delta \geq 0 \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{se } \Delta < 0 \quad ax^2 + bx + c \text{ è irriducibile in } \mathbb{R}$$

Dimostrazione.

Se $\Delta \geq 0 \quad \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluzioni dell'equazione associata, con

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \text{ allora:}$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}x \right) + \frac{c}{a} \right] =$$

$$a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = a (x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a [x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] =$$

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Se } \Delta < 0 \quad \Rightarrow ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) =$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$$

$$\text{essendo } \Delta < 0 \quad \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \quad \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \text{ è somma di quadrati (il quadrato di } x + \frac{b}{2a} \text{ e}$$

il quadrato di $\sqrt{-\frac{\Delta}{4a^2}}$) e quindi è irriducibile come abbiamo visto nel paragrafo 1 di questo capitolo. \square

Esempio 5.3.1.

- Il trinomio $2x^2 + 9x - 5$ ha $\Delta = 121 > 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{1}{2}$ dunque la sua scomposizione in fattori è

$$2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 5)$$

Solitamente si preferisce la scrittura a coefficienti interi: $(2x - 1)(x + 5)$

- Il trinomio $3x^2 + 7x + 11$ ha $\Delta = -83 < 0$ dunque è irriducibile.

- Il trinomio $6x^2 + 7x - 3$ ha $\Delta = 121 > 0$, $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ dunque la sua scomposizione in fattori è:

$$6 \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) = 2 \left(x + \frac{3}{2}\right) 3 \left(x - \frac{1}{3}\right) = (2x + 3)(3x - 1)$$

- Il trinomio $x^2 - x - 1$ ha $\Delta = 5 > 0$, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ dunque la sua scomposizione in fattori è:

$$\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Esempio 5.3.2. Per semplificare la frazione $\frac{9x^2 - 1}{3x^2 + x(3\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}}$ è sufficiente scomporre in fattori numeratore e denominatore ottenendo:

$$\frac{(3x - 1)(3x + 1)}{3 \left(x - \frac{1}{3}\right) (x + \sqrt{2})} = \frac{(3x - 1)(3x + 1)}{(3x - 1)(x + \sqrt{2})} = \frac{(3x + 1)}{(x + \sqrt{2})} \quad \text{C.E. } x \neq \frac{1}{3}, x \neq -\sqrt{2}$$

Osservazione. I trinomi di secondo grado con $\Delta = 0$ sono sempre lo sviluppo del quadrato di un binomio o del suo opposto. Infatti se $\Delta = 0$ $x_1 = x_2$, dunque:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2 = \begin{cases} (\sqrt{ax} - \sqrt{ax_1})^2 & \text{se } a > 0 \\ -(\sqrt{-ax} - \sqrt{-ax_1})^2 & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

In questo caso è preferibile scomporre riconoscendo il quadrato anzichè usare la regola generale.

Esempio 5.3.3. $25x^2 - 30x + 9$ ha $\Delta = 0$ dunque è il quadrato di un binomio, si scrive direttamente $25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2$ senza risolvere l'equazione associata.

Esercizio 5.3.1. Scomponi in fattori, se possibile, i seguenti trinomi:

$$5x^2 + 8x - 13; \quad 15x^2 - 19x + 6; \quad 3x^2 + 2x + 7; \quad x^2 - 2x - 5; \quad 2x^2 + \sqrt{3}x - 3$$

Esercizio 5.3.2. Semplifica le seguenti frazioni:

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 + 3x - 2}; \quad \frac{a^7 + a^6 - 6a^5}{a^8 - a^7 - 12a^6}; \quad \frac{-2x^2 + x + 6}{4x^2 + 4x - 3}; \quad \frac{3x^2 - 4\sqrt{2}x + 2}{3x^2 - (1 + 3\sqrt{2})x + \sqrt{2}}$$

5.4 Regola di Cartesio

La regola di Cartesio consente di determinare il segno delle radici di un'equazione di secondo grado, se esse esistono, senza risolverla. E' sufficiente, infatti, conoscere il segno di a , b , c , per determinare quello di $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$ e, di conseguenza, stabilire il segno di x_1 e x_2 , come riassunto nella seguente tabella:

a	b	c	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	note
+	+	+	-	+	-	-	
+	+	-	-	-	-	+	$ x_1 < x_2 $
+	-	+	+	+	+	+	
+	-	-	+	-	-	+	$ x_1 > x_2 $

Abbiamo considerato solo il caso $a > 0$, diversamente sarà sufficiente cambiare il segno ai due membri dell'equazione riconducendoci al caso $a > 0$.

Se conveniamo di indicare con il termine *permanenza* il caso in cui due coefficienti successivi dell'equazione abbiano lo stesso segno e col termine *variazione* il caso in cui abbiano segno opposto, la precedente tabella consente di enunciare la seguente regola:

Regola di Cartesio: data un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$, ad ogni variazione corrisponde una radice positiva e ad ogni permanenza una radice negativa. Se le radici sono discordi, è maggiore, in valore assoluto, la radice positiva se la variazione precede la permanenza, è maggiore quella negativa in caso contrario.

Esempio 5.4.1.

- L'equazione $2x^2 - 9x + 5 = 0$ con $\Delta = 41 > 0$ ha due soluzioni positive essendoci due variazioni
- L'equazione $2x^2 + 7\sqrt{3}x - 9 = 0$ con $\Delta = 219 > 0$ ha una radice negativa ed una positiva (con quella negativa di modulo maggiore) essendoci, nell'ordine, una permanenza ed una variazione.

Esempio 5.4.2. Data l'equazione $5x^2 - 3x + k - 1 = 0$ determinare k in modo che abbia due soluzioni positive.

Affinchè l'equazione abbia soluzioni reali dovrà essere $\Delta \geq 0$, ossia:

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5(k - 1) = 9 - 20k + 20 = 29 - 20k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{29}{20}.$$

Perchè le soluzioni siano entrambe positive devono esserci due variazioni e dunque dobbiamo avere:

$$k - 1 > 0 \Rightarrow k > 1$$

Intersecando le condizioni trovate otteniamo:

$$1 < k \leq \frac{29}{20}$$

Esercizio 5.4.1. Determinare per quali valori di k l'equazione $(k + 2)y^2 - 9y - 2 = 0$ ha soluzioni di segno opposto

5.5 Equazioni parametriche

La definizione di equazione parametrica è già stata data nel primo volume.

Relativamente alle equazioni parametriche di secondo grado, se indichiamo con x l'incognita e con k il parametro, l'equazione, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0 \quad \text{con} \quad a(k) \neq 0^1$$

Esempio 5.5.1. $kx^2 + (2k - 1)x + 3 - k = 0$ è una equazione parametrica nella quale $a(k) = k$; $b(k) = 2k - 1$; $c(k) = 3 - k$

Un'equazione parametrica rappresenta in realtà infinite equazioni numeriche, una per ciascun valore che si può assegnare al parametro; di conseguenza anche le radici dell'equazione e le loro caratteristiche variano al variare del parametro. E' allora lecito chiederci per quali valori del parametro l'equazione o le sue radici soddisfino a determinate relazioni o proprietà.

Per rispondere a tali quesiti sulle equazioni parametriche, è sufficiente applicare la teoria illustrata nei paragrafi precedenti, come chiarisce il seguente esempio.

Esempio 5.5.2. Data l'equazione $kx^2 - (2k + 1)x + k - 5 = 0$ con $k \neq 0$, determinare i valori del parametro in modo che :

1. le soluzioni siano reali.

Ricordando che un'equazione di secondo grado ha soluzioni reali quando $\Delta \geq 0$, dovrà accadere che :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2k + 1)^2 - 4k(k - 5) \geq 0 \quad \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 + 20k \geq 0 \\ &\Rightarrow 24k + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow k \geq -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

2. il prodotto delle radici sia -2

Ricordando che $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = -2$ quindi:

$$\frac{k - 5}{k} = -2 \quad \Rightarrow k - 5 = -2k \quad \Rightarrow k = \frac{5}{3}$$

Tale valore è accettabile perchè rispetta la condizione sul parametro relativa all'esistenza delle radici.

3. la somma delle radici sia 1

Ricordando che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 1$ quindi:

$$\frac{2k + 1}{k} = 1 \quad \Rightarrow 2k + 1 = k \quad \Rightarrow k = -1 \text{ valore non accettabile in quanto per esso le soluzioni non esistono.}$$

4. una soluzione sia -2

Ricordando la definizione di soluzione, il numero -2 è una soluzione se, sostituito all'incognita, verifica l'uguaglianza; deve accadere dunque:

$$k(-2)^2 - (2k + 1)(-2) + k - 5 = 0 \quad \Rightarrow 4k + 4k + 2 + k - 5 = 0 \quad \Rightarrow 9k - 3 = 0 \text{ da cui deduciamo che l'equazione iniziale di secondo grado è verificata da } x = -2 \text{ solo per } k = \frac{1}{3}$$

5. le soluzioni siano opposte.

Abbiamo già osservato che un'equazione pura ha soluzioni opposte; si può dimostrare(suggeriamo di farlo) che ciò accade solo per tali equazioni; dovrà allora essere:

$$b = 0 \quad \Rightarrow 2k + 1 = 0 \quad \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \text{ non accettabile.}$$

¹se $a(k) = 0$ l'equazione sarebbe di primo grado

6. la somma dei reciproci delle radici sia 3

Tale condizione si può esprimere matematicamente con $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$

Qualora, come in questo caso, non si riconosca una relazione nota tra la condizione e i coefficienti (come invece accadeva nelle domande 2 e 3) si suggerisce di trasformare, se possibile, tale condizione in una equivalente contenente solo la somma e/o il prodotto delle radici.

Nel nostro caso facendo il minimo comun denominatore otteniamo:

$$x_2 + x_1 = 3x_1x_2 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 3\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2k+1}{k} = 3\frac{k-5}{k} \Rightarrow 2k+1 = 3k-15 \Rightarrow k = 16$$

accettabile

7. le soluzioni siano reciproche.

Tale condizione si può esprimere matematicamente con $x_1 = \frac{1}{x_2}$, da cui:

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{k-5}{k} = 1 \Rightarrow k-5 = k \Rightarrow 0 = 5 \text{ impossibile} \Rightarrow \cancel{k}$$

8. la somma dei quadrati delle soluzioni sia 4

Tale condizione si può esprimere matematicamente con $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

Osservando che $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ la relazione diventa:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = 4 \Rightarrow \frac{(2k+1)^2}{k^2} - 2\frac{k-5}{k} = 4 \quad (\text{eseguendo i calcoli})$$

$$2k^2 - 14k - 1 = 0 \Rightarrow (\text{risolvendo l'equazione}) k = \frac{7 - \sqrt{51}}{2} \vee k = \frac{7 + \sqrt{51}}{2} \text{ solo il secondo valore è accettabile (verificalo)}$$

9. le radici siano concordi.

Perchè le radici siano concordi il loro prodotto deve essere positivo, quindi

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{k-5}{k} > 0 \Rightarrow k < 0 \vee k > 5$$

Tali valori vanno intersecati con quelli determinati al punto 1. relativi alla realtà delle soluzioni, ottenendo:

$$-\frac{1}{24} \leq k < 0 \vee k > 5$$

10. le radici siano entrambe negative.

Perchè le radici siano negative deve essere positivo il loro prodotto e negativa la loro somma, pertanto:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k-5}{k} > 0 \\ \frac{2k+1}{k} < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < 0$$

e intersecando tali valori con quelli del punto 1. otteniamo $-\frac{1}{24} \leq k < 0$

5.6 Sistemi di secondo grado di due equazioni in due incognite

E' noto che il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle equazioni componenti. Un sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite contiene pertanto un'equazione di primo ed una di secondo grado. Sono esempi di sistemi di secondo grado i seguenti:

$$\text{a) } \begin{cases} 4 - x^2 - y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} xy = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Generalmente tali sistemi si risolvono col metodo di sostituzione esplicitando una incognita dall'equazione di primo grado.

Procediamo alla risoluzione dei sistemi precedenti:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x + 2 \\ 4 - x^2 - (x + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha due soluzioni, le coppie $(1, 3)$, $(-2, 0)$

$$\text{b) } \begin{cases} x = -y \\ (-y)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^2 = 8 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = 2\sqrt{2} \\ x_1 = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = -2\sqrt{2} \\ x_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Il sistema ha due soluzioni, le coppie $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

$$\text{c) } \begin{cases} y = 2x \\ x(2x) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ y_1 = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ y_2 = -2\sqrt{\frac{3}{2}} = -\sqrt{6} \end{cases}$$

Il sistema ha due soluzioni, le coppie $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Esercizio 5.6.1.

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y^2 = 31 \end{cases} \quad \begin{cases} x(2x - 3) - y(3x + y) = (2x - y)^2 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y + x = 0 \\ y^2 + xy = y + x \end{cases}$$

5.7 Problemi di secondo grado

Con le equazioni e i sistemi lineari abbiamo risolto alcuni problemi di primo grado. A questo punto è possibile affrontare la risoluzione di problemi di secondo grado risolvibili mediante equazioni e sistemi di secondo grado.

Esempio 5.7.1. In una frazione il numeratore supera di 1 il doppio del denominatore. Determina la frazione sapendo che il numeratore e il denominatore sono numeri naturali e che essa è equivalente a un'altra frazione il cui numeratore supera di 4 il triplo del denominatore della prima frazione e il cui denominatore supera di 2 il denominatore della prima frazione.

Risolvendolo con una sola incognita poniamo:

$$\text{denominatore} = x \Rightarrow \text{numeratore} = 2x + 1, x \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2x + 1}{x} = \frac{3x + 4}{x + 2} \quad \text{C.E. } x \neq 0, x \neq -2$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 4x$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow \text{la frazione è } \frac{5}{2} \\ x = -1 \text{ non accettabile} \end{cases}$$

Risolvendolo con due incognite poniamo:

$$\text{denominatore} = x$$

$$\text{numeratore} = y \quad x, y \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{3x + 4}{x + 2} \end{cases} \text{ che risolto dà le soluzioni:}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ non accettabile e } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \text{ accettabile } \Rightarrow \text{la frazione è } \frac{5}{2}$$

Esempio 5.7.2. Una ditta spende mensilmente 73500 in stipendi per i propri dipendenti. Aumentando di 5 il numero dei dipendenti, ma riducendo l'orario di lavoro, diminuisce a ciascuno lo stipendio di 200 e spende solamente 2500 in più per gli stipendi. Quanti dipendenti aveva inizialmente la ditta e quanto guadagnava ognuno di essi?

Risolvendolo con due incognite poniamo: numero iniziale dipendenti = x , stipendio iniziale = y $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Q}^*$. Dopo le nuove assunzioni i dipendenti saranno $x + 5$ e ogni stipendio $y - 200$

$$\begin{cases} xy = 73500 \\ (x + 5)(y - 200) = 76000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 73500 \\ xy - 200x + 5y - 1000 = 76000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 73500 \\ 73500 - 200x + 5y - 1000 = 76000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 73500 \\ -200x + 5y = 3500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 73500 \\ y = 40x + 700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40x^2 + 700x - 73500 = 0 \\ y = 40x + 700 \end{cases}$$

che risolto dà le soluzioni:

$$\begin{cases} x = 35 \\ y = 2100 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{105}{2} \\ y = -1400 \end{cases} \quad (\text{soluzione non accettabile})$$

Possiamo concludere che il numero iniziale dei dipendenti era 35 ed essi guadagnavano inizialmente 2100 euro.

Esercizio 5.7.1.

La somma delle età di un padre con quella del figlio è 38. Sapendo che l'età del padre aumentata di 4 anni dà il quadrato dell'età del figlio, trovare le due età.

Determina due numeri sapendo che la somma tra il doppio del minore ed il triplo del maggiore è 84 e che il rapporto tra la loro somma e il loro prodotto è $\frac{2}{15}$

5.8 Esercizi riepilogativi

1. $(x-3)^2 + x(2x-1) = 2(6+x^2) - x$ [$3 \pm 2\sqrt{3}$]
2. $(x-2)^3 - (x-3)^2(x+1) + 3 = 0$ [2 ; 7]
3. $\frac{(x+2)(2-2x)}{6} + \frac{x(x+1)}{5} + 2 = 0$ [-5 ; 4]
4. $\frac{(2x-1)^3}{4} + \frac{1+(x+3)^2}{4} = \frac{x(2x+1)^2}{2}$ [$-\frac{9}{19}$; 1]
5. $\frac{x+1}{2} + 4(x+2)(x-2) - x^2 = \left(3x - \frac{1}{2}\right)(x+1) + x^2$ [\mathbb{Z}]
6. $\frac{2}{5}x + 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{(x+2)^2}{5-5x}$ [-3 ; $\frac{2}{3}$]
7. $\frac{2x}{x^2-x} + \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{2x+3}{x^2-1} + \frac{1}{x-x^3}$ [2]
8. $\frac{3x+1}{x-2} = -\left(\frac{3}{x^2-3x+2} + \frac{2x-1}{1-x}\right)$ [-3 ; 0]
9. $\frac{2x+1}{2x-4} - \frac{3x-4}{3x+6} - \frac{x^2+6}{6x^2-24} = \frac{9}{x+2}$ [-23 ; 4]
10. $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2} = \frac{5-x^2}{x^2-x-4}$ [1 ; -4]
11. $\frac{x^2-2x+5}{x^2-5x+6} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{x+2}{x-3}$ [0]
12. $\frac{3y-1}{3y-2} - \frac{3y-2}{3y-1} = \frac{1}{3} + \frac{21y-8}{27y^2-27y+6}$ [\mathbb{Z}]
13. $\frac{x^2-11}{x^2-3x-4} + \frac{x}{4x-16} = \frac{x^2-6}{2x^2-6x-8} - \frac{(x-9)(x-3)}{x^2-3x-4}$ [$\frac{19}{7}$]
14. $\frac{2\sqrt{3}}{3x^2-1} - \frac{x(\sqrt{3}+1)+1}{x\sqrt{3}+1} = \frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-1} - 1$ [$-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$]
15. $\frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{1}{1-4x} - \frac{3}{4x^3-4x-x^2+1} = 0$ [$-\frac{1}{3}$]
16. $\frac{(2x-1)^2}{x-3} - 4 = 2x - \frac{13}{3-x}$ [0 ; 1]
17. $2x^2 - (2\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0$ [$-\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$]

18. $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 6 = 0$ [$1 - \sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$]
19. $(x - \sqrt{3})^2 + x(x - \sqrt{3}) = 9$ [$-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2\sqrt{3}$]
20. $4x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$ [$-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$]
21. $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ [$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$]
22. $x^2 - 3\sqrt{3}x + 4 - \sqrt{6} = 0$ [$\sqrt{3} - \sqrt{2}$; $2\sqrt{3} + \sqrt{2}$]
23. $(x\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - x\sqrt{2}) - (1 - \sqrt{6})x^2 + 2(x + 1)^2 = \sqrt{6} - 2$ [-4 ; -1]
24. $|4x^2 + 7x + 1| = |x + 1|$ [$0, -\frac{3}{2}, -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$]
25. $x^2 - 3|1 - 2x| = 0$ [$-3 \pm 2\sqrt{3}, 3 \pm \sqrt{6}$]
26. $|x^2 - 4x + 1| = -x^2 - 3$ [$\cancel{A}x$]
27. In un'equazione di secondo grado, ridotta a forma normale, il primo coefficiente è 3, il terzo è 5 e una radice è -5 . Determina l'altra radice e il secondo coefficiente. [$-\frac{1}{3}$; 16]
28. Data l'equazione $x^2 + bx + c = 0$, determina i valori di b e c sapendo che il prodotto delle radici è -4 e che una radice è $\frac{1}{2}$ [$c = -4$; $b = \frac{15}{2}$]
29. Data l'equazione parametrica $x^2 - 2(k+1)x + k^2 - 2 = 0$, determina il parametro k in modo che:
a) la somma delle radici sia 4; b) il prodotto delle radici sia 7; c) la somma delle radici uguagli l'opposto del loro prodotto [a) 1; b) 3; c) 0]
30. Data l'equazione parametrica $(k - 3)x^2 - (2k - 3)x + k = 0$, determina il parametro k in modo che abbia radici:
a) reali e coincidenti; b) reali e distinte; c) opposte; d) reciproche; e) una l'opposto del reciproco dell'altra [a) $\cancel{A}k$; b) $k \neq 3$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\cancel{A}k$; e) $\frac{3}{2}$]
31. Data l'equazione parametrica $(k + 2)x^2 - (2k + 3)x + k + 1 = 0$, determina il parametro k in modo che:
a) sia di primo grado; b) abbia due radici reali e distinte; c) abbia radici reciproche; d) sia spuria [a) $k = -2$; b) $\forall k$; c) $\cancel{A}k$; d) -1]

32. Data l'equazione parametrica $x^2 + (2k+1)x + k^2 - 1 = 0$, determina il parametro k in modo che:
 a) $x_1 = x_2$; b) $x_1 = 0$; c) $x_1 = 1$; d) $x_1 = -x_2$; e) $x_1 = \frac{1}{x_2}$; f) $x_1 = -\frac{1}{x_2}$; g) $x_1^2 + x_2^2 = 1$ [a) $-\frac{5}{4}$; b) ± 1 ; c) -1 ; d) $-\frac{1}{2}$;
[e) $\sqrt{2}$; f) 0 ; g) -1]
33. Data l'equazione parametrica $(a+1)x^2 + 2ax + a - 1 = 0$, determina il parametro a in modo che:
 a) abbia radici reali e distinte; b) $x_1 = 0$; c) $x_1 = -x_2$; d) $x_1^2 + x_2^2 = 2$; e) $x_1^3 + x_2^3 = 0$ [a) $a \neq -1$; b) 1 ; c) 0 ; d) 0 ; e) 0]
34. Data l'equazione parametrica $x^2 - (m+1)x + m = 0$, determina il parametro m in modo che:
 a) $x_1 + x_2 = \sqrt{2}$; b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$; c) $x_1^2 + x_2^2 = 10$; d) $x_1^3 + x_2^3 = 9$;
 e) $\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ [a) $\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{1}{3}$; c) ± 3 ; d) 2 ; e) ± 2]
35. Data l'equazione parametrica $2x^2 - 8x + 2a - 5 = 0$, determina il parametro a in modo che:
 a) le radici siano opposte; b) le radici siano reali e discordi; c) le radici siano reali e concordi [a) $\neq a$; b) $a < \frac{5}{2}$; c) $\frac{5}{2} < a \leq \frac{13}{2}$]

Risolvi i sistemi di secondo grado:

36. $\begin{cases} 3x^2 + x - y = 0 \\ -x + y = 27 \end{cases}$; $\begin{cases} y + x + 2 = 3 \\ y^2 - (x+2)(x+4) = 9 \end{cases}$ [(3, 30) (-3, 24); (-2, 3)]
37. $\begin{cases} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{y-1} = \frac{1}{3} \\ \frac{y+1}{x+3} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x = \frac{1}{2}(1-y) \\ (4x+y)^2 + 4x + y + 1 = 0 \end{cases}$ [(5, 7); impossibile]
38. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 - (y^2 + 16) = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{(x+2)(y-1)}{2} - \frac{(x-1)(y+2)}{3} = 6 \\ \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y) = 2 \end{cases}$ [(6, 2); (-2, 4); $\left(-\frac{35}{4}, 31\right)$]

Risolvi i seguenti problemi di secondo grado

39. Trova l'età di una persona sapendo che fra due anni la sua età sarà uguale al quadrato della quarta parte dell'età che aveva tre anni fa. [23]
40. Trova tre numeri che siano multipli interi consecutivi di 3 e tali che la somma del quadrato del minore con il prodotto degli altri due sia 414. [12, 15, 18]
41. Trova due numeri positivi sapendo che il primo supera di 2 la terza parte del secondo e che il quadrato del primo supera di 4 la quinta parte del quadrato del secondo. [7, 15]

42. Decomponi 15 in due parti in modo che la somma dei loro quadrati sia 113 [8, 7]
43. In una frazione il numeratore e il denominatore hanno somma 10, mentre la somma dei loro quadrati è 58. Qual è la frazione? $\left[\frac{3}{7}, \frac{7}{3}\right]$
44. Giulio apre a caso un libro; il prodotto del numero delle 2 pagine che vede è 462. Quali pagine sta vedendo? [21, 22]
45. Ad un gioco partecipano n giocatori. Il vincitore riceve n euro da ciascuno degli altri giocatori. Quanti sono i partecipanti sapendo che il vincitore riceve 210 euro? [15]
46. Determina tre numeri sapendo che la loro somma è 4, il prodotto del primo e del secondo è -2 e il prodotto degli ultimi due è 6 [-1, 2, 3]
47. Trovare due numeri sapendo che la somma tra il doppio del primo e il triplo del secondo è 7 e che la differenza tra il quadrato del primo e quello del secondo è 24 $\left[-1, 5 ; -\frac{53}{5}, \frac{47}{5}\right]$
48. Dividere il numero 12 in due parti in modo che sia $\frac{27}{16}$ il rapporto tra la somma del primo e il quadrato del secondo, e la somma del secondo e il quadrato del primo [5, 7]
49. Trovare un numero intero di due cifre sapendo che il prodotto delle sue cifre è 32 e che invertendo l'ordine delle cifre il numero ottenuto sta a quello cercato come 7 sta a 4 [48]

Capitolo 6

Disequazioni di secondo grado

6.1 Introduzione

Ci proponiamo di dare un significato geometrico alle soluzioni di un'equazione e di una disequazione con una incognita associando ad esse una equazione in due incognite espressa in forma esplicita, cioè del tipo $y = f(x)$.

Consideriamo un'equazione o una disequazione nell'incognita x , essa scritta in forma normale, è del tipo:

$$f(x) = 0 \qquad f(x) > 0 \qquad f(x) < 0$$

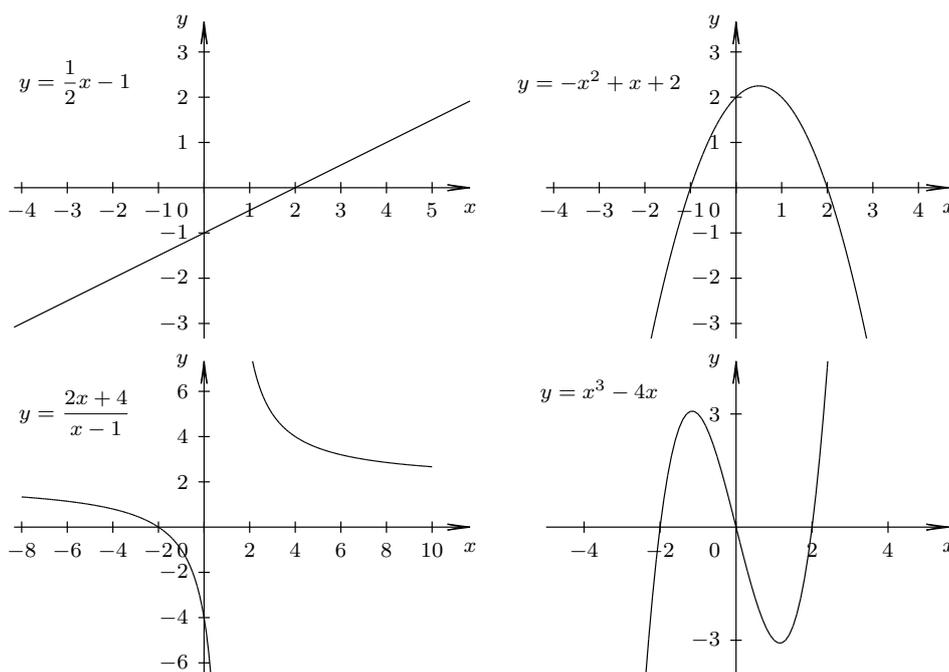
ove $f(x)$ è una espressione algebrica dipendente da x .

Ad $f(x)$ è possibile associare l'equazione $y = f(x)$ nelle incognite x, y che definisce il luogo geometrico costituito dall'insieme delle sue soluzioni. (che ricordiamo essere coppie ordinate). Tale luogo geometrico può essere rappresentato in un piano cartesiano ottenendo un grafico detto *curva*.

Esempio 6.1.1. Le seguenti espressioni:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1; \quad f(x) = 2 + x - x^2; \quad f(x) = \frac{2x + 4}{x - 1}; \quad f(x) = x^3 - 25x$$

hanno per grafici:



Analizzando la rappresentazione grafica è facile comprendere che le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ si possono interpretare come le ascisse dei punti della curva di equazione $y = f(x)$ con ordinata nulla cioè le ascisse dei punti di intersezione della curva con l'asse x . Analogamente le soluzioni delle disequazioni $f(x) > 0$ $f(x) < 0$ sono le ascisse dei punti della curva con ordinata rispettivamente positiva o negativa ossia dei punti rispettivamente sopra o sotto l'asse x .

Con riferimento all'esempio precedente, dall'analisi dei grafici, possiamo dunque concludere che:

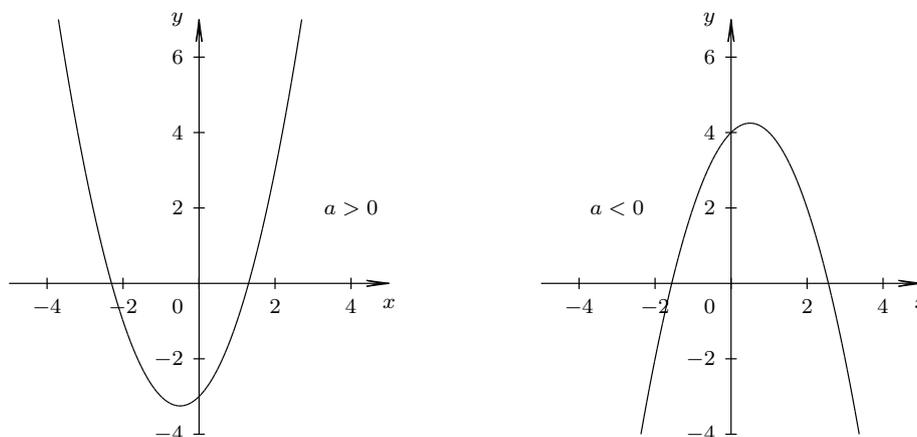
- $\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$ $\frac{1}{2}x - 1 > 0 \Rightarrow x > 2$ $\frac{1}{2}x - 1 < 0 \Rightarrow x < 2$
- $2 + x - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 2$
 $2 + x - x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ $2 + x - x^2 < 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 2$
- $\frac{2x + 4}{x - 1} = 0 \Rightarrow x = -2$
 $\frac{2x + 4}{x - 1} > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 1$ $\frac{2x + 4}{x - 1} < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$
- $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \vee x = 0$
 $x^3 - 4x > 0 \Rightarrow -2 < x < 0 \vee x > 2$ $x^3 - 4x < 0 \Rightarrow x < -2 \vee 0 < x < 2$

Nel prossimo paragrafo affronteremo lo studio delle disequazioni di secondo grado e, per farlo, sarà utile, come abbiamo fatto nell'esempio, ricondurci ai grafici associati ad esse. Poichè, come vedremo, ad una disequazione di secondo grado è associata la curva di equazione $y = ax^2 + bx + c$ anticipiamo che essa è sempre una parabola con asse parallelo all'asse y ed in particolare rivolta verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$.

La dimostrazione di quanto detto verrà fatta durante il terzo anno mentre una verifica verrà fornita in laboratorio.

Esempio 6.1.2.

Le parabole di equazione $y = x^2 + x - 3$ e $y = -x^2 + x + 4$ hanno per grafici:



6.2 Risoluzione di una disequazione di secondo grado

Nel capitolo sulle disequazioni è stato affrontato lo studio di una generica disequazione di primo grado e si sono risolte disequazioni di grado superiore al primo solo nel caso in cui, ridotte a forma normale, il polinomio ottenuto fosse scomponibile in fattori di primo grado o potenze di fattori di primo grado. Passiamo ora allo studio ed alla risoluzione di una generica disequazione di secondo grado.

Una disequazione di secondo grado, espressa in forma normale, è del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0 \ (\geq 0) \qquad ax^2 + bx + c < 0 \ (\leq 0)$$

Per determinarne più velocemente le soluzioni, senza scomporre (qualora fosse possibile) il trinomio e studiare il segno dei fattori ottenuti, è sufficiente ricondursi all'interpretazione grafica di tali disequazioni vista nel paragrafo precedente.

Poichè al trinomio $ax^2 + bx + c$ è associata la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, per risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0) è sufficiente tracciare sommariamente il grafico di tale parabola e determinare successivamente i valori di x per i quali essa si trova sopra (sotto) l'asse delle ascisse.

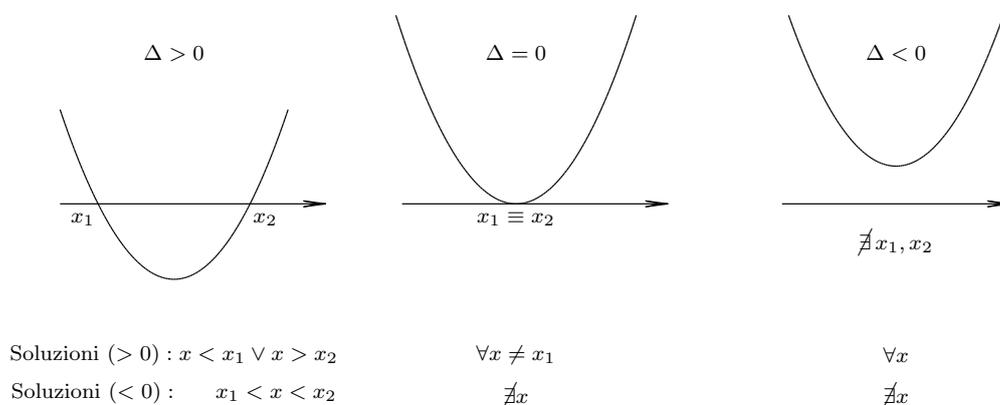
Per tracciare la parabola e confrontarla con l'asse x si dovrà:

(1) osservare il segno di a (coefficiente direttivo) per capire se la parabola è rivolta verso l'alto o il basso;

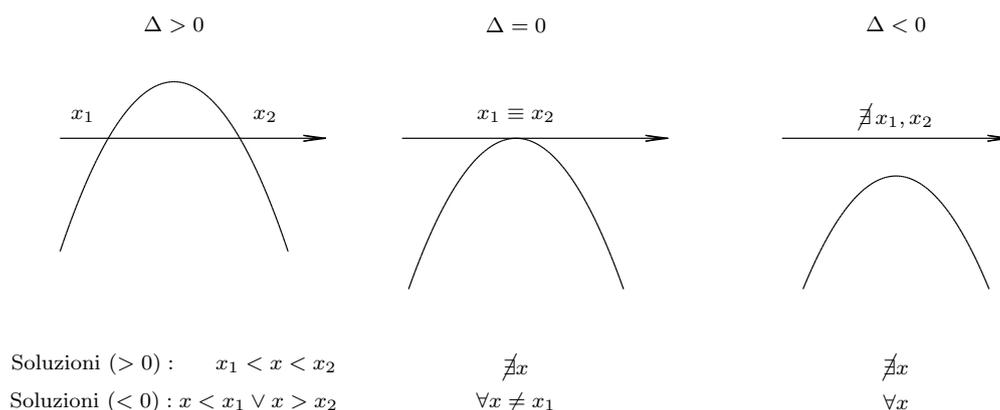
(2) determinare, se esistono, le intersezioni con l'asse x le cui ascisse x_1 e x_2 sono proprio le soluzioni (sempre purchè esistano) dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

Ricordando che l'esistenza delle soluzioni di un'equazione di secondo grado è legata al segno del suo discriminante Δ esaminiamo i casi che possono presentarsi e determiniamo le corrispondenti soluzioni della disequazione:

se $a > 0$:



se $a < 0$:



I casi appena descritti dimostrano il seguente importante teorema sul segno di un trinomio di secondo grado, il quale riassume e sintetizza quanto abbiamo appena ricavato:

Teorema 6.2.1. *Il trinomio $ax^2 + bx + c$ è concorde col segno del coefficiente direttivo a per valori esterni alle radici dell'equazione associata ($x < x_1 \vee x > x_2$), se esse esistono, oppure per ogni valore di x ($\forall x$) se l'equazione associata non ha radici reali.*

Viceversa il trinomio è discorde col segno del coefficiente direttivo per valori interni alle radici ($x_1 < x < x_2$), se esse esistono, oppure per nessun valore di x ($\nexists x$) se l'equazione associata non ha soluzioni reali.

Il teorema enunciato permette di risolvere le disequazioni di secondo grado anche senza darne la rappresentazione grafica; è sufficiente calcolare le eventuali soluzioni dell'equazione associata e controllare se c'è concordanza o discordanza tra il segno del coefficiente direttivo e il verso della disequazione.

Esempio 6.2.1.

- $2x^2 - x - 1 > 0$

Risolvendo l'equazione associata si ottiene: $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$.

C'è concordanza tra coefficiente direttivo e verso, quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$x < -\frac{1}{2} \vee x > 1$$

- $4x^2 - 9 < 0$

Risolvendo l'equazione associata si ottiene: $x_1 = -\frac{3}{2}$ e $x_2 = \frac{3}{2}$.

C'è discordanza tra coefficiente direttivo e verso, quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

- $7x - 2x^2 \leq 0$

Risolvendo l'equazione associata si ottiene: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{7}{2}$.

C'è concordanza tra coefficiente direttivo e verso, quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$x \leq 0 \vee x \geq \frac{7}{2}$$

- $2x^2 + 3x + 9 \geq 0$

L'equazione associata non ha soluzioni reali.

C'è concordanza di segno tra coefficiente direttivo e verso, quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$\forall x$$

- $9x^2 - 30x + 25 > 0$

Risolvendo l'equazione associata si ottiene: $x_1 = x_2 = \frac{5}{3}$.

C'è concordanza tra coefficiente direttivo e verso, quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$x < \frac{5}{3} \vee x > \frac{5}{3} \text{ ovvero } \forall x \neq \frac{5}{3}$$

Osservazione. Nell'ultimo esempio poichè $\Delta = 0$ il trinomio è il quadrato di un binomio quindi la disequazione si poteva risolvere in modo più semplice scomponendo ed ottenendo $9x^2 - 30x + 25 > 0 \Rightarrow (3x - 5)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \neq \frac{5}{3}$

In base all'osservazione si consiglia di scomporre il trinomio di secondo grado ogniqualvolta in esso si riconosca lo sviluppo del quadrato di un binomio.

Il teorema sul segno di un trinomio di secondo grado si può dimostrare anche in modo algebrico come di seguito riportato:

in base a quanto visto nel capitolo precedente, paragrafo 3, relativamente alla scomposizione in fattori, possiamo scrivere:

$$ax^2 + bx + c = \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2) & \text{se } \Delta \geq 0 \\ a \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] & \text{se } \Delta < 0 \end{cases}$$

se $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ il segno del trinomio è riassunto dai seguenti grafici di segno:



dai quali concludiamo che il segno del trinomio è concorde col segno del coefficiente direttivo per valori esterni alle radici dell'equazione associata, discorde per valori interni.

se $\Delta < 0 \Rightarrow$ poichè la quantità $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}$ è sempre positiva, essendo somma di quantità non negative, si conclude che il segno del trinomio è sempre concorde col segno del coefficiente direttivo.

Con il teorema sul segno di un trinomio di secondo grado si può facilmente dimostrare quanto affermato nel primo volume in merito alla positività dei falsi quadrati, qualunque sia il valore assegnato all'incognita. Infatti il generico falso quadrato $a^2x^2 \pm abx + b^2$ ha $\Delta = -3a^2b^2 < 0$ quindi è $\forall x$ concorde con a^2 e dunque positivo $\forall x$

Esercizio 6.2.1. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{llllll} 25x^2 - 1 \geq 0 & 25 - 9x^2 > 0 & 5x - 3x^2 < 0 & 2x^2 - 11x + 5 \leq 0 & x^2 - 4x \leq 0 & 3x^2 + 30x + 75 \leq 0 \\ 2x^2 - 2x + 5 < 0 & 5x^2 + 3x + 7 \geq 0 & 10x - 25x^2 - 1 > 0 & 7x^2 + 21 > 0 & 6x^2 + x - 1 \leq 0 & \\ x^2 + 2x + 7 < 0 & 2x^2 - 3x > 0 & 16x^2 - 25 \geq 0 & x^2 + 2x + 1 > 0 & 18x - 5x^2 - 9 \leq 0 & \end{array}$$

Proponiamo ora lo svolgimento di alcuni esercizi riepilogativi.

Esempio 6.2.2.

$$\frac{(3x^2 - 5x + 2)(x^2 - 4x)}{(9 - x^2)(2x^2 + x + 5)} < 0$$

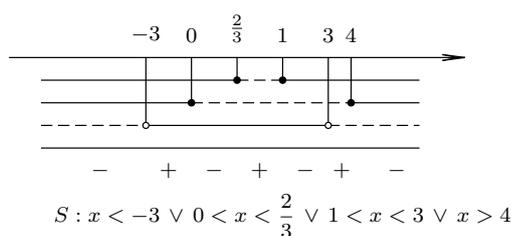
Per determinare le soluzioni è possibile studiare il segno dei fattori senza doverli scomporre perchè tutti di secondo grado:

$$3x^2 - 5x + 2 \geq 0 \text{ (dall'equazione associata ricaviamo } x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 1) \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \vee x \geq 1$$

$$x^2 - 4x \geq 0 \text{ (dall'equazione associata ricaviamo } x_1 = 0, x_2 = 4) \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 4$$

$$9 - x^2 > 0 \text{ (dall'equazione associata ricaviamo } x_1 = -3, x_2 = 3) \Rightarrow -3 < x < 3$$

$$2x^2 + x + 5 > 0 \text{ (l'equazione associata non ha soluzioni reali) } \Rightarrow \forall x$$



Esempio 6.2.3.

$$\frac{36x^2 - 12x + 1}{5x^2 - x^4} \geq 0$$

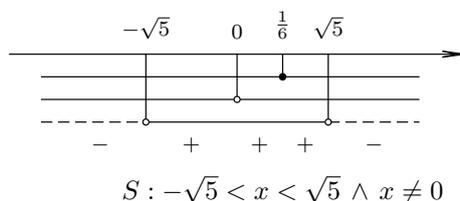
Per determinare le soluzioni è preferibile riconoscere a numeratore lo sviluppo di un quadrato (come già consigliato) ed è invece necessario scomporre il denominatore essendo un polinomio di grado superiore al secondo.

$$\frac{(6x-1)^2}{x^2(5-x^2)} \geq 0$$

$$(6x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \left(\text{si annulla per } x = \frac{1}{6} \right)$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \neq 0$$

$$5-x^2 > 0 \text{ (dall'equazione associata ricaviamo } x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = \sqrt{5}) \\ \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

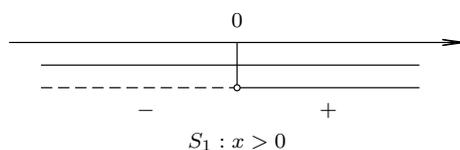


Esempio 6.2.4.
$$\begin{cases} x+1 > -\frac{2}{x} \\ x^3 \leq 64 \\ \frac{x+1}{2-x} - \frac{x-1}{(3x-1)(x-1)} - \frac{x+2}{3x-1} \geq 0 \end{cases}$$

prima disequazione:

$$x+1 > -\frac{2}{x} \Rightarrow x+1 + \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+x+2}{x} > 0$$

$$x^2+x+2 \geq 0 \text{ (l'equazione associata non ha soluzioni reali)} \Rightarrow \forall x \\ x > 0$$

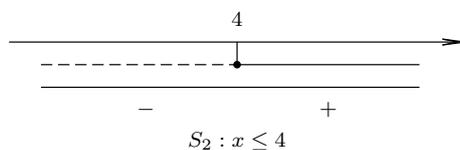


seconda disequazione:

$$x^3 \leq 64 \Rightarrow x^3 - 64 \leq 0 \Rightarrow (x-4)(x^2+4x+16) \leq 0$$

$$x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$x^2+4x+16 \geq 0 \quad \forall x$$



terza disequazione:

$$\frac{x+1}{2-x} - \frac{x-1}{(3x-1)(x-1)} - \frac{x+2}{3x-1} \geq 0$$

per semplificare nella seconda frazione il fattore $x-1$ è necessario mettere le C.E.:
 $x \neq 1$

$$\frac{x+1}{2-x} - \frac{1}{3x-1} - \frac{x+2}{3x-1} \geq 0$$

$$\frac{3x^2 - x + 3x - 1 - 2 + x - 4 + x^2}{(2-x)(3x-1)} \geq 0$$

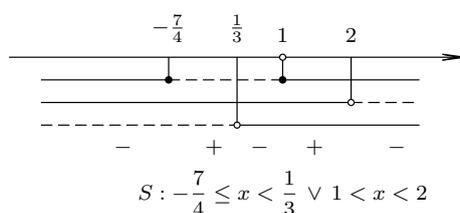
$$\frac{4x^2 + 3x - 7}{(2-x)(3x-1)} \geq 0$$

$$4x^2 + 3x - 7 \geq 0 \quad (\text{dall'equazione associata ricaviamo } x_1 = -\frac{7}{4}, x_2 = 1)$$

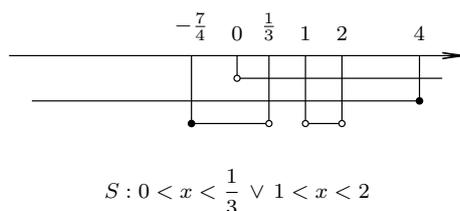
$$\Rightarrow x \leq -\frac{7}{4} \vee x \geq 1$$

$$2-x > 0 \Rightarrow x < 2$$

$$3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$



Intersecando le soluzioni



6.3 Esercizi riepilogativi

1. $(x-4)^2 + (2-x)^2 - 2(2x+17) > 4(x+5)(3-x) + (x+1)^2$

$$[x < -3 \vee x > 5]$$

2. $\frac{8x^2+1}{4} - \frac{(2x+1)^2}{4} \geq 1 + 3(x^2+1)$

$$[\emptyset]$$

3. $(x^2-4)(2x-50x^2) \geq 0$

$$\left[-2 \leq x \leq 0 \vee \frac{1}{25} \leq x \leq 2\right]$$

4. $\frac{2x^2+x-1}{x-4} > 0$

$$\left[-1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 4\right]$$

5. $\frac{10x^2}{x^2+x-6} + \frac{x}{2-x} - \frac{5}{x+3} \leq 1$

$$[-3 < x < 2]$$

6. $\frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} - x^2$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge x \neq 0\right]$
7. $\frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2}{x - 5x^2} \geq 0$ $\left[0 < x < \frac{1}{5}\right]$
8. $\frac{x+1}{2x-1} + \frac{3}{4x+10} \geq 1 - \frac{2x+2}{4x^2+8x-5}$ $\left[-\frac{5}{2} < x \leq -\frac{3}{2} \vee \frac{1}{2} < x \leq \frac{7}{2}\right]$
9. $\frac{x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}}{4 + 7x^2} < 0$ $[\sqrt{2} < x < \sqrt{3}]$
10. $\frac{(x-x^2)(4x-x^2-4)}{x^3-9x} > 0$ $[-3 < x < 1 \vee x > 3 \wedge x \neq 0]$
11. $\frac{x|x+1|}{x^2-2x+1} > 0$ $[x > 0 \wedge x \neq 1]$
12. $\frac{x^5 - 4x^4}{|x^2 - 2x| - 3x} \leq 0$ $[x < 0 \vee 4 \leq x < 5]$
13. $|x^2 + 2x - 3| > 12$ $[x < -5 \vee x > 3]$
14. $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$ $[-3 \leq x < 1]$
15. $\begin{cases} x^2 - 10x + 25 > 0 \\ x^2 - 25 \leq 0 \end{cases}$ $[-5 \leq x < 5]$
16. $\begin{cases} (6x-1)^2 < 5-2x \\ (5-x)^2 > 2x^2-3x-5 \end{cases}$ $\left[-\frac{2}{9} < x < \frac{1}{2}\right]$
17. $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 \leq 0 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 12 \leq 0 \end{cases}$ $[\emptyset]$

18.
$$\begin{cases} \frac{x^2}{x+2} \geq x-4 \\ 6x+x^2-x^3 \geq 0 \\ \frac{2x+5}{(2x+4)^2} \geq \frac{2}{2x+4} \end{cases} \quad [x \leq -4]$$
19.
$$\begin{cases} \frac{|x^2-2x|-3}{x^2+4x-12} < 0 \\ x^5-5x^4+7x^3 \geq 0 \end{cases} \quad [2 < x < 3]$$
20.
$$\begin{cases} \left| \frac{x^2-x}{x-2} \right| < 1 \\ x^3-3x+2 \leq 0 \end{cases} \quad [x = 1]$$
21.
$$\begin{cases} \frac{3x-4}{x^2-3x} > 2 \\ \frac{(4x^2-5x+7)(27x^3-1)}{25-x^2} \leq 0 \end{cases} \quad \left[0 < x \leq \frac{1}{3}\right]$$
22.
$$\begin{cases} |x^2-5x| \leq 6 \\ \frac{x(x-1)^3}{x^4-81} \geq 0 \end{cases} \quad [0 \leq x \leq 1 \vee 3 < x \leq 6]$$
23.
$$\begin{cases} \frac{x^4+4x^2}{1-27x^3} \leq 0 \\ \frac{4x-x^2}{9x^2+6x+1} \geq 0 \end{cases} \quad \left[\frac{1}{3} < x \leq 4 \vee x = 0\right]$$
24.
$$\begin{cases} x^3+5x^2-24x \geq 0 \\ (x^5-x^3)(4+x^2)(3x-1) \leq 0 \end{cases} \quad [-1 \leq x \leq 0]$$
25.
$$\begin{cases} x^2+(2-\sqrt{3})x-2\sqrt{3} \leq 0 \\ (x^3+1)(x^2-5) > 0 \end{cases} \quad [-2 \leq x < -1]$$

Capitolo 7

Equazioni e disequazioni di grado superiore al secondo grado

7.1 Equazioni

Per risolvere un'equazione di grado superiore al secondo esistono delle formule risolutive generali la cui complessità non ci consente di trattarle in questo corso di studi. Per tali equazioni decidiamo di procedere scomponendo (se possibile) il polinomio della forma normale in fattori di primo o di secondo grado e, per alcuni casi particolari impareremo delle tecniche risolutive che permetteranno di calcolare le soluzioni in maniera più rapida.

Nel caso in cui, con i metodi appresi non si riesca a scomporre il polinomio, sarà possibile comunque calcolare le soluzioni, ma solo in modo approssimato, come verrà studiato nel corso del triennio.

Negli esempi seguenti proponiamo la risoluzione di alcune equazioni mediante scomposizione.

Esempio 7.1.1.

- $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x(2 - 3x) + 5$

$$x^3 - 1 = -3x^2 + 2x + 5$$

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0 \text{ scomponendo mediante raccoglimento parziale}$$

$$(x^2 - 2)(x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

- $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$

scomponendo in fattori o col metodo di Ruffini e mediante opportuni raccoglimenti (metodi non standard) otteniamo:

$$(x - 1)(4x^2 - 17x + 4) = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$4x^2 - 17x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 289 - 64 = 225 \Rightarrow$$

$$x = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ 4 \end{cases}$$

- $8x^7 = 27x^4$
 $8x^7 - 27x^4 = 0$
 $x^4(8x^3 - 27) = 0$
 $x^4(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 0$
 $x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$ con molteplicità 4
 $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
 $4x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow \nexists x$

Esercizio 7.1.1.

$$2x^4 - 3\sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{2}x - 2 = 0; \quad 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0; \quad 3x^3 - 7x^2 = 7x - 3; \quad x^6(5x + 1) - 5x^3 = x^4$$

Per quanto riguarda le equazioni risolvibili con tecniche particolari ci limitiamo alla descrizione dei seguenti due casi:

Equazioni binomie: sono equazioni riconducibili alla forma

$$ax^n + b = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

I casi $n = 1$ ed $n = 2$ sono già stati trattati in quanto rispettivamente equazione di primo grado ed equazione pura di secondo grado.

Se $n > 2$ è possibile procedere, come per le equazioni pure di secondo grado, esplicitando x^n e ricordando la definizione di radicale. Si ottiene allora:

$$x^n = -\frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } n \text{ dispari} \Rightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \\ \text{se } n \text{ è pari} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } -\frac{b}{a} \geq 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \\ \text{se } -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \nexists x \end{cases} \end{cases}$$

Esempio 7.1.2.

- $125x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{8}{125} \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$
- $x^4 + 625 = 0 \Rightarrow x^4 = -625 \Rightarrow \nexists x$
- $2x^6 - 1 = 0 \Rightarrow x^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$
- $32x^5 - 1 = 0 \Rightarrow x^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
- $(x^4 - 3)^3 = 8$ è facile comprendere che è come avere l'equazione $t^3 = 8$ ove $t = x^4 - 3$, dunque:
 $x^4 - 3 = 2 \Rightarrow x^4 = 5 \quad x = \pm \sqrt[4]{5}$

Osservazione. Le binomie di grado dispari hanno sempre una sola soluzione, quelle di grado pari o non hanno radici o ne hanno due opposte.

Esercizio 7.1.2.

$$27x^3 + 1 = 0 \quad 4x^4 + 1 = 0 \quad x^6 - 64 = 0 \quad 1 - 9x^4 = 0 \quad 1 - 32x^5 = 0 \quad 5 - x^8 = 0 \\ 81x^4 + 1 = 0 \quad 32 + 243x^5 = 0 \quad x^7 - 128 = 0 \quad (x + 1)^4 = 16 \quad (x - 1)^3 = 1 \quad (x - 3)^4 = -5$$

Equazioni trinomie: sono equazioni riconducibili alla forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Se $n = 1$ l'equazione è di secondo grado e sappiamo già risolverla.

Se $n \neq 1$ l'equazione è riconducibile mediante la sostituzione $x^n = t$ ad una equazione di secondo grado e successivamente a due eventuali equazioni binomie.

Esempio 7.1.3.

- $x^{16} - 15x^8 - 16 = 0$

posto $x^8 = t$ si ottiene :

$$t^2 - 15t - 16 = 0$$

$$\Delta = 225 + 64 = 289$$

$$t_{1,2} = \frac{15 \pm 17}{2} = \begin{cases} -1 \\ 16 \end{cases}$$

$$t = -1 \Rightarrow x^8 = -1 \Rightarrow \cancel{x}$$

$$t = 16 \Rightarrow x^8 = 16 \Rightarrow x = \pm \sqrt[8]{16} = \pm \sqrt{2}$$

- $x^6 - 12x^3 + 125 = 0$

posto $x^3 = t$ si ottiene :

$$t^2 - 12t + 125 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} < 0 \Rightarrow \cancel{t} \Rightarrow \cancel{x}$$

- $8x^6 - 9x^3 + 1 = 0$

posto $x^3 = t$ si ottiene :

$$8t^2 - 9t + 1 = 0$$

$$\Delta = 81 - 32 = 49$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{16} = \begin{cases} \frac{1}{8} \\ 1 \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{8} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$t = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

- $3x^4 - x^2 - 4 = 0$ ¹

posto $x^2 = t$ si ottiene :

$$3t^2 - t - 4 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{6} = \begin{cases} -1 \\ \frac{4}{3} \end{cases}$$

¹Qualche autore chiama biquadratiche le equazioni trinomie di quarto grado.

$$t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \cancel{x}$$

$$t = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Esercizio 7.1.3.

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = 0 \quad 9x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \quad x^6 + 9x^3 + 8 = 0 \quad x^{10} - 31x^5 - 32 = 0 \quad x^8 - 29x^4 + 25 = 0$$

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \quad 5x^{12} - 6x^6 + 2 = 0 \quad x^6 - 28x^3 + 27 = 0 \quad x^8 - 34x^4 + 64 = 16 \quad 3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$$

7.2 Disequazioni

Per la risoluzione delle disequazioni di grado superiore al secondo procediamo, come con le equazioni, scomponendo il polinomio della forma normale in fattori dei quali siamo in grado di studiare il segno.

Esempio 7.2.1.

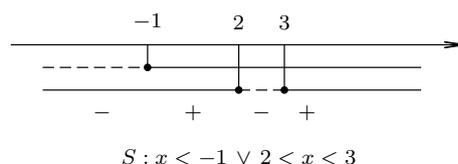
- $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$

scomponendo in fattori col metodo di Ruffini otteniamo:

$$(x + 1)(x^2 - 5x + 6) < 0$$

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \vee x \geq 3$$



- $x^2(x^2 - 9) \geq 4(x^2 + 12)$

ridotta a forma normale:

$$x^4 - 13x^2 - 48 \geq 0$$

per scomporre in fattori i polinomi che, come in questo caso, sono del tipo:

$$ax^{2n} + bx^n + c$$

si può utilizzare, per casi semplici, la regola 'somma-prodotto' imparata in prima o la regola generale per la scomposizione di un polinomio di secondo grado, infatti:

posto $x^n = t$ si ha:

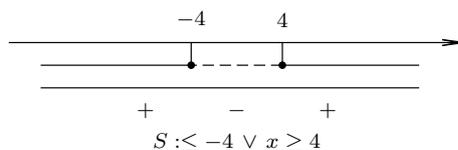
$$ax^{2n} + bx^n + c = at^2 + bt + c = \begin{cases} a(t - t_1)(t - t_2) = a(x^n - t_1)(x^n - t_2) \\ \text{irriducibile} \end{cases}$$

nel nostro caso la disequazione diventa:

$$(x^2 - 16)(x^2 + 3) \geq 0$$

$$x^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4 \vee x \geq 4$$

$$x^2 + 3 \geq 0 \Rightarrow \forall x$$



- $\frac{x^4 - 56x + 95}{x^2 - 7x + 10} \leq 8$

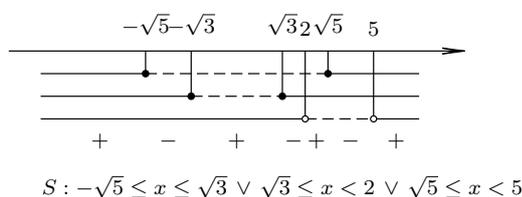
ridotta a forma normale:

$$\frac{x^4 - 8x^2 + 15}{x^2 - 7x + 10} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x^2 - 5)(x^2 - 3)}{x^2 - 7x + 10} \leq 0$$

$$x^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}$$

$$x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3}$$

$$x^2 - 7x + 10 > 0 \Rightarrow x < 2 \vee x > 5$$



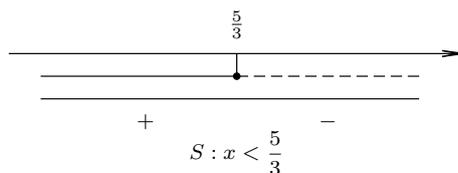
- $125 - 27x^3 > 0$

scomponendo in fattori:

$$(5 - 3x)(25 + 15x + 9x^2) > 0$$

$$5 - 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{5}{3}$$

$$25 + 15x + 9x^2 \geq 0 \quad \forall x$$



Le disequazioni che, come quest'ultima, sono della forma $ax^n + b <> 0$ (dette disequazioni binomie) possono essere risolte più rapidamente:

-ricavando x se n è dispari;

-operando come con le disequazioni di 2° grado (e quindi risolvendo l'equazione associata) se n è pari.

Esempio 7.2.2.

- $x^5 - 7 < 0 \Rightarrow x^5 > 7 \quad x < \sqrt[5]{7}$

- $2x^6 - 3 \geq 0$ ($x_{1,2} = \pm \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$, c'è concordanza tra a e il verso)
 $\Rightarrow x \leq -\sqrt[6]{\frac{3}{2}} \vee x \geq \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$
- $\frac{7}{3} + 4x^4 > 0$ ($\nexists x$, c'è concordanza di segno tra a e il verso) $\Rightarrow \forall x$
- $3x^7 + 5 \geq 0 \Rightarrow x^7 \geq -\frac{5}{3} \Rightarrow x \geq -\sqrt[7]{\frac{5}{3}}$

Esempio 7.2.3.

- $x^{10} - 31x^5 - 32 > 0$

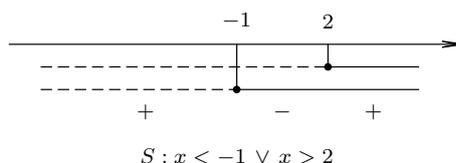
Scomponendo in fattori si ottiene:

$$(x^5 - 32)(x^5 + 1) > 0$$

lo studio del segno dei singoli fattori è riconducibile a disequazioni binomie:

$$x^5 - 32 \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt[5]{32} \Rightarrow x \geq 2$$

$$x^5 + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$



- $4x^8 + 3x^4 - 1 \leq 0$

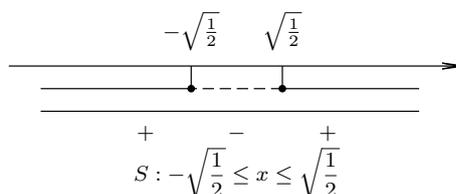
Scomponendo in fattori si ottiene:

$$4\left(x^4 - \frac{1}{4}\right)(x^4 + 1) \leq 0$$

lo studio del segno dei singoli fattori è riconducibile a disequazioni binomie:

$$x^4 - \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x^4 + 1 \geq 0 \Rightarrow \forall x$$

**Esercizio 7.2.1.**

$$\begin{array}{cccccc} 4x^4 + 9 \geq 0 & 9x^4 - 16 \leq 0 & x^3 + 8 > 0 & x^5 + 32 < 0 & x^8 - 25 \geq 0 & 4x^6 + 5 \leq 0 \\ 6 - 5x^5 \geq 0 & 5x^{12} - 2 < 0 & x^6 - 27 > 0 & x^8 - 64 \leq 0 & 3x^7 + 1 \geq 0 & -1 - x^9 > 0 \end{array}$$

7.3 Esercizi riepilogativi

1. $\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^4-3x^2-4} = \frac{1}{4-x^2}$ $[\pm 1; \pm\sqrt{2}]$
2. $\frac{x^4}{2} + x^2 - 1 = \frac{3x^2-1}{3} - \frac{x^4}{6}$ $[\pm 1]$
3. $\frac{x^2-2}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^2-2} = \frac{x^4-4x^2+9}{x^4-3x^2+2}$ $[\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}]$
4. $(1-x^2)^2 + x^4 = 3x^2 - 2 - \frac{x^4-6x^2+5}{3}$ $[\pm 1; \pm\sqrt{2}]$
5. $(x-2)^3 + (x^2-1)^3 = 3x(4-x-x^3) - 7x^3$ $[1; -\sqrt[3]{9}]$
6. $\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+4} = \frac{x^2-2x^4}{x^4-16}$ $[\cancel{x}]$
7. $\frac{x^2-1}{x^2-3} + 2 = \frac{x^2-3}{1-x^2} + \frac{16}{3}$ $[\pm 2; 0]$
8. $3x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 8x = 0$ $\left[0; \frac{2}{3}; 2\right]$
9. $\frac{6x^2-2}{x^2+1} - \frac{5x}{6-x^2} = \frac{6}{x^4-5x^2-6}$ $\left[-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2\right]$
10. $\frac{(2x-1)^2}{x-3} - 4 = 2x - \frac{13}{3-x}$ $[0; 1]$
11. $(x^2-2x+1)(x^5-x^4)(27x^3-8)(25-x^2) \geq 0$ $\left[-5 \leq x \leq \frac{2}{3} \vee 1 \leq x \leq 5\right]$
12. $x^6 - 10x^3 + 16 > 0$ $[x < \sqrt[3]{2} \vee x > 2]$
13. $3x^4 + x^2 - 2 \geq 0$ $\left[x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$
14. $(x^4 + 3x^2 + 2)(x^2 - 1) < 0$ $[-1 < x < 1]$
15. $(x^3 - 7x^2 + 6)(x^4 - 16) \leq 0$ $[x \leq -2 \vee 3 - \sqrt{15} \leq x \leq 1 \vee 2 \leq x \leq 3 + \sqrt{15}]$
16. $\begin{cases} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 7x + 6} \leq 0 \\ \left| \frac{2x+1}{x-2} \right| \leq 1 \end{cases}$ $\left[-3 \leq x \leq \frac{1}{3}\right]$
17. $\begin{cases} x^6 + 7x^3 - 8 \leq 0 \\ |3+x| \leq \frac{8}{x} \end{cases}$ $[0 < x \leq 1]$

Parte II

GEOMETRIA

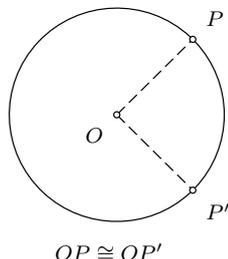
Capitolo 8

La circonferenza

Nel capitolo sulla perpendicolarità abbiamo anticipato la definizione di circonferenza di centro e raggio determinati, consentendo, in questo modo, alcune costruzioni con riga e compasso. In questo capitolo, studieremo le proprietà della circonferenza e degli enti geometrici che ad essa vengono associati. Lo studio di questo capitolo è determinante, non solo per la comprensione dei capitoli a seguire, ma anche in prospettiva futura quando si studieranno temi connessi quali la geometria analitica e la goniometria.

8.1 Prime definizioni e proprietà

Definizione 8.1.1. Dato un punto O del piano, si definisce **circonferenza di centro O** l'insieme dei punti P del piano equidistanti da O . Il generico segmento OP si dice **raggio** della circonferenza.

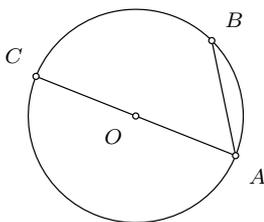


Evidentemente tutti i raggi sono segmenti congruenti, per cui parleremo genericamente di raggio della circonferenza. Di conseguenza ogni circonferenza è univocamente determinata dal centro e dal suo raggio. Due circonferenze aventi raggi congruenti sono congruenti.

Notazione: una circonferenza verrà solitamente indicata con \mathcal{C} , \mathcal{C}' , ecc.

Definizione 8.1.2. Un punto A si dice **interno** alla circonferenza se il segmento OA è minore del raggio, mentre un punto B si dice **esterno** alla circonferenza se il segmento OB è maggiore del raggio. L'unione dei punti della circonferenza e dei suoi punti interni si dice **cerchio**.

Definizione 8.1.3. Data una circonferenza di centro O , si definisce **corda** ogni segmento avente gli estremi sulla circonferenza. Qualsiasi corda passante per il centro O si chiama **diametro**.

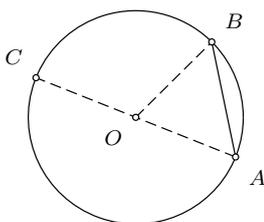


Teorema 8.1.1. *Ogni diametro è congruente al doppio del raggio.*

Dimostrazione. Ovviamente ogni diametro è l'unione di due raggi adiacenti. □

Pertanto, tutti i diametri sono segmenti congruenti, ragion per cui parleremo genericamente di diametro della circonferenza. Dimosteremo ora che ogni corda che non passa per il centro della circonferenza è minore del diametro.

Teorema 8.1.2. *Il diametro è la corda massima.*



$$Hp: O \notin AB \quad \wedge \quad O \in AC$$

$$Th: AB < AC$$

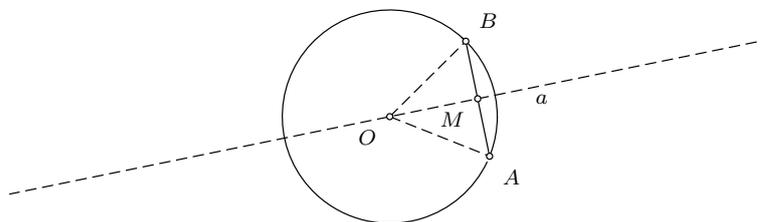
Dimostrazione. Facciamo riferimento alla figura precedente.

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1. $AC \cong OA + OB$ | il diametro è congruente al doppio del raggio |
| 2. Consideriamo il triangolo OAB | |
| 3. $AB < OA + OB$ | 1° teorema della disuguaglianza triangolare |
| 4. $AB < AC$ | 1., 3. |

□

Le corde di una circonferenza sono segmenti, ciascuno dei quali è dotato di un asse che, ricordiamo, è *il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi*. Ricordiamo, altresì, che il triangolo isoscele è l'unico triangolo dotato di asse di simmetria, il quale, ovviamente, coincide con l'asse della base canonica. Premesso ciò, possiamo enunciare la seguente importante proprietà.

Teorema 8.1.3. *In una circonferenza \mathcal{C} , l'asse di una qualunque corda passa per il centro O della circonferenza.*



Hp: a asse di AB

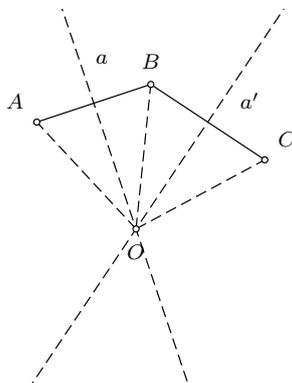
Th: $O \in a$

Dimostrazione. Dalla figura, $OA \cong OB$ in quanto raggi per cui il triangolo OAB è isoscele di base AB e vertice O . Poiché l'asse della base e del triangolo coincidono, segue la tesi. \square

Pertanto, un diametro perpendicolare a (rispettivamente mediana di) una corda AB ha come sostegno l'asse della corda stessa; in modo equivalente, una corda CD che non sia contemporaneamente perpendicolare e mediana di AB non può essere un diametro.

Dal teorema precedente segue

Teorema 8.1.4. *Per tre punti distinti e non allineati A, B e C passa una ed una sola circonferenza.*



Hp: A, B, C distinti e non allineati

Th: esiste un'unica circonferenza \mathcal{C} tale che $A, B, C \in \mathcal{C}$

Dimostrazione. Costruzione: tracciamo i segmenti consecutivi AB e BC , quindi i rispettivi assi a e a' .

1. A, B, C distinti e non allineati Hp
2. AB e BC consecutivi ma non
adiacenti 1.

- | | |
|---|---|
| 3. $AB \not\parallel BC$ | 2., hanno B unico punto comune |
| 4. $a \not\parallel a'$ | 3. |
| 5. $a \cap a' = \{O\}$ | 4., a e a' incidenti |
| 6. $AO \cong BO$ | proprietà asse a come luogo geometrico |
| 7. $BO \cong CO$ | proprietà asse a' come luogo geometrico |
| 8. $AO \cong BO \cong CO$ | 6., 7., proprietà transitiva |
| 9. Per A, B e C passa circonferenza di centro O | 16., def. circonferenza |

Per l'unicità, basta osservare che a e a' sono unici, quindi O è univocamente determinato. \square

Corollario 8.1.1. *Gli assi dei lati di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto.*

Hp: a, a', a'' assi triangolo ABC

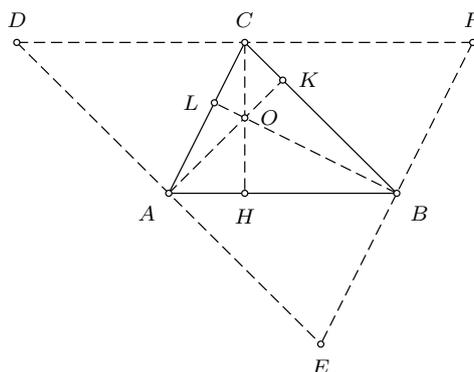
Th: $a \cap a' \cap a'' = \{P\}$

Dimostrazione. Un triangolo è univocamente determinato dai suoi tre vertici che risultano distinti e non allineati. Pertanto, applicando il teorema 8.1.4, segue la tesi. \square

Definizione 8.1.4. Un triangolo si dice **inscritto** in una circonferenza se i suoi vertici sono punti della circonferenza. In modo equivalente si può dire che la circonferenza è **circoscritta** al triangolo.

Evidentemente ogni triangolo si può inscrivere in una circonferenza con centro il punto d'incontro degli assi dei suoi lati, detto **circocentro**.

Teorema 8.1.5. *Le altezze relative ai lati di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto.*



Hp: $AK \perp BC \wedge BL \perp AC \wedge CH \perp AB$

Th: $AK \cap BL \cap CH = \{O\}$

Dimostrazione. Costruzione: da ciascun vertice del triangolo ABC condurre le parallele ai lati opposti, le quali incontrandosi formano il triangolo DEF , come in figura.

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. $DA \parallel BC \wedge AB \parallel CD$ | costruzione |
| 2. $ABCD$ parallelogramma | 1., def. parallelogramma |
| 3. $AB \cong CD \wedge AD \cong BC$ | 2., lati opposti parallelogramma |

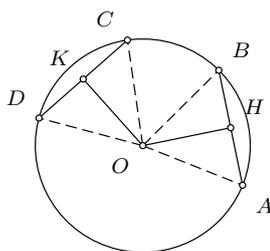
- | | | |
|-----|---|---|
| 4. | $CA \parallel BF \wedge AB \parallel FC$ | costruzione |
| 5. | $ABFC$ parallelogramma | 4., def. parallelogramma |
| 6. | $AB \cong FC \wedge CA \cong BF$ | 5., lati opposti parallelogramma |
| 7. | $CA \parallel EB \wedge AE \parallel BC$ | costruzione |
| 8. | $AEBC$ parallelogramma | 7., def. parallelogramma |
| 9. | $AE \cong BC \wedge CA \cong BE$ | 8., lati opposti parallelogramma |
| 10. | $DA \cong AE \wedge EB \cong BF \wedge FC \cong CD$ | 3., 6., 9., proprietà transitiva |
| 11. | $AK \perp BC \wedge BL \perp AC \wedge CH \perp AB$ | Hp |
| 12. | $AK \perp DE \wedge BL \perp EF \wedge CH \perp FD$ | 1., 4., 7., 11. |
| 13. | AK, BL, CH assi dei lati del triangolo DEF | 9., 12., def. di asse di un segmento |
| 14. | $AK \cap BL \cap CH = \{O\}$ | 13., gli assi dei lati di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto |

□

Il punto d'incontro delle altezze relative ai lati di un triangolo è detto **ortocentro**.

La distanza di una corda dal centro è il segmento, parte dell'asse della corda, che ha come estremi il centro della circonferenza e il punto medio della corda. Precisato ciò, vediamo come caratterizzare il fatto che due corde di una circonferenza siano congruenti o meno.

Teorema 8.1.6. *Due corde di una circonferenza sono congruenti se, e solo se, hanno distanze dal centro congruenti.*



Dimostrazione. Costruzione: siano OH e OK rispettivamente le distanze di AB e CD dal centro O .

\implies)

Hp: $AB \cong CD$

Th: $OH \cong OK$

1. Consideriamo i triangoli AHO e CKO
2. $OH \perp AB \wedge OK \perp CD$ distanze dal centro
3. $AB \cong CD$ Hp
4. $AH \cong CK$ 3., H e K punti medi
5. $OA \cong OC$ raggi

- | | | |
|----|-----------------|---|
| 6. | $AHO \cong CKO$ | 2., 3., 4., criterio di congruenza triangoli rettangoli |
| 7. | $OH \cong OK$ | 6. |

\Leftarrow)

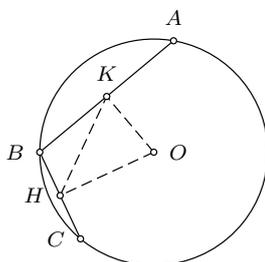
Hp: $OH \cong OK$

Th: $AB \cong CD$

- | | | |
|----|--|---|
| 1. | Consideriamo i triangoli AHO e CKO | |
| 2. | $OH \perp AB \wedge OK \perp CD$ | distanze dal centro |
| 3. | $OH \cong OK$ | Hp |
| 4. | $OA \cong OC$ | raggi |
| 5. | $AHO \cong CKO$ | 2., 3., 4., criterio di congruenza triangoli rettangoli |
| 6. | $AH \cong CK$ | 5. |
| 7. | $AB \cong CD$ | 6., H e K punti medi |

□

Teorema 8.1.7. *In una circonferenza, una corda è minore di un'altra se, e solo se, la distanza dal centro della prima è maggiore della distanza dal centro della seconda.*



Dimostrazione. Condurremo la dimostrazione supponendo che le corde siano consecutive; questa circostanza non lede la generalità del teorema in quanto una corda può essere sostituita da una ad essa congruente nella circonferenza. Si traccino, quindi, i segmenti $OH \perp BC$ e $OK \perp AB$, come in figura.

Hp: $BC < AB \wedge OH \perp BC \wedge OK \perp AB$

Th: $OK < OH$

- | | | |
|----|----------------------------------|----|
| 1. | $BC < AB$ | Hp |
| 2. | $OH \perp BC \wedge OK \perp AB$ | Hp |

- | | | |
|-----|---|---|
| 3. | $AK \cong KB$ | 2., OK asse di AB |
| 4. | $BH \cong HC$ | 2., OH asse di BC |
| 5. | $BK \cong \frac{1}{2}AB$ | 3. |
| 6. | $BH \cong \frac{1}{2}BC$ | 4. |
| 7. | $BH < BK$ | 1., 3., 4. |
| 8. | Consideriamo il triangolo BHK | |
| 9. | $B\hat{K}H < B\hat{H}K$ | 7., in ogni triangolo a lato minore si oppone angolo minore |
| 10. | $B\hat{H}O \cong B\hat{K}O \cong \frac{\pi}{2}$ | 2. |
| 11. | Considero il triangolo KOH | |
| 12. | $O\hat{H}K < O\hat{K}H$ | 7., 8., differenza di angoli complementari |
| 13. | $OK < OH$ | 12., ad angolo minore si oppone lato minore |

La dimostrazione del viceversa è praticamente identica alla precedente, con l'accortezza di procedere a ritroso. \square

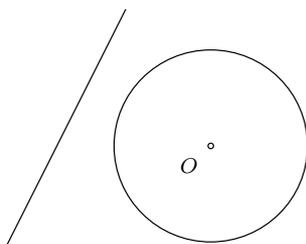
Esercizi

- Applicando il teorema 8.1.7, si dimostri che il diametro di una circonferenza è la corda massima.
- Sia data una circonferenza di centro O e sia P un punto interno ad essa e distinto dal centro. Per P si conducano due corde AB e CD in modo tale che OP risulti bisettrice dell'angolo formato dalle due corde. Dimostrare che $AB \cong CD$.
- Sia data una circonferenza di centro O e sia P un punto interno ad essa e distinto dal centro. Per P si conduca la corda AB perpendicolare ad OP . Dimostrare che ogni altra corda passante per P è maggiore della corda AB .
- Sia AB il diametro di una circonferenza e sia CD una corda (che non sia diametro) perpendicolare ad AB . Dimostrare che i triangoli ACD e BCD sono isosceli.
- In una circonferenza di centro O , AB e CD sono due corde che s'incontrano nel punto E . Dimostrare che OE è bisettrice dell'angolo formato dalle due corde.
- In una circonferenza di centro O , siano date due corde parallele e congruenti. Dimostrare che gli estremi delle corde sono i vertici di un rettangolo.
- In una circonferenza di centro O , siano assegnate due corde congruenti AB e CD . I punti M ed N sono i punti medi rispettivamente di AB e CD . si dimostri che OMN è un triangolo isoscele. Inoltre, se la retta MN incontra la circonferenza in E e F , allora si dimostri che $FN \cong EM$ e $FM \cong EN$.

8.2 Intersezioni di rette e circonferenze

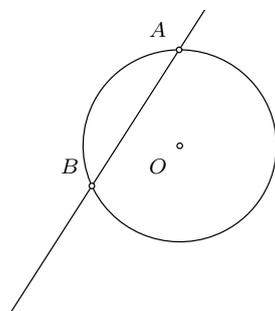
In questo paragrafo studieremo le eventuali intersezioni tra una retta ed una circonferenza.

Definizione 8.2.1. Una retta r si dice **esterna** ad una circonferenza \mathcal{C} se $\mathcal{C} \cap r = \emptyset$



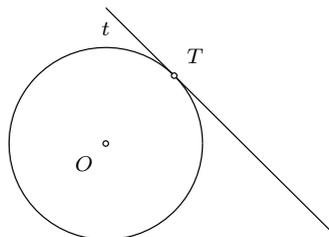
Si evince dalla definizione che la retta esterna r non può avere punti in comune col cerchio individuato da \mathcal{C} , ragion per cui ogni retta esterna ha distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio.

Definizione 8.2.2. Una retta s si dice **secante** una circonferenza \mathcal{C} se la loro intersezione è costituita da due punti distinti A e B , mentre l'intersezione della retta col cerchio relativo è proprio la corda AB .



Dalla definizione si deduce che una retta secante è caratterizzata dalla proprietà di avere distanza dal centro della circonferenza minore del raggio, in quanto una qualunque corda ha proprio la suddetta proprietà.

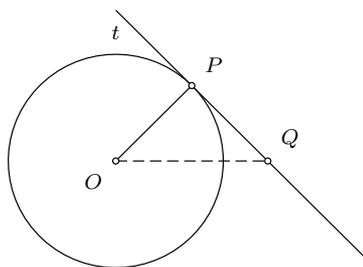
Definizione 8.2.3. Una retta t si dice **tangente** ad una circonferenza \mathcal{C} nel punto T , se essa ha solo il punto $T \in \mathcal{C}$ in comune con il cerchio relativo.



Chiaramente, ogni punto della tangente distinto dal punto di tangenza T risulta esterno alla circonferenza, cioè la sua distanza dal centro è maggiore del raggio.

È possibile caratterizzare le rette tangenti in base alla seguente proprietà.

Teorema 8.2.1. Sia \mathcal{C} una circonferenza di centro O e sia t la retta tangente a \mathcal{C} nel punto P . Allora il raggio OP è perpendicolare a t .



$$Hp: t \cap \mathcal{C} = \{P\}$$

$$Th: OP \perp t$$

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che $OP \not\perp t$. Poiché esiste ed è unica la retta perpendicolare a t passante per O , sia OQ tale retta, con $Q \in t$ esterno alla circonferenza in quanto distinto da P . Quindi $OQ \perp t$ e $OQ > OP$. Consideriamo il triangolo OQP , rettangolo in Q , quindi di ipotenusa OP , da cui si ricava che $OP > OQ$, che porta ad una contraddizione. Pertanto, $OP \perp t$. \square

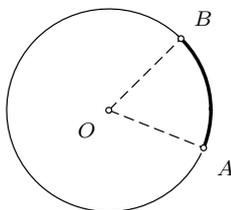
Una retta t perpendicolare in P al raggio OP , quindi avente distanza da t congruente al raggio, sarà proprio la retta tangente alla circonferenza in P . Infatti, in caso contrario, sarebbe o esterna alla circonferenza o secante la circonferenza. Se fosse esterna, allora la sua distanza dal centro sarebbe maggiore del raggio, una contraddizione. Se fosse secante, allora la sua distanza dal centro sarebbe minore del raggio, ancora una contraddizione.

Pertanto, riassumendo, possiamo affermare che:

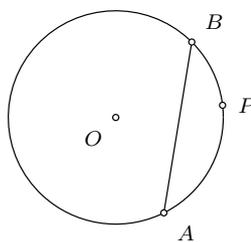
1. una retta è esterna alla circonferenza \mathcal{C} se, e solo se, la sua distanza dal centro è maggiore del raggio;
2. una retta è secante la circonferenza \mathcal{C} se, e solo se, la sua distanza dal centro è minore del raggio;
3. una retta è tangente alla circonferenza \mathcal{C} se, e solo se, la sua distanza dal centro è congruente al raggio.

8.3 Angoli al centro ed alla circonferenza

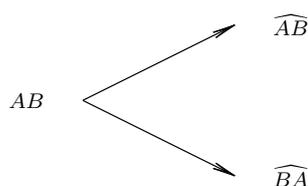
Definizione 8.3.1. Si definisce **arco** ciascuna parte di circonferenza delimitata da due suoi punti.



Conveniamo di orientare una qualunque circonferenza in senso antiorario.

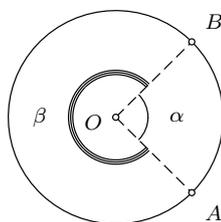


Pertanto, con riferimento alla figura precedente, scriveremo \widehat{AB} per indicare l'arco di circonferenza che contiene il punto P , mentre scriveremo \widehat{BA} per indicare l'arco che non contiene il punto P . I due archi \widehat{AB} e \widehat{BA} si diranno **archi opposti**, fissare uno dei due determina univocamente l'altro. Inoltre, è evidente che entrambi gli archi, avendo gli estremi in comune, saranno associati alla stessa corda AB , secondo il seguente schema



Tale schema, espresso a parole, ci dice che ad ogni corda restano associati due archi, gli archi opposti. Di contro, ad ogni arco è possibile associare una ed una sola corda.

Definizione 8.3.2. Data una circonferenza di centro O , si definisce **angolo al centro relativo all'arco** \widehat{AB} l'angolo di vertice O e lati OA e OB . Diremo che esso **sottende** l'arco \widehat{AB} , o, equivalentemente, **insiste** sull'arco \widehat{AB} .



É evidente che ogni arco è sotteso da un unico angolo al centro. Dalla figura precedente, si ricava che l'angolo al centro α sottende l'arco \widehat{AB} e che l'angolo al centro β sottende l'arco \widehat{BA} . Il primo angolo lo indicheremo, in base alla convenzione adottata di orientare gli archi in senso antiorario, \widehat{AOB} , mentre il secondo \widehat{BOA} . Poiché i due angoli hanno il vertice e i due lati in comune, allora si deduce il seguente

Corollario 8.3.1. *Archi opposti di una circonferenza sono sottesi da angoli al centro la cui somma è congruente ad un angolo giro.*

Dimostrazione. Evidente. □

Con la convenzione adottata, è possibile affermare che ogni corda è sottesa da due angoli al centro, uno per ciascuno degli archi opposti associati alla corda stessa. Pertanto, sarà opportuno riferirsi all'arco sotteso quando si parla di angolo al centro, vista l'ambiguità sottolineata.

Teorema 8.3.1. *In una circonferenza, due archi sono congruenti se, e solo se, le corde corrispondenti sono congruenti.*

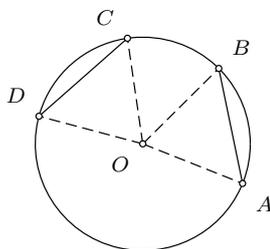
Dimostrazione. Basta operare un movimento rigido, per cui ad archi sovrapponibili corrispondono corde sovrapponibili, e viceversa. □

Corollario 8.3.2. *Per circonferenze congruenti, un arco dell'una è congruente ad un arco dell'altra se, e solo se, le corde corrispondenti sono congruenti.*

Dimostrazione. Basta operare un movimento rigido per sovrapporre le due circonferenze, quindi si applica il teorema precedente. □

Dalle precedenti proprietà segue il seguente notevole teorema.

Teorema 8.3.2. *In una circonferenza, due archi sono congruenti se, e solo se, gli angoli al centro che li sottendono sono congruenti.*



Dimostrazione. .

\implies)

$$Hp: \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

$$Th: \widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$$

- | | |
|---|--|
| 1. Consideriamo i triangoli AOB e COD | |
| 2. $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ | Hp |
| 3. $AB \cong CD$ | 2., ad archi congruenti corrispondono corde congruenti |
| 4. $OA \cong OB \cong OC \cong OD$ | raggi |
| 5. $\angle AOB \cong \angle COD$ | 3., 4., 3° c.c. |
| 6. $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$ | 5., si oppongono a lati congruenti |

\Leftarrow)

Hp: $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$

Th: $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

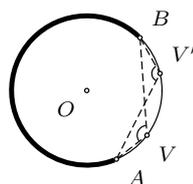
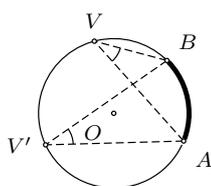
- | | |
|---|---|
| 1. Consideriamo i triangoli AOB e COD | |
| 2. $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$ | Hp |
| 3. $OA \cong OB \cong OC \cong OD$ | raggi |
| 4. $\angle AOB \cong \angle COD$ | 2., 3., 1° c.c. |
| 5. $AB \cong CD$ | 4., si oppongono ad angoli congruenti |
| 6. $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ | a corde congruenti corrispondono archi congruenti |

□

Corollario 8.3.3. *In circonferenze congruenti, un arco dell'una è congruente ad un arco dell'altra se, e solo se, gli angoli al centro che li sottendono sono congruenti.*

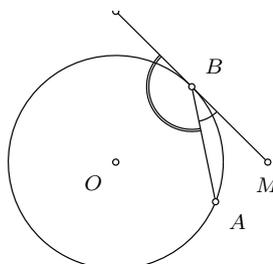
Dimostrazione. Basta operare un movimento rigido per svrapporre le due circonferenze, quindi si applica il teorema precedente. □

Definizione 8.3.3. Data una circonferenza, si definisce **angolo alla circonferenza ordinario relativo all'arco \widehat{AB}** ciascun angolo avente come vertice un qualunque punto V interno all'arco opposto \widehat{BA} e come lati le corde AV e BV . Diremo che esso **sottende** l'arco \widehat{AB} , o equivalentemente **insiste** sull'arco \widehat{AB} .



Poiché i punti interni dell'arco opposto \widehat{BA} sono infiniti, allora esistono infiniti angoli alla circonferenza ordinari che insistono sull'arco \widehat{AB} . Esistono, inoltre, due angoli alla circonferenza speciali per ogni arco, costruiti come segue.

Definizione 8.3.4. Data una circonferenza, si definisce **angolo alla circonferenza speciale relativo all'arco \widehat{AB}** ciascun dei due angoli aventi come vertici un estremo dell'arco e come lati la corda AB e la semiretta tangente nel vertice contenuta nello stesso semipiano dell'arco rispetto alla retta AB .



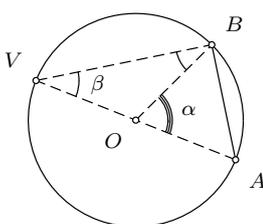
Ovviamente, sia gli angoli alla circonferenza ordinari che quelli speciali saranno chiamati genericamente angoli alla circonferenza.

Come per gli angoli al centro, sarà opportuno riferirsi ad angoli alla circonferenza che sottendono un determinato arco, in quanto ad ogni corda corrispondono due insiemi di angoli alla circonferenza. Inoltre, il fatto che ad ogni arco corrispondano infiniti angoli alla circonferenza può sembrare infelice, però il seguente teorema semplifica questa circostanza.

Teorema 8.3.3. Sia \mathcal{C} una circonferenza di centro O , siano α l'angolo al centro che sottende l'arco \widehat{AB} e β un qualunque angolo alla circonferenza ordinario che sottende lo stesso arco \widehat{AB} . Allora $\alpha \cong 2\beta$.

Dimostrazione. La dimostrazione è piuttosto lunga e prevede tre casi distinti.

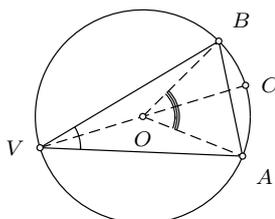
Primo caso: l'angolo alla circonferenza β ha uno dei lati AV che contiene il lato OA dell'angolo al centro α , cioè AV è un diametro della circonferenza.



1. Consideriamo il triangolo OVB
2. $OV \cong OB$ raggi

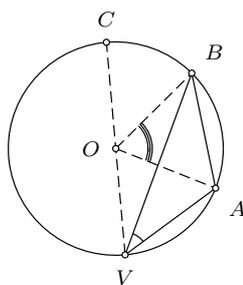
- | | |
|--|--|
| 3. OVB triangolo isoscele | 2., definizione triangolo isoscele |
| 4. $\widehat{OVB} \cong \widehat{OBV} \cong \beta$ | 3., teorema diretto triangoli isosceli |
| 5. α angolo esterno del triangolo OVB | figura |
| 6. $\alpha \cong 2\beta$ | 4., 5., 2° teorema angolo esterno |

Secondo caso: il centro O è un punto interno dell'angolo alla circonferenza β ; si conduce, quindi, il diametro VC .



- | | |
|---|---|
| 1. $\widehat{AB} \cong \widehat{AC} + \widehat{CB}$ | \widehat{AB} e \widehat{BC} archi consecutivi |
| 2. $\alpha \cong \widehat{BOC} + \widehat{COA}$ | angoli al centro relativi |
| 3. $\beta \cong \widehat{BVC} + \widehat{CVA}$ | angoli alla circonferenza relativi |
| 4. $\widehat{BOC} \cong 2\widehat{BVC}$ | primo caso |
| 5. $\widehat{COA} \cong 2\widehat{CVA}$ | primo caso |
| 6. $\alpha \cong 2\beta$ | 2., 3., 4., 5., somma di angoli |

Terzo caso: il centro O è un punto esterno all'angolo alla circonferenza β ; si conduce, quindi, il diametro VC .



- | | |
|---|---|
| 1. $\widehat{AB} \cong \widehat{AC} - \widehat{BC}$ | \widehat{AB} e \widehat{BC} archi consecutivi |
| 2. $\alpha \cong \widehat{AOC} - \widehat{BOC}$ | angoli al centro relativi |
| 3. $\beta \cong \widehat{CVA} - \widehat{CVB}$ | angoli alla circonferenza relativi |

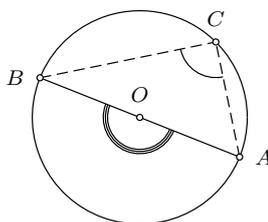
- | | | |
|----|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 4. | $\widehat{AOC} \cong 2\widehat{CVA}$ | primo caso |
| 5. | $\widehat{BOC} \cong 2\widehat{CVB}$ | primo caso |
| 6. | $\alpha \cong 2\beta$ | 2., 3., 4., 5., differenza di angoli |

□

Corollario 8.3.4. *In una circonferenza, tutti gli angoli alla circonferenza ordinari che sottendono uno stesso arco sono congruenti.*

Dimostrazione. Infatti, essi sono tutti congruenti alla metà dell'unico angolo al centro che insiste su quell'arco. □

Teorema 8.3.4. *Sia \mathcal{C} una circonferenza di diametro AB e sia C un qualunque punto appartenente ad essa (diverso da A e B). Allora il triangolo ABC è rettangolo in C .*



Hp: $O \in AB \wedge C \in \mathcal{C}$

Th: $\widehat{ACB} \cong \frac{\pi}{2}$

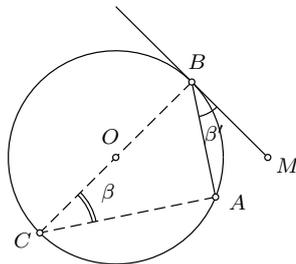
Dimostrazione. .

- | | | |
|----|--|---------------|
| 1. | AB diametro $\wedge C \in \mathcal{C}$ | Hp |
| 2. | \widehat{AOB} angolo al centro che sottende arco \widehat{BA} | figura |
| 3. | \widehat{ACB} angolo alla circonferenza che sottende arco \widehat{BA} | figura |
| 4. | $\widehat{AOB} \cong \pi$ | AB diametro |
| 5. | $\widehat{ACB} \cong \frac{\pi}{2}$ | 2., 3., 4. |

□

Un triangolo inscritto in una circonferenza con uno dei lati che è diametro si dice **inscritto in una semicirconferenza**. Il teorema precedente asserisce che ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo. Poiché abbiamo già dimostrato nel primo volume che la mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa, allora possiamo concludere che: *un triangolo è inscrittibile in una semicirconferenza se, e solo se, è un triangolo rettangolo.*

Teorema 8.3.5. *Sia \mathcal{C} una circonferenza di centro O , siano β un qualunque angolo alla circonferenza ordinario e β' uno dei due angoli alla circonferenza speciali che sottendono lo stesso arco \widehat{AB} . Allora $\beta \cong \beta'$.*



Hp: β e β' sottendono arco \widehat{AB}

Th: $\beta \cong \beta'$

Dimostrazione. Costruzione: MB tangente in A , BC diametro.

- | | |
|---|--|
| 1. $MB \perp BC$ | BC diametro condotto per il punto di tangenza B |
| 2. $MBC \cong \frac{\pi}{2}$ | 1. |
| 3. Consideriamo il triangolo ABC | |
| 4. $\widehat{CAB} \cong \frac{\pi}{2}$ | ABC inscritto in semicirconferenza |
| 5. $\beta + \widehat{ABC} \cong \frac{\pi}{2}$ | angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari |
| 6. $\beta' + \widehat{ABC} \cong \frac{\pi}{2}$ | 2., costruzione |
| 7. $\beta \cong \beta'$ | 5., 6., complementari stesso angolo \widehat{ABC} |

□

Ora è completamente provata la proprietà che afferma: *tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco sono congruenti tra loro e congruenti alla metà dell'unico angolo al centro che insiste sullo stesso arco.*

Corollario 8.3.5. *Data una circonferenza, siano β un angolo alla circonferenza che sottende l'arco \widehat{AB} e β' un angolo alla circonferenza che sottende l'arco opposto \widehat{BA} . Allora β e β' sono supplementari.*

Dimostrazione. β e β' sono congruenti alla metà dei rispettivi angoli al centro la cui somma è un angolo giro. □

Esercizi

1. Sia \mathcal{C} una circonferenza di centro O e diametro AB . Dagli estremi A e B si conducano le corde parallele AC e BD . Dimostrare che $AC \cong BD$.
2. Nelle stesse ipotesi dell'esercizio precedente, dimostrare che la corda CD è un diametro.

3. Si disegnino i diametri AB e CD di una circonferenza di centro O , quindi la corda AE perpendicolare a CD e si congiunga E con B . Dimostrare che $EB \parallel CD$.
4. In una circonferenza di centro O , siano date due corde AB e CD congruenti e incidenti in E in modo tale che $AE \cong CE$. Si dimostri che gli estremi delle corde sono i vertici di un trapezio isoscele.
5. Si considerino i due angoli al centro congruenti \widehat{AOD} e \widehat{AOC} di una circonferenza di centro O e diametro AB . Si dimostri che $BC \cong BD$.
6. In una circonferenza di centro O , il diametro AB è bisettrice dell'angolo formato dalle corde AD e AC . Dimostrare che $AC \cong AD$.
7. Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC . si dimostri che la mediana dell'ipotenusa divide il triangolo ABC in due triangoli isosceli. Quando uno dei due triangoli è equilatero?
8. Siano date una circonferenza di centro O e due archi congruenti AB e CD . Condotte le tangenti alla circonferenza t in A e t' in C , siano H e K rispettivamente le proiezioni dei punti B su t e C su t' . Dimostrare che $BH \cong CK$.
9. Sia AB una corda di una circonferenza. Condotte le tangenti alla circonferenza in A e in B , sia C il loro punto d'intersezione. Si dimostri che il triangolo CAB è isoscele.
10. Sia ABC un triangolo rettangolo in A . Condotta la mediana dell'ipotenusa AM , si dimostri che $\widehat{AMC} \cong 2\widehat{ABC}$.
11. Considerato il triangolo ABC inscritto nella circonferenza \mathcal{C} , si conduca l'asse del segmento AB che interseca l'arco non contenente C in D . Si dimostri che CD è bisettrice dell'angolo \widehat{ACB} .
12. Si dimostri che, in una circonferenza, ogni diametro è asse di simmetria della circonferenza.
13. Dimostrare che, in una circonferenza, che l'asse di una corda è anche asse degli archi relativi a quella corda.
14. Sia \mathcal{C} una circonferenza e sia \widehat{AB} un suo arco. Indicato con M il punto medio dell'arco \widehat{AB} , provare che la tangente alla circonferenza in M e l'asse dell'arco sono perpendicolari.
15. Dopo aver disegnato una circonferenza di centro O , si consideri un suo arco AB . Si disegnino, quindi, due angoli alla circonferenza ordinari che sottendono l'arco \widehat{AB} e le rispettive bisettrici. Dimostrare che tali bisettrici s'intersecano nel punto medio dell'arco \widehat{AB} .

8.4 Il teorema delle tangenti

Abbiamo già introdotto il concetto di tangente ad una circonferenza in suo punto, deducendo l'importante proprietà che il raggio condotto nel punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente. Poiché la retta perpendicolare ad una retta assegnata passante per un punto esiste ed è unica, deduciamo immediatamente che

Corollario 8.4.1. *Esiste ed è unica la retta tangente ad una circonferenza \mathcal{C} condotta per $T \in \mathcal{C}$.*

Possiamo, pertanto, esplicitare la soluzione del seguente

Esercizio 8.4.1. Data la circonferenza \mathcal{C} e scelto un qualunque punto $T \in \mathcal{C}$, costruire la retta t tangente alla circonferenza in T .

1. Si conduce il raggio OT ;

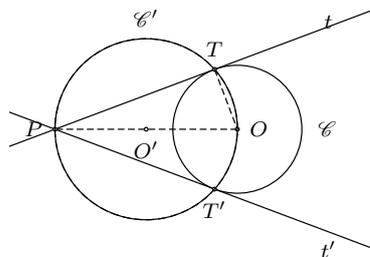
2. si costruisce la retta t passante per T e perpendicolare al raggio OT , che è la tangente alla circonferenza nel punto T .

È evidente che per un punto P interno alla circonferenza \mathcal{C} non è possibile condurre alcuna retta tangente alla circonferenza, in quanto una tangente non può avere punti in comune con l'interno di una circonferenza.

Vediamo ora di ricavare se da un punto esterno è possibile condurre rette tangenti ad una circonferenza, ed, in caso affermativo, quante. Anticipiamo che tali rette tangenti esistono e sono in numero di due.

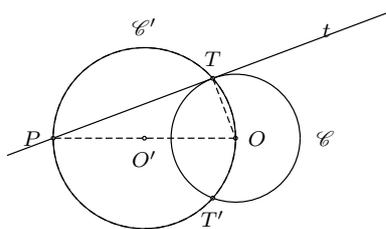
Esercizio 8.4.2. Data la circonferenza \mathcal{C} e scelto un qualunque punto P esterno ad essa, costruire le rette t e t' tangenti alla circonferenza e passanti per P .

1. Si disegnino la circonferenza \mathcal{C} , di centro O , e il punto P esterno ad essa;
2. si tracci il segmento PO e si costruisca il suo punto medio O' ;
3. si descriva la circonferenza \mathcal{C}' di centro O' e raggio PO' ;
4. si individui l'intersezione delle due circonferenze $\{T, T'\} = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$;
5. le rette PT e PT' sono le rette tangenti condotte dal punto esterno P alla circonferenza \mathcal{C} .



Osserviamo che, poiché la circonferenza \mathcal{C}' passa per il centro O della circonferenza \mathcal{C} , le due circonferenze saranno secanti, cioè hanno esattamente due punti in comune.

Teorema 8.4.1. Le rette t e t' della costruzione precedente sono tangenti alla circonferenza \mathcal{C} . Ogni altra retta condotta da P non può essere tangente a \mathcal{C} .



Dimostrazione. Proveremo che la retta t è tangente alla circonferenza \mathcal{C} , si procede analogamente per t' .

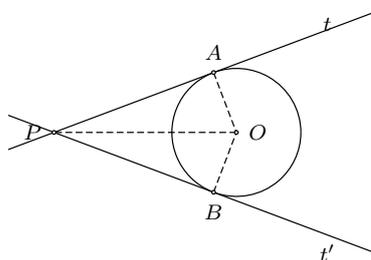
1. Consideriamo il triangolo POT

- | | | |
|----|---|--|
| 2. | lato PO diametro circonferenza \mathcal{C}' | costruzione |
| 3. | POT inscritto in circonferenza \mathcal{C}' | costruzione |
| 4. | POT triangolo rettangolo in T | 2., 3., ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo |
| 5. | $\widehat{OT}P \cong \frac{\pi}{2}$ | 4. |
| 6. | OT raggio circonferenza \mathcal{C} | figura |
| 7. | t tangente a \mathcal{C} in T | 5., 6. |

Ogni altra retta passante per P e diversa da t e t' è o esterna o secante rispetto a \mathcal{C} . Pertanto, le rette t e t' sono le uniche rette tangenti a \mathcal{C} condotte per P , in quanto è unica la perpendicolare ad una data retta passante per punto. \square

Veniamo ora all'importante

Teorema 8.4.2 (Teorema delle tangenti). *Sia \mathcal{C} una circonferenza di centro O e sia P un punto esterno ad essa da cui conduciamo le tangenti t e t' rispettivamente in A e B . Allora i segmenti di tangente PA e PB sono congruenti.*

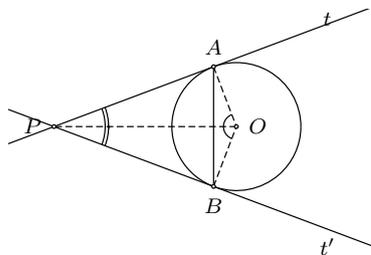


Dimostrazione. Costruzione: tracciamo la congiungente PO ed i raggi OA e OB .

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | Consideriamo i triangoli POA e POB | |
| 2. | $OA \perp t \wedge OB \perp t'$ | tangenti sono perpendicolari ai raggi condotti nei punti di tangenza |
| 3. | POA e POB triangoli rettangoli | 2. |
| 4. | $OA \cong OB$ | raggi |
| 5. | PO in comune | figura |
| 6. | $POA \cong POB$ | 3., 4., 5., criterio congruenza triangoli rettangoli |
| 7. | $PA \cong PB$ | 6. |

\square

Il teorema delle tangenti porta a conseguenze importanti e facilmente deducibili. Infatti, con riferimento alla dimostrazione ed alla figura seguente, deduciamo immediatamente quanto segue.



- Dalla congruenza dei triangoli POA e POB segue che $P\hat{O}A \cong P\hat{O}B$ e $O\hat{P}A \cong O\hat{P}B$, pertanto la congiungente PO è bisettrice di entrambi gli angoli $A\hat{P}B$ e $A\hat{O}B$.
- Dalla deduzioni precedenti e dal fatto che i triangoli opposti PBA e OAB sono isosceli con base comune AB , si conclude che PO è asse dei due triangoli e, quindi, della corda AB e dell'arco \widehat{AB} .

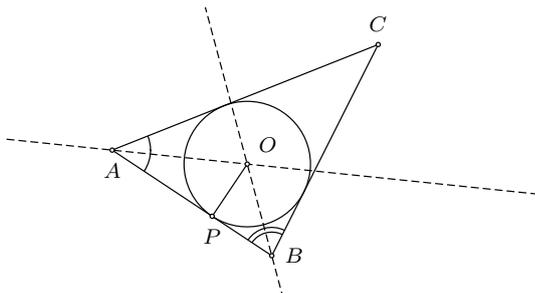
Abbiamo già definito il concetto di triangolo inscritto ad una circonferenza, vediamo ora quello di triangolo circoscritto.

Definizione 8.4.1. Un triangolo si dice **circoscritto** ad una circonferenza se i suoi lati sono tutti tangenti alla circonferenza. In modo equivalente si può dire che la circonferenza è **inscritta** al triangolo.

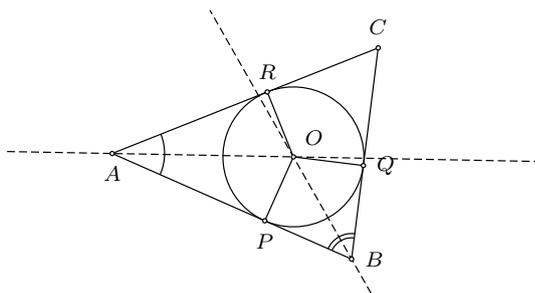
Ora ci chiediamo se un triangolo è sempre circoscrittibile ad una circonferenza e, in caso affermativo, come è possibile costruire con riga e compasso la circonferenza inscritta.

Esercizio 8.4.3. Dato un triangolo qualunque ABC , costruire la circonferenza inscritta al triangolo.

1. Si disegni il triangolo qualunque ABC ;
2. si conducano le bisettrici di due angoli interni al triangolo, ad esempio degli angoli \hat{A} e \hat{B} ;
3. si individui il punto O intersezione delle due bisettrici: esso è il centro della circonferenza inscritta;
4. dal punto O si conduca il segmento perpendicolare in P ad un lato qualunque del triangolo: il segmento OP è il raggio della circonferenza inscritta;



Teorema 8.4.3. La circonferenza della costruzione precedente è la circonferenza inscritta al triangolo ABC .



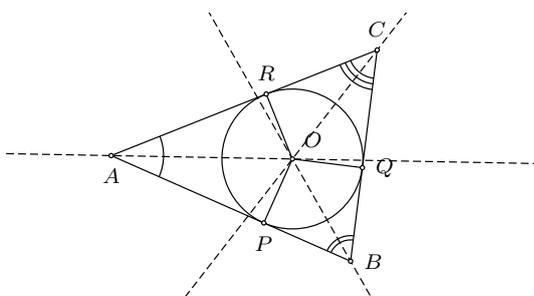
Dimostrazione. Costruzione: tracciamo i segmenti $OQ \perp BC$ con $Q \in BC$, e il segmento $OR \perp AC$ con $R \in AC$.

- | | | |
|-----|---|---|
| 1. | Consideriamo i triangoli APO e ARO | |
| 2. | APO e ARO triangoli rettangoli | costruzione |
| 3. | AO in comune | figura |
| 4. | $\widehat{RAO} \cong \widehat{PAO}$ | AO bisettrice |
| 5. | $APO \cong ARO$ | 2., 3., 4., criterio congruenza triangoli rettangoli |
| 6. | $OR \cong OP$ | 5., si oppongono ad angoli congruenti |
| 7. | Consideriamo i triangoli BPO e BQO | |
| 8. | BPO e BQO triangoli rettangoli | costruzione |
| 9. | BO in comune | figura |
| 10. | $\widehat{PBO} \cong \widehat{QBO}$ | BO bisettrice |
| 11. | $BPO \cong BQO$ | 8., 9., 10., criterio congruenza triangoli rettangoli |
| 12. | $OQ \cong OP$ | 11., si oppongono ad angoli congruenti |
| 13. | $OQ \cong OP \cong OR$ | 6., 12., proprietà transitiva |
| 14. | P, Q, R punti della circonferenza di centro O e raggio OP | 13., def. di circonferenza |
| 15. | AB tangente alla circonferenza in P | OP raggio perpendicolare ad AB |
| 16. | AC tangente alla circonferenza in R | OR raggio perpendicolare ad AC |
| 17. | BC tangente alla circonferenza in Q | OQ raggio perpendicolare ad BC |
| 18. | ABC circoscritto alla circonferenza della costruzione | 13., 14., 15., 16. |

□

Segue immediatamente

Corollario 8.4.2. *Le tre bisettrici di un triangolo si incontrano in uno stesso punto.*



Dimostrazione. Con riferimento alla dimostrazione precedente, basterà provare che OC è bisettrice dell'angolo \widehat{ACB} .

- | | | |
|----|--|------------------------|
| 1. | Consideriamo i triangoli CRO e CQO | |
| 2. | $CR \cong CQ$ | teorema delle tangenti |
| 3. | CO in comune | figura |

- | | | |
|----|-------------------------------------|------------------------------------|
| 4. | $OR \cong OQ$ | raggi di una stessa circonferenza |
| 5. | $CRO \cong CQO$ | 2., 3., 4., 3° c.c. |
| 6. | $O\widehat{C}R \cong O\widehat{C}Q$ | 5., si oppongono a lati congruenti |

□

Il punto d'incontro delle tre bisettrici di un triangolo prende il nome di **incentro**, esso è il centro della circonferenza inscritta al triangolo.

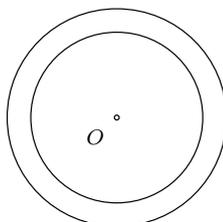
Esercizi

1. Sia data una circonferenza di centro O . Da un punto esterno P tale che PO sia congruente al diametro si conducano le tangenti alla circonferenza PA e PB , con A e B punti di tangenza. Siano M ed N rispettivamente i punti medi di PA e PB ; si dimostri che i triangoli ABM e ABN sono congruenti.
2. Dagli estremi del diametro AB di una circonferenza di centro O si conducano le rette tangenti t , in A , e t' , in B . Da un punto $P \notin AB$ della circonferenza si conduca l'ulteriore retta tangente t'' alla circonferenza che interseca le due precedenti rispettivamente in R ed S . Dimostrare che il triangolo ROS è rettangolo in O .
3. Disegnare un triangolo rettangolo ABC , retto in A , circoscritto ad una circonferenza di centro O e diametro DE . Dimostrare che $DE \cong (AB + AC) - BC$.
4. Da un punto esterno P di una circonferenza di centro O si conducano le rette tangenti alla circonferenza nei punti A e B . Dimostrare che il punto medio di PO è il circocentro del triangolo ABP .
5. Sia data una circonferenza di centro O e siano A e B due punti esterni tali che $AO \cong BO$. Si traccino i segmenti di tangenti AC e AD da A , BE e BF da B . Si dimostri che
 - a) $AC \cong BE$;
 - b) $CD \cong EF$.
6. Due circonferenze di centri O e O' sono secanti in A e B . Dimostrare che OO' è perpendicolare alla corda comune AB .
7. Siano \mathcal{C} e \mathcal{C}' due circonferenze concentriche di centro O , la seconda di raggio minore rispetto alla prima. Dal punto $P \in \mathcal{C}$ conduci le rette tangenti a \mathcal{C}' , le quali intersecano \mathcal{C}' (punti di tangenza) in D e E , mentre intersecano \mathcal{C} negli ulteriori punti B ed C . Dimostrare che
 - a) il quadrilatero di estremi B, C, D, E è un trapezio isoscele;
 - b) i triangoli ABC e AED hanno gli angoli ordinatamente congruenti.
8. Disegnare una circonferenza di centro O ed una sua corda AB . Sulla tangente per A si consideri un punto C tale che $AC \cong AB$, e la retta CB interseca la circonferenza nell'ulteriore punto D . Si dimostri che
 - a) il triangolo ADC è isoscele;
 - b) $C\widehat{D}A \cong 2D\widehat{A}O$.
9. Siano \mathcal{C} una circonferenza di centro O e t e t' due rette ad essa tangenti che si intersecano nel punto P . Si disegni una terza retta tangente r tale che $\{A\} = r \cap t'$, quindi una quarta tangente s tale $\{B\} = r \cap s$ e $\{C\} = s \cap t$. Dimostrare che nel quadrilatero di estremi A, B, C, P vale la relazione $PA + BC \cong AB + PC$.

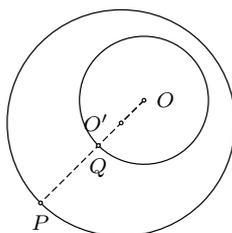
8.5 Intersezioni di circonferenze

In questo paragrafo tratteremo delle posizioni mutue di circonferenze e delle loro eventuali intersezioni. Enunceremo delle semplici proprietà le cui dimostrazioni fisseremo in modo intuitivo e a grandi linee.

Definizione 8.5.1. Due circonferenze si dicono **concentriche** se hanno lo stesso centro.



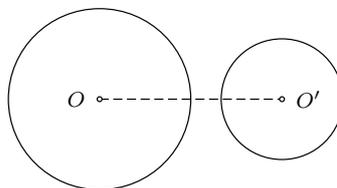
Definizione 8.5.2. Una circonferenza si dice **interna** ad un'altra circonferenza se non hanno punti in comune e il cerchio relativo alla prima è contenuto nel cerchio relativo alla seconda.



É immediato, osservando la precedente figura, che

Teorema 8.5.1. Una circonferenza di centro O è tangente internamente ad un'altra di centro O' se, e solo se, OO' è congruente alla differenza dei raggi.

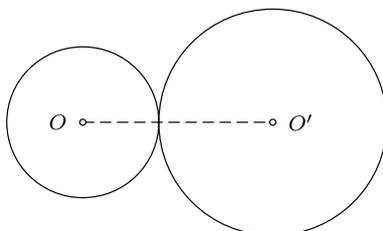
Definizione 8.5.3. Due circonferenze si dicono **esterne** se i cerchi relativi sono disgiunti.



É banale dedurre che

Teorema 8.5.2. Due circonferenze di centro O e O' sono esterne se, e solo se, OO' è maggiore della somma dei raggi

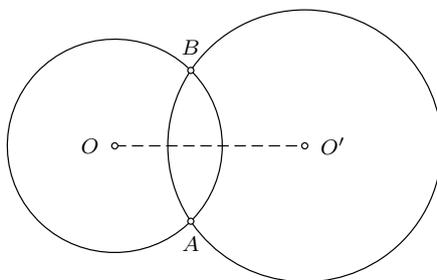
Definizione 8.5.4. Due circonferenze si dicono **tangenti esternamente** se sono esterne con un solo punto in comune.



Teorema 8.5.3. Due circonferenze di centro O e O' sono tangenti esternamente se, e solo se, OO' è congruente alla somma dei raggi. Esse hanno la stessa tangente nel loro punto di contatto.

Dimostrazione. La prima tesi è ovvia. Per la seconda, detto P il punto di tangenza delle due circonferenze, basta osservare che OO' è l'unione dei due raggi adiacenti che risultano entrambi perpendicolari alla tangente per P , quindi si applica la proprietà che per un punto passa un'unica retta perpendicolare ad una retta data. \square

Definizione 8.5.5. Due circonferenze si dicono **secanti** se hanno esattamente due punti in comune.



Teorema 8.5.4. Siano \mathcal{C} di centro O e \mathcal{C}' di centro O' due circonferenze. Esse sono secanti se, e solo se, OO' è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza. Inoltre, la retta OO' è asse della corda comune AB .

Dimostrazione. Daremo la dimostrazione a grandi linee. Supponiamo che $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$; consideriamo il triangolo $OO'A$ e applichiamo i teoremi della disuguaglianza triangolare. La dimostrazione del viceversa è omessa. Per l'ultimo asserto, basta applicare una delle conseguenze del teorema delle tangenti \square

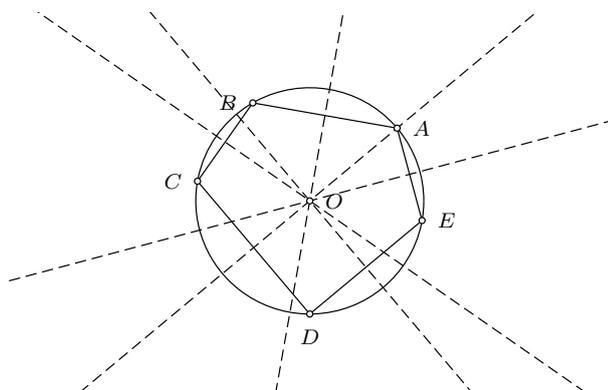
Capitolo 9

Poligoni inscritti e circoscritti

Nel capitolo precedente sulla circonferenza abbiamo stabilito cosa intendere per triangolo inscritto in una circonferenza e triangolo circoscritto ad una circonferenza. In questo capitolo estenderemo tali definizioni ad un poligono convesso qualunque. Inoltre, presteremo particolare attenzione allo studio dei criteri di inscrivibilità e circoscrittibilità dei quadrilateri.

9.1 Definizioni generali

Definizione 9.1.1. Un poligono convesso di n lati dicesi **inscritto** in una circonferenza se tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza. Esso si dice anche **poligono ciclico**, e i suoi vertici si chiamano **punti conciclici**.



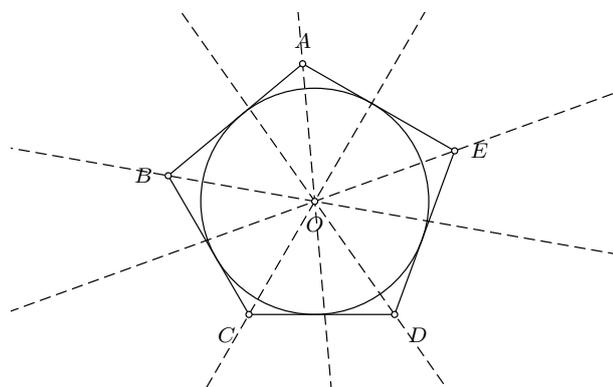
Nella figura è rappresentato un pentagono (poligono convesso di 5 lati) ciclico. Riferendoci a questo caso particolare osserviamo che tutti i lati del pentagono possono essere riguardati come corde della circonferenza, pertanto gli assi delle corde passano tutti per il centro O della circonferenza, in base al teorema 8.1.3. Inoltre, i segmenti che hanno come estremi il centro della circonferenza e i vertici del poligono sono tutti congruenti tra loro in quanto raggi in quanto raggi della circonferenza.

La generalizzazione di queste proprietà ad un poligono convesso di n lati è sancita dal seguente teorema.

Teorema 9.1.1. *Un poligono convesso di n lati è ciclico se, e solo se, gli assi dei suoi lati s'incontrano in uno stesso punto che è il centro della circonferenza stessa.*

È evidente che non tutti i poligoni convessi sono ciclici. L'alunno diligente porti degli esempi di poligoni convessi non ciclici. Abbiamo già dimostrato che tutti i triangoli sono inscrittibili in una circonferenza, sulla scorta del teorema 8.1.4.

Definizione 9.1.2. Un poligono convesso di n lati dicesi **circoscritto** ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.



Dalla definizione emerge che ogni vertice del poligono può essere riguardato come punto esterno da cui partono due lati tangenti, i quali formano angoli le cui bisettrici passano per il centro della circonferenza, che si ricava come conseguenza del teorema delle tangenti. Possiamo pertanto enunciare la seguente proprietà.

Teorema 9.1.2. *Un poligono convesso di n lati è circoscrittibile ad una circonferenza se, e solo se, le bisettrici di ciascun angolo interno del poligono s'incontrano nello stesso punto che è il centro della circonferenza stessa.*

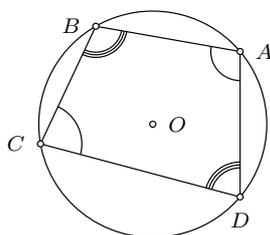
Chiaramente non tutti i poligoni sono circoscrittibili ad una circonferenza.

9.2 Quadrilateri inscritti e circoscritti

Per i quadrilateri esistono dei criteri di inscrittibilità e circoscrittibilità che possono essere derivati facilmente utilizzando le proprietà della circonferenza.

Teorema 9.2.1. *Un quadrilatero è ciclico rispetto alla circonferenza \mathcal{C} se, e solo se, le due coppie di angoli opposti sono supplementari.*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima implicazione.



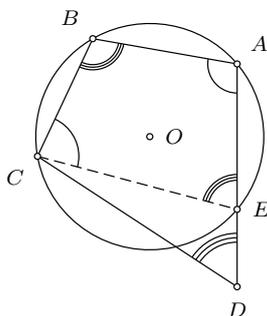
\implies)

Hp: $ABCD$ ciclico

Th: $\widehat{A} + \widehat{C} \cong \pi \cong \widehat{B} + \widehat{D}$

1. Consideriamo il quadrilatero $ABCD$
2. $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ Hp
3. \widehat{A} angolo alla circonferenza che sottende arco \widehat{BD} figura
4. \widehat{C} angolo alla circonferenza che sottende arco \widehat{DB} figura
5. $\widehat{A} + \widehat{C} \cong \pi$ 3., 4., angoli alla circonferenza che sottendono archi opposti
6. \widehat{B} angolo alla circonferenza che sottende arco \widehat{CA} figura
7. \widehat{D} angolo alla circonferenza che sottende arco \widehat{AC} figura
8. $\widehat{B} + \widehat{D} \cong \pi$ 6., 7., angoli alla circonferenza che sottendono archi opposti

Dimostriamo ora per assurdo l'implicazione opposta.



\impliedby)

Hp: $\widehat{A} + \widehat{C} \cong \pi \cong \widehat{B} + \widehat{D}$

Th: $ABCD$ ciclico

1. $\widehat{A} + \widehat{C} \cong \pi \cong \widehat{B} + \widehat{D}$ Hp
2. $A, B, C \in \mathcal{C} \wedge D \notin \mathcal{C}$, con D esterno a \mathcal{C} negazione della tesi

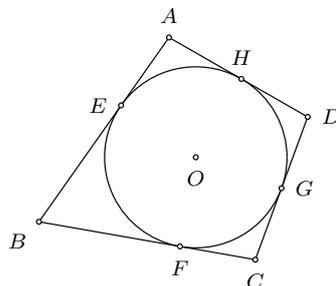
- | | |
|---|--|
| 3. Sia $AD \cap \mathcal{C} = \{E\}$ | 2. |
| 4. \widehat{B} angolo alla circonferenza che sottende arco \widehat{CA} | figura |
| 5. \widehat{E} angolo alla circonferenza che sottende arco \widehat{AC} | figura |
| 6. $\widehat{B} + \widehat{E} \cong \pi$ | 4., 5., angoli alla circonferenza che sottendono archi opposti |
| 7. $\widehat{E} \cong \widehat{D}$ | 1., 6., supplementari di uno stesso angolo |
| 8. Consideriamo il triangolo CDE | |
| 9. \widehat{E} angolo esterno al triangolo CDE | figura |
| 10. $\widehat{E} > \widehat{D}$ | 9., 1° teorema dell'angolo esterno |
| 11. Contraddizione | 7., 10. |
| 12. $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ | 2., 11. |
| 13. $ABCD$ ciclico | 12., definizione quadrilatero ciclico |

La dimostrazione è del tutto simile se si suppone che il punto D è interno alla circonferenza; in questo caso l'angolo esterno è \widehat{D} e la contraddizione è determinata dalla relazione $\widehat{E} < \widehat{D}$.

□

Illustriamo ora il criterio di circoscrittibilità dei quadrilateri.

Teorema 9.2.2. *Un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza \mathcal{C} se, e solo se, la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.*



Dimostrazione. Dimostriamo condizione necessaria di circoscrittibilità.

Hp: $ABCD$ circoscritto a \mathcal{C}

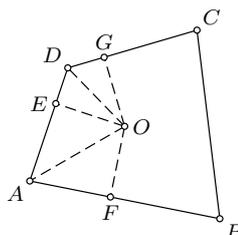
Th: $AB + CD \cong BC + AD$

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. $AB \cap \mathcal{C} = \{E\}$ | Hp , lato AB tangente a \mathcal{C} |
| 2. $BC \cap \mathcal{C} = \{F\}$ | Hp , lato BC tangente a \mathcal{C} |
| 3. $CD \cap \mathcal{C} = \{G\}$ | Hp , lato CD tangente a \mathcal{C} |
| 4. $AD \cap \mathcal{C} = \{H\}$ | Hp , lato AD tangente a \mathcal{C} |
| 5. $AE \cong AH$ | 1., 4., teorema delle tangenti |

- | | |
|----------------------------|--|
| 6. $EB \cong BF$ | 1., 2., teorema delle tangenti |
| 7. $FC \cong CG$ | 2., 3., teorema delle tangenti |
| 8. $GD \cong DH$ | 3., 4., teorema delle tangenti |
| 9. $AB + CD \cong BC + AD$ | 5., 6., 7., 8., somma di segmenti congruenti |

Dimostriamo ora la condizione sufficiente.

Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che $AB + CD \cong AD + BC$.



Costruiamo le bisettrici degli angoli \widehat{A} e \widehat{D} che s'incontrano nel punto O (non possono essere parallele altrimenti $\widehat{A} + \widehat{D} \cong 2\pi$). Dal punto O tracciamo i segmenti $OE \perp AD$, $OF \perp AB$ e $OG \perp CD$. Si deduce facilmente che

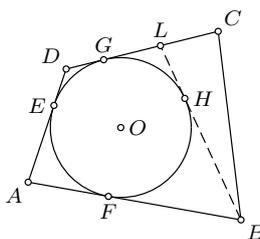
$$GOD \cong DOE \implies OE \cong OG$$

$$AOE \cong AOF \implies OE \cong OF$$

e, quindi per la proprietà transitiva, $OE \cong OF \cong OG$.

Le relazioni precedenti con $OE \perp AD$, $OF \perp AB$ e $OG \perp CD$ portano a concludere che esiste unica la circonferenza di centro O e tangente sia ad AB che ad AD che CD . Pertanto, per il teorema delle tangenti, risulta che $AF \cong AE$ e $DE \cong DG$, ragion per cui la relazione $AB + CD \cong AD + BC$ è equivalente alla relazione $FB + GC \cong BC$.

1. Supponiamo che il quarto lato BC sia esterno alla circonferenza costruita.

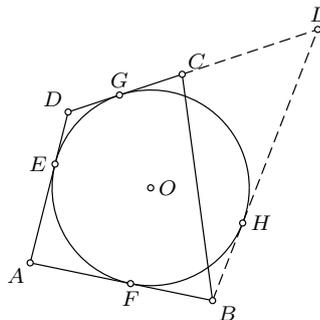


Dal punto B , esterno alla circonferenza, conduciamo la retta BH tangente in H alla circonferenza, che incontra la retta DC in L . Si deduce quanto segue:

- $FB \cong HB$ per il teorema delle tangenti;
- L è interno a GC in quanto sia GC che LB sono tangenti alla circonferenza;
- $GL \cong LH$ per il teorema delle tangenti.

Consideriamo il triangolo BLC , risulta che $BC < BL + LC$ per il primo teorema della disuguaglianza triangolare, che, in base alle considerazioni precedenti, può scriversi $BC < FB + GL + LC$ e quindi $BC < FB + BC$ che contraddice l'ipotesi $BC \cong FB + GC$. Pertanto il quarto lato BC non può essere esterno alla circonferenza.

2. Supponiamo che il quarto lato BC sia secante la circonferenza.



Dal punto B , ancora esterno alla circonferenza, conduciamo la retta BH tangente in H alla circonferenza che incontra il prolungamento di DC in L . Otteniamo quanto segue:

- $FB \cong BH$ per il teorema delle tangenti;
- C è interno a GL in quanto G è interno a CD ;
- $HL \cong GL$ per il teorema delle tangenti.

Consideriamo il triangolo BCL , risulta che $BC > BL - CL$ per il secondo teorema della disuguaglianza triangolare, che può scriversi $BC > FB + GL - CL$ e quindi $BC > FB + GC$ che contraddice l'ipotesi $BC \cong FB + GC$. Pertanto, il quarto lato non può essere secante la circonferenza.

Concludiamo che il quarto lato deve essere necessariamente tangente alla circonferenza, da cui l'asserto. □

Esercizi

1. In un triangolo qualunque ABC siano CH l'altezza relativa al lato AB e BK l'altezza relativa al lato AC . Dimostrare che il quadrilatero $HCKB$ è ciclico.
2. Dimostrare che ogni parallelogramma ciclico è un rettangolo.
3. Dimostrare che ogni parallelogramma circoscrittibile ad una circonferenza è un rombo. Cosa si può concludere combinando questo asserto con quello dell'esercizio precedente?
4. Sia data una circonferenza di centro O inscritta in un trapezio $ABCD$ di basi AB e CD . Dimostrare che gli angoli \widehat{AOD} e \widehat{BOC} sono retti.
5. Dato un triangolo isoscele ABC , di base AB , siano O il suo incentro e AH e BK rispettivamente le bisettrici degli angoli \widehat{A} e \widehat{B} . Dimostrare che il quadrilatero $ABHK$ è ciclico.

6. Si disegni una semicirconferenza di diametro AB e si inscriva un trapezio $ABCD$ di base maggiore AB . Si dimostri che
 - a) il trapezio è necessariamente isoscele;
 - b) la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC (o, in modo equivalente, la diagonale BD è perpendicolare al lato obliquo AD).
7. Sia $ABCD$ un quadrato. Dopo aver disegnato le circonferenze inscritta e circoscritta rispetto al quadrato, si dimostri che esse sono concentriche.
8. Dato un triangolo isoscele ABC , di base AB , siano O il suo incentro e AH e BK rispettivamente le bisettrici degli angoli \widehat{A} e \widehat{B} . Dimostrare che il quadrilatero $OHCK$ è circoscrittibile ad una circonferenza.
9. In un quadrilatero $ABCD$ gli angoli \widehat{ADB} e \widehat{ACB} sono congruenti. Dimostrare che il quadrilatero è ciclico.
10. Si disegnino una circonferenza e quattro rette ad essa tangenti a due a due parallele e siano A, B, C, D i quattro punti di tangenza e E, F, G, H i punti d'intersezione delle rette. Si dimostri che
 - a) $EFGH$ è un rombo;
 - b) $ABCD$ è un rettangolo.

Capitolo 10

Equiestensione di figure piane

10.1 Relazioni di equivalenza

Concetti come il parallelismo tra rette e la congruenza tra figure sono esempi di relazioni tra oggetti di uno stesso insieme. Daremo ora una definizione generale di relazione su un insieme non vuoto di oggetti, rimanendo però vincolati al caso geometrico quando esporremo esempi particolari.

Definizione 10.1.1. Sia E un insieme non vuoto. Si definisce **relazione binaria su E** ogni sottoinsieme \mathcal{R} del prodotto cartesiano $E \times E$. Per due oggetti $x, y \in E$ che sono nella relazione \mathcal{R} scriveremo $x\mathcal{R}y$ invece di $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Vediamo ora alcuni esempi di relazioni in ambito geometrico già analizzate in precedenza.

1. Sia E l'insieme delle rette del piano e sia \mathcal{R} la relazione su E così definita

$$\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \iff x \parallel y$$

vale a dire la relazione di parallelismo tra rette del piano.

2. Sia, ora, E l'insieme delle figure del piano e sia \mathcal{R} la relazione su E così definita

$$\forall F_1, F_2 \in E \quad F_1\mathcal{R}F_2 \iff F_1 \cong F_2$$

cioè l'ordinaria relazione di congruenza tra figure del piano.

Nel seguito considereremo altre relazioni tra figure geometriche che studieremo a fondo. Rammentiamo che per le relazioni di parallelismo tra rette e di congruenza tra figure del piano abbiamo già sottolineato la validità di determinate proprietà che ora andiamo a precisare.

Definizione 10.1.2. Siano E un insieme non vuoto e \mathcal{R} una relazione binaria su E .

1. Si dice che \mathcal{R} gode della proprietà **riflessiva** se $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$;
2. si dice che \mathcal{R} gode della proprietà **simmetrica** se $\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$;
3. si dice che \mathcal{R} gode della proprietà **transitiva** se $\forall x, y, z \in E \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Come già sappiamo, le relazioni di parallelismo tra rette e di congruenza tra figure godono entrambe delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Invece, la relazione di perpendicolarità tra rette gode solo della proprietà simmetrica ma non della riflessiva e della transitiva.

Definizione 10.1.3. Una relazione binaria \mathcal{R} su E si dice **relazione di equivalenza** se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Le relazioni di parallelismo e congruenza sono esempi importanti di relazioni di equivalenza, mentre la relazione di perpendicolarità non è di equivalenza non godendo, come già detto, delle proprietà riflessiva e transitiva.

Ora si presti attenzione a quanto segue. Sia E l'insieme delle rette del piano e sia \mathcal{R} la relazione di parallelismo: $r\mathcal{R}s \iff r\parallel s$. Fissiamo una retta qualsiasi $a \in E$ e osserviamo che esistono infinite rette del piano parallele alla retta a , che costituiscono, come già sappiamo, un fascio improprio di rette, che possiamo scrivere come

$$\mathcal{F}_a = \{r \in E \mid r\parallel a\}$$

Pertanto, \mathcal{F}_a è l'insieme delle rette del piano che sono parallele ad una determinata retta a , cioè che sono nella relazione fissata con a .

Generalizziamo l'esempio precedente.

Definizione 10.1.4. Sia \mathcal{R} una relazione di equivalenza sull'insieme non vuoto E . Fissato $a \in E$, si definisce **classe di equivalenza** individuata da a rispetto alla relazione \mathcal{R} l'insieme $[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in E \mid x\mathcal{R}a\}$, cioè l'insieme degli elementi di E che sono in relazione con a . L'elemento $a \in E$ si chiama **rappresentante** della classe di equivalenza.

È evidente che, poiché la relazione \mathcal{R} gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, la scelta del rappresentante di una classe di equivalenza è arbitraria, vale a dire *ogni elemento della classe può essere scelto come rappresentante*.

Riguardo la notazione, spesso si scrive $[a]$ invece di $[a]_{\mathcal{R}}$ quando la relazione è fissata una volta per tutte e non esiste la possibilità di confusione con altre relazioni.

Poniamo ora la nostra attenzione sul seguente esempio. Ogni figura del piano, con la relazione di congruenza, individua una classe di equivalenza che risulta essere l'insieme di tutte le figure che sono congruenti alla figura di partenza. Sia, ad esempio, T_1 un triangolo isoscele, allora l'insieme $[T_1] = \{T \mid T \cong T_1\}$ è la classe di equivalenza individuata da T_1 rispetto alla relazione di congruenza tra figure. Essa è l'insieme dei triangoli isosceli che sono congruenti al triangolo T_1 .

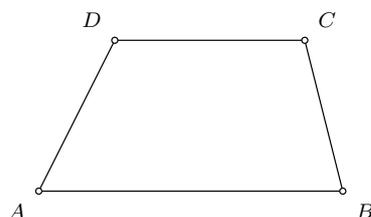
Osserviamo che

- una classe di equivalenza $[a]$ non può mai essere vuota in quanto deve contenere almeno l'elemento a , infatti una relazione di equivalenza è riflessiva;
- due classi di equivalenza $[a]$ e $[b]$ definite da una stessa relazione di equivalenza o coincidono o sono disgiunte;
- l'unione di tutte le classi di equivalenza è l'intero insieme E .

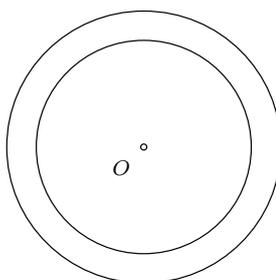
10.2 Estensione di figure geometriche

Nei precedenti capitoli abbiamo studiato i poligoni convessi e il cerchio (con la circonferenza che lo delimita). Si è precisato che per poligono s'intende l'insieme dei punti della poligonale non intrecciata chiusa che lo delimita più i punti interni a detta poligonale. Inoltre, per cerchio intendiamo l'insieme dei punti della circonferenza e dei punti ad essa interni. È chiaro che sia la circonferenza che la poligonale chiusa *suddividono il piano in due parti, quella interna e quella esterna alla poligonale o alla circonferenza*.

Definizione 10.2.1. Si definisce **superficie piana** l'intero piano, oppure un qualunque semipiano, oppure l'insieme dei punti del piano delimitati da una linea chiusa.



Nella figura precedente è rappresentato un trapezio $ABCD$. Esso come poligonale chiusa individua due superfici, la prima ottenuta aggiungendo alla poligonale i suoi punti interni, la seconda aggiungendo alla poligonale i punti esterni. La prima si dirà **superficie limitata**, mentre la seconda **superficie illimitata**. Nel seguito considereremo esclusivamente le superfici limitate, in particolare sia superfici delimitate da poligoni convessi che circonferenze. Nella seguente figura è illustrata una superficie ottenuta come complementare del cerchio di raggio minore rispetto a quello di raggio maggiore, i cerchi essendo concentrici. La superficie in questione è detta **corona circolare**.



Intuitivamente penseremo all'**estensione di una superficie** come alla **quantità** di piano occupata da quella superficie. Il concetto di estensione di una superficie viene assunto come indefinito e quindi come ulteriore ente primitivo. Esso apparirà con maggiore chiarezza quando, nel capitolo sulla teoria della misura, assoceremo ad ogni superficie limitata un numero reale che esprimerà quanto grande è una superficie rispetto ad una particolare scelta come riferimento o, come suol dirsi, come superficie campione.

Definizione 10.2.2. Due superfici aventi la stessa estensione si dicono **equiestese** o **equivalenti**. Notazione: $F_1 \doteq F_2$, dove F_1 e F_2 sono due superfici.

La relazione di equiestensione tra superfici è una relazione di equivalenza; infatti, essa gode banalmente delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Pertanto, le superfici del piano, rispetto alla relazione di equiestensione, sono suddivise in classi di equivalenza. Ogni classe di equivalenza contiene tutte e sole le superfici aventi la stessa estensione. È immediato dedurre che

Corollario 10.2.1. *Due figure congruenti sono equiestese.*

Il viceversa, vedremo in seguito, non vale, pertanto possiamo affermare che la relazione di congruenza esprime una proprietà *più forte* della relazione di equiestensione.

Siccome riguardiamo le figure geometriche come insiemi di punti, le operazioni tra insiemi ci permettono di esplicitare la seguente definizione.

Definizione 10.2.3. Date due superfici \mathcal{F} e \mathcal{G} , si definisce **somma** di \mathcal{F} e \mathcal{G} la superficie \mathcal{S} ottenuta dall'unione dei punti di \mathcal{F} e \mathcal{G} , le quali verranno dette le **componenti** o **parti** di \mathcal{S} . Notazione: $\mathcal{F} + \mathcal{G} \doteq \mathcal{S}$.

La somma gode delle proprietà associativa e commutativa: date le superfici \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H}

$$(\mathcal{F} + \mathcal{G}) + \mathcal{H} \doteq \mathcal{F} + (\mathcal{G} + \mathcal{H})$$

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} \doteq \mathcal{G} + \mathcal{F}$$

A questo punto è indispensabile introdurre un nuovo postulato. Esso fu formulato dal matematico italiano Antonio De Zolt, nato a Conegliano (Treviso) nel 1847; egli studiò e si laureò a Torino nel 1872 e insegnò al *Parini* di Milano, ove morì nel 1926.

Postulato 1 (Postulato di De Zolt). *Una superficie finita ed una sua parte propria non possono essere equiestese.*

Definizione 10.2.4. Una superficie \mathcal{F} si dice **minore** di una superficie \mathcal{G} se esiste una parte \mathcal{H} di \mathcal{G} tale che $\mathcal{H} \doteq \mathcal{F}$. Notazione: $\mathcal{F} < \mathcal{G}$.

La relazione $<$ tra superfici gode della proprietà transitiva:

$$(\mathcal{F} < \mathcal{G} \quad \wedge \quad \mathcal{G} < \mathcal{H}) \implies \mathcal{F} < \mathcal{H}$$

Definizione 10.2.5. Date due superfici \mathcal{F} e \mathcal{G} , con $\mathcal{G} < \mathcal{F}$, si definisce **differenza** di \mathcal{F} e \mathcal{G} la superficie \mathcal{D} tale che $\mathcal{G} + \mathcal{D} \doteq \mathcal{F}$. Notazione: $\mathcal{F} - \mathcal{G} \doteq \mathcal{D}$.

10.3 Figure equiscomponibili

In questo paragrafo immagineremo le figure geometriche costituite da parti per mezzo delle quali eseguire somme o differenze di superfici. Opereremo esclusivamente con poligoni convessi.

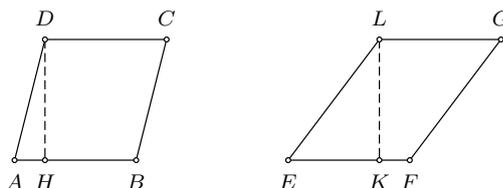
Definizione 10.3.1. Due poligoni si dicono **equiscomponibili** se possono essere divisi nello stesso numero di parti e ciascuna parte del primo è congruente ad una parte dell'altro.

In altre parole, due poligoni sono equiscomponibili se sono costituiti da parti a due a due congruenti. Chiaramente due poligoni equiscomponibili sono equiestesi, ma il viceversa non è sempre vero.

Enunceremo dei criteri che ci permetteranno di stabilire quando determinate figure risultano equiestese. Intanto precisiamo che

- dato un parallelogramma, intenderemo per base un qualunque lato e per altezza la distanza tra la base scelta e il lato parallelo;
- dato un rettangolo, intenderemo per base un qualunque lato e per altezza uno dei due lati consecutivi alla base scelta;
- in un trapezio qualunque, intenderemo per altezza la distanza tra le due basi.

Teorema 10.3.1. *Se due parallelogrammi hanno congruenti rispettivamente base e altezza, allora sono equiestesi.*

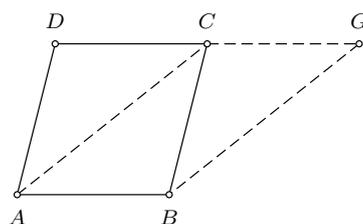


$$Hp: AB \cong EF \quad \wedge \quad DH \cong LK$$

$$Th: ABCD \doteq EFGL$$

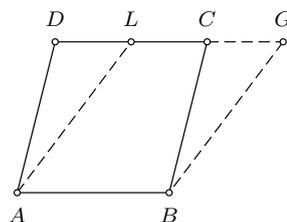
Dimostrazione. Se i due parallelogrammi sono congruenti la dimostrazione é banale. Rimangono quindi tre possibilità. Con un movimento rigido trasportiamo il secondo parallelogramma $EFGL$ in modo che abbia la base EF coincidente con la base AB del parallelogramma $ABCD$ e

1. L coincide con C e G è esterno rispetto al lato CD .



1. Il triangolo ABC è in comune figura
2. Consideriamo i triangoli ACD e BCG
3. $AB \cong CD \quad \wedge \quad AB \cong GC$ lati opposti di parallelogrammi
4. $CD \cong GC$ 3., proprietà transitiva
5. $AC \cong BG$ lati opposti di un parallelogramma
6. $\widehat{ACD} \cong \widehat{BGC}$ angoli corrispondenti formati da $AC \parallel BG$ e GD
7. $ACD \cong BCG$ 4., 5., 6., 1° c.c.
8. $ABCD \doteq EFGL$ 1., 7., poligoni equiscomponibili

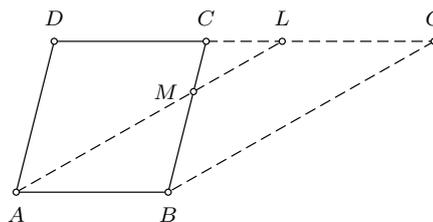
2. L è interno rispetto al lato CD , mentre G è esterno.



1. Il quadrilatero $ABCL$ è in comune figura
2. Consideriamo i triangoli ADL e BCG

- | | | |
|----|-------------------------------------|---|
| 3. | $AD \cong BC \wedge AL \cong BG$ | lati opposti di parallelogrammi |
| 4. | $\widehat{DAL} \cong \widehat{CBG}$ | angoli formati da coppie di lati paralleli
$AD \parallel BC$ e $AL \parallel BG$ |
| 5. | $ADL \cong BCG$ | 3., 4., 1° c.c. |
| 6. | $ABCD \doteq EFGH$ | 1., 5., poligoni equiscomponibili |

3. Sia G che L sono esterni, dalla stessa parte, rispetto al lato CD .



- | | | |
|----|--|---|
| 1. | Il triangolo ABM è in comune | figura |
| 2. | Consideriamo i triangoli ADL e BCG | |
| 3. | $AD \cong BC \wedge AL \cong BG$ | lati opposti di parallelogrammi |
| 4. | $\widehat{DAL} \cong \widehat{CBG}$ | angoli formati da coppie di lati paralleli
$AD \parallel BC$ e $AL \parallel BG$ |
| 5. | $ADL \cong BCG$ | 3., 4., 1° c.c. |
| 6. | $ALD \doteq BCG$ | 1., 5. |
| 7. | $ALD - CML \doteq BCG - CML$ | 6., differenza di superfici equiestese |
| 8. | $AMCD \doteq BGLM$ | 7. |
| 9. | $ABCD \doteq EFGH$ | 1., 8., somma figure equiestese |

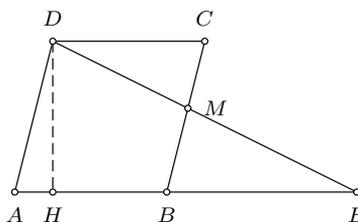
□

Poiché il rettangolo è un particolare parallelogramma, segue immediatamente

Corollario 10.3.1. *Se un parallelogramma e un rettangolo hanno congruenti rispettivamente base e altezza, allora sono equiestesi.*

Vediamo ora quando un triangolo ed un parallelogramma risultano equiestesi.

Teorema 10.3.2. *Un qualunque triangolo è equiesteso ad un parallelogramma che abbia base congruente alla metà di quella del triangolo e altezza congruente a quella del triangolo.*



H_p : $AE \cong 2AB \wedge$ altezze congruenti

Th : $ABCD \doteq AED$

Dimostrazione. Poiché è possibile sostituire il parallelogramma con uno qualunque ad esso equiesteso, possiamo considerare la seguente costruzione: con un movimento rigido trasportiamo il triangolo in modo tale le basi delle due figure abbiano lo stesso sostegno e l'altezza DH in comune, come in figura.

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | Il quadrilatero $ABMD$ è in comune | figura |
| 2. | Consideriamo i triangoli DMC e BME | |
| 3. | $AE \cong 2AB$ | H_p |
| 4. | $AB \cong CD$ | lati opposti di un parallelogramma |
| 5. | $CD \cong BE$ | 3., 4., proprietà transitiva |
| 6. | $\widehat{MBE} \cong \widehat{MCD}$ | a.a.i. formati da $AB \parallel CD$ e BC |
| 7. | $\widehat{BEM} \cong \widehat{CDM}$ | a.a.i. formati da $AB \parallel CD$ e DE |
| 8. | $DMC \cong BME$ | 5., 6., 7., 2° c.c. |
| 9. | $ABCD \doteq AED$ | 1., 8., poligoni equiscomponibili |

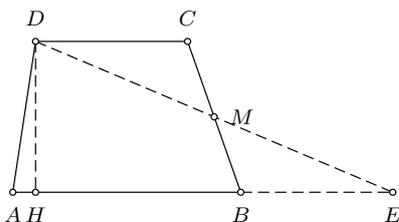
□

È conseguenza immediata il

Corollario 10.3.2. *Se due triangoli hanno congruenti rispettivamente base e altezza, allora sono equiestesi.*

Dimostrazione. In base al teorema, è possibile costruire un parallelogramma che sia equiesteso ai due triangoli, quindi si applica la proprietà transitiva della relazione di equiestensione. □

Teorema 10.3.3. *Un trapezio è equivalente ad un triangolo avente altezza congruente a quella del trapezio e base congruente alla somma delle basi del trapezio.*



H_p : $AE \cong AB + CD \wedge$ altezze congruenti

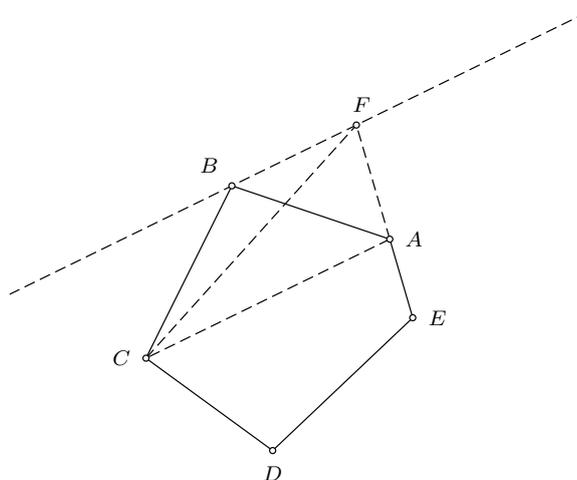
Th : $ABCD \doteq AED$

Dimostrazione. Con un movimento rigido trasportiamo il triangolo in modo tale le basi delle due figure abbiano lo stesso sostegno e l'altezza DH in comune, come in figura.

- | | |
|---|--|
| 1. Il quadrilatero $ABMD$ è in comune | figura |
| 2. Consideriamo i triangoli DMC e BME | |
| 3. $CD \cong BE$ | costruzione |
| 4. $\widehat{MBE} \cong \widehat{MCD}$ | a.a.i. formati da $AB \parallel CD$ e BC |
| 5. $\widehat{BEM} \cong \widehat{CDM}$ | a.a.i. formati da $AB \parallel CD$ e DE |
| 6. $DMC \cong BME$ | 5., 6., 7., 2° c.c. |
| 7. $ABCD \doteq AED$ | 1., 6., poligoni equiscomponibili |

□

Ci chiediamo ora come è possibile stabilire se due poligoni convessi di m ed n lati siano equiestesi. La risposta al quesito è espressa dalla seguente costruzione, la quale utilizzerà un pentagono per fissare le idee.



1. Sia dato il pentagono $ABCDE$;
2. si considerino i tre vertici consecutivi A, B, C , si tracci la diagonale AC ;
3. per il vertice di mezzo B si conduca la retta parallela alla diagonale AC ;
4. si prolunghi il lato EA , dalla parte di A , che incontra la precedente parallela nel punto F ;
5. si tracci il segmento CF , ottenendo così il quadrilatero $CDEF$ avente un lato in meno rispetto al poligono di partenza.

Teorema 10.3.4. *I poligoni $ABCDE$ e $CDEF$ della costruzione precedente sono equiestesi.*

Hp: $ABCDE$ e $CDEF$ poligoni costruzione precedente

Th: $ABCDE \doteq CDEF$

Dimostrazione. .

- | | |
|---|---|
| 1. Quadrilatero $CDEA$ in comune | figura |
| 2. Consideriamo i triangoli ABC e AFC | |
| 3. $ABC \cong AFC$ | hanno base in comune AC e altezze
distanze tra rette parallele AC e BF |
| 4. $ABCDE \cong CDEF$ | 1., 4., unione di poligoni equiestesi |

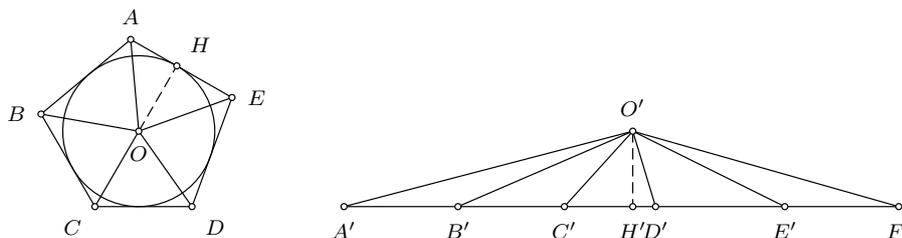
□

É possibile applicare ripetutamente la procedura precedente fino a costruire un triangolo equiesteso ad un poligono di n lati di partenza. Pertanto, per stabilire se due poligoni, rispettivamente di m ed n lati, si costruiscono i triangoli ad essi equiestesi, applicando la procedura rispettivamente $m - 3$ ed $n - 3$ volte, quindi si valuta l'equiestensione dei triangoli ottenuti. Tutto ciò è possibile in quanto la relazione di equiestensione è di equivalenza, quindi transitiva.

Vediamo, infine, un altro interessante teorema sulle figure equiestese.

Teorema 10.3.5. *Ogni poligono circoscritto ad una circonferenza è equiesteso al triangolo avente la base congruente al perimetro del poligono e l'altezza congruente al raggio della circonferenza.*

Per fissare le idee, consideriamo un poligono di cinque lati.



Dimostrazione. Nella figura precedente, $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CD \cong C'D'$, $DE \cong D'E'$, $EA \cong E'F'$ e $OH \cong O'H'$. Lo studente sviluppi nel dettaglio la dimostrazione come esercizio. □

Esercizi

1. Si dimostri che le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli due dei quali equiestesi.
2. Costruire un triangolo equiesteso al triplo di un rettangolo dato.
3. Sia $ABCD$ un parallelogramma e sia P un punto del lato CD . Si dimostri che la somma dei triangoli BPD e ACP è equiestesa alla metà del parallelogramma.
4. Si dimostri che due triangoli sono equiestesi se hanno due lati ordinatamente congruenti e gli angoli tra essi compresi supplementari.

5. Nel triangolo ABC siano M ed N rispettivamente i punti medi dei lati AC e BC . Si prolunghi il lato AB , dalla parte di B , di un segmento BD tale che $AB \cong 2BD$. Dimostrare che il quadrilatero $ADNM$ è equiesteso al triangolo ABC .
6. Siano $M; N; P$ i punti medi rispettivamente dei AB, BC, AC del triangolo ABC . Dimostrare che i quattro triangoli MNP, AMP, MBN e NCP sono equiestesi.
7. Dimostrare che una mediana del triangolo ABC lo divide in due triangoli equiestesi.
8. Si considerino tre poligoni convessi rispettivamente di quattro, cinque e sei lati. Si costruiscano, con riga e compasso, i tre triangoli equiestesi a ciascuno dei tre poligoni.
9. Descrivere la procedura per trasformare un triangolo ABC nel triangolo rettangolo equiesteso ADB di ipotenusa AB .

10.4 I teoremi di Euclide e di Pitagora

In questo paragrafo esporremo la dimostrazione del più noto teorema della matematica: il **Teorema di Pitagora**. Esso verrà dedotto come corollario del primo teorema di Euclide; infine dimostreremo il secondo teorema di Euclide applicando i due teoremi precedenti. Tali teoremi valgono esclusivamente per triangoli rettangoli.

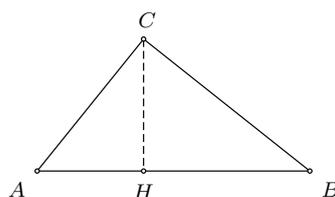
Nel seguito faremo uso delle seguenti convenzioni.

- Per quadrato costruito sul segmento AB intenderemo quel quadrato avente AB come uno dei suoi lati; scriveremo $\mathcal{Q}(AB)$ o semplicemente \mathcal{Q} se non esiste possibilità di equivoco.
- Per rettangolo di dimensioni AB e CD intenderemo quel rettangolo di base AB e altezza CD (o viceversa); scriveremo $\mathcal{R}(AB, CD)$ o semplicemente \mathcal{R} se non esiste possibilità di equivoco.
- Per parallelogramma di dimensioni AB e DH intenderemo quel parallelogramma di base AB e altezza DH ; scriveremo $\mathcal{P}(AB, DH)$ o semplicemente \mathcal{P} se non esiste possibilità di equivoco.

Dal corollario 10.3.1 si deduce che

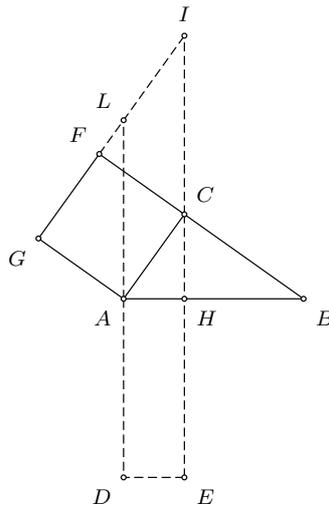
$$\mathcal{Q}(AB) \doteq \mathcal{Q}(CD) \iff AB \cong CD$$

Si osservi attentamente la seguente figura.



Essa rappresenta un triangolo ABC rettangolo in C . Il segmento CH è l'altezza relativa all'ipotenusa AB , mentre, rammentiamo, che il segmento AH è la proiezione ortogonale (da ora in poi semplicemente proiezione) del cateto AC sull'ipotenusa, e che il segmento BH è la proiezione del cateto BC sull'ipotenusa.

Teorema 10.4.1 (Primo teorema di Euclide). *In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su ciascun cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa stessa.*



Hp: ABC triangolo rettangolo in C

Th: $\mathcal{Q}(AC) \doteq \mathcal{R}(AB, AH)$

Dimostrazione. Costruzione: si tracci la retta sostegno dell'altezza relativa all'ipotenusa CH , quindi si costruisca la retta parallela a CH passante per A sulla quale si consideri il segmento AD congruente all'ipotenusa AB , individuando il rettangolo $\mathcal{R} = \mathcal{R}(AH, AD)$; si costruisca il quadrato $\mathcal{Q} = ACFG$ e si prolunghi il lato GF , dalla parte di F , in modo che intersechi le rette AD e CH rispettivamente in L e I , individuando il parallelogramma $\mathcal{P} = ACIL$ (infatti $AL \parallel CI$ e $AC \parallel LI$).

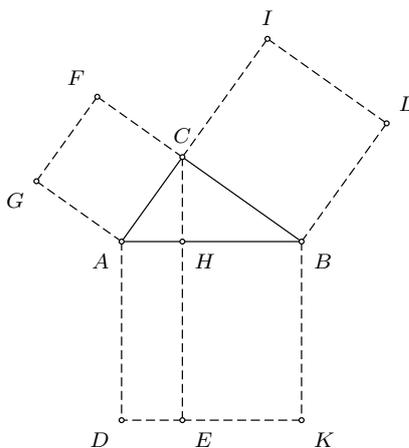
- | | | |
|-----|--|--|
| 1. | Consideriamo i triangoli ABC e ALG rettangoli rispettivamente in C e G | |
| 2. | $AD \parallel CH \wedge CH \perp AB$ | costruzione |
| 3. | $\widehat{GAC} \cong \widehat{LAB} \cong \frac{\pi}{2}$ | 2. |
| 4. | $\widehat{GAL} \cong \widehat{CAB}$ | complementari stesso angolo \widehat{LAC} |
| 5. | $AC \cong AG$ | costruzione |
| 6. | $ABC \cong ALG$ | 1., 4., 5., criterio congruenza triangoli rettangoli |
| 7. | $AB \cong AL$ | 6., si oppongono ad angoli congruenti |
| 8. | $AB \cong AD$ | costruzione |
| 9. | $AL \cong AD$ | 7., 8., proprietà transitiva |
| 10. | $\mathcal{R} \doteq \mathcal{P}$ | hanno basi AD e AL congruenti e altezze distanze tra rette parallele AD e CH |

- 11. $\mathcal{Q} \doteq \mathcal{P}$ hanno base in comune AC e altezze
distanze tra rette parallele AC e GF
- 12. $\mathcal{Q} \doteq \mathcal{R}$ 10., 11., proprietà transitiva equiestensione

La dimostrazione per l'altro cateto è del tutto simile, basta effettuare la costruzione dalla parte opposta rispetto alla retta CH .

□

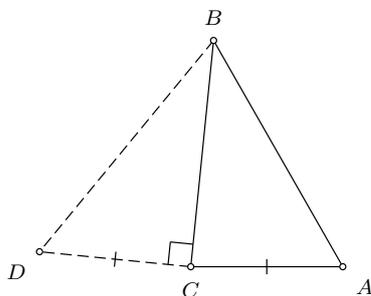
Corollario 10.4.1 (Teorema di Pitagora). *In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*



Dimostrazione. Basta osservare che l'unione dei rettangoli $ADEH$ e $EKBH$ è il quadrato di lato l'ipotenusa AB , quindi si applica il primo teorema di Euclide. □

Vale anche il viceversa del teorema di Pitagora.

Teorema 10.4.2 (Inverso del teorema di Pitagora). *Sia ABC un triangolo tale che $AB > AC$ e $AB > BC$. Se $\mathcal{Q}(AC) + \mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{Q}(AB)$, allora il triangolo ABC è rettangolo in C .*



$$Hp: \mathcal{Q}(AC) + \mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{Q}(AB)$$

Th: ABC triangolo rettangolo in C

Dimostrazione. Costruzione: si costruisca, perpendicolarmente a BC , il segmento $CD \cong AC$, in modo tale che il punto D appartenga al semipiano opposto di A rispetto alla retta BC ; si determina così il triangolo BCD , rettangolo in C .

1.	$\mathcal{Q}(AC) + \mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{Q}(AB)$	Hp
2.	BCD triangolo rettangolo in C	costruzione
3.	$AC \cong CD$	costruzione
4.	$\mathcal{Q}(AC) \doteq \mathcal{Q}(CD)$	3.
5.	$\mathcal{Q}(BC) + \mathcal{Q}(CD) \doteq \mathcal{Q}(BD)$	2., teorema di Pitagora
6.	$\mathcal{Q}(BD) \doteq \mathcal{Q}(AB)$	1., 4., 5., proprietà transitiva equiestensione
7.	$BD \cong AB$	6.
8.	Consideriamo i triangoli ABC e BCD	
9.	BC in comune	figura
10.	$ABC \cong BCD$	3., 7., 9., 3° c.c.
11.	$\widehat{ACB} \cong \widehat{BCD}$	10., si oppongono a lati congruenti
12.	$\widehat{BCD} \cong \frac{\pi}{2}$	2.
13.	$\widehat{ACB} \cong \frac{\pi}{2}$	11., 12., proprietà transitiva
14.	ABC triangolo rettangolo in C	13.

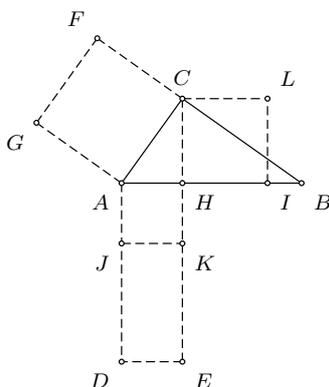
□

Se indichiamo con $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(AB)$, $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}(AC)$ e $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q}(BC)$, le tre relazioni

$$\mathcal{Q} \doteq \mathcal{Q}' + \mathcal{Q}'' \qquad \mathcal{Q}' \doteq \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'' \qquad \mathcal{Q}'' \doteq \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'$$

si otterranno applicando il teorema di Pitagora che, ribadiamo, si applica esclusivamente ai triangoli rettangoli.

Teorema 10.4.3 (Secondo teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa.*



Hp: ABC triangolo rettangolo in C

Th: $\mathcal{Q}(CH) \doteq \mathcal{R}(AH, HB)$

Dimostrazione. Costruzione: con riferimento alla figura, si costruiscono i quadrati $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(CH)$, $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}(AH)$, $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q}(AC)$ e il rettangolo $JDEK \equiv \mathcal{R}(AH, BH)$.

- | | |
|--|--|
| 1. $\mathcal{Q} \doteq \mathcal{Q}'' - \mathcal{Q}'$ | teorema di Pitagora applicato al triangolo AHC |
| 2. $\mathcal{Q}'' \doteq \mathcal{Q}' + \mathcal{R}$ | costruzione, primo teorema di Euclide applicato al triangolo ABC |
| 3. $\mathcal{R} \doteq \mathcal{Q}'' - \mathcal{Q}'$ | 2. |
| 4. $\mathcal{Q} \doteq \mathcal{R}$ | 1., 3., proprietà transitiva equiestensione |

□

Anche per i due teoremi di Euclide sussiste il viceversa.

Teorema 10.4.4 (Inverso del primo teorema di Euclide). *Sia ABC un triangolo tale che $AB > AC$ e $AB > BC$, sia CH l'altezza relativa al lato maggiore AB , siano AH e BH le proiezioni rispettivamente di AC e BC su AB . Se $\mathcal{Q}(AC) \doteq \mathcal{R}(AB, AH)$ e $\mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{R}(AB, BH)$, allora il triangolo ABC è rettangolo in C .*

Hp: $\mathcal{Q}(AC) \doteq \mathcal{R}(AB, AH) \quad \wedge \quad \mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{R}(AB, BH)$

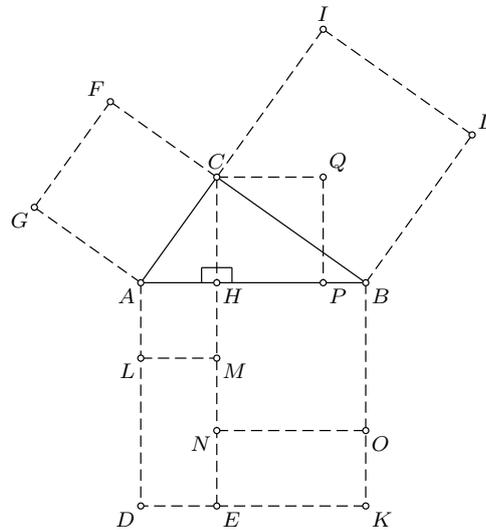
Th: ABC triangolo rettangolo in C

Dimostrazione. Per la dimostrazione useremo come riferimento la figura del teorema di Pitagora.

- | | |
|---|---|
| 1. $\mathcal{Q}(AC) \doteq \mathcal{R}(AB, AH)$ | Hp |
| 2. $\mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{R}(AB, BH)$ | Hp |
| 3. $\mathcal{Q}(AC) + \mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{R}(AB, AH) + \mathcal{R}(AB, BH)$ | 1., 2., somme di figure equiestese |
| 4. $AB \cong AH + BH$ | Hp |
| 5. $\mathcal{Q}(AB) \doteq \mathcal{R}(AB, AH) + \mathcal{R}(AB, BH)$ | 4. |
| 6. $\mathcal{Q}(AC) + \mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{Q}(AB)$ | 3., 4., 5., proprietà transitiva equiestensione |
| 7. ABC triangolo rettangolo in C | 5., inverso del teorema di Pitagora |

□

Teorema 10.4.5 (Inverso del secondo teorema di Euclide). *Sia ABC un triangolo tale che $AB > AC$ e $AB > BC$, sia CH l'altezza relativa al lato maggiore AB , siano AH e BH le proiezioni rispettivamente di AC e BC su AB . Se $\mathcal{Q}(CH) \doteq \mathcal{R}(AH, BH)$, allora il triangolo ABC è rettangolo in C .*



Hp: $\mathcal{Q}(CH) \doteq \mathcal{R}(AH, BH)$

Th: ABC triangolo rettangolo in C

Dimostrazione. Nella figura $AH \cong AL$, $BH \cong HN$, $AB \cong AD$, ragion per cui $LM \cong NE$, $LD \cong EK$.

- | | | |
|----|--|---|
| 1. | $\mathcal{Q}(CH) \doteq \mathcal{R}(AH, BH)$ | Hp |
| 2. | Consideriamo il triangolo AHC
rettangolo in H | |
| 3. | $\mathcal{Q}(AC) \doteq \mathcal{Q}(CH) + \mathcal{Q}(AH)$ | teorema di Pitagora |
| 4. | Consideriamo il triangolo BHC
rettangolo in H | |
| 5. | $\mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{Q}(CH) + \mathcal{Q}(BH)$ | teorema di Pitagora |
| 6. | $AL \cong NE \quad \wedge \quad LD \cong EK$ | costruzione |
| 7. | $\mathcal{R}(LM, LD) \doteq \mathcal{R}(EK, NE)$ | 6., rettangoli con dimensioni congruenti |
| 8. | $\mathcal{Q}(AC) \doteq \mathcal{R}(AB, AH)$
$\mathcal{Q}(BC) \doteq \mathcal{R}(AB, BH)$ | \wedge 1., 3., 5., 7, unione di figure equiestese |
| 9. | ABC triangolo rettangolo in C | 8., inverso primo teorema di Euclide |

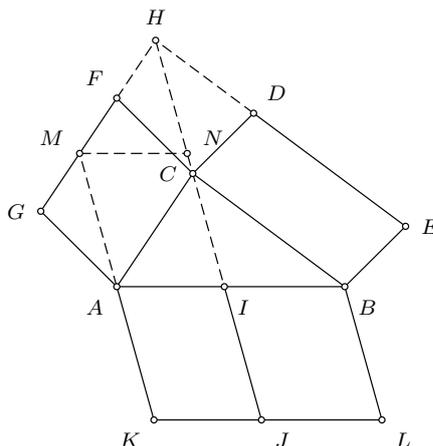
□

Esercizi

1. Da un punto C di una circonferenza di centro O si conduca la perpendicolare CH al diametro AB . Si dimostri che il rettangolo di dimensioni AB e AH è equiesteso al quadrato costruito su AC .
2. Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC . Dal punto medio M del cateto AC si conduca la perpendicolare MH all'ipotenusa BC . Dimostrare che il quadrato costruito su AB è equiesteso alla differenza dei quadrati costruiti su BH e HC .
3. Sia P un punto interno del rettangolo $ABCD$. Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti su AP e PC è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su BP e PD .
4. Sia CD una corda perpendicolare in H al diametro AB di una circonferenza di centro O . Sulle tangenti alla circonferenza in A e in B si scelgano, nel semipiano individuato da AB che non contiene C , rispettivamente i punti E ed F tali che $AE \cong BF \cong AH$. Dimostrare che il quadrilatero $AEFB$ è equiesteso al quadrato costruito sulla corda AC .
5. Si disegnino un rettangolo $ABCD$ e la sua diagonale AC , quindi la perpendicolare BH ad AC . Si dimostri che il rettangolo aventi dimensioni AH ed AC è equiesteso al quadrato costruito su AB .
6. Si dimostri che un quadrato è equiesteso ad un rettangolo le cui dimensioni sono congruenti alla diagonale e alla metà della diagonale del quadrato.
7. Disegnare il triangolo ABC rettangolo in A , quindi prolungare il cateto AB , dalla parte di B , di un segmento BD , quindi congiungere D con C . Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti su AB e CD è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su AD e BC .
8. Disegnare un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC , e sia P un punto qualunque interno ad AB . Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti su AB e CP è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su AP e BC .
9. Costruire un triangolo rettangolo equivalente alla metà di un triangolo ABC dato.
10. Siano $ABCD$ un rettangolo e AE un triangolo costruito esternamente al rettangolo. Si dimostri che la somma dei quadrati costruiti su CE e AE è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su BE e DE .
11. Sia $ABCD$ un quadrilatero con le diagonali perpendicolari. Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti su AB e CD è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su AD e BC .
12. Disegnare un quadrato $ABCD$ ed un suo punto interno E . Dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze di E dai lati dei quadrati è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su AE , BE , CE e DE .
13. Considerare il quadrato $ABCD$ e la sua diagonale AC . Dimostrare che il quadrato costruito su AC è equiesteso al doppio del quadrato $ABCD$.
14. Sia $ABCD$ un trapezio isoscele inscritto in una circonferenza. Dimostrare che il quadrato costruito sul raggio della circonferenza è equiesteso al rettangolo che ha per dimensioni i segmenti congruenti alla metà delle basi del trapezio.
15. Si disegnino un rettangolo $ABCD$ e la sua diagonale AC , quindi la perpendicolare BH ad AC . Si dimostri che il quadrato costruito su BH è equiesteso al rettangolo avente dimensioni AH e CH .

10.5 Due teoremi di Pappo

Nel IV secolo d.C. Pappo generalizzò il primo teorema di Euclide e il teorema di Pitagora nel modo seguente. Consideriamo un qualunque triangolo ABC e sui lati AC e BC costruiamo, rispettivamente, i parallelogrammi $ACFG$ e $CBED$, in modo arbitrario; prolunghiamo i lati GF ed ED fino ad incontrarsi nel punto H ; la semiretta HC incontra il lato AB in I e su di essa costruiamo il segmento $IJ \cong HC$; costruiamo su AB il parallelogramma $AKLB$, con KL parallelo ad AB e AK parallelo a IJ .



Teorema 10.5.1. *Con riferimento alla costruzione e alla figura precedenti, risulta che $ACFG \doteq AKJI$ e $CBED \doteq IJLB$.*

Dimostrazione. Costruiamo il parallelogramma $AINM \cong AKJI$, ragion per cui, a fortiori, $AINM \doteq AKJI$. Consideriamo i parallelogrammi $ACHM$ e $ACFG$; essi hanno la base AC in comune e giacciono tra le rette parallele AC e GF , per cui sono equiestesi. Consideriamo, ora, i parallelogrammi $ACHM$ e $AINM$; essi hanno la base AM in comune e giacciono tra le rette parallele AM e IN , per cui anch'essi sono equiestesi. Risulta pertanto

$$(AKIJ \doteq AINM \wedge AINM \doteq ACHM \wedge ACHM \doteq ACFG) \implies AKIJ \doteq ACFG$$

per la proprietà transitiva della relazione di equiestensione tra figure. Si osservi che, poiché $ACHM$ è un parallelogramma per costruzione, il punto M cade sempre sulla retta GF .

La seconda parte della dimostrazione è un utile esercizio per ogni serio studente. □

Corollario 10.5.1. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, risulta che*

$$AKLM \doteq ACFG + BEDC$$

Dimostrazione. Banale. □

Capitolo 11

Misura di grandezze geometriche

In questo capitolo introdurremo la misura delle grandezze geometriche, cioè i concetti di *lunghezza di un segmento*, *area di una superficie* e *ampiezza di un angolo*. Assoceremo, quindi, ad ogni lunghezza, area e ampiezza un determinato numero reale non negativo, che connoterà le grandezze dal punto di vista quantitativo.

11.1 Lunghezza di segmenti

Sia S l'insieme dei segmenti del piano. Su S definiamo la relazione binaria *congruenza tra segmenti*, che, come sappiamo, è una relazione di equivalenza.

Definizione 11.1.1. Consideriamo la relazione di equivalenza congruenza tra segmenti. L'insieme di tutti i segmenti congruenti tra loro determina una **classe di equivalenza**. La **lunghezza di un segmento** è la classe di equivalenza alla quale il segmento appartiene.

Assoceremo ad ogni classe di equivalenza (lunghezza) un numero reale non negativo, in sintonia con i postulati di congruenza per i segmenti e alle conseguenti proprietà e criteri di confronto tra segmenti. Ricordiamo che per ciascuna classe di equivalenza di segmenti congruenti possiamo scegliere un rappresentante, che può essere scelto in modo arbitrario quindi con le caratteristiche più convenienti.

Ad ogni segmento AB corrisponderà la lunghezza \overline{AB} , la quale, ovviamente, sarà comune a tutti i segmenti appartenenti alla stessa classe di AB . Indicheremo ancora con \overline{AB} il numero reale che è associato alla lunghezza del segmento AB . Al segmento nullo assoceremo il numero reale 0. Se $AB < CD$, allora i numeri reali che esprimono le lunghezze di AB e CD saranno anch'essi nella relazione $\overline{AB} < \overline{CD}$.

Definizione 11.1.2. Siano AB e CD due segmenti e \overline{AB} e \overline{CD} le loro lunghezze. La **somma delle lunghezze** \overline{AB} e \overline{CD} , notazione $\overline{AB} + \overline{CD}$, è la classe di equivalenza \overline{EF} ottenuta addizionando un qualunque segmento della classe di AB con un qualunque segmento della classe di CD . Se $\overline{AB} \geq \overline{CD}$, la **differenza** $\overline{EF} = \overline{AB} - \overline{CD}$ è la classe di equivalenza tale che $\overline{EF} + \overline{CD} = \overline{AB}$.

La somma di lunghezze gode delle proprietà associativa e commutativa.

11.2 Ampiezza di angoli

Sia A l'insieme degli angoli del piano. Su A definiamo la relazione binaria *congruenza tra angoli*, che, come sappiamo, è una relazione di equivalenza.

Definizione 11.2.1. Consideriamo la relazione di equivalenza congruenza tra angoli. L'insieme di tutti gli angoli congruenti tra loro determina una **classe di equivalenza**. L'**ampiezza di un angolo** è la classe di equivalenza alla quale l'angolo appartiene.

Assoceremo ad ogni classe di equivalenza (ampiezza) un numero reale non negativo, in sintonia con i postulati di congruenza per gli angoli e alle conseguenti proprietà e criteri di confronto tra angoli. Ricordiamo che per ciascuna classe di equivalenza di angoli congruenti possiamo scegliere un rappresentante, che può essere scelto in modo arbitrario quindi con le caratteristiche più convenienti. In questo paragrafo, per alleggerire la notazione, denoteremo un qualunque angolo di vertice con \hat{A} , supponendo non possa sussistere alcuna confusione sulla determinazione dei suoi lati.

Ad ogni angolo \hat{A} corrisponderà l'ampiezza α , la quale, ovviamente, sarà comune a tutti gli angoli appartenenti alla stessa classe di \hat{A} . Indicheremo ancora con α il numero reale che è associato all'ampiezza dell'angolo \hat{A} . All'angolo nullo assoceremo il numero reale 0. Se $\hat{A} < \hat{B}$, allora i numeri reali α e β che esprimono le ampiezze di \hat{A} e \hat{B} saranno anch'essi nella relazione $\alpha < \beta$.

Definizione 11.2.2. Siano \hat{A} e \hat{B} due angoli e α e β le loro ampiezze. La **somma delle ampiezze** α e β , notazione $\alpha + \beta$, è la classe di equivalenza γ ottenuta addizionando un qualunque angolo della classe di \hat{A} con un qualunque angolo della classe di \hat{B} . Se $\alpha \geq \beta$, la **differenza** $\gamma = \alpha - \beta$ è la classe di equivalenza tale che $\gamma + \beta = \alpha$.

La somma di ampiezze gode delle proprietà associativa e commutativa.

11.3 Area di superfici

Sia E l'insieme delle superfici del piano. Su E definiamo la relazione binaria di *equiestensione tra superfici*, che, come sappiamo, è una relazione di equivalenza.

Definizione 11.3.1. Consideriamo la relazione di equivalenza equiestensione tra superfici. L'insieme di tutte le superfici equiestese tra loro determina una **classe di equivalenza**. L'**area della superficie** è la classe di equivalenza alla quale la superficie appartiene.

Assoceremo ad ogni classe di equivalenza (area) un numero reale non negativo, in sintonia con le proprietà della relazione di equiestensione già discusse nel capitolo precedente. Ricordiamo che per ciascuna classe di equivalenza di superfici equiestese possiamo scegliere un rappresentante, che può essere scelto in modo arbitrario quindi con le caratteristiche più convenienti.

Ad ogni superficie S corrisponderà l'area $A(S)$, la quale, ovviamente, sarà comune a tutte le superfici appartenenti alla stessa classe di S . Indicheremo ancora con $A(S)$ il numero reale che è associato all'area della superficie S . Alla superficie nulla (ad esempio un segmento) assoceremo il numero reale 0. Se $S < S'$, allora i numeri reali che esprimono le aree di S e S' saranno anch'essi nella relazione $A(S) < A(S')$.

Definizione 11.3.2. Siano S e S' due superfici e $A(S)$ e $A(S')$ le loro aree. La **somma delle aree** $A(S)$ e $A(S')$, notazione $A(S) + A(S')$, è la classe di equivalenza $A(S'')$ ottenuta addizionando una qualunque superficie della classe di S con una qualunque superficie della classe di S' . Se $A(S) \geq A(S')$, la **differenza** $A(D) = A(S) - A(S')$ è la classe di equivalenza tale che $A(D) + A(S') = A(S)$.

La somma di aree gode delle proprietà associativa e commutativa.

11.4 Grandezze geometriche omogenee

I concetti introdotti nei paragrafi precedenti ci consentiranno di effettuare calcoli con le proprietà quantitative delle figure geometriche. Tali calcoli, però, saranno possibili solo tra grandezze geometriche dello stesso tipo nel senso espresso dalla seguente definizione.

Definizione 11.4.1. Una **classe di grandezze geometriche omogenee** è un insieme di figure geometriche in cui è possibile eseguire il confronto e l'addizione. L'addizione deve risultare un'operazione **interna** per l'insieme considerato (cioè, il risultato dell'addizione di due elementi dell'insieme è anch'esso un elemento di tale insieme); essa gode delle proprietà associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro (vale a dire la grandezza nulla).

Esempi di classi grandezze omogenee sono

- l'insieme delle lunghezze dei segmenti;
- l'insieme delle ampiezze degli angoli;
- l'insieme delle aree delle superfici.

Evidentemente non è possibile sommare e confrontare grandezze geometriche che non siano omogenee. È intuitivo che non ha senso sommare una lunghezza con un'area, come non ha senso affermare che un segmento è più grande di un angolo.

Definizione 11.4.2. Siano A e B due grandezze geometriche omogenee. La grandezza B si dice **multipla** della grandezza A **secondo il numero** $m \in \mathbb{N}$ se

- B è somma di m grandezze appartenenti alla stessa classe di equivalenza di A se $m > 1$;
- B appartiene alla stessa classe di equivalenza di A se $m = 1$;
- B è la grandezza nulla se $m = 0$.

Se una grandezza B è multipla di una grandezza A secondo $m \neq 0$, allora si dice anche che A è **sottomultipla** di B **secondo** m .

Se B è multipla di A secondo m , allora si scriverà $B = mA$; se $m \neq 0$, allora la scrittura $A = \frac{1}{m}B$ esprimerà il fatto che A è sottomultipla di B .

Definizione 11.4.3. Due grandezze omogenee si dicono **commensurabili** se esiste una grandezza che sia sottomultipla comune per entrambe. Date due grandezze commensurabili A e U la **misura di A rispetto a U** è il numero $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$ (dove \mathbb{Q}_+ è l'insieme dei numeri razionali non negativi) tale che $A = \frac{m}{n}U$.

Definizione 11.4.4. Due grandezze omogenee si dicono **incommensurabili** se non esiste una grandezza che sia sottomultipla comune per entrambe. Date due grandezze incommensurabili A e U , la **misura di A rispetto a U** è un numero irrazionale.

Definizione 11.4.5. Siano A e B due grandezze omogenee con B non nulla. Si definisce **rapporto di A e B** la misura di A rispetto a B . Notazione: $\frac{A}{B}$.

Vale la seguente proprietà, della quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 11.4.1. Siano A e B due grandezze omogenee, con B diversa dalla grandezza nulla, e siano \bar{A} e \bar{B} le loro rispettive misure rispetto ad una arbitraria unità di misura. Allora

$$\frac{A}{B} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}}$$

Per stabilire se due grandezze omogenee sono commensurabili basta considerare il loro rapporto; se esso è un numero razionale non negativo allora le due grandezze sono commensurabili, incommensurabili in caso contrario. La diagonale ed il lato di un quadrato sono grandezze incommensurabili in quanto il loro rapporto è $\sqrt{2}$ che è un numero irrazionale.

Il fatto che si possa calcolare la misura di una grandezza rispetto ad un'altra ci suggerisce l'idea di scegliere una volta per tutte una conveniente unità di misura. Ad esempio, per i segmenti si sceglie la classe di equivalenza corrispondente al centimetro o al metro, per gli angoli la classe di equivalenza corrispondente al grado sessagesimale, per le superfici la classe di equivalenza corrispondente al centimetro quadrato o al metro quadrato. Si rammenti, comunque, che queste scelte sono convenzionali.

Per le grandezze omogenee enunciamo l'ulteriore postulato seguente.

Postulato 2 (Postulato di continuità). *Dato un insieme di grandezze omogenee, se fissiamo un'unità di misura U e scegliamo un arbitrario numero reale $r \geq 0$, allora esiste sempre la grandezza la cui misura rispetto a U è r .*

Questo postulato garantisce la possibilità di poter esprimere la misura di una grandezza rispetto ad una unità di misura, qualunque sia la scelta di tale unità di misura.

11.5 Grandezze direttamente proporzionali

Dall'algebra ricordiamo che, dati i numeri reali a, b, c, d , con b e d non nulli, si definisce proporzione l'uguaglianza tra i rapporti $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, vale a dire

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

che può anche scriversi come

$$a : b = c : d$$

e, in entrambi i casi, si legge a sta a b come c sta a d .

Possiamo dare ora la definizione di proporzione fra grandezze.

Definizione 11.5.1. Siano A e B due grandezze fra loro omogenee con B non nulla, C e D altre due grandezze fra loro omogenee con D non nulla. Si definisce **proporzione** fra le grandezze date l'uguaglianza tra i rapporti $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$.

Come per le proporzioni numeriche useremo le due scritte equivalenti

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \qquad A : B = C : D$$

e leggeremo ' A sta a B come C sta a D '. Osserviamo, inoltre, che non è necessario che tutte e quattro le grandezze siano omogenee, basta solo che lo siano quelle che formano ciascun rapporto. Le grandezze A e D si chiamano **termini estremi**, le grandezze B e C **termini medi**.

Definizione 11.5.2. Siano A, B, C tre grandezze omogenee non nulle. Una proporzione si dice **continua** se ha i termini medi uguali, cioè è del tipo $A : B = B : C$. La grandezza B è detta **medio proporzionale** fra le grandezze A e C .

Ricordando il teorema 11.4.1, possiamo scrivere la proporzione tra grandezze sostituendo alle grandezze stesse le loro misure. Pertanto, possiamo enunciare le proprietà delle proporzioni fra grandezze, omettendo anche in questo caso la dimostrazione, la quale è la stessa delle proporzioni numeriche.

Teorema 11.5.1. *Sia $A : B = C : D$ una proporzione fra grandezze. L'uguaglianza data sussiste se, e solo se*

1. $A \cdot D = B \cdot C$
2. $A : C = B : D$ (solo se le quattro grandezze sono omogenee fra loro) **proprietà del permutate**
3. $(A + B) : B = (C + D) : D$ **proprietà del comporre**
4. $(A - B) : B = (C - D) : D$ (con $A > B$ e $C > D$) **proprietà dello scomporre**
5. $B : A = D : C$ (solo se tutte e quattro le grandezze non sono nulle) **proprietà dell'invertire**

Se A e B sono due grandezze omogenee non nulle e C è una terza grandezza non nulla, allora esiste una quarta grandezza non nulla e omogenea con C che con le prime tre grandezze forma la proporzione $A : B = C : D$.

Siano ora \mathcal{F} e \mathcal{G} due classi ciascuna costituita da grandezze omogenee. Supponiamo che ad ogni grandezza $A \in \mathcal{F}$ si possa far corrispondere **una ed una sola** grandezza $A' \in \mathcal{G}$ e viceversa, cioè ad A corrisponde solo A' e ad A' corrisponde solo A .

Definizione 11.5.3. Gli insiemi di grandezze omogenee \mathcal{F} e \mathcal{G} si dicono **insiemi di grandezze direttamente proporzionali** se considerate le grandezze $A, B \in \mathcal{F}$, con B non nulla, e le corrispondenti grandezze $A', B' \in \mathcal{G}$, con B' non nulla, sussiste tra esse la proporzione $A : B = A' : B'$.

Per le grandezze direttamente proporzionali si enuncia il seguente criterio.

Teorema 11.5.2 (Criterio di proporzionalità diretta). *Le classi \mathcal{F} e \mathcal{G} sono insiemi di grandezze direttamente proporzionali se, e solo se,*

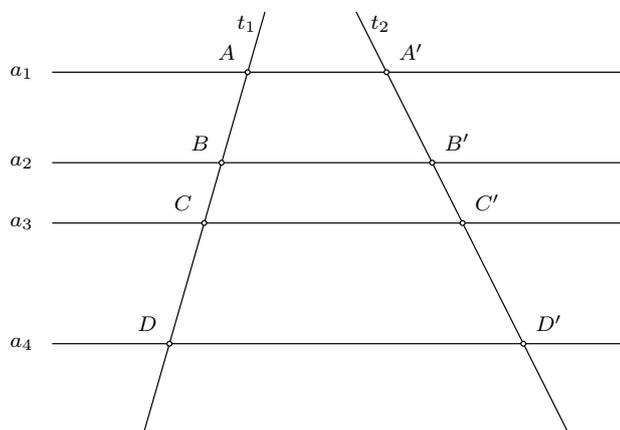
1. considerate $A, B \in \mathcal{F}$ e le corrispondenti $A', B' \in \mathcal{G}$, se $A = B$, allora $A' = B'$;
2. considerate $A, B \in \mathcal{F}$ e le corrispondenti $A', B' \in \mathcal{G}$, a $A + B$ corrisponde $A' + B'$.

La dimostrazione del teorema è omessa.

11.6 Il teorema di Talete

Nel paragrafo precedente abbiamo definito le classi di grandezze direttamente proporzionali \mathcal{F} e \mathcal{G} , supponendo, in generale, che le grandezze della prima classe non siano necessariamente omogenee a quelle della seconda, quindi abbiamo enunciato un criterio generale di proporzionalità diretta. Ora applicheremo il criterio supponendo che sia \mathcal{F} che \mathcal{G} siano classi di segmenti.

Consideriamo un fascio improprio di rette parallele $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ tagliate da due rette trasversali t_1 e t_2 , come illustrato dalla figura che segue in cui compaiono solo quattro rette del fascio improprio.



La trasversale t_1 interseca le rette $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$ rispettivamente in $\{A, B, C, D, \dots\}$, mentre la trasversale t_2 le interseca in $\{A', B', C', D', \dots\}$. Consideriamo ora la seguente corrispondenza uno a uno tra punti

$$\begin{aligned} A &\longleftrightarrow A' \\ B &\longleftrightarrow B' \\ C &\longleftrightarrow C' \end{aligned}$$

$$D \longleftrightarrow D'$$

...

Essa determina una corrispondenza uno a uno tra i segmenti staccati sul fascio dalla trasversale t_1 e quelli staccati dalla trasversale t_2

$$AB \longleftrightarrow A'B'$$

$$BD \longleftrightarrow B'D'$$

$$AC \longleftrightarrow A'C'$$

$$AD \longleftrightarrow A'D'$$

...

Indichiamo con \mathcal{F} l'insieme dei segmenti staccati da t_1 sul fascio, con \mathcal{G} quello dei segmenti staccati da t_2 . Dimosteremo ora che \mathcal{F} e \mathcal{G} sono insiemi di grandezze direttamente proporzionali.

Teorema 11.6.1 (Teorema di Talete). *Un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali individuano due insiemi di segmenti direttamente proporzionali.*

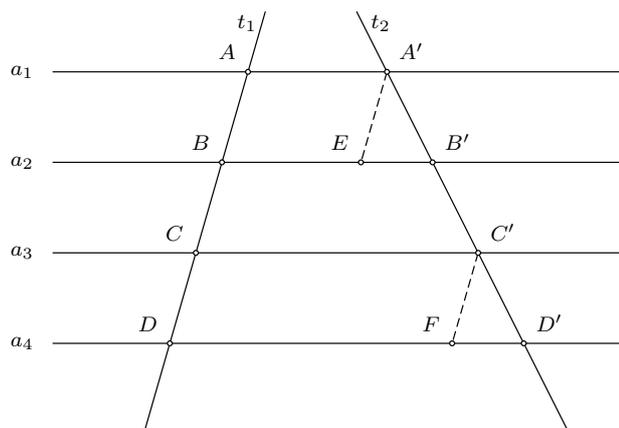
Diciamo subito che vale anche il viceversa della proposizione enunciata, quindi il teorema di Talete esprime una condizione necessaria e sufficiente. Noi dimosteremo solo la proposizione enunciata. La dimostrazione sarà costituita da due parti.

$$Hp: a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel \dots$$

$$Th: AB : BC = A'B' : B'C'$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione utilizzeremo il criterio di proporzionalità diretta. Siano \mathcal{F} e \mathcal{G} gli insiemi di segmenti staccati dalle trasversali sulle rette del fascio.

1. Nella prima parte della dimostrazione proviamo che a segmenti congruenti di \mathcal{F} corrispondono segmenti congruenti di \mathcal{G} . Se $t_1 \parallel t_2$ la dimostrazione è banale, pertanto supponiamo che le trasversali non siano parallele.



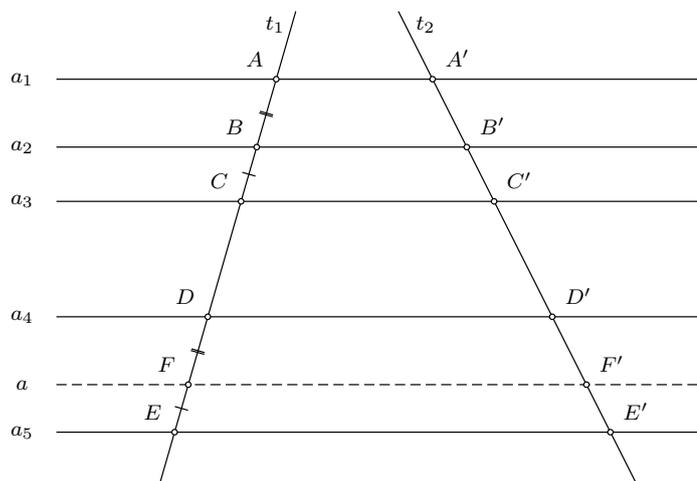
Hp: $a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel \dots \wedge AB \cong CD$

Th: $A'B' \cong C'D'$

Costruzione: conduciamo per A' la parallela a t_1 che incontra a_2 in E , per C' la parallela a t_1 che incontra a_4 in F .

- | | |
|--|---|
| 1. $a_1 \parallel a_2 \wedge AB \parallel A'E$ | Hp e costruzione |
| 2. $ABEA'$ parallelogramma | 1., definizione |
| 3. $AB \cong A'E$ | 2., lati opposti di un parallelogramma |
| 4. $a_3 \parallel a_4 \wedge CD \parallel C'F$ | Hp e costruzione |
| 5. $CDFC'$ parallelogramma | 4., definizione |
| 6. $CD \cong C'F$ | 5., lati opposti di un parallelogramma |
| 7. $AB \cong CD$ | Hp |
| 8. $A'E \cong C'F$ | 3., 6., 7., proprietà transitiva |
| 9. Consideriamo i triangoli $A'EB'$ e $C'FD'$ | |
| 10. $A'E \parallel C'F$ | parallele alla stessa retta t_1 |
| 11. $\widehat{B'A'E} \cong \widehat{D'C'F}$ | a.c. formati da $A'E \parallel C'F$ e t_2 |
| 12. $\widehat{EB'A'} \cong \widehat{FD'C'}$ | a.c. formati da $a_2 \parallel a_4$ e t_2 |
| 13. $A'EB' \cong C'FD'$ | 8., 11., 12., 2° c.c.g. |
| 14. $A'B' \cong C'D'$ | 13., si oppongono ad angoli congruenti |

2. Nella seconda parte dimostreremo che a somme di segmenti su t_1 corrispondono somme di segmenti su t_2 .



Hp: $a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel \dots \wedge DE \cong AB + BC$

Th: $D'E' \cong A'B + C'D'$

Costruzione: Con riferimento alla figura, si consideri la retta a del fascio, che interseca t_1 in F e t_2 in F' , tale che $AB \cong DF$ e $BC \cong FE$ in modo che $AB + BC \cong DE$.

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. $AB \cong DF \wedge BC \cong FE$ | costruzione |
| 2. $A'B' \cong D'F' \wedge B'C' \cong F'E'$ | prima parte dimostrazione |
| 3. $A'B' + B'C'D' \cong D'F' + F'E'$ | 2., somma di segmenti congruenti |
| 4. $D'E' \cong A'B' + B'C'$ | 3. |

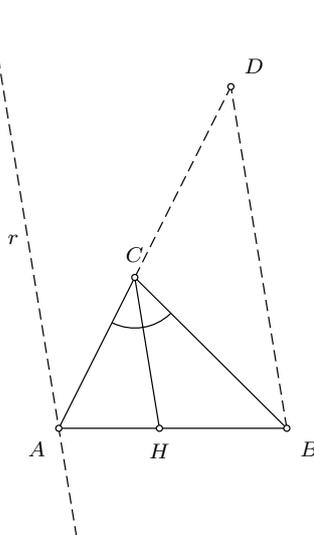
□

Vediamo ora un'applicazione del teorema di Talete.

Teorema 11.6.2 (Teorema della bisettrice). *In ogni triangolo, la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.*

$$Hp: \widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$$

$$Th: AH : HB = AC : BC$$



Dimostrazione. Costruzione: per il punto B si conduca la retta parallela alla bisettrice CH , quindi si prolunghi il lato AC , dalla parte di C fino ad incontrare la precedente retta in D ; infine si conduca da A la retta r parallela alla bisettrice. In questo modo otteniamo tre rette parallele CH , BD e r tagliate dalle due trasversali AD e AB .

- | | |
|--|--|
| 1. $\widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$ | Hp |
| 2. Consideriamo il triangolo BCD | |
| 3. $\widehat{ACH} \cong \widehat{CDB}$ | a.c. formati da $CH \parallel BD$ tagliate da AD |
| 4. $\widehat{BCH} \cong \widehat{CDB}$ | a.a.i. formati da $CH \parallel BD$ tagliate da BC |

- | | | |
|-----|---|--|
| 5. | $C\widehat{D}B \cong C\widehat{B}D$ | 1., 4., 5., proprietà transitiva |
| 6. | BCD triangolo isoscele di base BD | 5., teorema inverso triangoli isosceli |
| 7. | $BC \cong CD$ | 6., def. triangolo isoscele |
| 8. | Consideriamo fascio di rette parallele CH, BD e r tagliate da AD e AB | |
| 9. | $AH : HB = AC : CD$ | 8., teorema di Talete |
| 10. | $AH : HB = AC : BC$ | 7., 9. |

□

Esercizi

- Si dimostri il teorema dei punti medi per i triangoli utilizzando il teorema di Talete.
- In un triangolo ABC sia AM la mediana relativa al lato BC . Da un punto D interno al lato BC si conduca la parallela ad AM che incontra la retta AB in E e la retta AC in F . Dimostrare che $AF : AC = AE : AB$.
- Dimostrare che in ogni trapezio le diagonali si dividono scambievolmente in parti tra loro direttamente proporzionali.
- Cosa si deduce se, nell'esercizio precedente, al posto di un trapezio si considera un parallelogramma?
- In un triangolo ABC sia AM la mediana relativa al lato BC . Da un punto D del segmento BM si tracci la parallela ad AM che incontra AB in E e la retta AC in F . Dimostrare che $DC : DM = FC : FA$.
- Sia AM la mediana relativa al lato BC di un triangolo ABC , e siano MD la bisettrice dell'angolo $A\widehat{M}B$ e ME la bisettrice dell'angolo $A\widehat{M}C$ rispettivamente nei triangoli AMB e AMC . Dimostrare che DE e BC sono parallele.
- Da un punto P del lato AB del triangolo ABC conduci la parallela alla mediana AM relativa al lato BC , la quale incontra la retta AC in Q . Si dimostri che $AB : AC = AP : AS$.
- In una circonferenza di diametro AB si disegni la corda $CD \perp AB$ e si consideri un punto $P \in E$. Le rette EA ed EB incontrano la circonferenza rispettivamente negli ulteriori punti F e G . Dimostrare che $CF : DF = CG : DG$.
- Applicando il teorema di Talete, dividi, con riga e compasso, un qualunque segmento AB in 5 parti congruenti.

Capitolo 12

Similitudine

Abbiamo già introdotto il concetto di figure congruenti: due figure F e G si dicono congruenti se hanno le stesse dimensioni e, quindi, la stessa forma, cioè esse si possono perfettamente sovrapporre con un movimento rigido. In particolare, due poligoni convessi sono congruenti se, e solo se, hanno i lati ordinatamente congruenti (hanno le stesse dimensioni) e, di conseguenza, hanno gli angoli ordinatamente congruenti (hanno la stessa forma). Per i triangoli abbiamo enunciato i criteri di congruenza ampiamente applicati nelle dimostrazioni dei teoremi oggetto di studio. Infine, sempre per i triangoli, abbiamo enunciato le seguenti regole pratiche: in triangoli congruenti, a lati congruenti si oppongono angoli congruenti, e viceversa.

In questo capitolo considereremo figure geometriche che hanno in comune solo la forma ma non hanno, in generale le stesse dimensioni. Definiremo il concetto di figure simili, ponendo la nostra attenzione sui poligoni convessi e, in particolare, sui triangoli. Il concetto di similitudine tra figure è una generalizzazione della relazione di congruenza tra figure e ciò è esplicitato dal seguente schema

$$F \text{ e } G \text{ congruenti} \implies F \text{ e } G \text{ simili}$$

$$F \text{ e } G \text{ simili} \implies F \text{ e } G \text{ congruenti}$$

12.1 Prime definizioni e proprietà

Per semplicità, le definizioni che daremo di seguito saranno esplicitate per poligoni convessi.

Definizione 12.1.1. Due poligoni F e G si dicono **poligoni simili** se hanno gli angoli ordinatamente congruenti e i lati ordinatamente in proporzione. Notazione: $F \sim G$.

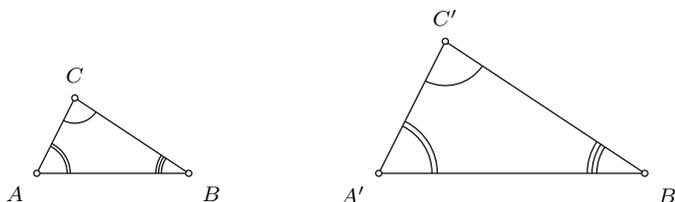
Commentiamo in modo adeguato la definizione precedente, supponendo che F e G siano dei triangoli. La definizione di poligoni simili pone due condizioni.

La condizione di congruenza tra angoli non ha bisogno di alcun commento poiché è di immediata comprensione. La seconda condizione, invece, va precisata. Affermare che i lati di F sono ordinatamente in proporzione con i lati di G significa che i lati dei due poligoni *formano due insiemi di segmenti direttamente proporzionali*, per essi si può applicare il criterio di proporzionalità diretta. Inoltre, quando si hanno insiemi di segmenti direttamente proporzionali bisogna esplicitare la corrispondenza uno a uno tra i segmenti dei due insiemi. Per fissare le idee, siano F e G i triangoli ABC e $A'B'C'$ con la corrispondenza uno a uno stabilita come segue. Per i lati

$$AB \longleftrightarrow A'B' \quad BC \longleftrightarrow B'C' \quad AC \longleftrightarrow A'C'$$

e per gli angoli interni

$$\widehat{A} \longleftrightarrow \widehat{A'} \quad \widehat{B} \longleftrightarrow \widehat{B'} \quad \widehat{C} \longleftrightarrow \widehat{C'}$$



Allora diremo i lati e gli angoli che si corrispondono rispettivamente **lati omologhi** e **angoli omologhi**. Se F e G sono rispettivamente i triangoli simili ABC e $A'B'C'$, valgono le seguenti relazioni

$$\widehat{A} \cong \widehat{A'} \quad \widehat{B} \cong \widehat{B'} \quad \widehat{C} \cong \widehat{C'}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

Valgono, altresì, le seguenti regole pratiche.

Regola pratica 1. *In triangoli simili, ad angoli congruenti si oppongono lati in proporzione.*

Regola pratica 2. *In triangoli simili, a lati in proporzione si oppongono angoli congruenti.*

Poiché il rapporto $\frac{A'B'}{AB}$ tra lati omologhi è uguale al rapporto $\frac{A'B'}{AB}$ tra le loro misure, allora, con abuso di linguaggio, intenderemo il rapporto $\frac{A'B'}{AB}$ un numero reale positivo per alleggerire la notazione. Pertanto, quando scriveremo le uguaglianze

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

intenderemo tali rapporti tutti uguali al numero reale $k > 0$ detto **costante di similitudine**. Si deduce immediatamente quanto segue.

1. Se $k = 1$, allora $F \cong G$.
2. Se $k > 1$, allora G è un **ingrandimento** di F .
3. Se $0 < k < 1$, allora G è una **contrazione** di F .

Infine, la relazione di similitudine tra figure gode banalmente delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e pertanto è una relazione di equivalenza.

12.2 I criteri di similitudine per i triangoli

In questo paragrafo enunceremo tre criteri per stabilire quando due triangoli sono simili, in analogia con i criteri di congruenza. Osserviamo che in ogni triangolo la conoscenza dell'ampiezza di due angoli interni determina univocamente la conoscenza dell'ampiezza del terzo angolo, applicando il teorema degli angoli interni. Pertanto, quando affermeremo che due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli in modo equivalente intenderemo che essi hanno ordinatamente congruenti tutti e tre gli angoli.

Teorema 12.2.1 (Primo criterio di similitudine). *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli, allora sono simili.*

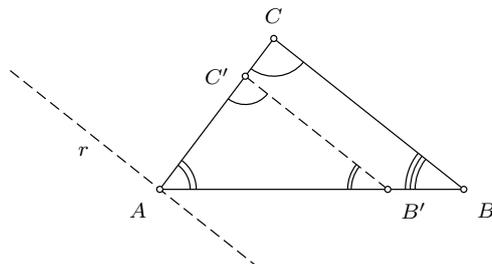
In base alla definizione di similitudine basterà dimostrare che i lati sono ordinatamente in proporzione.

$$Hp: \hat{A} \cong \hat{A}' \quad \hat{B} \cong \hat{B}' \quad \hat{C} \cong \hat{C}'$$

$$Th: \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

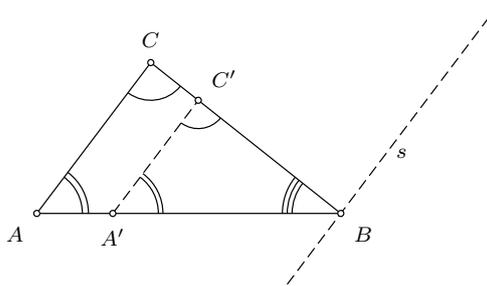
Dimostrazione. Se i due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato, allora essi sono congruenti per il 2° c.c. e quindi sono simili. Se ciò non avviene, la dimostrazione si incentra su due costruzioni.

Con un movimento rigido spostiamo il triangolo $A'B'C'$ in modo tale che A' coincida con A e, poiché $\hat{A} \cong \hat{A}'$, i lati AB e $A'B'$ risultino sovrapposti, come pure i lati AC e $A'C'$; infine si conduca per A la retta r parallela a BC .



- | | | |
|----|--|--|
| 1. | $\hat{A} \cong \hat{A}' \quad \hat{B} \cong \hat{B}' \quad \hat{C} \cong \hat{C}'$ | Hp |
| 2. | $r \parallel BC$ | costruzione |
| 3. | $B'C' \parallel BC$ | $\hat{C} \cong \hat{C}'$ a.c. formati da $B'C'$ e BC
tagliate da AC |
| 4. | $r \parallel BC \parallel B'C'$ | 2., 3., proprietà transitiva |
| 5. | Consideriamo $r \parallel BC \parallel B'C'$ tagliate da AC e AB | |
| 6. | $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ | 5., teorema di Talete |

Con un altro movimento rigido spostiamo il triangolo $A'B'C'$ in modo tale che B' coincida con B e, poiché $\hat{B} \cong \hat{B}'$, i lati AB e $A'B'$ risultino sovrapposti, come pure i lati BC e $B'C'$; infine si conduca per B la retta s parallela a AC .



- | | | |
|-----|--|--|
| 7. | $s \parallel AC$ | costruzione |
| 8. | $A'C' \parallel AC$ | $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$ a.c. formati da $A'C'$ e AC
tagliate da BC |
| 9. | $s \parallel AC \parallel A'C'$ | 7., 8., proprietà transitiva |
| 10. | Consideriamo $s \parallel AC \parallel A'C'$ tagliate da BC e AB | |
| 11. | $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ | 10., teorema di Talete |
| 12. | $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ | 6., 11., proprietà transitiva |

□

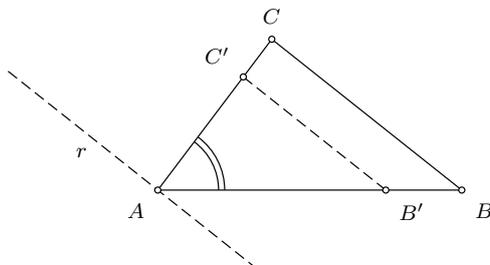
Teorema 12.2.2 (Secondo criterio di similitudine). *Se due triangoli hanno ordinatamente proporzionali due lati e ordinatamente congruenti i due angoli tra essi compresi, allora sono simili.*

Basterà dimostrare che gli altri due angoli interni dei triangoli sono ordinatamente congruenti, quindi si applica il primo criterio di similitudine.

$$Hp: \widehat{A} \cong \widehat{A'} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$Th: \widehat{B} \cong \widehat{B'} \quad \widehat{C} \cong \widehat{C'}$$

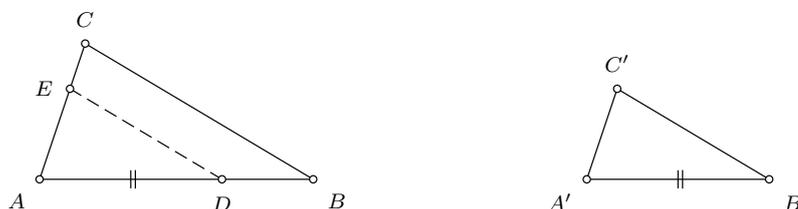
Dimostrazione. Se i due triangoli hanno $AB \cong A'B'$ e $AC \cong A'C'$, allora essi sono congruenti per il 1° c.c. e quindi sono simili. Se ciò non avviene, consideriamo la seguente costruzione. Con un movimento rigido spostiamo il triangolo $A'B'C'$ in modo tale che A' coincida con A e, poiché $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, i lati AB e $A'B'$ risultino sovrapposti, come pure i lati AC e $A'C'$; infine si conduca per A la retta r parallela a BC .



1. $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$ Hp
2. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ Hp
3. $r \parallel BC$ costruzione
4. Consideriamo le rette $r, BC, B'C'$ tagliate da AB e AC
5. $r \parallel BC \parallel B'C'$ 2., teorema di Talete
6. $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ a.c. formati da $BC \parallel B'C'$ tagliate da AB
7. $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$ 1., 6., teorema degli angoli interni

□

Teorema 12.2.3 (Terzo criterio di similitudine). *Se due triangoli hanno ordinatamente proporzionali i tre lati, allora sono simili.*



$$\text{Hp: } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$\text{Th: } ABC \sim A'B'C'$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione non considereremo l'eventualità banale per cui $ABC \cong A'B'C'$; supponiamo quindi che $A'B' < AB$. Costruzione: sul lato AB si sceglie un punto D tale che $AD \cong A'B'$, quindi da D si conduce la retta parallela al lato BC che incontra il lato AC nel punto E . Si procede allo stesso modo, operando la costruzione sul triangolo $A'B'C'$, se supponiamo che $AB < A'B'$.

1. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ Hp
2. $DE \parallel BC$ costruzione
3. Consideriamo i triangoli ABC e ADE
4. \widehat{A} in comune figura
5. $\widehat{ADE} \cong \widehat{ABC}$ a.c. formati da $DE \parallel BC$ e AB
6. $ABC \sim ADE$ 4., 5., 1° criterio di similitudine
7. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ 6., ad angoli congruenti si oppongono lati in proporzione

- | | | |
|-----|--|---------------------------------------|
| 8. | Consideriamo i triangoli ADE e $A'B'C'$ | |
| 9. | $AD \cong A'B'$ | costruzione |
| 10. | $DE \cong B'C' \quad \wedge \quad AD \cong A'B'$ | 1., 7., 9. |
| 11. | $ADE \cong A'B'C'$ | 9., 10., 3° c.c. |
| 12. | $ADE \sim A'B'C'$ | 11., triangoli congruenti sono simili |
| 13. | $ABC \sim A'B'C'$ | 6., 12., proprietà transitiva |

□

Da ora in poi, quando nelle dimostrazioni applicheremo i criteri di similitudine, giustificheremo la riga con le abbreviazioni **1° c.s.**, **2° c.s.** e **3° c.s.**.

Esercizi

1. Dimostrare che, se due triangoli hanno i lati ordinatamente paralleli, allora sono simili.
2. Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC , sia CD la bisettrice dell'angolo \widehat{ACB} . Dal punto D si conduca la perpendicolare a CD che interseca l'ipotenusa BC in E . Si dimostri che il segmento CD è medio proporzionale fra i segmenti AC e CE .
3. Sia $ABCD$ un trapezio di base maggiore AB e base minore CD . Si dimostri che due dei quattro triangoli in cui le diagonali, incontrandosi, dividono il trapezio sono simili.
4. Sia $ABCD$ un trapezio di base maggiore AB e base minore CD , sia O il punto d'incontro delle diagonali AC e BD . Detto M il punto medio della base maggiore AB , si conduca la semiretta MO che incontra la base minore CD in N . Dimostrare che:
 - a) N è il punto medio di CD ;
 - b) O divide MN in parti proporzionali alle basi.
5. In un triangolo qualunque ABC , siano M, N, P i punti medi rispettivamente di AB, BC e AC . Dimostrare che $ABC \sim MNP$.
6. Dimostrare che due lati di un triangolo stanno tra loro come le proiezioni dell'uno sull'altro.
7. Si dimostri che il diametro di una circonferenza inscritta in un trapezio isoscele è medio proporzionale tra le basi.
8. Si dimostri che in due triangoli simili le mediane relative a lati omologhi sono proporzionali a tali lati.
9. Disegnare un triangolo rettangolo ABC , retto in A . Tracciare la bisettrice CP di \widehat{BCA} . Dal punto P condurre la perpendicolare a CP che incontra l'ipotenusa BC nel punto H . Dimostrare che il segmento CP è medio proporzionale tra i segmenti CA e CH .
10. Disegnare due triangoli rettangoli ABC e ABD con i vertici C e D da parti opposte rispetto all'ipotenusa comune AB . Prolungare i lati AC e DB fino a incontrarsi nel punto E . Dimostrare che $\overline{EA} : \overline{ED} = \overline{EB} : \overline{EC}$.
11. Considerare due circonferenze che s'incontrano nei punti A e B e un punto E sulla retta AB esterno al segmento AB . Dal punto E tracciare le tangenti alle due circonferenze. Dimostrare che i segmenti di tangenza sono tutti congruenti.

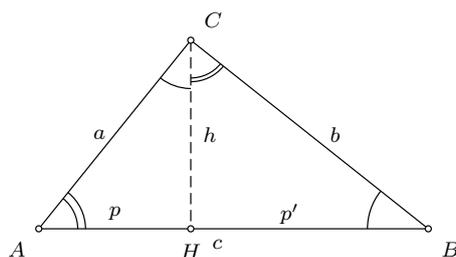
12.3 Applicazioni della similitudine al triangolo rettangolo

In questo paragrafo dedurremo i teoremi di Euclide e di Pitagora utilizzando le proprietà dei triangoli simili. Siccome la validità di questi teoremi concerne esclusivamente i triangoli rettangoli, enunciamo il seguente importante teorema.

Teorema 12.3.1 (Lemma fondamentale). *In ogni triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa lo divide in due triangoli rettangoli simili tra loro e simili al triangolo di partenza.*

Dimostrazione. La dimostrazione è piuttosto semplice ed è proposta come esercizio. \square

Osserviamo attentamente la seguente figura.

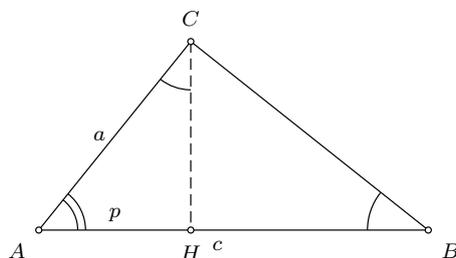


Utilizzeremo le seguenti convenzioni pratiche.

1. In base al lemma fondamentale, la figura precedente stabilisce visivamente in modo inequivocabile quali sono gli angoli ordinatamente congruenti dei tre triangoli ABC rettangolo in C , AHC rettangolo in H , BHC rettangolo anch'esso in H .
2. Per snellire le notazioni, scriveremo in vece dei singoli lati le loro misure:
 - $\overline{AB} = c$, ipotenusa;
 - $\overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b$, cateti;
 - $\overline{AH} = p$, proiezione del cateto AC sull'ipotenusa;
 - $\overline{BH} = p'$, proiezione del cateto BC sull'ipotenusa;
 - $\overline{CH} = h$, altezza relativa all'ipotenusa.

Ricordiamo che se x, y, z sono tre numeri reali non nulli, allora la proporzione $x : y = y : z$ è equivalente all'uguaglianza $y^2 = xy$ e si dice che y è medio proporzionale tra x e z .

Teorema 12.3.2 (Primo teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo, ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa stessa.*



Hp: ABC triangolo rettangolo in C

Th: $a^2 = cp$ $b^2 = cp'$

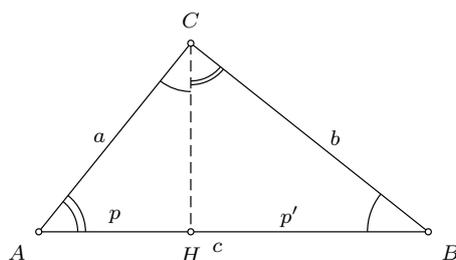
Dimostrazione. Dimostreremo solo la prima tesi, per l'altra si procede in modo analogo.

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | Consideriamo i triangoli rettangoli
ABC e AHC | |
| 2. | $ABC \sim AHC$ | 1., lemma fondamentale |
| 3. | $a : p = c : a$ | 2., ad angoli congruenti si oppongono
lati in proporzione |
| 4. | $a^2 = cp$ | 3., proprietà delle proporzioni |

□

Si deduce immediatamente

Teorema 12.3.3 (Teorema di Pitagora). *In un triangolo rettangolo, il quadrato della misura dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati delle misure dei cateti.*



Hp: ABC triangolo rettangolo in C

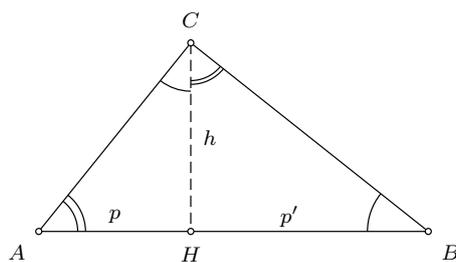
Th: $a^2 + b^2 = c^2$

Dimostrazione. Applicheremo il primo teorema di Euclide.

- | | | |
|----|-----------------------------------|--|
| 1. | ABC triangolo rettangolo in C | |
| 2. | $a^2 = cp$ | 1., 1° teorema di Euclide |
| 3. | $b^2 = cp'$ | 1., 1° teorema di Euclide |
| 4. | $a^2 + b^2 = cp + cp'$ | 2., 3., somma membro a membro |
| 5. | $a^2 + b^2 = c(p + p')$ | 4., raccoglimento totale |
| 6. | $a^2 + b^2 = c^2$ | 5., ipotenusa è congruente a somma
delle proiezioni |

□

Teorema 12.3.4 (Secondo teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*



H_p : ABC triangolo rettangolo in C

Th : $h^2 = pp'$

Dimostrazione. Anche questa dimostrazione è molto semplice.

1. Consideriamo i triangoli rettangoli
 AHC e BHC
 2. $AHC \sim BHC$
 3. $p : h = h : p'$
 4. $h^2 = pp'$
- 1., lemma fondamentale
 - 2., ad angoli congruenti si oppongono lati in proporzione
 - 3., proprietà delle proporzioni

□

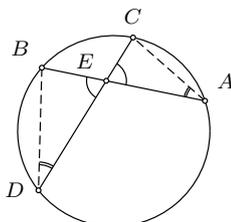
Esercizi

1. Sia ABC un triangolo inscritto nella semicirconferenza di diametro AB . Da un punto D di AB si conduca la perpendicolare ad AB che incontra il lato AC in E , mentre incontra la retta BC in F e la semicirconferenza in G . Dimostrare che DG è medio proporzionale tra DE e DF .
2. In una circonferenza di centro O si considerino un diametro AB ed una corda AC . Dimostrare che AC è medio proporzionale tra la sua proiezione sul diametro AB e AB stesso.
3. In un triangolo ABC , rettangolo in C , è inscritto un quadrato $DEFG$ con il lato DE contenuto nell'ipotenusa AB . Si dimostri che DE è medio proporzionale tra AD e BE .
4. Sia assegnata una semicirconferenza di diametro AB e sia t la tangente condotta per A . Da un punto P della circonferenza si conduca la perpendicolare p al diametro e sia H il suo piede su AB , quindi, sempre da P si conduca la perpendicolare PK a t . Dimostrare che DH è medio proporzionale tra DK e BH .
5. Si consideri il numero reale positivo a misura del segmento AB . Si costruisca con riga e compasso il numero \sqrt{a} e si verifichi con una dimostrazione la validità della costruzione.
6. Dall'estremo B del diametro AB di una semicirconferenza condurre la semiretta a che interseca la semicirconferenza in C e in D la tangente condotta per A . Detto E il piede della perpendicolare ad AB condotta da C , dimostrare che AC è medio proporzionale tra AD e CE .
7. Dimostrare che, se in un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione e il doppio della sua proiezione sull'ipotenusa, allora esso è isoscele.

12.4 Applicazioni della similitudine alla circonferenza

In questo paragrafo dedurremo in modo piuttosto semplice alcune proprietà che concernono la circonferenza.

Teorema 12.4.1 (Teorema delle corde). *Se due corde di una circonferenza sono incidenti, allora il prodotto delle parti in cui resta divisa la prima è uguale al prodotto delle parti in cui resta divisa l'altra.*



Hp: AB e CD corde tali che $\{E\} = AB \cap CD$

Th: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$

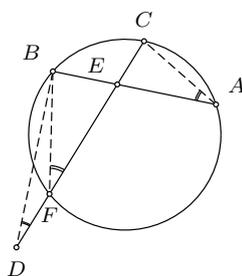
Dimostrazione. Se le corde hanno un estremo in comune, allora la tesi è banale in quanto una delle parti di entrambe le corde ha misura nulla.

1. Consideriamo i triangoli EBD e EAC
2. $\widehat{DEB} \cong \widehat{CEA}$ angoli opposti al vertice
3. $\widehat{BDE} \cong \widehat{CAE}$ angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco \widehat{CB}
4. $EBD \sim EAC$ 2., 3., 1° c.s.
5. $ED : AE = EB : CE$ 4., ad angoli congruenti si oppongono lati in proporzione
6. $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ 5., proprietà delle proporzioni

□

Si può dedurre anche la proprietà inversa del teorema delle corde.

Teorema 12.4.2 (Inverso del Teorema delle corde). *Siano AB e CD due segmenti non aventi lo stesso sostegno, incidenti in E e sia verificata la relazione $AE \cdot EB = CE \cdot ED$. Allora il quadrilatero di vertici A, B, C, D è ciclico.*



Hp: A, B, C, D non allineati $\wedge AB \cap CD = \{E\} \wedge AE \cdot EB = CE \cdot ED$

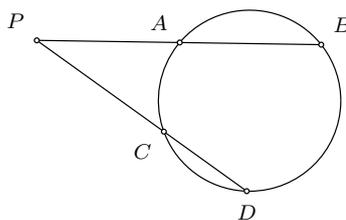
Th: $ACBD$ quadrilatero ciclico

Dimostrazione. Se le corde hanno un estremo in comune, allora la tesi è banale in quanto per tre punti distinti e non allineati passa un'unica circonferenza. Supponiamo, pertanto, che E sia interno ai due segmenti. Dimosteremo il teorema per assurdo.

- | | | |
|-----|--|---|
| 1. | $ACBD$ quadrilatero non ciclico | negazione della tesi |
| 2. | Consideriamo \mathcal{C} passante per A, B, C distinti e non allineati | |
| | A, B, C | |
| 3. | $D \notin \mathcal{C}$, D esterno rispetto a \mathcal{C} | 1. |
| 4. | $\mathcal{C} \cap CD = \{C, F\}$ | 3. |
| 5. | $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ | Hp |
| 6. | Consideriamo i triangoli ABE e BED | |
| 7. | $AE : ED = CE : EB$ | 5., proprietà delle proporzioni |
| 8. | $\widehat{AEC} \cong \widehat{BED}$ | angoli opposti al vertice |
| 9. | $AEC \sim BED$ | 7., 8., 2° c.s. |
| 10. | $\widehat{CAE} \cong \widehat{BDE}$ | 9., si oppongono a lati in proporzione |
| 11. | $\widehat{CAE} \cong \widehat{EFB}$ | angoli alla circonferenza che sottendono stesso arco \widehat{CB} |
| 12. | Consideriamo il triangolo BDF | |
| 13. | $\widehat{EFB} > \widehat{BDE}$ | primo teorema dell'angolo esterno |
| 14. | $\widehat{CAE} > \widehat{BDE}$ | 11., 13. |
| 15. | Contraddizione | 10., 14. |
| 16. | $ACBD$ quadrilatero ciclico | 15. |

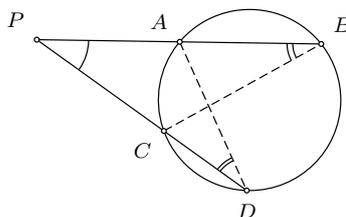
La dimostrazione è del tutto simile se si suppone D interno alla circonferenza. □

Da un punto P esterno ad una circonferenza conduciamo due qualunque semirette secanti la circonferenza stessa. Restano individuati i segmenti che possiamo osservare nella seguente figura.



Denomineremo i segmenti PB e PD **segmenti di secante** ed i segmenti PA e PC loro rispettive **parti esterne**.

Teorema 12.4.3 (Teorema delle secanti). *Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono due secanti, allora risultano uguali i prodotti tra ciascun segmento di secante e la sua parte esterna.*



Hp: \widehat{PB} e \widehat{PD} segmenti di secante, PA e PC parti esterne

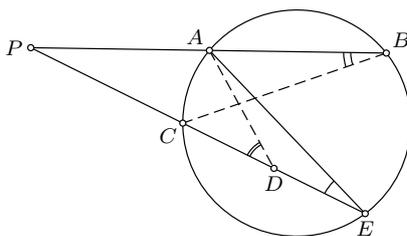
Th: $PB \cdot PA = PD \cdot PC$

Dimostrazione. Si traccino le corde AD e BC .

- | | |
|---|--|
| 1. Consideriamo i triangoli PCB e PDA | |
| 2. \widehat{BPD} in comune | figura |
| 3. $\widehat{PDA} \cong \widehat{CBP}$ | angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco \widehat{AC} |
| 4. $PCB \sim PDA$ | 2., 3., 1° c.s. |
| 5. $PB : PD = PC : PA$ | 4., ad angoli congruenti si oppongono lati in proporzione |
| 6. $PB \cdot PA = PD \cdot PC$ | 5., proprietà delle proporzioni |

□

Teorema 12.4.4 (Inverso del teorema delle secanti). *Siano a e b due semirette distinte aventi la stessa origine P e aventi lo stesso verso (ad esempio da sinistra a destra), siano $A, B \in a$ e $C, D \in b$ tali che $PA < PB$ e $PC < PD$. Se è verificata la condizione $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, allora il quadrilatero di vertici $\{A, B, C, D\}$ è ciclico.*



Hp: A, B, C, D non allineati $\wedge PA \cdot PB = PC \cdot PD$

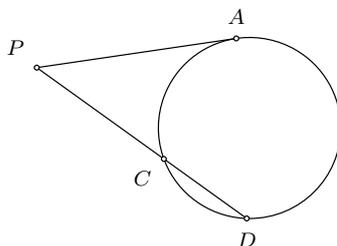
Th: $BACD$ quadrilatero ciclico

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema per assurdo.

- | | | |
|-----|--|---|
| 1. | $BACD$ quadrilatero non ciclico | negazione della tesi |
| 2. | Consideriamo \mathcal{C} passante per A, B, C distinti e non allineati A, B, C | |
| 3. | $D \notin \mathcal{C}$, D interno a \mathcal{C} | 1. |
| 4. | $\mathcal{C} \cap CD = \{C, E\}$ | 3. |
| 5. | $PB = PC \cdot PD$ | Hp |
| 6. | Consideriamo i triangoli PAD e PBC | |
| 7. | $PC : PA = PB : PD$ | 5., proprietà delle proporzioni |
| 8. | \widehat{DPA} in comune | figura |
| 9. | $AEC \sim BED$ | 7., 8., 2° c.s. |
| 10. | $\widehat{PDA} \cong \widehat{PBC}$ | 9., si oppongono a lati in proporzione |
| 11. | $\widehat{PEA} \cong \widehat{PBC}$ | angoli alla circonferenza che sottendono stesso arco \widehat{AC} |
| 12. | Consideriamo il triangolo AED | |
| 13. | $\widehat{PDA} > \widehat{PEA}$ | primo teorema dell'angolo esterno |
| 14. | $\widehat{PDA} > \widehat{PBC}$ | 11., 13. |
| 15. | Contraddizione | 10., 14. |
| 16. | $BACD$ quadrilatero ciclico | 15. |

La dimostrazione è del tutto simile se si suppone D esterno alla circonferenza. □

Poniamo ora la nostra attenzione sul seguente caso particolare del teorema delle secanti. Se per il punto esterno P conduciamo la secante PD e la tangente PA , i punti A e B coincidono e il segmento di secante PB e la sua parte esterna PA coincidono.



PA lo chiamiamo **segmento di tangente**. Pertanto, si ottiene la relazione $PA^2 = PD \cdot PC$, cioè PA è medio proporzionale tra PD e PC . Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Corollario 12.4.1 (Teorema della tangente e della secante). *Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono una tangente ed una secante, allora il segmento di tangente è medio proporzionale tra il segmento di secante e la sua parte esterna.*

Esercizi

1. Siano AB e CD due corde di una circonferenza che s'incontrano nel punto E tale che $AE : EB = CE : ED$. Dimostrare che le due corde sono congruenti.

2. Si consideri un quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza e sia Q il punto d'incontro delle diagonali. Dimostrare che $ABQ \sim CDQ$ e che $BCQ \sim ADQ$.
3. Sia ABC un triangolo con l'angolo \hat{A} acuto. Considerata la circonferenza di diametro BC , siano D ed E le intersezioni della circonferenza rispettivamente con i lati AB ed AC . Dimostrare che $AED \sim ABC$.
4. Da un punto G esterno ad una circonferenza si conducano la tangente GA e la secante che interseca la circonferenza in B e C , con $GC < GB$. Si prolunghi il segmento di secante GB di un segmento $BD \cong GC$ e da D si conduca la tangente in E alla circonferenza. Dimostrare che $GA \cong DE$.
5. Sia AB un segmento qualunque. Da B si conduca la retta $p \perp AB$ e su di essa si costruisca il punto O tale $2BO \cong AB$, quindi si descriva la circonferenza di centro O e raggio OB . Dall'estremo A si conduca la semiretta a che interseca la circonferenza nei punti D ed E , con D più vicino ad A ; si descriva infine la circonferenza di centro A e raggio AD che interseca il segmento AB in C . Dimostrare che AC è medio proporzionale tra tutto il segmento AB e la parte restante CD .
6. Disegnare due triangoli rettangoli ABC e ABD con i vertici C e D da parti opposte rispetto all'ipotenusa comune AB . Sia E il punto d'incontro delle rette AC e BD . Dimostrare che $DE \cdot BE = CE \cdot AE$.

Parte III

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Integrazione - Matematica 5 Statistica descrittiva
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Calcolo delle probabilità I - Calcolo delle probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

La presente opera è distribuita secondo le attribuzioni della [Creative Commons](#).

La versione corrente è la 

In particolare chi vuole redistribuire in qualsiasi modo l'opera, deve garantire la presenza della prima di copertina e della intera Parte Contributi composta dai paragrafi: Contributi e licenza.

Settembre 2012

Dipartimento di Matematica
ITIS V. Volterra
San Donà di Piave