

Metodi d'integrazione di Montecarlo

Simulazione

Il termine simulazione nella sua accezione scientifica ha un significato diverso dall'accezione corrente. Nell'uso ordinario è sinonimo di finzione; nell'uso scientifico è sinonimo di imitazione, cioè di riproduzione della realtà.

La simulazione è un insieme di metodi e di criteri particolari per mezzo dei quali si può costruire e studiare un modello che possa rappresentare uno o più aspetti di un fenomeno noto.

L'uso del computer è di notevole aiuto alla ricerca scientifica e risulta utile in alcuni campi della simulazione.

La simulazione si può distinguere in:

- simulazione analogica
- simulazione numerica

La **simulazione analogica** consiste nella costruzione artificiale di modelli di un dato sistema che verranno studiati in relazione a un determinato carattere ad esempio:

1. costruzione di modelli di aerei da sottoporre a particolari esperimenti di aerodinamica
2. costruzione di modelli automobilistici da sottoporre a crash test
3. costruzione di modelli concreti di fabbricati sottoposti a particolari test di scosse telluriche ecc...

Si parla di **simulazione numerica** quando il modello preso in esame viene rappresentato da elementi numerici e da operazioni sugli stessi. Questo tipo di simulazione risulta molto utile in quanto consente di realizzare modelli artificiali ma concreti, che sono cioè immagine della realtà ma che possono essere riprodotti infinite volte.

Tra i procedimenti di simulazione più famosi ricordiamo: I metodi di Montecarlo, il Pert, il C.P.M.

Tratteremo per ora solamente i **metodi di Montecarlo**. Si tratta di procedimenti con i quali si costruiscono modelli probabilistici di processi matematici sui quali si eseguono esperimenti di campionamento.

I metodi di Montecarlo si appoggiano su sequenze di numeri pseudo-casuali. A tale scopo si possono utilizzare apposite tavole di numeri casuali, oppure avvalersi di un qualsiasi procedimento che produca numeri aleatori.

Come prima applicazione generalmente si cita il calcolo del numero π fondato sull'esperimento ideato dal naturalista G.L. Buffon (1773) che prevede di tracciare su un foglio un fascio di rette parallele equidistanti, dove a è la distanza tra due di esse, e di lanciare su di esso un ago di lunghezza $l \leq a$; con tale esperimento Buffon ha potuto stimare il numero π determinando la probabilità che l'ago cadendo sul foglio incontri una retta.

Altri esempi di applicazioni sono nel campo dell'analisi numerica e in particolare noi ci occuperemo dell'approssimazione del valore di un integrale definito.

Alla presentazione dei metodi d'integrazione premettiamo il seguente importante teorema, che permette di ricavare la funzione di densità di una v.c. Y trasformata mediante una funzione monotona della v.c. X della quale sono note campo di variazione e funzione di densità:

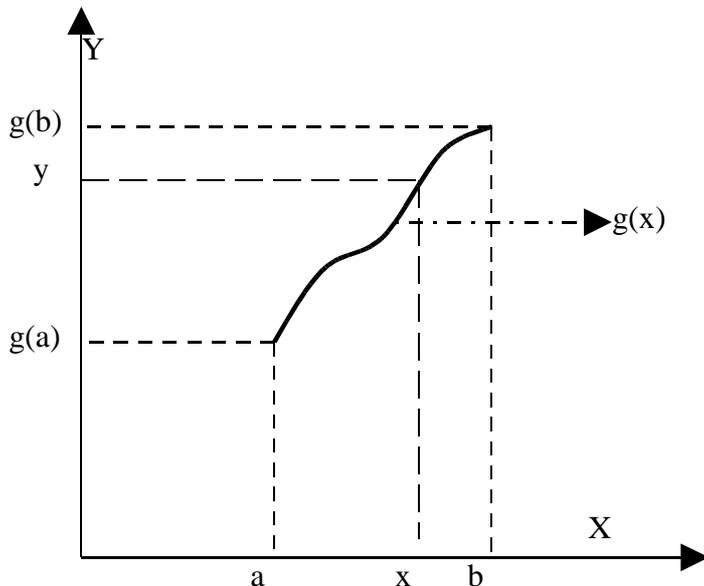
Teorema

Sia X una v.c. continua definita in $[a;b]$ e con funzione di densità conosciuta $f(x)$ e sia $g(X)$ una funzione di trasformazione monotona attraverso la quale si costruisce la v.c. trasformata $Y = g(X)$. La funzione di densità della v.c. trasformata Y è data dalla formula:

$$f(Y) = f(X) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Dimostrazione

Assumiamo che $g(X)$ sia una funzione monotona crescente in $[a;b]$, dunque il campo di variazione della v.c. Y è: $[g(a);g(b)]$ e può essere rappresentato graficamente in un sistema di assi cartesiani in cui in ascissa si pone il campo di variazione di X ed in ordinata, invece, il campo di variazione di Y :



Poiché la funzione è monotona, esiste la sua funzione inversa, che indichiamo con $g^{-1}(x)$, e che permette, conoscendo il valore di Y , di ritornare al corrispondente valore di X . Allora, calcolare la probabilità dell'evento $Y \leq y$ equivale a calcolare la probabilità dell'evento $X \leq x$, dove x è la determinazione della v.c. X che ha immagine attraverso la funzione $g(X)$ nel valore y , cioè $x = g^{-1}(y)$ e dunque vale la seguente catena di uguaglianze:

$$(1) \quad P(Y \leq y) = F(Y=y) = P(X \leq x) = P(a < X \leq x) = P(a < X \leq g^{-1}(y)) = F(X = g^{-1}(y)) - F(X=a)$$

In sintesi:

$$(2) \quad F(Y=y) = F(X = g^{-1}(y)) - F(X=a)$$

Dove, ovviamente, $F(Y = y)$, $F(X = x)$ hanno significato rispettivamente di funzione di ripartizione della v.c. Y e della v.c. X .

Deriviamo rispetto a y l'uguaglianza (2):

$$\frac{dF(Y = y)}{dy} = \frac{dF(X = g^{-1}(y))}{dy} - \frac{dF(X = a)}{dy}$$

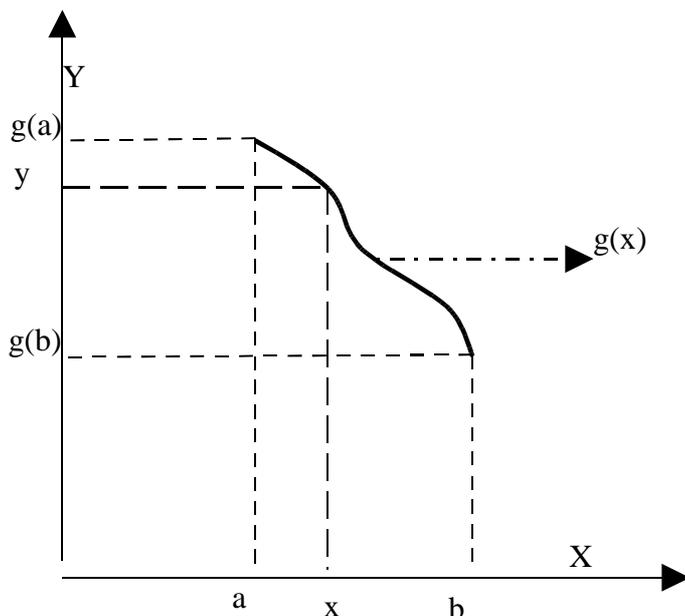
In questa derivata l'ultimo addendo di destra: $\frac{dF(X = a)}{dy}$ è nullo perché $F(X=a)$ è una costante

numerica, mentre il termine di sinistra $\frac{dF(Y = y)}{dy}$ è la funzione di densità della v.c. Y. Rimane

dunque da derivare la quantità $F(X = g^{-1}(y))$, che è una funzione composta e come si sa la derivata di funzioni composte è uguale al prodotto delle derivate:

$$\frac{dF(Y = y)}{dy} = f(Y = y) = \frac{dF(X = x)}{dx} * \frac{dx}{dy} = f(X = x) * \frac{dx}{dy}$$

Se $g(X)$ è monotona decrescente, allora il campo di variazione della v.c. Y è invertito rispetto a quello di X ed è: $[g(b);g(a)]$ come mostra il seguente grafico



e dunque:

$$(3) \quad P(Y \leq y) = F(Y=y) = P(X \geq x) = P(x < X \leq b) = P(g^{-1}(y) < X \leq b) = F(X = b) - F(X = g^{-1}(y))$$

Con passaggi analoghi a quelli precedenti si ottiene l'uguaglianza:

$$\frac{dF(Y = y)}{dy} = f(Y = y) = -\frac{dF(X = x)}{dx} * \frac{dx}{dy} = -\frac{dF(X = x)}{dx} * \frac{dx}{dy} = -f(X = x) * \frac{dx}{dy}$$

e poiché la funzione $g(X)$ è monotona decrescente, allora la derivata prima di X rispetto a y sarà negativa e dunque tutto il prodotto risulterà positivo. In generale allora :

$$f(Y = y) = f(X = x) * \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

e con questo il teorema è dimostrato.

IL METODO DEL VALOR MEDIO

Se $I = \int_a^b f(x) dx$ non può essere calcolato con metodi diretti, allora, rifacendosi al teorema del valor

medio, si ha: $\exists c \in [a, b] \mid f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ da cui si ottiene $I = \int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$ dove $f(c)$ viene detto valor medio di $f(x)$ in $[a, b]$.

Una delle caratteristiche che deve avere un generatore di numeri pseudocasuali per essere considerato buono è che restituisca valori uniformemente distribuiti. Sia allora X una variabile

casuale uniforme in $[a, b]$ con densità di probabilità $f(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Se $Y=g(X)$ è una funzione continua, monotona e derivabile allora la sua funzione di densità di probabilità è:

$$f(Y) = f(X) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

e il valor medio (o speranza matematica) di Y o di $g(X)$ risulta essere:

$$M(Y) = M(g(X)) = \int_a^b g(X) f(X) \left| \frac{dx}{dy} \right| dy = \int_a^b g(X) \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(X) dx = \frac{1}{b-a} I$$

Inoltre, poiché la media campionaria è uno stimatore corretto della media della popolazione, considerato un campione di numeri pseudocasuali x_1, x_2, \dots, x_n uniformemente distribuiti in $[a; b]$, si ha

$$M(g(X)) \cong \frac{\sum_{i=1}^n g(x_i)}{n} \quad \text{e quindi}$$

$$I \cong (b-a) \frac{\sum_{i=1}^n g(x_i)}{n} \quad (1) \quad \text{e} \quad I = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b-a) * \frac{\sum_{i=1}^n g(x_i)}{n}.$$

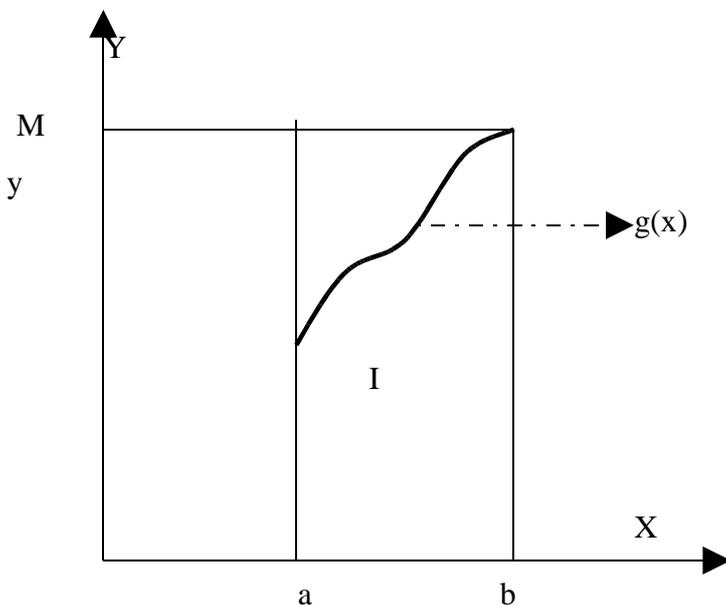
Il valore dell'integrale I è ben approssimato dall'area di un rettangolo che ha come base l'intervallo d'integrazione e come altezza il valore medio empirico di una successione di valori di ordinata di punti sulla curva $g(x)$ calcolati a partire da una sequenza di numeri pseudocasuali uniformemente distribuiti in $[a; b]$.

PROCEDIMENTO RISOLUTIVO

Sia data la funzione $g(x)$ di cui sia noto $I = \int_a^b g(x)dx$ per poter effettuare un confronto tra il valore effettivi dell'integrale e il valore approssimato; si generino campioni casuali via via sempre più numerosi di numeri uniformemente distribuiti in $[a;b]$ e, si valuti la (1) per ciascun campione, verificando poi che tale valore tende a I all'aumentare della numerosità del campione.

IL METODO DEL RETTANGOLO O IN / OUT

Se $I = \int_a^b g(x)dx$ non può essere calcolato con metodo diretti, allora, detto M il massimo della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$, è possibile approssimare I mediante il seguente metodo:



Sia X una v.c. uniforme nell'intervallo $[a,b]$ e Y una v.c. uniforme nell'intervallo $[0,M]$, con $M = \max[g(x)]$ in $[a;b]$. Si generano n coppie ordinate (x_i, y_i) che rappresentano le coordinate di n punti appartenenti al rettangolo della figura. Degli n punti, k avranno ordinata minore od uguale a $g(x_i)$; il numero di questi punti (k) rapportato al numero totale di punti generati (n) è la probabilità frequentista dell'evento $IN =$ "il punto a coordinate pseudocasuali (x_i, y_i) cade nella porzione di piano sottesa dalla curva $g(x)$ ". Infatti ad ogni punto si può associare una prova dicotomica che ha come esiti possibili l'evento IN ed il suo complementare e la prova, in virtù della proprietà d'indipendenza dei generatori di numeri pseudocasuali, viene ripetuta sempre nelle medesime condizioni iniziali per n volte.

$$P_f(IN) = \frac{k}{n}$$

La probabilità teorica dell'evento A è data invece dal rapporto delle due aree rispettivamente: a numeratore l'area sottesa dalla curva $g(x)$ e a denominatore l'area del rettangolo $ABCD$ circoscritto ad I , cioè:

$$P(IN) = \frac{I}{(b-a)M}$$

e quindi

$$P_i(\text{IN}) = \frac{k}{n} \cong \frac{I}{(b-a)M} = P(\text{IN})$$

Da cui si ricava un'approssimazione di I:

$$(b-a)M * \frac{k}{n}$$

risulta evidente che tale approssimazione migliora all'aumentare di n.

CONFRONTO CON I METODI MATEMATICI

I due metodi di Montecarlo applicati possono essere confrontati con i metodi matematici dei rettangoli, dei trapezi e delle parabole.

Fissati:

- $y = f(x)$ la funzione da integrare;
- $[a,b]$ l'intervallo di integrazione;
- n il numero di punti generati (nei metodi di Montecarlo)
il numero di parti in cui dividere $[a,b]$ (nei metodi matematici)

si dovrà confrontare I con i valori approssimati ottenuti con i 5 metodi.