CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Processo di Arrivi di Poisson

Per arrivo si intende un qualsiasi evento casuale che si realizza in un determinato sistema di riferimento.

Un processo di arrivi è un flusso di eventi casuali che si realizzano in un determinato sistema di riferimento.
Se,come avviene spesso, il sistema di riferimento è temporale, il flusso si concretizza in una successione di eventi casuali associati a determinati istanti di tempo.

Esempi

1. Processo : telefonate che vengono ricevute da un centralino nella mattinata di oggi
   Arrivo : telefonata ricevuta dal centralino
   Sistema di riferimento temporale (una dimensione)
   Casualità : si riferisce all'istante in cui la telefonata viene ricevuta dal centralino

2. Processo : presenza di un cartellone pubblicitario su un certo tratto di strada rettilineo
   Arrivo : presenza del cartellone pubblicitario
   Sistema di riferimento cartesiano sulla retta (una dimensione)
   Casualità : si riferisce al punto della strada al lato della quale è posizionato il cartellone pubblicitario

3. Processo : presenza di piante di una determinata specie in un bosco spontaneo
   Arrivo : presenza di una pianta della determinata specie
   Sistema di riferimento cartesiano nel piano (due dimensioni)
   Casualità : si riferisce al punto del bosco nel quale è presente la pianta

4. Processo : presenza di particelle in sospensione in una soluzione acquosa
   Arrivo : presenza della particella
   Sistema di riferimento cartesiano nello spazio (tre dimensioni)
   Casualità : si riferisce al punto della soluzione nel quale è sospesa la particella

Nella maggior parte dei casi, i processi di arrivi si intendono riferiti al tempo e quindi hanno un sistema di riferimento lineare.
In questo caso gli arrivi si possono rappresentare come punti che si distribuiscono a caso sulla retta del tempo.

Ebbene dimostreremo che, sotto condizioni abbastanza semplici, una distribuzione di arrivi casuali in un certo intervallo di tempo segue la legge di Poisson, da cui il nome : ***Processo di Arrivi di Poisson.***

Autore : Franca Gressini gennaio 2009

Sia **t** : l'ampiezza di un generico intervallo di tempo, cioè la lunghezza di un certo segmento sulla retta del tempo di origine 0

Sia **x** : il numero di arrivi nell'intervallo di tempo t , cioè il numero di punti sul segmento di ampiezza t

Sia $\mathbf{p_x(t)}$: la probabilità che nell'intervallo di tempo t vi siano x arrivi

Sia λ : il numero medio di arrivi nell'unità di tempo ,cioè $E_1(x)= \boldsymbol{\lambda}$ con t= 1

Quindi **x** è una variabile casuale discreta così definita:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots\ldots & x\ldots\ldots \\ p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \ldots\ldots & p_x(t)\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

e dimostreremo che le $\mathbf{p_x(t)}$ seguono la distribuzione di Poisson con valor medio $E_t(x)= \lambda t$

Le semplici condizioni cui deve sottostare il processo sono definite dalle seguenti tre ipotesi:

1) Ipotesi di uniformità

La probabilità $p_x(t)$ di avere x arrivi nell'intervallo di ampiezza t dipende solamente dall'ampiezza dell'intervallo t e non dalla sua posizione sull'asse dei tempi.

Dall'ipotesi si deducono le seguenti osservazioni:

- la posizione dell'intervallo di ampiezza t **non ha influenza** sulla probabilità $\mathbf{p_x(t)}$.
  Rimane perciò valida la seguente catena di uguaglianze:

  $$\mathbf{p_x(0,t) = p_x(t_1;t_1+t) = p_x(t_2;t_2+t) = p_x(t_3;t_3+t) = p_x(t_4;t_4+t) = \ldots. = p_x(t_n;t_n+t)}$$

- l'ampiezza dell'intervallo, al contrario, influisce sulla probabilità $\mathbf{p_x(t)}$ nel senso che se nell'intervallo unitario (t=1) risulta $E_1(x)= \lambda$**,**
  allora in un intervallo di ampiezza doppia (t = 2) è ragionevole attendersi $E_2(x)= 2\lambda$
  allora in un intervallo di ampiezza tripla (t = 3) è ragionevole attendersi $E_3(x)= 3\lambda$
  …………..
  in generale, in un intervallo di ampiezza t è quindi ragionevole attendersi $E_t(x)= \boldsymbol{\lambda t}$**.**

2) Ipotesi di indipendenza o assenza di memoria

Gli arrivi si ripartiscono indipendentemente gli uni dagli altri.

Ciò significa che in intervalli disgiunti, le variabili casuali che contano il numero di arrivi in ciascuno di essi sono mutuamente indipendenti e non vengono influenzate da quanto accade in precedenza.
Per questo motivo si parla di assenza di memoria: tra le variabili discrete, solo il processo di Arrivi di Poisson gode di questa proprietà.
Si ricordi che, in caso di indipendenza, le probabilità congiunte sono uguali al prodotto delle probabilità marginali, con notevoli semplificazioni di calcolo.

3) Ipotesi di ordinarietà

In un intervallo di tempo Δt sufficientemente piccolo è ammesso al massimo un arrivo.

Cioè, in un intervallo infinitesimo di ampiezza Δt, o vi è un solo arrivo (x=1) o non ve n'è alcuno (x=0), essendo impossibile che ve ne siano in numero maggiore.
In pratica non sono ammesse accumulazioni di arrivi, né sovrapposizioni, cioè non possono esservi arrivi simultanei.
Risulta quindi :

- $\mathbf{p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t}$ (vedi ipotesi di uniformità); da cui*:*
- $\mathbf{p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t}$ dato che*:*
- $\mathbf{p_{x>1}(\Delta t) = O(\Delta t) \cong 0}$ (quantità infinitesima di ordine superiore a Δt) visto che non è ammesso più di un arrivo

Descritte le tre ipotesi, dimostriamo ora il :

<u>Teorema 1</u>

Se la variabile casuale x soddisfa le tre ipotesi allora essa si distribuisce come una variabile casuale di Poisson di parametro λ e viceversa.

Dimostrazione

Fissate le semplici ipotesi cui deve sottostare il processo degli arrivi, cerchiamo di determinare la distribuzione di probabilità $\mathbf{p_x(t)}$ per completare la variabile casuale **x**: numero di arrivi nell'intervallo di tempo t.

Allo scopo, consideriamo l'intervallo di tempo di ampiezza t e lo suddividiamo in n intervalli di ampiezza infinitesima $\Delta t = \frac{t}{n}$.

Poiché per l'ipotesi di ordinarietà in un intervallo infinitesimo vi possono essere o 0 o 1 arrivo, allora per osservare x arrivi nell'intervallo di ampiezza t bisognerà individuare x intervallini di ampiezza Δt che contengono 1 solo arrivo e (n-x) intervallini che ne contengono 0.

La situazione si riconduce così ad una variabile casuale binomiale che conta il numero di successi x in n prove indipendenti (vedi ipotesi n°2), ove ciascun successo ha probabilità :

$$\mathbf{p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t = \lambda \frac{t}{n}}$$

e ciascun insuccesso ha probabilità :

$$\mathbf{p_0(\Delta t)} = 1 - \lambda \Delta t = 1 - \lambda \frac{t}{n}.$$

Allora la probabilità che in n intervallini di ampiezza λt vi siano x arrivi è pari a :

E, poiché $\lambda t = \frac{t}{n}$, allora si ha:

e questa è la funzione di probabilità di una v.c. Binomiale di parametri *n* e p = $\frac{\lambda t}{n}$.

Come è noto, se n ≥ 50 e λ= np ≤ 5 (quest'ultima sicuramente verificata per n → +∞) tale

variabile casuale bernoulliana converge ad una v.c. Poisson di parametro λ = np, cioè, in questo caso : $np=n\ \frac{\lambda t}{n}$ = λt .

In definitiva la distribuzione di probabilità degli arrivi è:

$p_x(t)$ = P(X = x) = $\frac{(\lambda t)^x}{x!} * e^{-(\lambda t)}$ con x = 0, 1, 2,…., t > 0; λ > 0

e quindi la variabile casuale x= numero di arrivi nell'intervallo di tempo t diventa:

$$\mathbf{X}= \begin{pmatrix} \text{٠} & \text{١} & \text{٢} & \text{٣}\ldots\ldots & x\ldots\ldots \\ e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^{\text{٢}}}{\text{٢}!}e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^{\text{٣}}}{\text{٣}!}e^{-\lambda t}\ldots\ldots & \frac{(\lambda t)^x}{x!}e^{-\lambda t}\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

e , come si voleva dimostrare, si distribuisce come una variabile casuale di Poisson di valor

medio E(x) = λt .

In conclusione:

- se gli arrivi soddisfano le tre ipotesi allora il loro numero segue la distribuzione di Poisson
- se la distribuzione del loro numero è di Poisson allora gli arrivi soddisfano le tre ipotesi.

Notevole legame tra Processo di Poisson e legge esponenziale negativa

Sappiamo che un arrivo è un evento aleatorio. E' noto che, in generale, il tempo di attesa di un arrivo aleatorio si distribuisce come una variabile casuale esponenziale negativa (vedi tempo di vita, durata, tempo di funzionamento, tempo di attesa del guasto……).
Ebbene si può dimostrare che vale il seguente :

Teorema 2

Se il numero di arrivi in un intervallo di tempo t è una v.c. di Poisson di parametro λ, allora il tempo T tra due arrivi consecutivi è una v.c. esponenziale negativa di valor medio $1/\lambda$.

Dimostrazione
Siano :
x: v.c. *numero di arrivi nell'intervallo di ampiezza t*
T: v.c. *tempo che intercorre tra due arrivi consecutivi* (detto anche *tempo di interarrivo).*
Per ipotesi x descrive un processo di Poisson e quindi risulta che E(x)= λt .
Calcoliamo ora la funzione di ripartizione della variabile casuale **T:**

F(t) = P(T $\leq$ t)= 1 – P(T>t)

ove **P(T>t)** significa calcolare la probabilità che in un intervallo di ampiezza t <u>non</u> vi è alcun arrivo, dato che il tempo T di interarrivo supera t.
Risulta quindi :
P(T>t) = p_0 (t)= $e^{-\lambda t}$ e di conseguenza
F(t) = P(T $\leq$ t)= 1 – P(T>t)= 1- $e^{-\lambda t}$.

Come si può notare, quest'ultima rappresenta la classica forma della funzione di ripartizione di una variabile casuale esponenziale avente densità:

f(t) = $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & per \quad t \geq 0 \\ 0 & per \quad t < 0 \end{cases}$ e valor medio **E(t) =** $1/\lambda$**,** come volevasi dimostrare.

Il teorema ammette anche l'inverso :
Se il tempo di interarrivo è esponenziale negativo di parametro λ, allora la con lo stesso parametro λ.

Autore : Franca Gressini gennaio 2009

La conseguenza del teorema è che, data la forma della densità esponenziale, è molto più frequente avere piccoli intervalli tra un arrivo e il suo consecutivo, piuttosto che grandi.
Il flusso di Poisson è quindi caratterizzato da arrivi distanziati in modo che si formino molti intervalli piccoli e pochi intervalli grandi, naturalmente senza accumulazioni evidenti.

Proprietà dell'assenza di memoria.

L'ipotesi 2) garantiva l'assenza di memoria per la variabile casuale che descrive il numero degli arrivi.
Il legame descritto al paragrafo precedente ci consente di affermare anche il seguente:

<u>Teorema 3</u>

Se T è una variabile casuale esponenziale negativa di parametro λ, allora la v.c. $T/t > t_0$ che descrive il tempo di attesa dopo che si è già atteso un certo tempo t_0, è ancora esponenziale negativa di parametro λ.

(Si omette la dimostrazione)

Il teorema stabilisce che anche la variabile esponenziale negativa gode della proprietà dell'assenza di memoria ed essa è l'unica v.c. continua a godere di tale prerogativa.