

## PROGRAMMAZIONE LINEARE

***Proprietà dell'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di Programmazione Lineare*****1. Tipi di soluzione**

- **Soluzioni ammissibili ( S.A. )** : sono le soluzioni di un problema di P.L. che soddisfano tutti i vincoli del problema. L'insieme di tutte le S.A. si chiama R.S.A : *regione delle soluzioni ammissibili* ed è sempre un insieme convesso, in quanto intersezione di "semipiani" che sono insiemi convessi.
- **Soluzioni ammissibili di base ( S.B.A. )** : sono le soluzioni ammissibili che giacciono sui vertici della frontiera della R.S.A. Esse sono rappresentate dai punti intersezione dei vincoli del problema. Il numero delle S.B.A. è sempre finito.
- **Soluzioni ottime ( S.O. )** : sono le soluzioni ammissibili di base che ottimizzano la funzione obiettivo del problema.

**2. Esistenza della S.O.**

E' noto il teorema di Weierstrass:

*Una funzione continua, definita in un insieme I chiuso e limitato, ammette sempre massimo e minimo assoluti in I.*

Dunque, secondo il teorema, un problema di P.L. che ha la f.o. sicuramente continua in quanto lineare, ammetterà soluzione ottima solo in presenza di una R.S.A. chiusa e limitata.

Si noti che un insieme è chiuso se contiene la sua frontiera e quindi, per ottenere la chiusura, basta che i vincoli che definiscono la R.S.A. comprendano il segno di uguaglianza.

### 3. Tipi di R.S.A.

- **R.S.A. è vuota** : i vincoli sono incompatibili; il problema non ammette soluzione
- **R.S.A. è un poligono chiuso** : il problema ammette sempre almeno una soluzione ottima in base al teorema di Weierstrass
- **R.S.A. è un troncone chiuso** (regione illimitata ) : il problema può ammettere almeno una soluzione ottima

### 4. Localizzazione della S.O.

- se esiste una soluzione ammissibile S.A., allora esiste una soluzione ammissibile di base S.B.A.
- se la funzione obiettivo f.o. ammette un ottimo finito, allora almeno una soluzione ammissibile di base S.B.A. è soluzione ottima S.O. per il problema di P.L.

Ciò si deve al fatto che all'interno della R.S.A. la f.o. è sempre migliorabile e quindi, data la sua convessità, la S.O. deve stare sulla frontiera della R.S.A. e, in ultima analisi, su una delle S.B.A.

Poiché le S.B.A. sono in numero finito, la ricerca delle S.O. è una procedura con un numero finito di passi.

### 5. Numero delle S.O.

Il numero delle soluzioni ottime di un problema di P.L. può essere :

- **0** se la R.S.A. è vuota oppure è un troncone chiuso con la f.o. che non raggiunge mai l'ottimo
- **1** se la R.S.A. è un poligono chiuso oppure un troncone chiuso con la f.o. che rispettivamente raggiunge l'ottimo in un solo vertice S.B.A.
- **$\infty$**  se la R.S.A. è un poligono chiuso oppure un troncone chiuso con la f.o. che rispettivamente raggiunge l'ottimo in due vertici S.B.A. (in tal caso sono ottimi anche tutti i punti del segmento che congiunge i due vertici).