Matematica 1

Dipartimento di Matematica

ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [11-12][S-All]

Indice

I ALGEBRA 1

1 ALGEBRA 0 2
1.1 Introduzione . . . 2
1.2 Insiemi numerici . . . 2
1.3 Operazioni e proprietà. Terminologia . . . 3
1.4 Potenze ad esponente naturale ed intero . . . 4
1.5 Massimo comun divisore e minimo comune multiplo tra numeri naturali . . . 5
1.6 Espressioni aritmetiche . . . 6
1.7 Esercizi riepilogativi . . . 9

2 INSIEMI 11
2.1 Introduzione . . . 11
2.2 Rappresentazioni . . . 11
2.2.1 Rappresentazione per elencazione . . . 11
2.2.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica . . . 12
2.2.3 Rappresentazione grafica di Eulero-Venn . . . 14
2.3 Sottoinsiemi . . . 15
2.4 Operazioni . . . 17
2.4.1 Intersezione . . . 17
2.4.2 Unione . . . 18
2.4.3 Differenza . . . 19
2.4.4 Differenza simmetrica . . . 20
2.4.5 Complementare . . . 20
2.4.6 Prodotto cartesiano . . . 21
2.5 Esercizi riepilogativi . . . 25

3 MONOMI 27
3.1 Introduzione . . . 27
3.2 Monomi . . . 27
3.3 Operazioni tra monomi . . . 29

4 POLINOMI 32
4.1 Polinomi . . . 32
4.2 Operazioni . . . 34
4.3 Prodotti notevoli . . . 34
4.4 Divisione . . . 38
4.5 Divisione con la Regola di Ruffini . . . 41
4.6 Esercizi riepilogativi . . . 44

5 SCOMPOSIZIONI 47
5.1 Scomposizioni . . . 47
5.2 Sintesi . . . 55
5.3 Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di polinomi . . . 56
5.4 Esercizi riepilogativi . . . 57

6 FRAZIONI ALGEBRICHE 60
6.1 Frazioni algebriche . . . 60
6.2 Operazioni . . . 61
6.3 Esercizi riepilogativi . . . 66

7 EQUAZIONI 69
7.1 Introduzione . . . 69
7.2 Risoluzione di equazioni in una incognita . . . 71
7.3 Equazioni di primo grado . . . 76
7.4 Particolari equazioni riconducibili a quelle di primo grado . . . 82
7.5 Problemi di primo grado . . . 85
7.6 Esercizi riepilogativi . . . 87

II GEOMETRIA 91

8 La geometria razionale 92
8.1 Logica elementare . . . 92
8.2 Concetti primitivi e definizioni . . . 93
8.3 Postulati e teoremi . . . 94

9 I Postulati della Geometria 96
9.1 Postulati di appartenenza . . . 96
9.2 Postulati dell'ordine . . . 99
9.3 Postulato di partizione del piano . . . 103
9.4 Postulati di congruenza . . . 103

10 I criteri di congruenza per i triangoli 113
10.1 Definizione e classificazione dei triangoli . . . 113
10.2 I criteri di congruenza dei triangoli . . . 116

11 Proprietà fondamentali dei triangoli 120
11.1 Prime proprietà dei triangoli isosceli . . . 120
11.2 Il primo teorema dell'angolo esterno . . . 125
11.3 Teoremi delle disuguaglianze triangolari . . . 126

12 Perpendicolarità 131
12.1 Definizioni e prime applicazioni . . . 131
12.2 Le simmetrie centrale e assiale . . . 133
12.3 Ulteriori proprietà dei triangoli isosceli . . . 136
12.4 Costruzioni con riga e compasso . . . 139
12.5 Luoghi geometrici . . . 142

13 Parallelismo 146
13.1 Definizioni e Postulato delle parallele . . . 146
13.2 Criteri di parallelismo . . . 147
13.3 Teorema degli angoli interni di un triangolo . . . 152

14 Quadrilateri notevoli 156
14.1 Il trapezio . . . 156
14.2 Il parallelogramma . . . 159
14.3 Il rombo . . . 164
14.4 Il rettangolo . . . 167
14.5 Il quadrato . . . 169
14.6 I teoremi dei punti medi . . . 170

III Contributi 177

Parte I

ALGEBRA

Capitolo 1

ALGEBRA 0

1.1 Introduzione

In questo capitolo vengono richiamati e sintetizzati i principali argomenti di aritmetica affrontati alla scuola media, prerequisiti indispensabili per affrontare il nuovo corso di studi.

1.2 Insiemi numerici

Distinguiamo i seguenti insiemi numerici le cui notazioni e rappresentazioni saranno sviluppate nel capitolo sugli insiemi.
Insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdot\cdot\}$
Insieme dei numeri interi: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdot\cdot\}$
Insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{$frazioni con denominatore diverso da zero$\}$

Osservazione.

- Ogni numero intero è anche un razionale in quanto si può pensare come una frazione con denominatore uno.
- Ogni numero razionale può essere scritto in forma decimale eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore. Viceversa, un numero decimale finito o illimitato periodico può essere scritto sotto forma di frazione(*frazione generatrice*) utilizzando le regole studiate alla scuola media che vengono proposte nei seguenti esempi:
  $2,35 = \dfrac{235}{100} = \dfrac{47}{20}$
  $0,012 = \dfrac{12}{1000} = \dfrac{3}{250}$
  $5,\overline{36} = \dfrac{536-5}{99} = \dfrac{531}{99} = \dfrac{59}{11}$
  $13,2\overline{8} = \dfrac{1328-132}{90} = \dfrac{1196}{90} = \dfrac{598}{45}$
  $1,\overline{9} = \dfrac{19-1}{9} = \dfrac{18}{9} = 2\,(!)$

1.3 Operazioni e proprietà. Terminologia

Le operazioni tra numeri e le relative proprietà possono essere riassunte nella seguente tabella:

OPERAZIONI	*TERMINI*	*RISULTATO*	*PROPIETA' PRINCIPALI*
addizione	*addendi*	*somma*	*commutativa, associativa*
sottrazione	*minuendo* *sottraendo*	*differenza*	
moltiplicazione	*fattori*	*prodotto*	*commutativa, associativa* *distributiva* *legge di annullamento* *di un prodotto* (∗)
divisione	*dividendo* *divisore*	*quoziente*	*distributiva*

(*)Legge di annullamento di un prodotto: il prodotto di fattori è nullo se e solo se è nullo almeno uno di essi.

Osservazione. In una divisione il divisore deve essere diverso da zero; se ciò non accade l'operazione è priva di significato.

E' opportuno ricordare che, oltre alla divisione il cui quoziente è un numero decimale, esiste anche la divisione euclidea (la prima incontrata alle scuole elementari), così definita:

Definizione 1.3.1. Eseguire la divisione $P : D$ significa determinare due numeri Q (quoziente) ed R (resto) tali che

$$P = D \cdot Q + R \quad \text{con} \quad R < D$$

Esempio 1.3.1. Nella divisione $20 : 3$ si ottiene $Q = 6$ ed $R = 2$ infatti $20 = 3 \cdot 6 + 2$ con $2 < 3$

Definizione 1.3.2. Due numeri diversi da zero si dicono *concordi* se hanno lo stesso segno, *discordi* se hanno segno diverso.

Definizione 1.3.3. Due numeri si dicono *opposti* quando la loro somma è zero

Esempio 1.3.2. Gli opposti di $-3, 5, \frac{3}{2}, -\frac{1}{7}$ sono rispettivamente: $3, -5, -\frac{3}{2}, \frac{1}{7}$

Definizione 1.3.4. Due numeri si dicono *reciproci* (o inversi uno dell'altro) se il loro prodotto è uno.

Esempio 1.3.3. I reciproci di $1, -\frac{3}{5}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{5}$ sono rispettivamente: $1, -\frac{5}{3}, \frac{2}{7}, -5$

Osservazione. Non esiste il reciproco dello zero in quanto nessun numero moltiplicato per esso dà uno.

Definizione 1.3.5. Si dice *modulo(o valore assoluto)* di un numero, il numero stesso se esso è non negativo, il suo opposto in caso contrario.

Indicato con $|x|$ il modulo di x, si ha:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1.4 Potenze ad esponente naturale ed intero

Definizione 1.4.1. Dato a numero razionale ed n numero naturale maggiore od uguale a 2, si definisce *potenza n-esima di a* il prodotto di n fattori uguali ad a:
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$ e si assume $a^1 = a$
a si chiama base della potenza, n esponente.

Esempio 1.4.1.

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = \left(-\dfrac{3}{5}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{9}{25}$
- $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Proprietà:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$ con $a \neq 0$ e $n > m$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $a^n : b^n = (a : b)^n$ con $b \neq 0$

Per convenzione si assume $a^0 = 1$ purchè $a \neq 0$; ciò estende la seconda proprietà al caso $n = m$ infatti $a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = 1$

Per convenzione si assume che $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ purchè $a \neq 0$; ciò, oltre che dare significato alle potenze con esponente intero, è compatibile con le proprietà ed estende la seconda al caso $n < m$ infatti: $a^{-n} = a^{0-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \dfrac{1}{a^n}$

Esempio 1.4.2.

- $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$
- $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{9}{49}} = \dfrac{49}{9}$
- $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 = -\dfrac{8}{27}$

- $\left(\frac{6}{13}\right)^{-1} = \frac{13}{6}$

  Osservazione.

- Dalla definizione di potenza e dalle convenzioni assunte si deduce che la potenza 0^0 è priva di significato.
- La potenza di un numero diverso da zero con esponente pari è sempre positiva, quella con esponente dispari mantiene il segno della base.

1.5 Massimo comun divisore e minimo comune multiplo tra numeri naturali

Definizione 1.5.1. Un numero naturale si dice *primo* se è diverso da 1 ed è divisibile solo per se stesso e per 1.

Definizione 1.5.2. Un numero naturale si dice *scomposto in fattori primi* se è scritto come prodotto di potenze di numeri primi.

Esempio 1.5.1. Il numero 360 si può scrivere, come prodotto di fattori, in più modi:

$$360 = \begin{cases} 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 2^3 \cdot 3 \cdot 15 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

solo $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ è la scomposizione in fattori primi di 360 perchè le altre scritture contengono anche numeri non primi (rispettivamente 4 e 15).

E' possibile dimostrare che la scomposizione in fattori primi di un numero è unica (ciò non sarebbe vero se anche l'1 venisse annoverato tra i numeri primi).

Definizione 1.5.3. Si dice *massimo comun divisore* (M.C.D.) tra numeri naturali, il più grande divisore comune.

Per calcolare il M.C.D. è sufficiente scomporre in fattori primi i numeri dati e moltiplicare i fattori comuni con il minimo esponente.

Definizione 1.5.4. Si dice *minimo comune multiplo* (m.c.m.) tra numeri naturali non nulli, il più piccolo multiplo comune, diverso da zero.

Per calcolare il m.c.m. è sufficiente scomporre in fattori primi i numeri dati e moltiplicare i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente.

Esempio 1.5.2.

- $M.C.D.(8, 12, 4) = 2^2 = 4 \qquad m.c.m.(8, 12, 4) = 2^3 \cdot 3 = 24$
  essendo $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $4 = 2^2$

- $M.C.D.(50, 63) = 1 \qquad m.c.m.(50, 63) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150$
  essendo $50 = 2 \cdot 5^2$, $63 = 3^2 \cdot 7$

Definizione 1.5.5. Due numeri naturali a e b si dicono *primi tra loro* (coprimi) se $M.C.D.(a, b) = 1$

Osservazione. Due numeri primi sono primi tra loro, ma due numeri primi tra loro non sono necessariamente numeri primi (50 e 63 sono primi tra loro, ma non primi)

1.6 Espressioni aritmetiche

In una espressione aritmetica le operazioni devono essere svolte nel seguente ordine:
-potenze
-moltiplicazioni e divisioni (nell'ordine sinistra destra)
-addizioni e sottrazioni
Nel caso si intenda eseguire le operazioni in ordine diverso è necessario utilizzare le parentesi.

Esempio 1.6.1.

- $2^3 \cdot 5 - 6 \cdot 7 : 3 + 4 = 8 \cdot 5 - 42 : 3 + 4 = 40 - 14 + 4 = 30$
- $2^3 \cdot 5 - 6 \cdot 7 : (3 + 4) = 8 \cdot 5 - 42 : 7 = 40 - 6 = 34$

Proponiamo alcuni esercizi svolti riguardanti la semplificazione di espressioni aritmetiche:

Esempio 1.6.2.

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(5 - \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{16}\right)\right] : \frac{7}{4} \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \\
&= \left[\frac{3}{16} \cdot \left(\frac{7}{2}\right) : \left(\frac{12 - 3}{16}\right)\right] : \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \left[\frac{21}{32} : \left(\frac{9}{16}\right)\right] : \frac{7}{4} \cdot \frac{25}{4} - \frac{9}{4} \\
&= \left[\frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{32}_{2}} \cdot \frac{\cancel{16}^{1}}{\cancel{9}_{3}}\right] : \frac{7}{4} \cdot \frac{25}{4} - \frac{9}{4} \\
&= \left[\frac{\cancel{7}^{1}}{6}\right] \cdot \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{7}_{1}} \cdot \frac{25}{\cancel{4}_{1}} - \frac{9}{4} \\
&= \frac{25}{6} - \frac{9}{4} \\
&= \frac{50 - 27}{12} \\
&= \frac{23}{12}
\end{aligned}
$$

Esempio 1.6.3.

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left[\left(0,\overline{5}+2,\overline{3}\right)(0,5+0,4):\frac{13}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)\right]^2\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}\right\}^{-1}=\\
&=\left\{\left[\left(\frac{5-0}{9}+\frac{23-2}{9}\right)\left(\frac{5}{10}+\frac{4}{10}\right):\frac{13}{2}-\left(\frac{5+2+1}{10}\right)\right]^2\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\left[\left(\frac{5}{9}+\frac{21}{9}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\cdot\frac{2}{13}-\frac{\cancel{8}^4}{\cancel{10}_5}\right]^2\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\left[\frac{\cancel{26}^2}{\cancel{9}_1}\cdot\frac{\cancel{9}^1}{\cancel{10}_5}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{13}_1}-\frac{4}{5}\right]^2\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\left[\frac{2}{5}-\frac{4}{5}\right]^2\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\left[-\frac{2}{5}\right]^2\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\left[-\frac{2}{5}\right]^{-2}\right\}^{-1}\\
&=\left\{-\frac{2}{5}\right\}^{2}\\
&=\frac{4}{25}
\end{aligned}
$$

Esempio 1.6.4.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}:\left(-\frac{7}{5}\right)^{2}\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{-2}:\left(-\frac{5}{7}\right)^{-3}=\\
&=\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}:\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{2}:\left(-\frac{5}{7}\right)^{-3}\\
&=\left(\frac{5}{7}\right)^{-3+2+2}:\left(-\frac{5}{7}\right)^{-3}\\
&=\left(\frac{5}{7}\right)^{1}:\left[-\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}\right]\\
&=-\left(\frac{5}{7}\right)^{1+3}\\
&=-\left(\frac{5}{7}\right)^{4}
\end{aligned}
$$

Esempio 1.6.5.

$$\begin{aligned}
&\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} : 2^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} : 2^{11} = \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} : 2^{-3} \cdot (-2)^4 : 2^{11} \\
&= 2^6 : 2^{-3} \cdot 2^4 : 2^{11} \\
&= 2^{6+3+4-11} \\
&= 2^2 = 4
\end{aligned}$$

Esempio 1.6.6.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{7}\right)^2 \left(\frac{14}{5}\right)^2 : \left(-\frac{4}{5}\right)^3 + 1 = \\
&= \left(\frac{2}{\cancel{7}_1} \cdot \frac{\cancel{14}^2}{5}\right)^2 : \left(-\frac{4}{5}\right)^3 + 1 \\
&= \left(\frac{4}{5}\right)^2 : \left(-\frac{4}{5}\right)^3 + 1 \\
&= -\left(\frac{4}{5}\right)^{2-3} + 1 \\
&= -\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} + 1 \\
&= -\frac{5}{4} + 1 \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Esempio 1.6.7.

$$\begin{aligned}
&\frac{16}{81} \left(\frac{2}{3}\right)^{-7} \left(-\frac{3}{2}\right)^3 : \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{-7} \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^3 \\
&= -\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{-7} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-6} \\
&= -\left(\frac{2}{3}\right)^{4-7-3+6} \\
&= -\left(\frac{2}{3}\right)^0 = -1
\end{aligned}$$

1.7 Esercizi riepilogativi

1. $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-1+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{2}+1-\frac{9}{8}\right)+\left(\frac{3}{25}+\frac{1}{3}\right)$ $\left[\frac{16}{25}\right]$

2. $\left(\frac{1}{3}+1\right):\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\right)$ $\left[\frac{11}{5}\right]$

3. $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^3\cdot\left[\left(\frac{2}{15}\right)^3\right]^2:\left(\frac{1}{9}\right)^4$ $\left[\frac{1}{81}\right]$

4. $\left(\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

5. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}:\left(-\frac{5}{4}\right)^{-6}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

6. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 2^4:\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2\cdot 2^{15}$ $[2^{21}]$

7. $(3,\overline{5}-2,0\overline{5}+0,1):\frac{8}{5}+(6-0,8\cdot 1,\overline{3}):0,\overline{6}-(2+1,3)(2-0,\overline{6})$ $[4]$

8. $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{6}-2\right)\left[2-\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]+\frac{14}{5}\left(\frac{2}{7}-1\right)$ $\left[-\frac{5}{6}\right]$

9. $\left(4-\frac{1}{2}\right)^{-2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+2+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^0:\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{3}-3^{-2}\right)\right]^3\right\}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

10. $\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2^2}\right]^2\left[1+\left(2-\frac{2}{3}\right)^2\right]-1\right\}:\frac{91}{3}+1$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

11. $\left(\frac{3}{5}-0,\overline{4}\right)\frac{9}{2}+(2,\overline{3}-0,5)\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\cdot 0,\overline{3}+\frac{1}{3}\right)\frac{3}{7}-0,05$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

12. $\dfrac{(0,\overline{1}+0,2\overline{7}):\left(0,8\overline{3}-\frac{7}{9}\right)}{0,\overline{27}+1,\overline{6}+0,\overline{39}}$ $[3]$

13. $\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^2:\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3:\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{13}{12}\right]$

14. $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3:\frac{3^6}{2^{12}}$ $[1]$

15. $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^{-1}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2:\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-2}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

16. $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-5}\left(-\frac{2}{5}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2\right]:\left[(-1)^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}\right]+2\,(-3)^{-2}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

17. $-(-0,5)^2\cdot\frac{2}{3}-1+\left[(-0,4+0,5)^2:(0,1)^2+\frac{2}{(-3)^2}\right]\cdot(-0,5)^2$ $\left[-\frac{31}{36}\right]$

18. $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]:\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\right\}:\left(2+\frac{4}{9}\right)-\frac{3}{4}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

19. $\left\{\left[\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{9}{11}\right)\right]:\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)\right\}\left(\frac{4}{3}-\frac{14}{11}\right)$ $\left[-\frac{1}{9}\right]$

20. $(-2)(-1+2)^3-(-1)\left[-1-2(2)^1\right]^3-2\left[-2-(2)\right]^3$ $[1]$

21. $\left\{-\left[\left(\frac{3}{10}-\frac{2}{5}\right)^3:\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{5}\right)\right]^2\right\}^3:\left\{\left[\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\right\}^6$ $[-1]$

22. $\dfrac{\left(\frac{7}{3}\right)^5:\left(\frac{7}{3}\right)^6+\frac{4}{7}(2)^3}{\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}\right\}^3}+4$ $[-1]$

23. $\dfrac{\left(8^5\cdot 2^3\right)^4:4^4}{8^5:16^2}$ $[2^{57}]$

24. $\dfrac{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^7\right]^3:\left(\frac{1}{27}\right)^3}{3^4:3^7}$ $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{45}\right]$

25. $\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^2:\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{9}\right]^2:\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

26. $\dfrac{\left(-2+\frac{1}{2}\right)\left[0,3\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-0,2\right)\right]}{2,5-\left(8-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

27. $\left[\left(35^3\right)^{-2}:\left(7^2\right)^{-3}\right]^{-3}\left(5^4\right)^2:\left[\left(15^3\right)^{-2}:\left(3^{-2}\right)^3\right]^{-4}:5^2$ $[1]$

28. $-\frac{3}{2}:\left(-3+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{9}{8}\right):\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)+\frac{8}{5}:\left(-\frac{2}{3}-2\right)$ $\left[-\frac{1}{10}\right]$

29. $\dfrac{\left(\frac{11}{3}+\frac{7}{9}\right):(-8)+\frac{1}{5}}{\left[\left(\frac{11}{2}-\frac{3}{5}\right)-\frac{7}{5}\right]:\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{7}{8}\right]-3}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{4}}{3-\frac{1}{5}}$ $[\textit{impossibile}]$

30. $\dfrac{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\left(4-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)^2\left(3-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}$ $[1]$

Capitolo 2

INSIEMI

2.1 Introduzione

Il concetto di insieme è un concetto primitivo; scegliamo dunque di non darne una definizione esplicita. Con il termine *insieme* intendiamo intuitivamente un raggruppamento o una collezione di oggetti, di natura qualsiasi, detti *elementi*.

Un insieme si dice *ben definito* cioè 'Insieme da un punto di vista matematico' se si può stabilire con 'assoluta certezza' se un oggetto gli appartiene o no.

Esempio 2.1.1.

1. L'insieme degli insegnanti di matematica dell'ITIS è un insieme ben definito.
2. L'insieme degli insegnanti di matematica simpatici dell'ITIS non è ben definito perchè uno stesso insegnante può risultare simpatico ad alcuni alunni e non ad altri.

Esercizio 2.1.1. Stabilire quali dei seguenti è un insieme da un punto di vista matematico:

1. L'insieme degli alunni dell'ITIS 'Volterra'.
2. L'insieme delle alunne più belle dell'ITIS 'Volterra'.
3. L'insieme dei numeri grandi.
4. L'insieme dei divisori di 10.
5. L'insieme dei calciatori che hanno realizzato pochi goal.
6. L'insieme dei calciatori che hanno realizzato almeno un goal.

2.2 Rappresentazioni

Per rappresentare un insieme si utilizzano diverse simbologie:

2.2.1 Rappresentazione per elencazione

La rappresentazione per elencazione consiste nello scrivere entro parentesi graffe tutti gli elementi dell'insieme separati da ',' o da ';'

Esempio 2.2.1. $\{3, 7, 9\}$ è la rappresentazione per elencazione dell'insieme delle cifre del numero 9373

Osservazione. Un oggetto che compare più volte non va ripetuto.

Gli insiemi vengono solitamente *etichettati* utilizzando le prime lettere dell'alfabeto maiuscolo. Rifacendoci all'esempio 2.2.1 si può scrivere $A = \{3, 7, 9\}$. Per indicare che un elemento appartiene ad un insieme useremo il simbolo $\in$; in caso contrario il simbolo $\notin$.

Con riferimento all'esempio 2.2.1 si scrive:

$$7 \in \{3, 7, 9\} \quad \text{oppure} \quad 7 \in A$$

(si noti la convenienza dell'etichetta A usata)

$$5 \notin A$$

Se vogliamo rappresentare l'insieme delle lettere dell'alfabeto si conviene di scrivere:

$$B = \{a, b, c, d, \dots, z\}$$

per evitare di elencare tutti gli elementi. (maggiore è il numero di elementi dell'insieme e più è evidente l'utilità di una tale convenzione).

Esempio 2.2.2. Dato

$$C = \{a, 1, \{2, *\}\}$$

possiamo notare che ad esso appartengono 3 elementi e dunque scriviamo

$$a \in C\ , \quad 1 \in C\ , \quad \{2, *\} \in C$$

Osservazione. Gli elementi di un insieme non sono necessariamente dello stesso 'tipo' e tra essi vi può essere anche un insieme. Nell'esempio 2.2.2 all'insieme C appartiene l'insieme $\{2, *\}$. Si nota perciò che $2 \notin C$ ma 2 appartiene ad un elemento di C.

Definizione 2.2.1. Si dice *insieme vuoto* un insieme privo di elementi.

La rappresentazione per elencazione dell'insieme vuoto è $\{\}$, esso viene etichettato con il simbolo $\emptyset$

Definizione 2.2.2. Si dice *cardinalità* di un insieme A il numero degli elementi che gli appartengono. Essa si indica con $|A|$.

Se il numero degli elementi di un insieme è finito si dice che l'insieme ha cardinalità finita, in caso contrario che ha cardinalità infinita.

In riferimento all'esempio 2.2.2 si scrive $|C| = 3$ (la cardinalità di un insieme finito è un numero!)

Due esempi importanti di insiemi numerici di cardinalità infinita sono l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$.

Esercizio 2.2.1. Scrivere la rappresentazione per elencazione dei seguenti insiemi:

1. L'insieme dei numeri interi compresi tra -2 escluso e 3 compreso.
2. L'insieme dei numeri naturali compresi tra -2 incluso e 3 escluso.
3. L'insieme dei numeri naturali multipli di 3.
4. L'insieme dei numeri naturali minori di 100 che sono potenze di 5.
5. L'insieme dei numeri interi il cui quadrato è minore di 16.
6. L'insieme dei numeri interi il cui valore assoluto è 7 oppure 5.
7. L'insieme dei numeri naturali maggiori di 10.

2.2.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica

La rappresentazione per proprietà caratteristica consiste nell'esplicitare una proprietà che caratterizza tutti e soli gli elementi dell'insieme.

Esempio 2.2.3. Utilizzando la rappresentazione per caratteristica, l'insieme $D = \{1, 2, 4, 8\}$ può essere scritto come

$$D = \{x \text{ tale che } x \text{ è un divisore naturale di } 8\}$$

dove x indica un elemento generico dell'insieme.

Possiamo notare che la proprietà caratteristica individuata non è l'unica. L'insieme D può, infatti, essere scritto anche

$$D = \{x \text{ tale che } x \text{ è una potenza naturale di 2 minore o uguale ad } 8\}$$

o usando il simbolismo matematico

$$D = \{x \mid x = 2^n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,\ 1 \leq x \leq 8\}$$

Osservazione. Per determinare la proprietà caratteristica di un insieme non è sufficiente individuare una proprietà di cui godono tutti gli elementi di un insieme perchè potrebbero non essere i soli ad averla.

Esempio 2.2.4. Dato l'insieme $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ se scrivessimo $E = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ non avremmo individuato la proprietà caratteristica perchè con tale scrittura anche il numero 16 apparterrebbe all'insieme e ciò è palesemente errato. La scrittura corretta è invece:

$$E = \{x \mid x = 2n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,\ x \leq 12\}$$

oppure

$$E = \{x \mid x = 2n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,\ n \leq 6\}$$

dove è chiaramente esplicitato che gli elementi di E sono tutti e soli i multipli naturali di 2 minori o uguali di 12.

Un ulteriore importante esempio di insieme numerico è l'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}\ ,\ p, q \in \mathbb{Z}\ ,\ q \neq 0\}$$

In $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$ è possibile definire il concetto di precedente e successivo di un elemento x, rispettivamente $x - 1$ e $x + 1$, in quanto tra $x - 1$ ed x (così come tra x e $x + 1$) non esistono altri elementi di tali insiemi.(E' bene precisare che in $\mathbb{N}$ il precedente di x è definito solo se $x \neq 0$)

Diversamente in $\mathbb{Q}$ non è possibile parlare di precedente o di successivo di un elemento infatti:

Teorema 2.2.1. *Dati 2 elementi qualunque di $\mathbb{Q}$ diversi tra loro, esiste un terzo elemento di $\mathbb{Q}$, compreso tra essi.*

Usando la simbologia matematica :

$$\underbrace{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q},\ x_1 < x_2}_{\textit{Ipotesi}} \quad \underbrace{\exists x_3 \in \mathbb{Q}}_{\textit{Tesi 1}} \mid \underbrace{x_1 <}_{\textit{Tesi 2}} x_3 \underbrace{< x_2}_{\textit{Tesi 3}}$$

Dim. Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ con $x_1 < x_2$ allora

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1}; \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z} \quad q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$$

Consideriamo $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ allora

$$x_3 = \frac{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}{2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{2q_1q_2} \quad \text{con} \quad p_1q_2 + p_2q_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 0 \neq 2q_1q_2 \in \mathbb{Z}$$

quindi $x_3 \in \mathbb{Q}$ (*Tesi 1*)

Essendo per ipotesi $x_1 < x_2$ allora $\dfrac{p_1}{q_1} < \dfrac{p_2}{q_2}$ dunque (portando le frazioni allo stesso denominatore)

$$\frac{p_1q_2}{q_1q_2} < \frac{p_2q_1}{q_2q_1} \tag{2.1}$$

$$x_3 = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{2q_1q_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1q_2}{q_1q_2} + \frac{p_2q_1}{q_1q_2}\right) \overset{\text{per (2.1)}}{>} \frac{1}{2}\left(\frac{p_1q_2}{q_1q_2} + \frac{p_1q_2}{q_1q_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{p_1q_2}{q_1q_2}\right) = \frac{p_1}{q_1} = x_1 \quad \text{cioè} \quad x_3 > x_1 \quad (\textit{Tesi 2})$$

$$x_3 = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{2q_1q_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1q_2}{q_1q_2} + \frac{p_2q_1}{q_1q_2}\right) \overset{\text{per (2.1)}}{<} \frac{1}{2}\left(\frac{p_2q_1}{q_1q_2} + \frac{p_2q_1}{q_1q_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{p_2q_1}{q_1q_2}\right) = \frac{p_2}{q_2} = x_2 \quad \text{cioè} \quad x_3 < x_2 \quad (\textit{Tesi 3})$$

□

Corollario 2.2.1. *Dati due elementi x_1 e x_2 di $\mathbb{Q}$, con $x_1 \neq x_2$, esistono infiniti elementi di $\mathbb{Q}$ compresi tra loro.*

Dimostrazione. Per il teorema 2.1 $\exists\, x_3 \in \mathbb{Q} \mid x_1 < x_3 < x_2$

Ora, considerando x_1 e x_3, per il teorema 2.1 $\exists\, x_4 \in \mathbb{Q} \mid x_1 < x_4 < x_3$

E' facile convincerci che, ripetendo tale ragionamento si avrà :

$$x_1 < \ldots\ldots < x_5 < x_4 < x_3 < x_2$$

□

Esercizio 2.2.2. Determinare la rappresentazione per elencazione dei seguenti insiemi:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$ $\quad$ $B = \{x \mid x = 7n \,, n \in \mathbb{N} \,, n \leq 3\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x \leq 1\}$ $\quad$ $D = \{x \mid x = \mathrm{MCD}(36, 40, 54)\}$

$E = \{x \mid x = 3^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ $\quad$ $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$

$G = \{x \mid x = 3k - 2 \,, k \in \mathbb{N} \,, k \leq 3\}$ $\quad$ $H = \{x \mid x = 2^n + 1 \,, n \in \mathbb{N}\}$

$I = \{x \mid x = 5^k \,, k \in \mathbb{Z} \,, -2 \leq k \leq 1\}$ $\quad$ $L = \{x \mid x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-k+2} \,, k \in \mathbb{Z} \,, -1 \leq k \leq 3\}$

Esercizio 2.2.3. Determinare la rappresentazione per proprietà caratteristica dei seguenti insiemi:

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ $\quad$ $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ $\quad$ $C = \{2, 3, 4, 5, \ldots, 99\}$

$D = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9 \ldots\}$ $\quad$ $E = \{1, 4, 16, 64, \ldots\}$ $\quad$ $F = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$

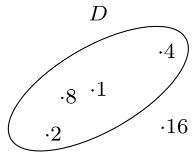
$G = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{20}\}$ $\quad$ $H = \{6, 12, 18, 24, 30\}$ $\quad$ $I = \{2, 6, 10, 14, \ldots\}$

Esercizio 2.2.4. Determinare la cardinalità di $A = \{1, \{2, 3\}, 4, 5, \{6\}\}$ e stabilire se i seguenti elementi appartengono ad A: $1, 2, 4, \{2, 3\}, \{5\}, 6$

2.2.3 Rappresentazione grafica di Eulero-Venn

La rappresentazione grafica di Eulero-Venn consiste nel delimitare con una linea chiusa una regione di piano all'interno della quale vanno collocati gli elementi dell'insieme.

Esempio 2.2.5. L'insieme $D = \{x \mid x = 2^n \;,\; n \in \mathbb{N} \;,\; 1 \leq x \leq 8\}$ sarà con la rappresentazione grafica:



pertanto $1 \in D$, $\quad 4 \in D$, $\quad 16 \notin D$

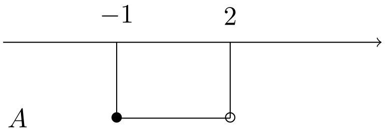
Esercizio 2.2.5. Rappresentare per elencazione e con i diagrammi di Eulero-Venn i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x < 1\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{5}{2} < x \leq \frac{3}{2}\}$$
$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\}$$

A questo punto notiamo l'impossibilità di rappresentare per elencazione e con i diagrammi di Eulero-Venn l'insieme

$$F = \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 2\}$$

in quanto, non potendo parlare di successivo nell'insieme Q, la scelta degli elementi da scrivere dopo -1 è arbitraria, il 'così via' indicato dai puntini è privo di significato e non esiste un 'ultimo' elemento dell'insieme perchè non esiste in $\mathbb{Q}$ il precedente di 2. Per questo genere di insiemi può essere utile un nuovo tipo di rappresentazione grafica :



dove i punti del segmento $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$ rappresentano tutti i numeri razionali tra -1 incluso e 2 escluso (si conviene di indicare con $\bullet$ valore incluso e con $\circ$ valore escluso).

Osservazione. La retta orientata *sistema di ascisse* utilizzata in questa rappresentazione comprende in realtà, oltre a tutti i numeri razionali, altri numeri come ad esempio $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ già incontrati alla scuola media. A rigore il segmento che rappresenta F non dovrebbe essere continuo, ma presentare dei buchi (interruzioni) in corrispondenza dei numeri non razionali. Conveniamo tuttavia di mantenere la notazione descritta in tale tipo di rappresentazione grafica.

2.3 Sottoinsiemi

Definizione 2.3.1. Dati due insiemi A e B si dice che B è *sottoinsieme* o una *parte* di A se ogni elemento di B appartiene all'insieme A.

Si scrive $B \subseteq A$ e si legge B è sottoinsieme di A (o B è contenuto in A) oppure $A \supseteq B$ e si legge A contiene B. Usando il simbolismo matematico:

$$B \subseteq A \quad \text{significa} \quad \forall x \in B \quad \Rightarrow \quad x \in A$$

Dalla definizione si ricava che B può anche essere eventualmente coincidente con A. Tra i sottoinsiemi di A, dunque, c'è anche A stesso detto sottoinsieme *improprio* o *banale*.

Anche l'insieme vuoto è sottoinsieme di tutti gli insiemi e anch'esso viene chiamato sottoinsieme improprio o banale.

Ogni insieme non vuoto ha, dunque, due sottoinsiemi impropri; gli altri eventuali sottoinsiemi si dicono propri.

Se vogliamo indicare che B è sottoinsieme di A non coincidente con A stesso, scriviamo $B \subset A$ (oppure $A \supset B$).

Esempio 2.3.1. Dato $A = \{1, 2, 3, 4\}$ l'insieme $B = \{3, 4\}$ è un suo sottoinsieme proprio di cardinalità 2.

Esempio 2.3.2. Dato $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$ l' insieme :

$B = \{1, 2\}$ è un suo sottoinsieme proprio di cardinalità 2
$C = \{2\}$ è un suo sottoinsieme proprio di cardinalità 1
$D = \{3, 4\}$ non è un suo sottoinsieme proprio infatti $3 \in D$ ma $3 \notin A$
$E = \{\{3, 4\}\}$ è un suo sottoinsieme proprio di cardinalità 1

Definizione 2.3.2. Due insiemi A e B si dicono *uguali* e si scrive $A = B$ se $A \subseteq B$ e $A \supseteq B$

In tal caso, dunque, i due insiemi contengono gli stessi elementi.

Esempio 2.3.3. Dati

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di } 2\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in N \mid x \text{ è divisibile per } 2\}$$

allora

$$A \subseteq B$$

perchè se $x \in A$, x è multiplo di 2 dunque è divisibile per 2 perciò $x \in B$, inoltre

$$A \supseteq B$$

perchè se $x \in B$, x è divisibile per 2 dunque esso è multiplo di 2 perciò $x \in A$. In conclusione: $A = B$.

Definizione 2.3.3. Dato un insieme A se si considerano tutti i suoi sottoinsiemi (propri e impropri) possiamo formare un nuovo insieme chiamato *insieme dei sottoinsiemi di* A o, più spesso, *insieme delle parti di* A. Esso si indica con $P(A)$, quindi

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Esempio 2.3.4. Dato $A = \{a, b\}$ sarà $P(A) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Osservazione. E' bene ricordare, in riferimento all'esempio appena fatto che:

$$\begin{array}{l} a \in A \quad \text{ma} \quad a \notin P(A) \\ \{a\} \in P(A) \quad \text{ma} \quad \{a\} \notin A \\ \{a\} \quad \text{non è sottoinsieme di} \quad P(A) \quad \text{ma} \quad \{a\} \subseteq A \end{array}$$

e facciamo notare che le scritture $\{a\} \subseteq A$ e $\{a\} \in P(A)$ sono equivalenti.

Teorema 2.3.1. *Se* $|A| = n$ *allora* $|P(A)| = 2^n$

Dim. Consideriamo la sequenza:
$A_0 = \{\}$ cioè $|A_0| = 0 \Longrightarrow P(A_0) = \emptyset \Rightarrow |P(A_0)| = 1 = 2^0$
$A_1 = \{*\}$ cioè $|A_1| = 1 \Longrightarrow P(A_1) = \{\emptyset, \{*\}\} \Rightarrow |P(A_1)| = 2 = 2^1$
$A_2 = \{*, \bullet\}$ cioè $|A_2| = 2 \Longrightarrow P(A_2) = \{\emptyset, \{*\}, \{\bullet\}, \{*, \bullet\}\} \Rightarrow |P(A_2)| = 4 = 2^2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

E' sufficiente notare che *ogni volta* che si aggiunge un elemento x ad A, la cardinalità di $P(A)$ raddoppia in quanto a $P(A)$ apparterranno tutti i 'vecchi' sottoinsiemi di A non contenenti x e altrettanti di 'nuovi' ottenuti dai precedenti con l'inserimento dell'elemento x. Possiamo allora affermare che procedendo nella sequenza:

$$\begin{array}{lll} |A_3| = 3 & \Longrightarrow |P(A_3)| = 2|P(A_2)| & = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2 = 2^3 \\ & \vdots & \vdots \\ |A_{n-1}| = n-1 & \Longrightarrow |P(A_{n-1})| & = 2^{n-1} \\ |A_n| = n & \Longrightarrow |P(A_n)| = 2|P(A_{n-1})| & = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \end{array}$$

□

Osservazione. Se vogliamo determinare A tale che $|P(A)| = 16$ è sufficiente scrivere un qualunque insieme di cardinalità 4 come può essere $\{a, b, c, d\}$.
Non è possibile, invece, determinare alcun insieme A tale che $|P(A)| = 9$ perchè 9 non è una potenza di 2.

Esercizio 2.3.1. Determinare l'insieme delle parti di $A = \{-2, 0, 4\}$ e di $B = \{2, \{0, 1\}\}$

Esercizio 2.3.2. Determinare i sottoinsiemi propri di $C = \{-1, \frac{2}{5}, 3\}$

Esercizio 2.3.3. Spiegare perchè non esiste alcun insieme A per cui $P(A) = \emptyset$

Esercizio 2.3.4. Determinare le cardinalità di $P(A)$ e di $P(P(A))$ sapendo che la cardinalità di A è 3

Esercizio 2.3.5. Determinare $|P(P(A))|$ nei casi in cui $|A| = 2$ e $|A| = 11$

Esercizio 2.3.6. Stabilire quali tra i seguenti insiemi sono uguali:

$$A = \{-2, -1, 0, 1\} \quad B = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}, k < 4\} \quad C = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 2\} \quad E = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\} \quad F = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}, -2 \leq k \leq 3\}$$

2.4 Operazioni

2.4.1 Intersezione

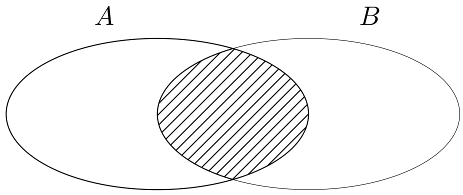
Definizione 2.4.1. Si definisce *intersezione* tra due insiemi A e B l'insieme, indicato con $A \cap B$, degli elementi appartenenti ad entrambi.

In simboli:

1. con la rappresentazione per proprietà caratteristica

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$$

2. con la rappresentazione di Eulero-Venn

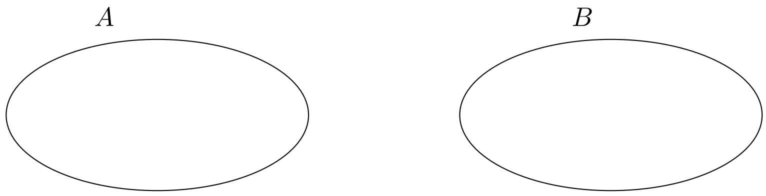


Esempio 2.4.1.

Dati $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$ sarà $A \cap B = \{2, 4\}$
Dati $C = \{1, \{2, 3\}, 4\}$ e $D = \{2, 4, 6\}$ sarà $C \cap D = \{4\}$

Definizione 2.4.2. Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$

La rappresentazione grafica di Eulero-Venn di due insiemi disgiunti è:

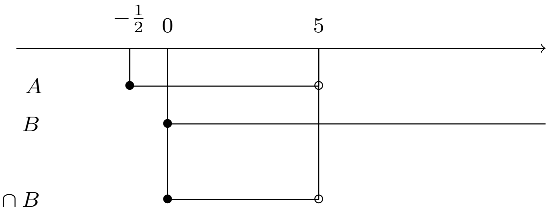


Osservazione. :

$$\forall A \quad A \cap A = A \quad ; \quad \forall A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$\forall A, B \quad A \cap B = B \cap A \quad \text{(proprietà commutativa)}$$
$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$$

Per determinare l'intersezione tra due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$, può essere utile la rappresentazione grafica rispetto ad un sistema di ascisse.

Esempio 2.4.2. Dati $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ dalla loro rappresentazione grafica:



si ricava $A \cap B$

cioè, con la rappresentazione per caratteristica: $A \cap B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < 5\}$

Esercizio 2.4.1. Dopo aver dato la rappresentazione per elencazione degli insiemi
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\dfrac{3}{2} \leq x < 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq \dfrac{1}{2}\}$ determinare $A \cap B$.

Esercizio 2.4.2. Determinare $C \cap D$ con $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3 \leq x < \dfrac{1}{2}\}$ e
$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -1\}$

2.4.2 Unione

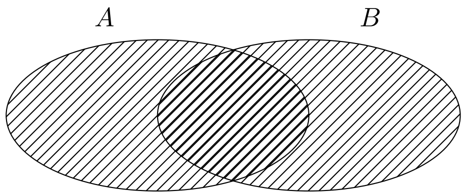
Definizione 2.4.3. Si definisce *unione* tra due insiemi A e B l'insieme, indicato con $A \cup B$, degli elementi appartenenti ad almeno uno di essi.

In simboli:

1. con la rappresentazione per proprietà caratteristica

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{oppure} \quad x \in B\}$$

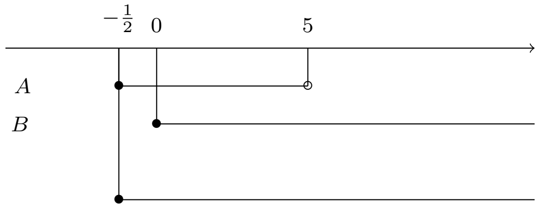
2. con la rappresentazione di Eulero-Venn



Con riferimento all'esempio 4.1 sarà:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$
$$C \cup D = \{1, 2, \{2, 3\}, 4, 6\}$$

e con riferimento all' esempio 4.2 sarà:



si ricava $A \cup B$

cioè $A \cup B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq -\dfrac{1}{2}\}$

Osservazione. :

$$\forall A \quad A \cup A = A \quad ; \quad \forall A \quad A \cup \emptyset = A$$
$$\forall A, B \quad A \cup B = B \cup A \quad \text{(proprietà commutativa)}$$
$$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$$

Esercizio 2.4.3. Dopo aver dato la rappresentazione per elencazione degli insiemi $A = \{x \mid x = |2k - 3|, k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$ e $B = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$ determinare $A \cup B$ e darne la rappresentazione per caratteristica.

Esercizio 2.4.4. Determinare $C \cup D$ con $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \left[\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2\right]^0\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1} < x \leq \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\}$

2.4.3 Differenza

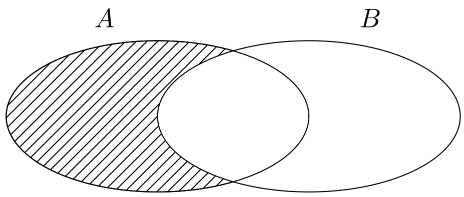
Definizione 2.4.4. Si definisce *differenza* tra due insiemi A e B l'insieme, indicato con $A \setminus B$, degli elementi appartenenti ad A ma non a B.

In simboli:

1. con la rappresentazione per proprietà caratteristica

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\}$$

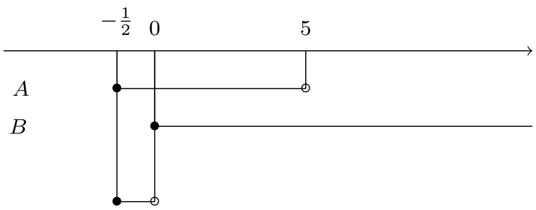
2. con la rappresentazione di Eulero-Venn



Con riferimento all'esempio 4.1 sarà:

$$A \setminus B = \{1, 3\}$$
$$C \setminus D = \{1, \{2, 3\}\}$$

e con riferimento all' esempio 4.2 sarà:



si ricava $A \setminus B$

cioè $A \setminus B = \{x \in \mathbb{Q} \mid -\dfrac{1}{2} \leq x < 0\}$

Osservazione. :

$$\forall A \quad A \setminus A = \emptyset \quad ; \quad \forall A \quad A \setminus \emptyset = A$$
$$B \subseteq A \Rightarrow B \setminus A = \emptyset$$
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$$

Per questa operazione non vale la proprietà commutativa, infatti, controesempio:
dati $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, c, e, f, g\}$ sarà
$A \setminus B = \{a, d\} \neq \{e, f, g\} = B \setminus A$
Si conviene di indicare l'insieme $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ con $\mathbb{N}^*$, analogamente $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Esercizio 2.4.5. Determinare $A \setminus B$ e $B \setminus A$ con $A = \{0.\overline{3}, 1.2, 2.5, 3^2\}$ e
$B = \{0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, 9\}$

Esercizio 2.4.6. Determinare $C \setminus D$ e $D \setminus C$ con
$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3 < x \leq -1 \text{ oppure } \dfrac{1}{2} < x < 2\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$

2.4.4 Differenza simmetrica

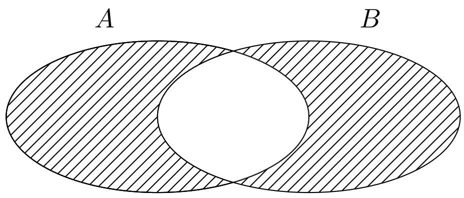
Definizione 2.4.5. Si definisce *differenza simmetrica* tra due insiemi A e B l'insieme, indicato con $A \triangle B$, degli elementi appartenenti solo ad A oppure solo a B.

In simboli:

1. con le precedenti operazioni insiemistiche

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

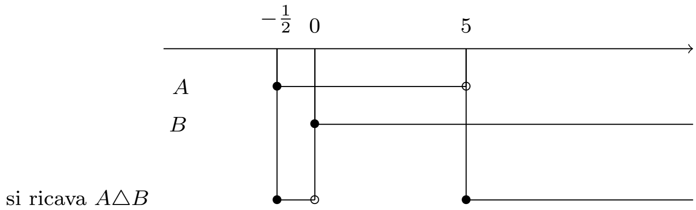
2. con la rappresentazione di Eulero-Venn



Con riferimento all'esempio 4.1 sarà:

$$A \triangle B = \{1, 3, 6\}$$
$$C \triangle D = \{1, \{2, 3\}, 2, 6\}$$

e con riferimento all' esempio 4.2 sarà sufficiente rappresentare $A \cup B$ e $A \cap B$ e successivamente $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B$



Osservazione. :

$$\forall A \quad A \triangle A = \emptyset \quad ; \quad \forall A \quad A \triangle \emptyset = A$$
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \triangle B = A \cup B$$
$$\forall A, B \Rightarrow A \triangle B = B \triangle A$$

Esercizio 2.4.7. Dati $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x \leq 4\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, -1 \leq x < 3\}$ e $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 3\}$ determinare $A \triangle B$, $A \triangle C$,$(A \setminus B) \triangle C$

Esercizio 2.4.8. dati $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ -\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \leq x < \left|-\frac{10}{3}\right|\}$
e $D = \{x \mid x = 3^k, k \in \mathbb{Z}, -1 \leq k \leq 2\}$ determinare $C \triangle D$

2.4.5 Complementare

Definizione 2.4.6. Un insieme U si dice *insieme universo* (o *insieme ambiente*) di un insieme A se A è sottoinsieme di U

Esempio 2.4.3. Dato $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, possibili insiemi universo sono:

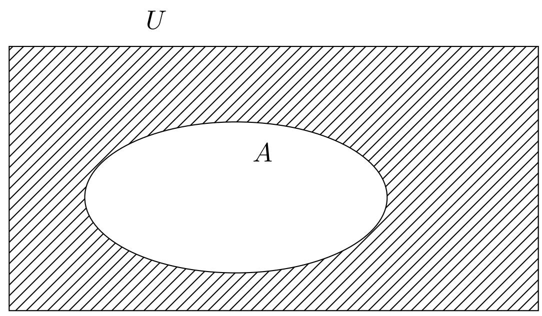
$$U_1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 20\}$$
$$U_2 = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$
$$U_3 = \mathbb{N}$$
$$U_4 = \mathbb{Q}$$

Definizione 2.4.7. Si definisce *complementare* di un insieme A rispetto ad un suo insieme universo U l'insieme, indicato con $C_U(A)$ o $\overline{A}_U$, degli elementi appartenenti ad U ma non ad A.

Quindi

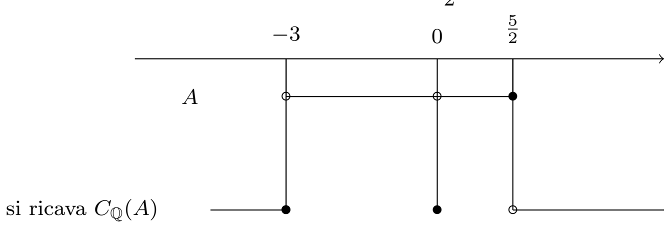
$$C_U = U \setminus A$$

o, con la rappresentazione grafica:



Esempio 2.4.4. Dati $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 15\}$ e $B = \{x \mid x = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$ rispetto all'insieme universo $\mathbb{N}$ si avrà $C_{\mathbb{N}}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 16\}$ e $C_{\mathbb{N}}(B) = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$

Esempio 2.4.5. Dato $A = \{x \in \mathbb{Q}^* \mid -3 < x \leq \frac{5}{2}\}$ rispetto all'insieme universo $\mathbb{Q}$ si avrà :



cioè $C_{\mathbb{Q}}(A) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq -3 \quad \text{o} \quad x > \frac{5}{2} \quad \text{o} \quad x = 0\}$

Osservazione.

$$C_U(U) = \emptyset \quad ; \quad C_U(\emptyset) = U$$
$$\forall A \Rightarrow C_U(C_U(A)) = A$$

Esercizio 2.4.9. Per ciascuno dei seguenti insiemi determina due possibili insiemi universo: $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, $B = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27\}$
$C = \{x \in \mathbb{Q}^* \mid x > -\frac{1}{2}\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 24\}$

Esercizio 2.4.10. Dati $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 10\}$,$B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 19\}$ e
$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq -5 \text{ o } x > \frac{3}{2}\}$ determinare :
$C_{\mathbb{N}}(A), C_{\mathbb{N}}(B), C_{\mathbb{N}}(A \cap B), C_{\mathbb{N}}(A \cup B), C_{\mathbb{Z}}(A), C_{\mathbb{Z}}(B), C_{\mathbb{Q}}(C)$

2.4.6 Prodotto cartesiano

Definizione 2.4.8. Si definisce *prodotto cartesiano* tra due insiemi A e B l'insieme, indicato con $A \times B$, di tutte le coppie ordinate aventi il primo elemento appartenente ad A ed il secondo appartenente a B.

In simboli :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \quad \text{e} \quad y \in B\}$$

Esempio 2.4.6. Dati $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$ si avrà $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

Gli elementi appartenenti ad $A \times B$ non appartengono nè ad A, nè a B. Essi sono infatti di 'nuova natura': la coppia costituisce una nuova entità.

Con riferimento all'esempio 4.6, $1 \notin A \times B$, $4 \notin A \times B$ invece $(1, 4) \in A \times B$; $(4, 1) \notin A \times B$ e ciò dimostra l'importanza dell'ordine all'interno della coppia.

Si raccomanda di non confondere la coppia (1,4) con $\{1, 4\}$ che invece è un insieme.

Nel caso $B = A$ si conviene di indicare $A \times A$ con A^2

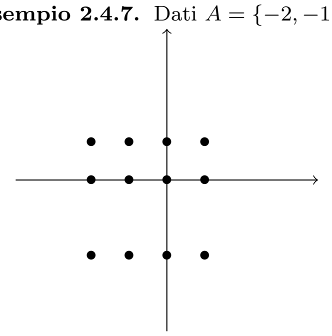
Osservazione. $\forall A \Rightarrow A \times \emptyset = \emptyset$ e $\emptyset \times A = \emptyset$

Anche per questa operazione non vale la proprietà commutativa, infatti, controesempio:
dati $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1\}$ sarà
$A \times B = \{(1, 1), (2, 1)\} \neq \{(1, 1), (1, 2)\} = B \times A$

Facciamo notare che la nuova natura degli elementi di $A \times B$ non permette una sua rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn, a partire da quella di A e B.

Si introduce tuttavia, nel caso in cui A e B siano insiemi numerici, una nuova rappresentazione grafica utilizzando il piano cartesiano nel quale ogni coppia ordinata è individuata da un punto.

Esempio 2.4.7. Dati $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{-2, 0, 1\}$ la rappresentazione nel piano cartesiano di $A \times B$ sarà:



Teorema 2.4.1. *Se* $|A| = n$ *e* $|B| = m$ *allora* $|A \times B| = n \cdot m$

Dimostrazione.

$$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$
$$|B| = m \Rightarrow B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

Le coppie con primo elemento a_1 sono m, infatti esse sono:

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m)$$

Le coppie con primo elemento a_2 sono ancora m, infatti esse sono:

$$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m)$$

Procedendo con questo ragionamento possiamo affermare che con ogni elemento di A si ottengono m coppie. Quindi in tutto $\underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ volte}}$ coppie, cioè $n \cdot m$ coppie. □

Esercizio 2.4.11. Determinare $A \times B$ e $B \times A$ per elencazione e graficamente nel piano cartesiano essendo: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$,$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$

Esercizio 2.4.12. Dati $A = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$ e $B = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$ determinare la cardinalità di $P(A \times B)$

Il teorema 2.4.1 ci permette di calcolare la cardinalità di $A \times B$ se sono note le cardinalità di A e B anche se non ne conosciamo gli elementi.

Questo non è invece possibile per le altre operazioni tra A e B, infatti, non possiamo calcolare $|A \cup B|$, $|A \cap B|$,$|A \backslash B|$, $|B \backslash A|$, $|A \triangle B|$ perchè, non conoscendo gli elementi dei due insiemi non sappiamo quali e quanti sono comuni ad entrambi.

Possiamo però individuare quali sono i valori minimi e massimi che possono assumere pensando alle situazioni 'estreme' nelle quali gli insiemi sono disgiunti oppure uno è sottoinsieme dell'altro.

Quindi se, per esempio, $|A| = 5$ e $|B| = 3$ allora $|A \cup B|$ come valore minimo assume valore 5 (caso in cui $B \subseteq A$) e come valore massimo assume valore 8 (caso in cui $A \cap B = \emptyset$), scriviamo dunque

$$5 \leq |A \cup B| \leq 8$$

Analogamente si determina :

$$\underbrace{0}_{\text{quando} A\cap B=\emptyset} \leq |A \cap B| \leq \underbrace{3}_{\text{quando} B\subseteq A} \quad ; \quad \underbrace{2}_{\text{quando} B\subseteq A} \leq |A \backslash B| \leq \underbrace{5}_{\text{quando} A\cap B=\emptyset}$$

$$\underbrace{0}_{\text{quando} B\subseteq A} \leq |B \backslash A| \leq \underbrace{3}_{\text{quando} A\cap B=\emptyset} \quad ; \quad \underbrace{2}_{\text{quando} B\subseteq A} \leq |A \triangle B| \leq \underbrace{8}_{\text{quando} A\cap B=\emptyset}$$

Un'attenta analisi delle cardinalità degli insiemi può esserci d'aiuto nell'affrontare problemi la cui risoluzione può essere svolta utilizzando una rappresentazione insiemistica.

Esempio 2.4.8. Nella mensa di una azienda con 110 operai :

i) 40 mangiano almeno il primo piatto
ii) 53 mangiano solo il secondo piatto
iii) 13 mangiano sia il primo che il secondo piatto.

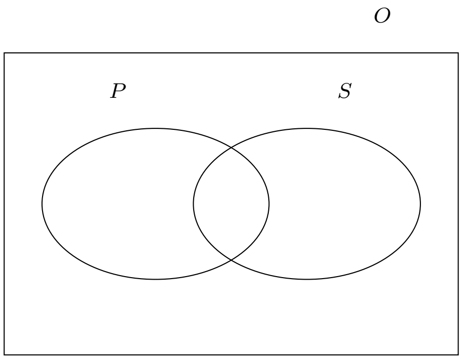
Quanti operai

a) non mangiano?
b) mangiano solo il primo piatto?
c) mangiano solo un piatto?
d) non mangiano il secondo piatto?

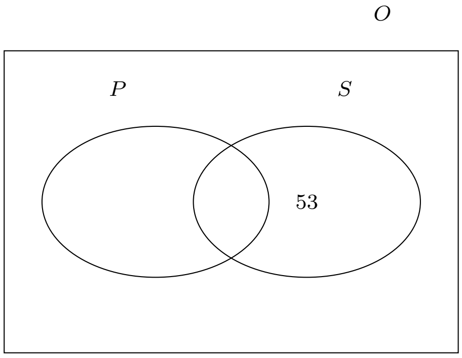
Se indichiamo con O l'insieme degli operai (in tale contesto insieme universo) P ed S rispettivamente l'insieme degli operai che mangiano il primo piatto e l'insieme di quelli che mangiano il secondo piatto, per rispondere alle domande dovremo calcolare nell'ordine :

$$|C_O(P \cup S)| \; ; \; |P \setminus S| \; ; \; |P \triangle S| \; ; \; |C_O(S)|$$

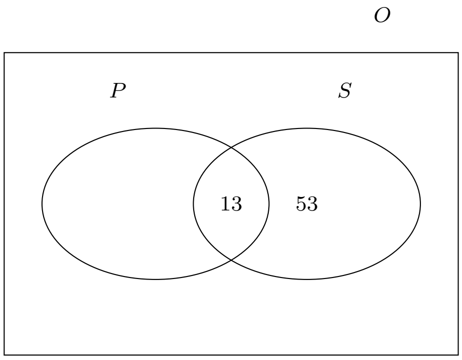
Può essere utile allo scopo dare una rappresentazione grafica del problema, con i diagrammi di Eulero-Venn, convenendo di indicare non gli elementi appartenenti agli insiemi, ma le rispettive cardinalità.



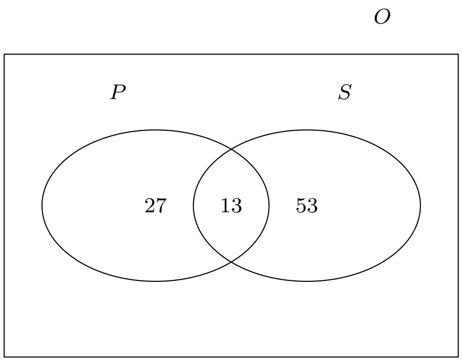
Dall'ipotesi ii) possiamo ricavare $|S \setminus P| = 53$ cioè



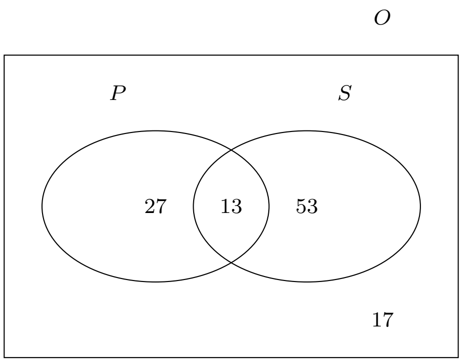
Dall'ipotesi iii) possiamo ricavare $|P \cap S| = 13$ cioè



e dunque, utilizzando l'ulteriore ipotesi i) cioè $|P| = 40$ ricaviamo che
$|P \setminus S| = |P| - |P \cap S| = 40 - 13 = 27$ cioè



Sapendo infine che gli operai sono 110 si ricava
$|C_O(P \cup S)| = |O| - |P \cup S| = 110 - 93 = 17$ cioè



Dall'esame attento della rappresentazione finale possiamo rispondere alle domande:

$$a)|C_O(P \cup S)| = 17 \qquad b)|P \setminus S| = 27 \qquad c)|P \triangle S| = 80 \qquad d)|C_O(S)| = 44$$

2.5 Esercizi riepilogativi

Esercizio 2.5.1. Determinare la rappresentazione per proprietà caratteristica degli insiemi:

$$A = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots\} \qquad B = \{1, -2, 4, -8, 16, -32, 64\}$$
$$C = \{\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36} \ldots\} \qquad D = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$$
$$E = \{1, 3, 6, 11, 20, 37, 70, \ldots\}$$

Esercizio 2.5.2. Dati gli insiemi :

$$A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 \leq x < 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 \leq x \leq 3\}$$

determinare :

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B, \quad A \times (A \cap B), \quad P(B \setminus A)$$

Esercizio 2.5.3. Siano

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{1}{2} \leq x < \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{18}{5} - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{25}\right)\right] : \left[\left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{3}{25}\right]\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \left[\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2 \left(5 - \frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^3\right] - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\}$$

determinare : $A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A, \quad C_Q(A), \quad C_Q(B)$

Esercizio 2.5.4. Dati gli insiemi :

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5 : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}\right] + (-13)^0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid -2 < x \leq \left(3 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5} - 1\right)^2 - (-3)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + 2\}$$

determinare: $A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A, \quad \overline{B}_Q, \quad A \triangle B$

Esercizio 2.5.5. Siano

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 \leq x \leq 1 \quad \text{o} \quad 5 < x \leq 7\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 < x < 4\}$$

determinare:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A, \quad P(B \setminus A), \quad A \times (A \cap B)$$

Esercizio 2.5.6. Dati gli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq E_1)$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid E_2 \leq x < 2.0\overline{5}\ \}$$

con

$$E_1 = \left[\frac{\left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)^3}{\left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)^6}\right]^{-1} - \left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)^{-2} : \left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)^{-3}$$
$$E_2 = \left[\left(-1 - \frac{1}{2}\right) : \left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right] \cdot \frac{1}{4} - \frac{19}{9} : \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2$$

determinare :

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{A}_{\mathbb{Q}}, \quad \overline{B}_{\mathbb{Q}}, \quad \overline{B \setminus A}_Q$$

Si chiede infine se $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{37}{18}\}$ è disgiunto da B.

Esercizio 2.5.7. Dati $A = \{\{2\}, \{0\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$ determinare:

$$P(B) \cup A, \quad P(B) \cap A, \quad A \setminus P(B), \quad P(B) \setminus A$$

Esercizio 2.5.8. Siano A e B due insiemi tali che :

$$A \times B = \{(-1,1), (0,1), (1,1), (-1,2), (0,2), (1,2)\}$$

determinare : $A \cup B$, $A \cap B$, $C = (A \times B) \setminus A^2$, $P(C)$

Esercizio 2.5.9. Siano A e B due insiemi con $|A| = 20$ e $|B| = 8$, determinare:

1. $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|B \setminus A|$, $|A \times B|$, $|P(B)|$
2. $|A \cup B|$ e $|A \setminus B|$ sapendo che $|A \cap B| = 3$

Esercizio 2.5.10. Se $|A| = 8$ e $|B| = 7$, determinare le cardinalità di :

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, P(A), \quad B \times A$$

Esercizio 2.5.11. Siano A e B due insiemi disgiunti con $|A| = 10$ e $|B| = 7$, determinare :

$$|A \cup B|, \quad |A \cap B|, \quad |A \setminus B|, \quad |A \times B|, \quad |P(B)|$$

Esercizio 2.5.12. Individuare la relazione tra A e B nei seguenti casi:

1. $A \cap B = A$
2. $A \cup B = A$
3. $A \setminus B = \emptyset$
4. $\overline{A}_B = B$

Esercizio 2.5.13. Per ciascuna delle seguenti affermazioni false fornisci un controesempio:

1. $A \cup B = A$
2. se $|A| = 3$ e $|B| = 5 \Rightarrow |A \cap B| = 3$
3. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$
4. se x è multiplo di 3 è anche multiplo di 6

Esercizio 2.5.14. Determinare una scrittura più semplice per i seguenti insiemi:

1. $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$
2. $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$
3. $(A \cup B) \setminus (B \setminus A)$
4. $(B \setminus A) \cup A$

Esercizio 2.5.15. In una scuola con 150 alunni ci sono:

- 23 studenti che frequentano lo sportello di matematica
- 41 studenti che frequentano solo lo sportello di chimica
- 3 studenti che frequentano sia lo sportello di chimica che quello di matematica

Quanti sono gli studenti che:

1. frequentano solo lo sportello di matematica?
2. non frequentano sportelli?

Esercizio 2.5.16. In un pomeriggio assolato 20 alunni dovrebbero studiare inglese e matematica ; 8 non studiano inglese,10 studiano matematica e 4 non studiano niente. Quanti allievi studiano entrambe le materie?

Esercizio 2.5.17. In una classe di 20 studenti ,18 hanno visitato Venezia, 14 Roma e 5 Firenze. Sapendo che 3 soli hanno visitato le 3 città, 5 sia Firenze che Venezia, 3 esclusivamente Venezia, determina quanti hanno visitato :

1. solo Firenze
2. Firenze e Roma
3. nessuna delle tre città
4. non hanno visitato Roma

Capitolo 3

MONOMI

3.1 Introduzione

Per rispondere alla domanda su quale sia il triplo del successivo del numero 7 si esegue il seguente calcolo: $3 \cdot (7+1)$ ottenendo come risultato il numero 24

Definizione 3.1.1. Si dice *espressione aritmetica* una scrittura che si ottiene mediante operazioni tra numeri.

L'espressione sopra calcolata è un esempio di espressione aritmetica.
Se ora volessimo determinare il triplo del successivo di un generico numero naturale n useremmo la scrittura:

$$3 \cdot (n+1)$$

Definizione 3.1.2. Si dice *espressione algebrica* una scrittura che si ottiene mediante operazioni tra numeri e lettere.

Quindi $3 \cdot (n+1)$ è un esempio di espressione algebrica. Sono esempi di espressioni algebriche:

$$2 \cdot (a+3b)$$
$$(a+7x) \cdot x$$
$$\frac{2a+3b}{2} + 5c : (y-2)$$

Cominciamo a studiare le espressioni algebriche introducendo le più semplici tra esse.

3.2 Monomi

Definizione 3.2.1. Si dice *monomio* un'espressione algebrica contenente solo l'operazione di moltiplicazione.

Sono monomi le espressioni algebriche:

$$3 \cdot a \cdot b \cdot b \quad , \quad \frac{3}{5} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot b$$

non lo sono

$$3 \cdot a : b \quad , \quad \frac{3}{5}a + b \quad , \quad 2\frac{ab}{c} \quad , \quad 4-a$$

Definizione 3.2.2. Un monomio si dice ridotto a *forma normale* quando contiene un solo fattore numerico, detto coefficiente, ed una parte letterale in cui ogni lettera figura una sola volta con l'esponente ottenuto utilizzando la definizione di potenza.

$3 \cdot a \cdot b \cdot b$ in forma normale si scrive $3ab^2$

$\frac{3}{5} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot b$ in forma normale si scrive $\frac{2}{5}ab$

Altri esempi di monomi scritti in forma normale sono:
$-\frac{2}{7}a^2b^5c \quad , \quad 2x^3y^6$

D'ora in poi quando parleremo di monomi li intenderemo già scritti in forma normale.

Osservazione. Non è un monomio l'espressione $2a^3bc^{-2}$ perchè una sua scrittura equivalente è $\frac{2a^3b}{c^2}$ nella quale compare anche l'operazione di divisione.

Qualora il coefficiente sia 1 si conviene di scrivere la sola parte letterale:

$$1a^2b = a^2b \quad , \quad 1x^2y^3z = x^2y^3z$$

Analogamente la scrittura $-a^2b$ indica un monomio con coefficiente -1 e parte letterale a^2b

Definizione 3.2.3. Si dice *monomio nullo* un monomio con coefficiente uguale a zero.

Definizione 3.2.4. Si dice *grado relativo ad una lettera* di un monomio non nullo l'esponente con cui tale lettera compare nel monomio.

Esempio 3.2.1. Il grado del monomio $3a^3b^2c$ relativo

alla lettera

- a è 3
- b è 2
- c è 1
- d è 0 perchè $3a^3b^2c = 3a^3b^2c \cdot 1 = 3a^3b^2c \cdot d^0$
- e è 0
- ....
- ....

Definizione 3.2.5. Si dice *grado assoluto* di un monomio non nullo la somma dei gradi relativi.

Esempio 3.2.2. Il grado assoluto di $3a^3b^2c$ è 6, quello di $-2xy$ è 2.

Osservazione. Ogni numero diverso da zero è un monomio di grado assoluto zero (ovviamente è zero anche il grado relativo ad ogni lettera).

Si è convenuto di non attribuire alcun grado al monomio nullo in quanto qualunque valore sarebbe corretto, infatti:

$$0 = \begin{cases} 0x^0 \\ 0xyz^3 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Definizione 3.2.6. Due monomi si dicono *simili* quando hanno la stessa parte letterale.

Definizione 3.2.7. Due monomi si dicono *opposti* quando sono simili e hanno coefficienti opposti.

Esempio 3.2.3.

$$\begin{aligned}
&2ab \quad , \quad -3ab \quad \text{sono simili ma non opposti} \\
&\frac{7}{2}a^2b \quad , \quad -\frac{7}{2}a^2b \quad \text{sono opposti} \\
&\frac{2}{3}a \quad , \quad \frac{3}{2}a \quad , \quad \text{sono simili ma non opposti} \\
&-5a \quad , \quad 5a^2 \quad \text{non sono simili}
\end{aligned}$$

3.3 Operazioni tra monomi

Definizione 3.3.1. La *somma algebrica* di monomi simili è un monomio simile ad essi ed avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio 3.3.1.

$$\begin{aligned}
&2a^2b + 3a^2b = 5a^2b \\
&-3xy^3 - 2xy^3 + xy^3 = -4xy^3 \\
&\frac{1}{2}x^2a + \frac{3}{4}x^2a - x^2a = \frac{1}{4}x^2a
\end{aligned}$$

Osservazione. $3a^2b + 2ab$ non dà come risultato un monomio (non essendo simili i monomi) ma un'espressione algebrica che definiremo in seguito.

Definizione 3.3.2. Il *prodotto* di monomi è un monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali (applicando le proprietà delle potenze).

Esempio 3.3.2.

$$\begin{aligned}
&-2a^2b^3 \cdot (-3abc) = 6a^3b^4c \\
&\frac{2}{5}x^3y \cdot \left(-\frac{15}{4}x^5\right) = -\frac{3}{2}x^8y
\end{aligned}$$

Definizione 3.3.3. La *potenza* di un monomio è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale (applicando le proprietà delle potenze).

Esempio 3.3.3.

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{2}{3}ab^2\right)^3 = -\frac{8}{27}a^3b^6 \\
&(-a^2b^3c)^2 = a^4b^6c^2 \\
&\left[(3ab^2)^3 - 20a^3b^6\right]^2 = \left[27a^3b^6 - 20a^3b^6\right]^2 = \left[7a^3b^6\right]^2 = 49a^6b^{12}
\end{aligned}$$

Definizione 3.3.4. Il *quoziente* tra due monomi è una espressione algebrica che si ottiene dividendo tra loro i coefficienti e le parti letterali.

Esempio 3.3.4.

$$15x^3y^4z : (-3x^2z) = -5xy^4$$
$$\frac{5}{2}a^5b^2 : \left(\frac{15}{4}a^5b\right) = \frac{2}{3}b$$

Osservazione. Da $(10x^3y^2) : (2x^5y)$ si ottiene $5x^{-2}y$ che non è un monomio. Il quoziente tra due monomi è dunque un monomio solo se il dividendo contiene almeno tutte le lettere del divisore con grado relativo non minore.

Quando il quoziente tra due monomi è un monomio il dividendo si dice *divisibile* per il divisore e il divisore si dice *fattore* del dividendo.

Esempio 3.3.5.

$$\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3 - \left(-\frac{1}{4}ab^2c\right)^3 - \left(\frac{1}{2}ab^2\right)^2\left(-\frac{1}{16}ab^2c^3\right)\right] : \left(-\frac{5}{4}ab^2c\right)^2 =$$
$$\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3 - \left(-\frac{1}{64}a^3b^6c^3\right) - \left(\frac{1}{4}a^2b^4\right)\left(-\frac{1}{16}ab^2c^3\right)\right] : \left(\frac{25}{16}a^2b^4c^2\right) =$$
$$\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3 + \frac{1}{64}a^3b^6c^3 + \frac{1}{64}a^3b^6c^3\right] : \left(\frac{25}{16}a^2b^4c^2\right) =$$
$$\left[\frac{25}{32}a^3b^6c^3\right] : \left(\frac{25}{16}a^2b^4c^2\right) =$$
$$\frac{1}{2}ab^2c$$

Esercizio 3.3.1. Semplifica le seguenti espressioni:

- $\left(2xy^2 - \frac{3}{2}xy^2\right) - \left[\left(xy^2 + 2xy^2 - 4xy^2\right)\right]$
- $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2 - \left[\frac{3}{2}x^5y^4 : \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 - 3x^3y^2\right]\left(-\frac{1}{3}x\right)$
- $\left[-\frac{2}{5}x^3y : \left(-\frac{1}{5}x^2y\right) + \frac{2}{3}(-3x)\right]^7 + \left(x^2 - \frac{2}{3}x^2y : y\right)^0 + 5$
- $(x+x)^3(-y)^5 - \left(-\frac{1}{3}xy - \frac{3}{5}xy + \frac{7}{10}xy\right)\left(xy^2 - 6xy^2\right)^2$
- $\left[\left(x^2y : x\right)y\right] : x - 2y\left[y^2 : (3y) - y\right]$
- $\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right)\left[\frac{8}{5}xy + \frac{8}{5}x^2y^2 : (6xy)\right]^2 - x^4y^2$
- $\left\{a - \left[2a\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) : a\right]\right\}^2 - \left(\frac{2}{3}a + a\right)\left(\frac{2}{3}a - a\right)$
- $a^{5n-1} : a^{n-2} : a^{n+3} + a^{3n-2} + 3a^{3n} : a^2$ con $n \geq 2$

Esercizio 3.3.2. Calcola il valore delle seguenti espressioni attribuendo alle lettere i valori a fianco indicati:

- $-\frac{2}{3}a^3b^2 + \frac{1}{4}\left[(-2ab)(-ab) - \frac{1}{2}\cdot 3a^2(-2b^2) - 2a^2b^2 + 5a(ab^2)\right]$ per $a = \frac{1}{2}$ e $b = -3$
- $\left[2a^3 : (-8a^3)\right]a + (-a^2)^2 : a^3 - \frac{1}{4}\left(2a^8 - \frac{5}{2}a^2(-a^2)^3\right)^0$ per $a = \frac{4}{3}$

Esercizio 3.3.3. Dopo aver stabilito il grado relativo ed assoluto dei monomi:
$15xy^4z; -10x^3t; xz^3; y^3z^2; \frac{3}{2}z$ stabilire quali dividono $40x^3y^4z^2$

Definizione 3.3.5. Si dice *massimo comun divisore* ($M.C.D.$) di monomi un monomio di grado massimo che è un fattore (o divisore) di tutti i monomi dati.

Per calcolare il $M.C.D.$ tra monomi è sufficiente scegliere un qualunque monomio avente per parte letterale il prodotto di tutte le lettere comuni prese con l'esponente minore (questo affinchè il monomio ottenuto sia un fattore comune).

Vista l'arbitrarietà del coefficiente del $M.C.D.$ si conviene di assegnare ad esso il $M.C.D.$ tra i coefficienti, qualora questi siano interi, il numero 1 se almeno uno di essi è frazionario.

Esempio 3.3.6.

$$M.C.D.(30a^2b^3, -18a^3c, 24a^4b^5c) = 6a^2(\text{oppure} - 6a^2)$$
$$M.C.D.\left(\frac{21}{13}a^3b^2, -\frac{7}{8}ab^5, 5ab^4c\right) = \pm ab^2$$
$$M.C.D.(12ab^5, -20x) = \pm 4$$
$$M.C.D.(5x^2z, 9y^4) = \pm 1$$

Definizione 3.3.6. Si dice *minimo comune multiplo* ($m.c.m.$) di monomi un monomio di grado minimo che è divisibile per tutti i monomi dati (o multiplo dei monomi dati).

Per calcolare il $m.c.m.$ tra monomi è sufficiente scegliere un qualunque monomio avente per parte letterale il prodotto di tutte le lettere comuni e non comuni prese con l'esponente maggiore (questo affinchè il monomio ottenuto sia un multiplo comune).

Vista l'arbitrarietà del coefficiente del $m.c.m.$ si conviene di assegnare ad esso il $m.c.m.$ tra i coefficienti, qualora questi siano interi, il numero 1 se almeno uno di essi è frazionario.

Esempio 3.3.7.

$$m.c.m.(30a^2b^3, -18a^3c, 24a^4b^5c) = 360a^4b^5c(\text{oppure} - 360a^4b^5c)$$
$$m.c.m.\left(\frac{21}{13}a^3b^2, -\frac{7}{8}ab^5, 5ab^4c\right) = \pm a^3b^5c$$
$$m.c.m.(12ab^5, -20x) = \pm 60ab^5x$$
$$m.c.m.(5x^2z, 9y^4) = \pm 45x^2y^4z$$

Esercizio 3.3.4. Determinare M.C.D. e m.c.m. tra i seguenti gruppi di monomi:

- $15x^2yz^3 \quad 20y^3 \quad 10xy^2 \quad 12yz^5$
- $10ab^4 \quad 6a^3 \quad 15b^2$
- $4x^3y^2 \quad -12x^5y \quad \frac{2}{3}y^6$
- $27a^3b \quad -81a^2b^2 \quad 9ab^3 \quad 18b^4$
- $-\frac{5}{3}a^6b^2c^4 \quad \frac{7}{3}a^3c^3 \quad -2ab$
- $2a^{2n} \quad 4a^nb \quad 6a^nb^2$ con $n \geq 0$

Capitolo 4

POLINOMI

4.1 Polinomi

Definizione 4.1.1. Si dice *polinomio* un'espressione ottenuta dalla somma algebrica di monomi.

Esempio 4.1.1. Sono polinomi le seguenti espressioni:

$$-2ab + 3a^2 - 2b + 1$$

$$\frac{1}{2}a^2 + 3 - 2a + 5 - a$$

All'occorrenza un polinomio può essere 'etichettato' utilizzando una lettera maiuscola seguita da una parentesi tonda contenente le lettere presenti nel polinomio; con riferimento all'esempio scriveremo:

$$P(a, b) = -2ab + 3a^2 - 2b + 1$$

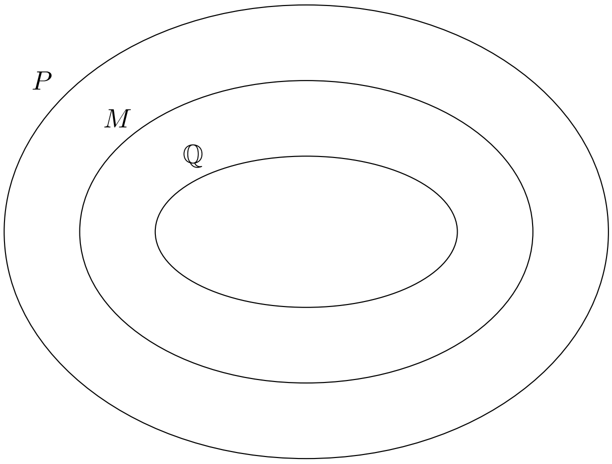
$$Q(a) = \frac{1}{2}a^2 + 3 - 2a + 5 - a$$

Definizione 4.1.2. Un polinomio si dice *ridotto a forma normale* se non contiene monomi simili.

Relativamente all'esempio precedente il polinomio $P(a, b)$ è già in forma normale; la forma normale del polinomio $Q(a)$ è $\frac{1}{2}a^2 + 8 - 3a$

D'ora in poi, quando parleremo di polinomi, li intenderemo ridotti a forma normale.

Osservazione. Ogni monomio è un particolare polinomio in quanto si può ottenere come somma di monomi simili. Ricorrendo alla terminologia insiemistica possiamo affermare che l'insieme $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme dell'insieme dei monomi M che a sua volta è sottoinsieme dell'insieme dei polinomi P.



Il monomio nullo pensato come un polinomio si chiama *polinomio nullo*

E' consuetudine chiamare binomio, trinomio, e quadrinomio rispettivamente un polinomio con due, tre, quattro monomi.

Definizione 4.1.3. Si dice *grado relativo (assoluto)* di un polinomio non nullo il grado relativo (assoluto) del monomio componente di grado maggiore.

Esempio 4.1.2. Dato il polinomio: $3b^4 - 2ab^3c + \frac{1}{2}ac^3 - 5a^2b^2$ il grado relativo

alla lettera

- a è 2 ed è dato dal monomio $-5a^2b^2$
- b è 4 ed è dato dal monomio $3b^4$
- c è 3 ed è dato dal monomio $\frac{1}{2}ac^3$
- d è 0
- ....

e il grado assoluto è 5 ed è dato dal monomio $-2ab^3c$.

Esempio 4.1.3. Dato il polinomio: $x^3y - \frac{3}{5}x^2y^2 - 2y^2$ il grado relativo

alla lettera

- x è 3 ed è dato dal monomio x^3y
- y è 2 ed è dato indifferentemente da $-\frac{3}{5}x^2y^2$ e $-2y^2$

e il grado assoluto è 4 ed è dato indifferentemente da x^3y e $-\frac{3}{5}x^2y^2$.

Dato un polinomio, con riferimento ad una lettera, si dice *termine noto* il monomio di grado zero.

Qualora il polinomio contenga una sola lettera si dice *coefficiente direttivo* il coefficiente del monomio di grado maggiore.

Definizione 4.1.4. Un polinomio si dice *omogeneo* quando tutti i monomi che lo compongono hanno lo stesso grado assoluto.

Definizione 4.1.5. Un polinomio si dice *ordinato* rispetto ad una lettera quando i monomi componenti sono scritti secondo le potenze crescenti o decrescenti di quella lettera.

Generalmente si preferisce ordinare secondo le potenze decrescenti della lettera.

Definizione 4.1.6. Un polinomio si dice *completo* rispetto ad una lettera quando contiene tutte le potenze di quella lettera dal grado relativo fino a zero.

Esercizio 4.1.1. Stabilire grado assoluto e relativo dei seguenti polinomi e ordinarli rispetto a ciascuna lettera:

- $x^2y^3 + x^5 - 2xy^4 - 3x^3y^2 + 9y^5$
- $2a^3b - a^4 + b^4 + 8a^2b^2$

4.2 Operazioni

Definizione 4.2.1. La *somma* tra polinomi è il polinomio che si ottiene sommando i monomi di tutti i polinomi.

Esempio 4.2.1.
$$(3a - 5ab + 2) + \left(-2a^2 + 3 + 2ab\right) = 3a - 3ab + 5 - 2a^2$$

Definizione 4.2.2. La *differenza* tra due polinomi è il polinomio che si ottiene sommando ai monomi del primo polinomio gli opposti del secondo.

Esempio 4.2.2.
$$\begin{aligned}&(3a - 5ab + 2) - \left(-2a^2 + 3 + 2ab\right)\\ &= (3a - 5ab + 2) + \left(+2a^2 - 3 - 2ab\right) = 2a^2 - 7ab + 3a - 1\end{aligned}$$

In generale l'addizione algebrica tra polinomi si esegue togliendo le parentesi ai polinomi e cambiando il segno a quelli preceduti dal segno meno.

Esempio 4.2.3.
$$(x - 1) + (x - 2y + 3) - (2x + 2 - 5y) = x - 1 + x - 2y + 3 - 2x - 2 + 5y = 3y$$

Esercizio 4.2.1.

- $(a^2 + ab + 3b^2) - (a^2 - 2ab + 3b^2)$
- $(2x - y - z) - (3x + 2y - 3z) - (y + 4x - z) + (5x - 4z + 4y)$

Definizione 4.2.3. Il *prodotto* tra due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni monomio del primo polinomio per tutti quelli del secondo.

Esempio 4.2.4.
$$(3x^2 - xy^4) \cdot (-2x + y^4) = -6x^3 + 3x^2y^4 + 2x^2y^4 - xy^8 = -6x^3 + 5x^2y^4 - xy^8$$

Esercizio 4.2.2.

- $(2x - 3y)\left(\frac{1}{2}y + 5x\right)$
- $\left(2a^2 + b - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + b - 2a^2\right)$
- $(3a^2 - 1)(2a + 1)(a^2 - a + 3)$

Un esempio di una espressione algebrica contenente le operazioni sin qui definite è il seguente:

Esempio 4.2.5.
$(x + 2y)(2x - y + 3) - 2(x^2 - y^2) + (x - y)(y - 3) =$
$2x^2 - xy + 3x + 4xy - 2y^2 + 6y - 2x^2 + 2y^2 + xy - 3x - y^2 + 3y =$
$-y^2 + 4xy + 9y$

Esercizio 4.2.3. $3(x - 1) - (2x - 2)(x + 2) + (2 - y)(x^2 - 4) - (4y - x^2y)$

4.3 Prodotti notevoli

Nel calcolo di una espressione algebrica polinomiale sono spesso presenti particolari moltiplicazioni tra polinomi, anche sotto forma di potenza.Tali prodotti, detti *prodotti notevoli*, si possono determinare mediante regole pratiche che permettono di snellire i calcoli.

1. Somma per differenza

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

infatti
$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2$$

Esempio 4.3.1.

$(2x+3y^2)(2x-3y^2) \underbrace{=}_{\text{con } A=2x \text{ e } B=3y^2} (2x)^2-(3y^2)^2 = 4x^2-9y^4$

$(7x^2-1)(7x^2+1) = 49x^4-1$

$(-2x^2+3y)(-2x^2-3y) = 4x^4-9y^2$

$(5a+2b)(2b-5a) = 4b^2-25a^2$

Dagli esempi si nota che:
il prodotto tra la somma di due termini e la loro differenza si ottiene facendo il quadrato del termine che mantiene il segno, meno il quadrato di quello che cambia di segno.

Esercizio 4.3.1.

- $(-4x+3y^2)(-4x-3y^2)$
- $\left(\frac{1}{2}a^3-5b\right)\left(\frac{1}{2}a^3+5b\right)$
- $\left(\frac{2}{3}x^2y+7y^4\right)\left(7y^4-\frac{2}{3}x^2y\right)$

2. Quadrato di binomio

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$

infatti

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+AB+B^2 = A^2+2AB+B^2$$

Esempio 4.3.2.

$(2x-7)^2 = (2x)^2+2(2x)(-7)+(-7)^2 = 4x^2-28x+49$

$(y^3+5xy)^2 = y^6+10xy^4+25x^2y^2$

$\left(-\frac{2}{3}+x^2\right)^2 = \frac{4}{9}-\frac{4}{3}x^2+x^4$

$\left(-\frac{1}{2}a-3b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2+3ab+9b^2$

$(x-2y+3)(x-2y-3) = (x-2y)^2-3^2 = x^2-4xy+4y^2-9$

Riassumendo possiamo memorizzare che:
il quadrato di un binomio si ottiene sommando il quadrato del primo termine, il doppio prodotto dei due termini e il quadrato del secondo termine.

Esercizio 4.3.2.

$(3x^2-xy)^2$; $(-2x-y^2)^2$; $\left(\frac{1}{2}x^3+4\right)^2$; $(y^2+3x+4)(y^2-3x-4)$

3. Quadrato di trinomio

$$(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

infatti

$$\begin{aligned}(A+B+C)^2 &= \\ &= (A+B+C)(A+B+C) \\ &= A^2+AB+AC+AB+B^2+BC+AC+BC+C^2 \\ &= A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC\end{aligned}$$

Esempio 4.3.3.

$(2x - y^2 + 1)^2 = 4x^2 + y^4 + 1 - 4xy^2 + 4x - 2y^2$

$\left(\frac{3}{2} - xy + y^2\right)^2 = \frac{9}{4} + x^2y^2 + y^4 - 3xy + 3y^2 - 2xy^3$

Riassumendo possiamo memorizzare che:

il quadrato di un trinomio si ottiene sommando i quadrati dei tre termini e i doppi prodotti dei termini presi a due a due.

Analogamente il quadrato di un polinomio si ottiene sommando i quadrati di tutti i termini e i doppi prodotti dei termini presi a due a due.

Esempio 4.3.4.

$$\begin{aligned}(x - 2y + 5xy - 1)^2 &= x^2 + 4y^2 + 25x^2y^2 + 1 - 4xy + 10x^2y - 2x - 20xy^2 + 4y - 10xy \\ &= x^2 + 4y^2 + 25x^2y^2 + 1 - 14xy + 10x^2y - 2x - 20xy^2 + 4y\end{aligned}$$

Esercizio 4.3.3.

$(2a + 3b^2 - 5)^2$; $\left(x^2 - xy + \frac{1}{3}\right)^2$; $(-3x + 2xy - 2y + 1)^2$

4. Cubo di binomio

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

infatti

$$\begin{aligned}(A + B)^3 &= (A + B)(A + B)^2 = (A + B)(A^2 + 2AB + B^2) \\ &= A^3 + 2A^2B + AB^2 + A^2B + 2AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

Esempio 4.3.5.

$(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3 + 3(2x)3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

$(x - 5y^2)^3 = x^3 - 15x^2y^2 + 75xy^4 - 125y^6$

$\left(-\frac{1}{3}x^2 + 2x\right)^3 = -\frac{1}{27}x^6 + \frac{2}{3}x^5 - 4x^4 + 8x^3$

$\left(-a - \frac{1}{4}ab\right)^3 = -a^3 - \frac{3}{4}a^3b - \frac{3}{16}a^3b^2 - \frac{1}{64}a^3b^3$

Riassumendo possiamo memorizzare che:

il cubo di un binomio si ottiene sommando il cubo del primo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo termine per il primo e il cubo del secondo termine.

Esercizio 4.3.4.

$\left(\frac{3}{4}x + 4\right)^3$; $(x^2 - 3)^3$; $\left(-xy - \frac{1}{2}x\right)^3$

Abbiamo sinora imparato a calcolare la potenza di un binomio fino al terzo grado.

Riscrivendo i risultati ottenuti:

$$\begin{aligned}(A + B)^0 &= 1 \\ (A + B)^1 &= A + B \\ (A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ (A + B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

possiamo notare che il risultato è formalmente sempre un polinomio omogeneo, ordinato e completo in A e B con grado uguale a quello della potenza che stiamo calcolando.

Osserviamo inoltre, che il primo e l'ultimo coefficiente di ogni polinomio risultato (nell'ordine in cui è stato scritto) sono uguali ad 1, mentre gli altri sono la somma dei due coefficienti 'vicini' della potenza precedente.

Si potrebbe dimostrare, con strumenti matematici che ancora non possediamo, che quanto osservato si può generalizzare per calcolare una qualsiasi potenza di binomio.

Continuando quindi l'elenco delle potenze avremo:

$$\begin{array}{ll}
(A+B)^3 = & \quad 1A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + 1B^3 \\
 & \quad \searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \\
(A+B)^4 = & 1A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + 1B^4 \\
 & \searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \\
 & \quad .. \qquad .. \qquad .. \qquad ..
\end{array}$$

che ci permette di enunciare la seguente regola pratica:

la *potenza n-esima* di un binomio è un polinomio omogeneo, ordinato e completo di grado n i cui coefficienti si ricavano dalla seguente tabella (detta Triangolo di Tartaglia) nella quale ogni numero è la somma dei due numeri 'vicini' sopra ad esso:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad 1
\end{array}$$

Esempio 4.3.6.

$$\begin{aligned}
(2x-y^2)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4(-y^2) + 10(2x)^3(-y^2)^2 + 10(2x)^2(-y^2)^3 + \\
&+ 5(2x)(-y^2)^4 + (-y^2)^5 \\
&= 32x^5 - 80x^4y^2 + 80x^3y^4 - 40x^2y^6 + 10xy^8 - y^{10}
\end{aligned}$$

Esercizio 4.3.5.

$(3x-x^2)^4 \quad ; \quad (x+2y)^6$

Vediamo ora due esempi di espressioni algebriche contenenti le operazioni e i prodotti notevoli tra polinomi:

Esempio 4.3.7.

$[(y^2+1)(y-1)(y+1) - (y^2+4)^2 + (2+y)(y-2) + (-4y)^2 + 8(3-y^2)]^3 - (3y^2-1)^2 - 26 =$
$[(y^2+1)(y^2-1) - (y^4+8y^2+16) + y^2 - 4 + 16y^2 + 24 - 8y^2]^3 - (9y^4 - 6y^2 + 1) - 26 =$
$[y^4 - 1 - y^4 - 8y^2 - 16 + y^2 - 4 + 16y^2 + 24 - 8y^2]^3 - 9y^4 + 6y^2 - 1 - 26 =$
$[y^2+3]^3 - 9y^4 + 6y^2 - 27 =$
$y^6 + 9y^4 + 27y^2 + 27 - 9y^4 + 6y^2 - 27 = y^6 + 33y^2$

Esempio 4.3.8.

$(x+2y-1)(x+2y+1) - (x+2y+1)^2 + 2(2y+x) =$
$(x+2y)^2 - 1 - x^2 - 4y^2 - 1 - 4xy - 2x - 4y + 4y + 2x =$
$x^2 + 4xy + 4y^2 - x^2 - 4y^2 - 4xy - 2 = -2$

Esercizio 4.3.6.

- $(a+3b)^2(a-3b)^2 - (-3b)^4 - (1-a^2)^2 + (a+b)(a-b) + 2(-3ab)^2$
- $(x^2-3x+2)^2 + x^2(x+2)(x-3) + 2x(x-1)^3 + x(x^2-x+10)$

4.4 Divisione

Per dividere un polinomio per un monomio non nullo è sufficiente dividere ogni suo termine per il monomio. L'espressione algebrica ottenuta è un polinomio solo quando il monomio divisore è un fattore di tutti i termini componenti il polinomio dividendo.

Esempio 4.4.1.
$(-6x^2y^3 + 4xy^2 - 5xy^4) : (2xy^2) = -3xy + 2 - \frac{5}{2}y^2$

Esercizio 4.4.1. $\left(\frac{3}{2}xy^3z^2 - \frac{1}{2}xyz + x^2y^2z\right) : \left(\frac{1}{2}xyz\right)$

Vogliamo ora definire ed imparare ad eseguire la divisione tra due polinomi.

Definizione 4.4.1. Dati due polinomi P e D (rispettivamente dividendo e divisore) il quoziente Q e il resto R della divisione tra P e D sono due polinomi tali che

$$P = D \cdot Q + R \text{ ove il grado di } R \text{ è minore del grado di } D$$

Per imparare ad eseguire la divisione tra due polinomi procediamo con un esempio:
data la divisione

$$(x - 6x^3 + 2x^4 - 1) : (x^2 - 2)$$

ordiniamo dividendo P e divisore D e otteniamo:

$$(2x^4 - 6x^3 + x - 1) : (x^2 - 2)$$

Dividiamo il monomio di grado massimo di P per quello di grado massimo di D (essi sono ovviamente i primi monomi di P e D essendo questi ultimi ordinati). Il risultato ottenuto, $Q_1 = 2x^2$, è il primo candidato quoziente mentre il primo candidato resto si ottiene calcolando
$R_1 = P - D \cdot Q_1 = 2x^4 - 6x^3 + x - 1 - (x^2 - 2) \cdot 2x^2 = 2x^4 - 6x^3 + x - 1 - 2x^4 + 4x^2 = -6x^3 + 4x^2 + x - 1$

Poichè il grado di R_1 non è minore del grado di D, ripetiamo il procedimento per la divisione $R_1 : D$ ed otteniamo $Q_2 = -6x$ e $R_2 = R_1 - D \cdot Q_2 = -6x^3 + 4x^2 + x - 1 - (x^2 - 2)(-6x) = -6x^3 + 4x^2 + x - 1 + 6x^3 - 12x = 4x^2 - 11x - 1$

Poichè ancora il grado di R_2 non è minore del grado di D, continuiamo con $R_2 : D$ ottenendo $Q_3 = 4$ e $R_3 = R_2 - D \cdot Q_3 = 4x^2 - 11x - 1 - (x^2 - 2) \cdot 4 = -11x + 7$

Poichè finalmente il grado di R_3 è minore del grado di D, possiamo scrivere (riassumendo il procedimento svolto)

$$\begin{aligned} P &= D \cdot Q_1 + R_1 = D \cdot Q_1 + D \cdot Q_2 + R_2 = D \cdot Q_1 + D \cdot Q_2 + D \cdot Q_3 + R_3 \\ &= \quad \text{(proprietà distrubutiva)} \\ &= D \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + R_3 \end{aligned}$$

con riferimento al nostro esempio abbiamo:
$2x^4 - 6x^3 + x - 1 = (x^2 - 2) \cdot (2x^2 - 6x + 4) + (-11x + 7)$
e quindi possiamo dire che il quoziente Q è $2x^2 - 6x + 4$ e il resto R è $-11x + 7$

Il procedimento appena illustrato viene sintetizzato con la seguente regola pratica:

$$
\begin{array}{r|l}
P \to 2x^4 - 6x^3 + 0x^2 + x - 1 & x^2 - 2 \leftarrow D \\ \cline{2-2}
-D \cdot Q_1 \to -2x^4 \qquad\quad + 4x^2 \qquad\qquad & 2x^2 - 6x + 4 \leftarrow Q \\ \cline{1-1}
 & \uparrow \quad\;\; \uparrow \quad\;\; \uparrow \\
R_1 \to // \; - 6x^3 + 4x^2 + x - 1 & Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \\
-D \cdot Q_2 \to +6x^3 \qquad - 12x \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
R_2 \to // \; + 4x^2 - 11x - 1 & \\
-D \cdot Q_3 \to -4x^2 \qquad\quad + 8 & \\ \cline{1-1}
R = R_3 \to // \; - 11x + 7 &
\end{array}
$$

Osserviamo che:

1. nella precedente 'tabella di divisione' è stato necessario completare formalmente il polinomio dividendo P diversamente da quanto fatto per il divisore D.
2. il grado del quoziente Q è determinato dal monomio Q_1 e quindi esso è la differenza tra il grado del dividendo P e quello del divisore D.
3. dalla definizione di divisione sappiamo che il grado del resto è minore di quello del divisore e infatti nell'esempio svolto è

   $gr(R) = 1 < 2 = gr(D)$.

   E' importante non commettere l'errore di pensare che il grado del resto sia sempre inferiore di uno a quello del divisore come si può verificare con la seguente divisione $(4x^3 - 5x + 16) : (2x^2 - 3x + 2)$ nella quale il resto ha grado zero.

Esercizio 4.4.2.

- $(x^5 - 3x^3 + 2x + x^2 - 2) : (x^2 - x)$
- $(-10x^3 - 6 + 9x^2) : (2 - 5x^2 - 3x)$

Proponiamoci di eseguire una divisione tra polinomi in cui compare più di una lettera:

$$(x^3 - 4y^3 + 2xy^2) : (x^2 + y^2 - 3xy)$$

Per utilizzare il procedimento imparato è necessario stabilire rispetto a quale lettera ordinare i polinomi.

1. divisione rispetto ad x:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2+2xy^2-4y^3 & x^2-3xy+y^2 \\ \cline{2-2}
-x^3+3x^2y-xy^2 & x+3y \\ \hline
// \ +3x^2y+xy^2-4y^3 & \\
-3x^2y+9xy^2-3y^3 & \\ \cline{1-1}
10xy^2-7y^3 &
\end{array}
$$

2. divisione rispetto ad y:

$$
\begin{array}{r|l}
-4y^3 \quad +2xy^2 \quad +0y \ +x^3 & y^2-3xy+x^2 \\ \cline{2-2}
+4y^3 \ -12xy^2 \ +4x^2y & -4y-10x \\ \hline
// -10xy^2 \ +4x^2y \ +x^3 & \\
+10xy^2-30x^2y+10x^3 & \\ \cline{1-1}
-26x^2y+11x^3 &
\end{array}
$$

Osservando che i quozienti e i resti ottenuti con le due divisioni sono diversi, conveniamo di indicarli con $Q(x)$ ed $R(x)$ o $Q(y)$ ed $R(y)$ se sono stati ottenuti rispettivamente rispetto ad x o ad y e quindi:
$Q(x) = x+3y$ e $R(x) = 10xy^2-7y^3$
$Q(y) = -4y-10x$ e $R(y) = -26x^2y+11x^3$

Osservazioni:

1. Nel caso particolare in cui il grado del dividendo P sia minore di quello del divisore D, possiamo affermare che il quoziente Q è il polinomio nullo ed il resto R è proprio il dividendo P infatti possiamo scrivere la seguente uguaglianza:
$$P = D\cdot 0 + P \quad \text{con} \quad gr(P) < gr(D)$$
2. Qualora il resto sia nullo, il divisore D della divisione si dice fattore (o divisore) del polinomio dividendo, infatti:
$$P = D\cdot Q + 0 \quad \text{da cui} \quad P = D\cdot Q$$
Ovviamente anche Q sarà un fattore o divisore di P ed è facile convincerci che in tal caso
$$P : Q = D$$
3. Nelle divisioni tra polinomi in più lettere, se il resto è nullo, i quozienti ottenuti rispetto a ciascuna lettera sono uguali tra loro.

Esercizio 4.4.3.

- $(3a^5-4a^4b-10a^2b^3+4a^3b^2+ab^4):(a^2+b^2)$
- $\left(\frac{5}{8}x^4y-\frac{2}{3}x^3y^2+\frac{3}{2}x^3y-\frac{7}{3}x^2y^3-x^2y^2+xy^4-6xy^3\right):\left(\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}y+2\right)$

4.5 Divisione con la Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione quando il divisore è un polinomio di primo grado con coefficiente direttivo unitario rispetto ad una lettera esiste una regola, detta *Regola di Ruffini*, che consente di determinare quoziente e resto in modo più rapido ed elegante.

Scegliamo di illustrare il nuovo procedimento mediante degli esempi.

Data la divisione $(x^3 - 5x^2 + 3) : (x - 2)$, disponiamo tutti i coefficienti del dividendo, ordinato e formalmente completo, all'interno di una 'tabella':

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 0 & 3 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Scriviamo l'opposto del termine noto del divisore nella 'tabella':

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 0 & 3 \\ +2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Trascriviamo il coefficiente direttivo sotto la linea orizzontale :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 0 & 3 \\ +2 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Moltiplichiamo quest'ultimo per l'opposto del termine noto $(+2)$ e scriviamo il prodotto nella colonna successiva (quella del -5) sulla riga del 2:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 0 & 3 \\ +2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Sommiamo -5 e 2 riportando il risultato sotto la linea orizzontale:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 0 & 3 \\ +2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & -3 & & \end{array}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento moltiplicando -3 e 2, riportando nella colonna successiva il prodotto e calcolando infine la somma:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 0 & 3 \\ +2 & & 2 & -6 & \\ \hline & 1 & -3 & -6 & \end{array}$$

Iterando ancora una volta otteniamo:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 0 & 3 \\ +2 & & 2 & -6 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & -6 & -9 \end{array}$$

L'ultima riga contiene in modo ordinato rispettivamente i coefficienti del quoziente ed il resto. Il quoziente, che sappiamo essere un polinomio di grado due, (uno in meno del dividendo essendo il divisore di grado uno) è dunque $x^2 - 3x - 6$.

Il resto, che sappiamo essere un polinomio di grado zero, è -9.

Un ulteriore esempio è la seguente divisione

$$(2a^2x^2 - 3x^3 + a^4x - 4a^6) : (x + 2a^2)$$

Il calcolo con la regola di Ruffini è:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & -3 & 2a^2 & a^4 & -4a^6 \\
-2a^2 & & 6a^2 & -16a^4 & 30a^6 \\
\hline
 & -3 & 8a^2 & -15a^4 & 26a^6
\end{array}$$

Il quoziente ed il resto risultano rispettivamente:

$Q(x) = -3x^2 + 8a^2x - 15a^4$, $R = 26a^6$

Se avessimo voluto eseguire la divisione rispetto alla lettera a non avremmo potuto usare la nuova regola (non avendo il divisore grado 1 rispetto ad a) e con il metodo generale di divisione avremmo ottenuto:

$Q(a) = -2a^4 + \dfrac{3}{2}a^2x + \dfrac{1}{4}x^2$, $R = -\dfrac{13}{4}x^3$

Osservazione. Se il coefficiente direttivo non è unitario è possibile adattare la regola di Ruffini per eseguire la divisione. In questo caso, però, il procedimento risulta appesantito perdendo in parte la sua rapidità esecutiva; si consiglia, dunque, di eseguire la divisione con il metodo tradizionale.

Esercizio 4.5.1.

- $(x^3 - 13x + 12) : (x + 1)$
- $\left(x^3 - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x - 1\right) : (x - 3)$
- $(x^2y + 4xy^2 + 3y^3) : (2x + y)$

Nel caso in cui il divisore sia un polinomio di primo grado con coefficiente direttivo unitario è possibile determinare il resto senza eseguire la divisione utilizzando il seguente:

Teorema 4.5.1 (Teorema del resto)**.** *Il resto della divisione tra $P(x)$ e $(x - k)$ si ottiene sostituendo l'opposto del termine noto del divisore alla lettera del dividendo cioè: $R = P(k)$.*

Dim. Per definizione di divisione

$$P(x) = (x - k) \cdot Q(x) + R$$

sostituendo k alla x si ottiene:

$$P(k) = (k - k) \cdot Q(k) + R$$

quindi:

$$P(k) = 0 \cdot Q(k) + R$$

cioè

$$P(k) = R$$

□

Esempio 4.5.1.

Il resto della divisione: $(2x^4 + x - 5) : (x - 1)$ è $R = P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1 - 5 = 2 + 1 - 5 = -2$

Il resto della divisione: $(x^2 + x - 2) : (x + 2)$ è $R = P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

In quest'ultimo esempio, poichè il resto è nullo, il divisore $(x+2)$ è un fattore del polinomio x^2+x-2

Più in generale per controllare se un polinomio del tipo $(x-k)$ è un fattore di $P(x)$ è sufficiente calcolare il resto (e quindi $P(k)$) e vedere se esso è nullo; si può enunciare, infatti il seguente teorema:

Teorema 4.5.2 (Teorema di Ruffini). *Se un polinomio $P(x)$ si annulla per x uguale a k, un suo fattore è $(x-k)$, e viceversa.*

Dim. $(\Rightarrow)$

$$P(x) = (x-k) \cdot Q(x) + R$$

poichè per ipotesi

$$R = P(k) = 0$$

allora

$$P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$$

dunque

$$(x-k) \text{ è un fattore di } P(x)$$

$(\Leftarrow)$

se

$$(x-k) \text{ è un fattore di } P(x)$$

allora

$$P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$$

dunque

$$P(k) = (k-k) \cdot Q(x) = 0$$

□

Esempio 4.5.2. Stabilire quale dei seguenti polinomi è un divisore di $x^3+3x^2-4x-12$:

$$x+1; \quad x-2; \quad x+3$$

$P(-1) = -1+3+4-12 \neq 0 \Rightarrow x+1$ non è un fattore
$P(+2) = 8+12-8-12 = 0 \Rightarrow x-2$ è un fattore
$P(-3) = -27+27+12-12 = 0 \Rightarrow x+3$ è un fattore

Esempio 4.5.3. Determinare il valore da attribuire alla lettera t affinchè $x-1$ sia un fattore del polinomio $x^2-3x+t+4$

Calcoliamo $P(1) = 1-3+t+4 = t+2$ dovrà essere $R=0$ cioè $t+2=0$ dunque $t=-2$

Esempio 4.5.4. Determinare un divisore di $x^2+2x-15$

Con il teorema di Ruffini siamo in grado di determinare i divisori del tipo $(x-k)$

Infatti calcolando $P(1), P(-1), P(2), P(-2), \ldots\ldots$ otteniamo i resti della divisione rispettivamente per $(x-1), (x+1), (x-2), (x+2), \ldots\ldots$

$P(1) = -13, P(-1) = -16, P(2) = -7, P(-2) = -15, P(3) = 0 \Rightarrow (x-3)$ è un divisore (fattore) del polinomio.

Osservazione: Per determinare un fattore di un polinomio $P(x)$, come nell'ultimo esempio, non è necessario sostituire alla x tutti i numeri interi finchè si ottiene zero, ma solo i divisori del termine noto del dividendo. Infatti dall'uguaglianza:

$$P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$$

si deduce che il termine noto di $P(x)$ è il prodotto tra il termine noto di $Q(x)$ (indichiamolo con q) e quello di $(x-k)$, dunque esso é $-k \cdot q$ e quindi k risulta un fattore del termine noto di $P(x)$.

Se vogliamo ora cercare un fattore di x^3-4x^2-25 i numeri da sostituire a x saranno i divisori di 25 ovvero $\pm 1, \pm 5, \pm 25$.

Poichè $P(1) \neq 0, P(-1) \neq 0$ ma $P(5) = 0$ possiamo concludere che $(x-5)$ è un fattore del polinomio.

E' opportuno far notare che non sempre un polinomio ha fattori del tipo $(x-k)$ come è il caso di x^2+5x+2 per il quale $P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$, $P(2) \neq 0, P(-2) \neq 0$.

Esercizio 4.5.2.

- Calcolare il resto della divisione: $(3x^4+6x^2+x-3):\left(x+\frac{2}{3}\right)$
- Stabilire quale dei seguenti binomi è un fattore di $x^3-5x^2+3x-15$: $(x-1);(x-2);(x-4);(x-5);(x+6)$
- Determinare due fattori di primo grado di $x^4-x^3-x^2-5x-30$
- Determinare il valore di k affinchè $(y+1)$ sia un fattore di $y^3+2ky^2-5ky-6k-2$
- Determinare k in modo che il resto della divisione: $(2x^4-3x^2+kx-k):(x+2)$ sia 17

4.6 Esercizi riepilogativi

Esercizio 4.6.1. Calcola il valore delle seguenti espressioni:

1. $\left(\frac{3}{2}-a\right)^2-a(a-3)+\left(2a-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+2a\right)-\frac{3}{2}b^2$

   $[4a^2-\frac{3}{2}b^2]$

2. $(a-b)(a+b)^3-(a+b)(a-b)^3-4ab(a^2-2b^2)$

   $[4ab^3]$

3. $(x^2-3xy+2y^2)^2-x(x-3y)^3-3xy(x^2+5y^2)$

   $[4y^4-14x^2y^2]$

4. $8(y-1)^3+4(y-1)^2+(y^2-4y+2)^2-y^2(y^2-1)$

   $[y^2]$

5. $(2x-y-1)(2x+y+1)-(2x+1)(2x-3)+(y-2)(y+2)$

   $[4x-2y-2]$

6. $\left(a^2-2a\right)^3+a\left(2a^2+3a\right)^2-2a^3\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2-a^4\left(a+2\right)\left(a-12\right)$

   $[52a^4+\frac{1}{2}a^3]$

7. $(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2$

   $[4a^2+4b^2+4c^2]$

8. $\left[x^2+2\left(x-1\right)\right]^2-4x^2\left(x-1\right)-\left[2\left(x-1\right)\right]^2-\left(x^2-1\right)^2$

   $[2x^2-1]$

9. $(a+1+3b)^2-2\left(a+1-3b\right)\left(a+1+3b\right)+\left(a-3b+1\right)^2$

   $[36b^2]$

10. $\left[\left(x^2-\frac{1}{2}y^2\right)^2+\left(-2x^2\right)\left(x-y\right)\left(x+y\right)-\frac{1}{4}y^4\right]:\left(-2x^2\right)$

    $[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2]$

11. $\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y+1\right)^2-\left(\frac{2}{3}y+\frac{1}{2}x-1\right)^2+\frac{1}{3}y\right]^2-(2x-3y)^2$

    $[24xy]$

12. $\left[(x+y)^3-(x-y)\left(x^2+y^2+xy\right)-3xy\left(x+y\right)\right]^2-\left(2y^2\right)^3$

    $[-4y^6]$

13. $(x^2-2y)^2+(x+2y)^3-(x-y)^3-3y\left(3y^2+\frac{5}{3}x^2\right)-4y^2$

$[x^4 + 9xy^2]$

14. $(x+2y-1)^2 + (x^2-x-2y)(x^2+x+2y) + (x^2-2)^3 + 5(x^2-1)(x^2+1) + 2(x+2y-6x^2)$

$[x^6 - 12]$

15. $2(ab-1)(ab+1) + \left(a^2 - ab - \frac{1}{2}b^2\right)^2 - \left(ab + \frac{1}{2}b^2\right)^2 - a^2(a-b)^2$

$[-2]$

16. $\left[\frac{1}{2}ab - \left(\frac{1}{4}a + b\right)^2 + \left(b + \frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{4}a + b\right)\right] a + \left(b + \frac{1}{2}a\right)^3 - b^2\left(\frac{3}{2}a + b\right)$

$[\frac{3}{4}a^2b]$

17. $(x-1)(x+3) - (x+1)^2 - (x-2)^2 + 2(x+3)^2 - (x+2-y)^2 - 2y(x+2-\frac{1}{2}y)$

$[12x + 6]$

18. $[(3x-1)(3x+1)]^2 - \left(9x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

$[-9x^2 + 1]$

19. $x(x-2y)^3 - \left[(x+2y)^2 - (2x+y)^2\right]^2 + 2xy\left(3x^2 + 4y^2 - 15xy\right) + 9y^4$

$[-8x^4]$

20. $(x^{n+1} - x^2)(x^{n+1} + x^2) - x^2(x^n + x)^2$

$[-2x^{n+3} - 2x^4]$

Esercizio 4.6.2. Calcola quoziente e resto delle seguenti divisioni:

1. $(4x^3 - 5x + 16) : (2x^2 - 3x + 2)$

$[Q(x) = 2x + 3, R(x) = 10]$

2. $\left(\frac{1}{4}x^4 - x^2y^2 + 6xy^3 - 6y^4\right) : \left(\frac{1}{2}x^2 + xy - 3y^2\right)$

$[Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - xy + 3y^2, R(x) = 3y^4]$,

$[Q(y) = 2y^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{2}{9}x^2, R(y) = \frac{4}{9}x^3y + \frac{5}{36}x^4]$

3. $(2x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x + 2)$

$[Q(x) = 2x^2 - x, R = 2]$

4. $(2a^5 - 15a^3b^2 - 25ab^4 - b^5) : (a - 3b)$ rispetto alla lettera a

$[Q(a) = 2a^4 + 6a^3b + 3a^2b^2 + 9ab^3 + 2b^4, R(a) = 5b^5]$

5. $\left(a^5 + \frac{10}{3}a^4 - 3a^2 + \frac{1}{2}\right) : (a + 3)$

$[Q(a) = a^4 + \frac{1}{3}a^3 - a^2, R = \frac{1}{2}]$

6. $(64x^6 - y^6) : (16x^4 + 4x^2y^2 + y^4)$

$[Q(x) = Q(y) = 4x^2 - y^2, R(x) = R(y) = 0]$

7. $(2a^4 - 6a^2 + 3) : (a^2 - 3a - 1)$

$[Q(a) = 2a^2 + 6a + 14, R(a) = 48a + 17]$

8. $\left(x^4 - x^3 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}\right) : \left(x - \frac{3}{2}\right)$

$[Q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x, R = -\frac{1}{4}]$

9. $(2x^3 - x^2 - 8x + 4) : (2x - 1)$

$[Q(x) = x^2 - 4, R = 0]$

10. $\left(10a^5 - 25a^4 + 1 + 2a^3\right) : \left(2a^3 - 5a^2 + 1\right)$

$[Q(a) = 5a^2 + 1, R(a) = 0]$

11. $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}\right) : \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + 1\right)$

$[Q(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}, R(x) = -\frac{3}{4}x]$

12. $(10a^4 - 13a^3y - 2a^2y^2 + 7ay^3 - 2y^4) : (y - 2a)$

$[Q(y) = Q(a) = -5a^3 + 4a^2y + 3ay^2 - 2y^3, R = 0]$

Esercizio 4.6.3. Calcola il valore delle seguenti espressioni contenenti divisioni tra polinomi

1. $\left[\left(2x^4 + x^3 - 3x^2 + x\right) : (x^2 + x - 1) + x\right]^2 - 4x^4$

$[0]$

2. $(x-4)^2 + \left[\left(x^2 - 16\right) : (4 - x)\right] \cdot \left[\left(2x^2 - 13x + 20\right) : (2x - 5)\right]$

$[-8x + 32]$

Esercizio 4.6.4. Stabilisci per quale valore di a la divisione $(2x^2 - ax + 3) : (x + 1)$ dà resto 5.

$[a = 0]$

Esercizio 4.6.5. Stabilisci per quale valore di k il polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + kx - 3k$ è divisibile per $x + 2$.

$[k = -4]$

Esercizio 4.6.6. Stabilisci per quale valore di k la divisione $(2x^2 + 3x + k - 2) : (x - 1)$ è esatta.

$[k = -3]$

Esercizio 4.6.7. Dati i polinomi : $A(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3k - 2$ e $B(x) = kx^2 - (3k - 1)x - 4k + 7$ determina k in modo che i due polinomi, divisi entrambi per $x + 1$ abbiano lo stesso resto.

$[k = 2]$

Esercizio 4.6.8. Verifica che il polinomio $x^4 - x^2 + 12x - 36$ è divisibile per i binomi $(x-2)$ e $(x+3)$ utilizzando il teorema di Ruffini. Successivamente, utilizzando la divisione, verifica che è divisibile per il loro prodotto.

Esercizio 4.6.9. Calcola i resti delle divisioni: $(x^2 + ax - 3a) : (x + 6)$ e $(x^2 + x - (a + 2)) : (x + 3)$ e verifica che coincidono per $a = 4$.

Capitolo 5

SCOMPOSIZIONI

5.1 Scomposizioni

Nei capitoli precedenti abbiamo imparato a semplificare le espressioni algebriche contenenti operazioni tra polinomi; nella maggior parte dei casi la semplificazione consisteva nell'eseguire la moltiplicazione (o lo sviluppo di una potenza) di polinomi per ottenere come risultato un polinomio. In questo capitolo ci proponiamo di affrontare il problema inverso, cioè scrivere un polinomio, se possibile, come prodotto di altri polinomi.

Esempio 5.1.1. Dato $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ si può facilmente verificare che $P(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$ ma anche $P(x) = (x - 2)(x^2 + 3x + 2)$ oppure $P(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)$

Definizione 5.1.1. Un polinomio si dice *riducibile* (scomponibile) se può essere scritto come prodotto di due o più polinomi (detti fattori) di grado maggiore di zero. In caso contrario esso si dirà *irriducibile.*

Osservazione. Dalla definizione si deduce banalmente che:

- un polinomio di primo grado è irriducibile;
- un polinomio di grado n può essere scritto come prodotto di al più n fattori di primo grado.

Definizione 5.1.2. Si chiama *scomposizione in fattori* di un polinomio la sua scrittura come prodotto di fattori irriducibili

Con riferimento all'esempio la scrittura $(x^2 - 4)(x + 1)$ non è la scomposizione in fattori di $P(x)$ in quanto $x^2 - 4$ non è un polinomio irriducibile. La scomposizione in fattori di $P(x)$ è invece $(x - 2)(x + 2)(x + 1)$ essendo ciascuno dei tre fattori un polinomio di primo grado e quindi irriducibile.

Osservazione. La riducibilità o irriducibilità di un polinomio è legata all'insieme numerico al quale appartengno i suoi coefficienti; pertanto alcuni polinomi che sono irriducibili in quanto operiamo con coefficienti razionali ($\mathbb{Q}$), potranno diventare riducibili se i loro coefficienti saranno considerati nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (che contiene oltre a tutti i razionali anche altri numeri, incontrati alla scuola media, come ad esempio $\sqrt{2}$ e π)

Un esempio di quanto osservato è il polinomio $x^2 - 2$, irriducibile in $\mathbb{Q}$, riducibile in $\mathbb{R}$ in quanto:

$$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = x^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$$

Per scomporre un polinomio non esistono metodi generali, ma particolari strategie da applicare a determinate tipologie di polinomi. Una strategia già a nostra disposizione è l'applicazione del Teorema di Ruffini che permette di determinare i fattori di primo grado di un polinomio.

Esempio 5.1.2. Dato $P(x) = x^2 - 25$ si ottiene $P(1) \neq 0 \neq P(-1)$, $P(5) = 0$ quindi $x - 5$ è un fattore di $x^2 - 25$. L'altro fattore, cioè $x+5$, si ottiene eseguendo la divisione $(x^2-25) : (x-5)$. Essendo $P(x) = D(x) \cdot Q(x)$ si ha $x^2-25 = (x-5)(x+5)$

Alla tecnica di scomposizione che utilizza il Teorema di Ruffini, pur efficace e generale, si preferiscono metodi più snelli adatti ciascuno ad un particolare tipo di polinomio. Illustriamo ora i principali metodi di scomposizione.

1. Raccoglimento a fattor comune

   Consiste nell'applicare la proprietà distributiva della moltiplicazione 'evidenziando' come primo fattore il M.C.D. tra i monomi del polinomio e come secondo fattore il quoziente tra il polinomio e il M.C.D. In simboli:
   $$A \cdot B + A \cdot C + A \cdot D = A \cdot (B + C + D)$$

   Esempio 5.1.3.

   - $2xy + 4x^2 - 6x^3y = 2x(y + 2x - 3x^2y)$
   - $a^2b^3c - 5ab^2c^2 = ab^2c(ab - 5c)$
   - $7xa^2 - 7a^2 = 7a^2(x - 1)$
   - $\frac{2}{3}a^4b^2 + \frac{1}{5}a^2b^3c - 3a^3b^4c^2 = a^2b^2\left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{5}bc - 3ab^2c^2\right)$
   - $-12x^2 - 15xy = -3x(4x + 5y)$ meglio di $3x(-4x - 5y)$
   - $x^{n+2} - 5x^n = x^n(x^2 - 5)$, $(n \in \mathbb{N})$

   Osservazione.

   (a) Quando i coefficienti sono frazionari abbiamo stabilito che il coefficiente del M.C.D. è 1. E' opportuno tuttavia raccogliere, in alcuni casi, anche un coefficiente non unitario come dimostrano i seguenti esempi:

   $\frac{4}{5}a^2b^5 - \frac{4}{5}ab^6 = \frac{4}{5}ab^5(a - b)$ preferibile a $ab^5\left(\frac{4}{5}a - \frac{4}{5}b\right)$

   $\frac{6}{7}xy^3 + \frac{3}{5}x^2 - 9x = 3x\left(\frac{2}{7}y^3 + \frac{1}{5}x - 3\right)$

   $\frac{1}{2}b^2c - \frac{3}{4}c = \frac{1}{4}c(2b^2 - 3)$

   (b) Qualora il M.C.D. che raccogliamo sia un monomio di grado zero, quella che otteniamo non è una scomposizione in base alla definizione data, tuttavia la scrittura ottenuta è spesso utile per poter continuare con la scomposizione come mostra il seguente esempio:

   $3x^2 - 75 = 3(x^2 - 25) \underbrace{=}_{\texttt{vedi es.3.1.2}} 3(x - 5)(x + 5)$

   (c) La scomposizione mediante raccoglimento a fattor comune può essere estesa anche ad espressioni i cui addendi contengono uno stesso polinomio come fattore; vediamone alcuni esempi:

   $3(x + y) - 2a(x + y) - x(x + y) = (x + y)(3 - 2a - x)$

   $(b - a)^2 - (b - a)(2 - a) = (b - a)[(b - a) - (2 - a)] = (b - a)(b - a - 2 + a) = (b - a)(b - 2)$

   $2x(x - y) + 5y(y - x) = 2x(x - y) - 5y(-y + x) = 2x(x - y) - 5y(x - y) = (x - y)(2x - 5y)$

   Esercizio 5.1.1.

   - $4a^2b + 16a^2c$
   - $25a^3b^4 - 5a^2b^3 + 5a^2b^2$
   - $\frac{1}{9}a^3b^3 + \frac{2}{3}a^2b^4$
   - $3x^{n+1}y^m + 2x^ny^{m+2}$
   - $(a - b)^2 + 2(a - b) - (a - b)ab$
   - $3x(a - 1) + x^2(-a + 1)$

2. Raccoglimento parziale

   Consiste nell'applicare il raccoglimento a fattor comune a gruppi di monomi e successivamente effettuare il raccoglimento a fattor comune nell'intera espressione ottenuta.

   Esempio 5.1.4.

   - $2x + 4y + ax + 2ay = 2(x + 2y) + a(x + 2y)$ avendo raccolto il fattore 2 nel gruppo dei primi due monomi ed a nel gruppo dei rimanenti $= (x + 2y)(2 + a)$ avendo raccolto a fattor comune $(x + 2y)$

     Allo stesso risultato si può pervenire raccogliendo parzialmete tra il primo e il terzo monomio e tra il secondo e il quarto: $x(2 + a) + 2y(2 + a) = (2 + a)(x + 2y)$
   - $9x^2 - 3x - 3xy + y = 3x(3x - 1) - y(3x - 1) = (3x - 1)(3x - y)$
   - $5ab^2 - 2a^2 + 6a - 15b^2 = \begin{cases} = a(5b^2 - 2a) - 3(-2a + 5b^2) = (5b^2 - 2a)(a - 3) \\ = 5b^2(a - 3) - 2a(a - 3) = (a - 3)(5b^2 - 2a) \end{cases}$
   - $11x^2 - 22xy + x - 2y = 11x(x - 2y) + 1(x - 2y) = (x - 2y)(11x + 1)$
   - $12a^2x^2 + 6ax^2y - 4a^2b - 2aby = 2a(6ax^2 + 3x^2y - 2ab - by) = 2a[3x^2(2a + y) - b(2a + y)] = 2a(2a + y)(3x^2 - b)$
   - $ax + a - bx - b - 2cx - 2c = \begin{cases} = a(x + 1) - b(x + 1) - 2c(x + 1) = (x + 1)(a - b - 2c) \\ = x(a - b - 2c) + 1(a - b - 2c) = (a - b - 2c)(x + 1) \end{cases}$

   Dagli esempi svolti è facile convincerci che affinchè si possa applicare il raccoglimento parziale è necessario che i gruppi di monomi individuati contengano lo stesso numero di termini.

   Esercizio 5.1.2.

   - $a^4 - a^3 - 2a + 2$
   - $y^2 - 3x^3 + xy - 3x^2y$
   - $10p^2 - 4pq - 15p + 6q$
   - $2x^2 - 3xy + xz - 2ax + 3ay - az$

3. Scomposizione mediante riconoscimento di prodotti notevoli

   Consiste nell'applicare la proprietà simmetrica dell'uguaglianza alle formule studiate relativamente ai prodotti notevoli. Si avrà quindi:

   (a) Differenza tra due quadrati

   Ricordando che $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ si ricava

   $$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

   Esempio 5.1.5.

   - $9 - 4x^2 = (3)^2 - (2x)^2 = (3 + 2x)(3 - 2x)$
   - $\frac{1}{4}x^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$
   - $25a^2b^4 - \frac{9}{16}y^6 = \left(5ab^2 + \frac{3}{4}y^3\right)\left(5ab^2 - \frac{3}{4}y^3\right)$
   - $-16 + 25x^2 = (5x + 4)(5x - 4)$
   - $(2x - 3a)^2 - (x + a)^2 = (2x - 3a + x + a)(2x - 3a - x - a) = (3x - 2a)(x - 4a)$

   Esercizio 5.1.3.

   - $a^2 - 9b^2$
   - $\frac{25}{16}a^2 - 1$

- $x^{2n} - y^4$
- $(2a-1)^2 - (1-a)^2$

(b) Sviluppo del quadrato di un binomio
Ricordando che $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si ricava

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

Esempio 5.1.6.

- $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + (3)^2 = (x+3)^2$
- $x^4y^2 + 2x^2y + 1 = (x^2y+1)^2$
- $9x^2 - 12xy^2 + 4y^4 = (3x - 2y^2)^2$
- $\frac{25}{4}a^2 - 5ab + b^2 = \left(\frac{5}{2}a - b\right)^2$
- $\frac{1}{4}x^2y^2 + 1 - xy = \left(\frac{1}{2}xy - 1\right)^2$ osserva che non sempre il doppio prodotto è il monomio centrale

Esercizio 5.1.4.

- $49a^2 - 14ab + b^2$
- $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{3}xy$
- $\frac{1}{25} + \frac{2}{5}x^2 + x^4$
- $4y^{2n} - 12y^n + 9$

(c) Sviluppo del quadrato di un trinomio
Ricordando che $(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$ si ricava

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A+B+C)^2$$

Esempio 5.1.7.

- $x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y = (x)^2 + (2y)^2 + (1)^2 + 2 \cdot (x) \cdot (2y) + 2 \cdot (x) \cdot (1) + 2 \cdot (2y) \cdot (1) = (x + 2y + 1)^2$
- $9x^4 + a^2 + 16 - 6x^2a + 24x^2 - 8a = (3x^2 - a + 4)^2$
- $x^2y^2 - 6xy - 14x^2y + 9 + 49x^2 + 42x = (xy - 3 - 7x)^2$ anche in questo caso osserva che i monomi possono presentarsi in ordine sparso.

Esercizio 5.1.5.

- $a^2 + 4x^2 + 9 + 4ax - 6a - 12x$
- $16x^2 + 9x^4y^2 - 24x^3y - 12x^2y^3 + 4y^4 + 16xy^2$

(d) Sviluppo del cubo di un binomio
Ricordando che $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ si ricava

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$$

Esempio 5.1.8.

- $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x)^3 + 3 \cdot (x)^2 \cdot (2) + 3 \cdot (x) \cdot (2)^2 + (2)^3 = (x+2)^3$
- $125x^6 - 75x^4y + 15x^2y^2 - y^3 = (5x^2 - y)^3$
- $\frac{1}{27}a^3b^3 - \frac{2}{3}a^2b^2x^3 + 4abx^6 - 8x^9 = \left(\frac{1}{3}ab - 2x^3\right)^3$

Esercizio 5.1.6.

- $27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$
- $\frac{8}{27}a^3 - 2a^2 + \frac{9}{2}a - \frac{27}{8}$
- $a^{3n} + 3a^{2n} + 3a^n + 1$

Vediamo ora alcuni esempi in cui per scomporre un polinomio è necessario utilizzare più di un metodo tra quelli illustrati.

Esempio 5.1.9.

- $\underbrace{50x^5 - 2x^3y^4}_{\texttt{racc. f. c.}} = 2x^3(\underbrace{25x^2 - y^4}_{\texttt{diff. quad.}}) = 2x^3(5x - y^2)(5x + y^2)$
- $\underbrace{a^4 - 8a^2 + 16}_{\texttt{quad. bin.}} = (\underbrace{a^2 - 4}_{\texttt{diff. quad.}})^2 = [(a-2)(a+2)]^2 = (a-2)^2(a+2)^2$
-
$$\underbrace{(x^2 - 9y^2)24a^3 + (x^2 - 9y^2)36a^2 + (x^2 - 9y^2)18a + 3(x^2 - 9y^2)}_{\texttt{racc. f.c.}}$$
$$= 3(\underbrace{x^2 - 9y^2}_{\texttt{diff. quad.}})(\underbrace{8a^3 + 12a^2 + 6a + 1}_{\texttt{cubo bin.}}) = 3(x - 3y)(x + 3y)(2a + 1)^3$$
- $\underbrace{x^4 - a^2x^2 - 4x^2 + 4a^2}_{\texttt{racc. parz.}} = x^2(x^2 - a^2) - 4(x^2 - a^2) = (\underbrace{x^2 - a^2}_{\texttt{diff. quad.}})(\underbrace{x^2 - 4}_{\texttt{diff. quad.}}) =$
  $= (x - a)(x + a)(x - 2)(x + 2)$
- $\underbrace{\frac{1}{2}y^3 - 4y^2 + 8y}_{\texttt{racc. f.c.}} = \frac{1}{2}y(\underbrace{y^2 - 8y + 16}_{\texttt{quad. bin.}}) = \frac{1}{2}y(y - 4)^2$
- $\underbrace{3x^3 - 9x^2 + 12}_{\texttt{racc. f.c.}} = 3(x^3 - 3x^2 + 4)$ poichè il polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ non è riconducibile ad alcun prodotto notevole, dobbiamo cercare un suo fattore utilizzando il Teorema di Ruffini.
  $P(1) = 1 - 3 + 4 \neq 0$, $P(-1) = -1 - 3 + 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)$ è un fattore di $P(x)$; l'altro fattore lo otteniamo eseguendo la divisione:

	1	−3	0	4
−1		−1	4	−4
	1	−4	4	0

  $Q(x) = x^2 - 4x + 4$
  Quindi $3x^3 - 9x^2 + 12 = 3(\underbrace{x^3 - 3x^2 + 4}_{\texttt{Ruffini}}) = 3(x + 1)(\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\texttt{quad. bin.}}) =$
  $= 3(x + 1)(x - 2)^2$

Esercizio 5.1.7.

- $x^5 + xy^4 - 2x^3y^2$
- $192a^8b^7 - 3a^2b$
- $a^2x^2 - a^2y^2 + abx^2 - aby^2$
- $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$
- $24x - 36x^2 - 4$
- $(a + 2)x^2 - 6(a + 2)x + 9(a + 2)$
- $(3x - 1)^3 - (3x - 1)$
- $x^3y - 2x^3 - 3x^2y + 6x^2 + 3xy - 6x - y + 2$
- $2ax^4 - 162ay^4$

- $(2a-5)^2-(a+2)^2$

4. <u>Scomposizione di particolari binomi</u>

   (a) Somma di due cubi

   $$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

   infatti posto $P(A)=A^3+B^3$, per il Teorema di Ruffini, essendo $P(-B)=0$, un suo fattore è $A+B$, l'altro si otterrà dalla divisione:

   $$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & B^3 \\ -B & & -B & B^2 & -B^3 \\ \hline & 1 & -B & B^2 & 0 \end{array}$$

   $Q(A)=A^2-AB+B^2$ quindi $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

   Esempio 5.1.10. $8x^3+27=(2x)^3+(3)^3=(2x+3)(4x^2-6x+9)$

   (b) Differenza di due cubi

   $$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

   (la dimostrazione è analoga a quella precedente)

   Esempio 5.1.11. $a^3-125b^6=(a)^3-(5b^2)^3=(a-5b^2)(a^2+5ab^2+25b^4)$

   Osservazione. I trinomi $A^2\pm AB+B^2$ vengono chiamati falsi quadrati e, come verrà dimostrato in seguito, se di secondo grado, sono irriducibili.(I falsi quadrati di grado superiore al secondo sono riducibili, ma con tecniche che esulano da questo corso di studi)

   Esercizio 5.1.8.

   - x^6+1
   - $27x^3y^3+z^9$
   - $125a^3-x^6$
   - $-64+\frac{1}{8}y^3$

   (c) Somma o differenza di due potenze ennesime

   Qualora per scomporre la somma o la differenza di due potenze ennesime non sia possibile ricondursi ai casi finora esaminati, è possibile dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:
   $A^n+B^n=(A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-\cdots-AB^{n-2}+B^{n-1})$ con n naturale dispari.
   Qualora n sia pari dimostreremo che il binomio, se di secondo grado, è irriducibile (se di grado superiore è riducibile, ma non sempre con tecniche elementari)
   $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})$ qualunque sia n naturale

   Esempio 5.1.12.

   - $x^5-32=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$
   - $1+x^7=(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6)$
   - $y^6-x^6=(y^3-x^3)(y^3+x^3)=(y-x)(y^2+xy+x^2)(y+x)(y^2-xy+x^2)$ (è preferibile riconoscere la differenza di quadrati)

5. <u>Regola 'somma-prodotto' per trinomi</u>

   Consideriamo il trinomio di secondo grado con coefficiente direttivo unitario del tipo

   $$x^2+sx+p$$

e supponiamo che il coefficiente s e il termine noto p siano rispettivamente la somma e il prodotto di due numeri a e b ossia $s = a + b$, $p = a \cdot b$. Possiamo scrivere :

$x^2 + sx + p = x^2 + (a + b)x + a \cdot b = x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b)$

Otteniamo dunque la seguente regola :

$$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$$

con $s = a + b$ e $p = a \cdot b$

Per la determinazione dei numeri a e b consigliamo operativamente di individuare i fattori di p e tra questi scegliere quelli che hanno la somma s desiderata.

Esempio 5.1.13.

- $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) \quad s = +5 = +2 + 3,\ p = +6 = (+2) \cdot (+3)$
- $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) \quad s = -1 = -4 + 3,\ p = -12 = (-4) \cdot (+3)$
- $x^2 - 7xy + 10y^2 = (x - 5y)(x - 2y) \quad s = -7y = -5y - 2y,\ p = 10y^2 = (-5y) \cdot (-2y)$
- $3x^2 - 33x - 36 = 3(x^2 - 11x - 12) = 3(x - 12)(x + 1)$

Nell'ultimo esempio, pur non avendo il polinomio coefficiente direttivo unitario, è stato possibile ricondurci alla regola 'somma-prodotto' perchè abbiamo potuto operare il raccoglimante a fattor comune. Nei casi in cui il coefficiente direttivo rimanga diverso da 1 è possibile una generalizzazione come nel seguente esempio: dato il polinomio $6x^2 - 11x + 3$, cerchiamo due numeri la cui somma sia ancora il coefficiente di x cioè -11 e il cui prodotto sia il prodotto tra il coefficiente direttivo e il termine noto, cioè $6 \cdot 3 = 18$. Individuati tali valori in -9 e -2 trasformiamo il trinomio nel quadrinomio $6x^2 - 2x - 9x + 3$ e lo scomponiamo mediante raccoglimento parziale:

$6x^2 - 11x + 3 = 6x^2 - 2x - 9x + 3 = 2x(3x - 1) - 3(3x - 1) = (3x - 1)(2x - 3)$

La regola 'somma -prodotto' e la sua generalizzazione possono essere estese anche a polinomi di grado maggiore di due del tipo $ax^{2n} + bx^n + c$ in quanto tale polinomio può essere pensato come $ay^2 + by + c$ avendo posto $y = x^n$

Esempio 5.1.14.

- $x^4 - 5x^2 + 4 \underbrace{=}_{x^2=y} y^2 - 5y + 4 = (y - 4)(y - 1) \underbrace{=}_{y=x^2} (x^2 - 4)(x^2 - 1) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$
- $2x^6 - 10x^3 - 48 = 2(x^6 - 5x^3 - 24) = 2(x^3 - 8)(x^3 + 3) = 2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^3 + 3)$
- $2x^8 + 3x^4 + 1 = 2x^8 + 2x^4 + x^4 + 1 = 2x^4(x^4 + 1) + 1(x^4 + 1) = (x^4 + 1)(2x^4 + 1)$
- $x^4 - 3x^2y^2 - 4y^4 = (x^2 - 4y^2)(x^2 + y^2) = (x - 2y)(x + 2y)(x^2 + y^2)$

Esercizio 5.1.9.

- $x^2 - 11x + 24$
- $x^2 - 6ax - 55a^2$
- $x^4 - 13x^2 + 36$
- $x^2 + 10x + 9$
- $a^2 - 2ab - 15b^2$
- $a^6 + 2a^3 - 15$
- $y^{10} + 2xy^5 - 80x^2$
- $9x^2 - 3x - 2$
- $6x^2 + 7x - 10$
- $21x^2 - xy - 10y^2$
- $3x^2 - 8xy^2 + 5y^4$
- $15x^2 + 8xy^2 + y^4$

6. Scomposizione non standard

Qualora il polinomio non sia scomponibile con alcuno dei metodi illustrati può essere, in alcuni casi, possibile ricondurci ad essi, dopo aver opportunamente scomposto alcune parti del polinomio, come dimostrano i seguenti esempi.

Esempio 5.1.15.

- $\underbrace{x^2-4xy+4y^2}_{\texttt{quad. bin.}}-25=\underbrace{(x-2y)^2-25}_{\texttt{diff. quad.}}=(x-2y+5)(x-2y+5)$
- $\underbrace{x^2-9}_{\texttt{diff. quad.}}+\underbrace{2xy-6y}_{\texttt{racc. f.c.}}=\underbrace{(x-3)(x+3)+2y(x-3)}_{racc.f.c.}=(x-3)(x+3+2y)$
- $\underbrace{x^2-7x+6}_{\texttt{s. p.}}\underbrace{-ax+a}_{\texttt{racc. f.c.}}=\underbrace{(x-6)(x-1)-a(x-1)}_{racc.f.c.}=(x-1)(x-6-a)$
- $x^4+x^3+2x-4=\underbrace{x^4-4}_{\texttt{diff. quad.}}+\underbrace{x^3+2x}_{\texttt{racc. f.c.}}=\underbrace{(x^2-2)(x^2+2)+x(x^2+2)}_{racc.f.c.}=(x^2+2)(x^2-2+x)=(x^2+2)(\underbrace{x^2+x-2}_{\texttt{s. p}})=(x^2+2)(x+2)(x-1)$

  Quest'ultimo polinomio poteva essere scomposto anche ricorrendo al Teorema di Ruffini, ma il procedimento, seppur corretto, sarebbe risultato meno veloce ed elegante.
- $\underbrace{4a^2-4a+1}_{\texttt{quad. bin.}}\underbrace{-y^2+2xy-x^2}_{\texttt{opposto quad. bin.}}=(2a-1)^2-(y^2-2xy+x^2)=\underbrace{(2a-1)^2-(y-x)^2}_{diff.quad.}=(2a-1+y-x)(2a-1-y+x)$
- $27+\underbrace{8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3}_{\texttt{cubo bin.}}=\underbrace{27+(2a+b)^3}_{\texttt{somma cubi}}=(3+2a+b)[9-3(2a+b)+(2a+b)^2]=(3+2a+b)(9-6a-3b+4a^2+4ab+b^2)$
- $\underbrace{4x^4+1}_{\texttt{somma quad.non } 2^\circ \texttt{ grado}}=\underbrace{4x^4+1+4x^2}_{\texttt{quad. bin.}}-4x^2=\underbrace{(2x^2+1)^2-4x^2}_{\texttt{diff. quad.}}=(2x^2+1-2x)(2x^2+1+2x)$
- $(\underbrace{x^2-y^2}_{\texttt{diff. quad.}})(x-y)-x^2(x+y)=\underbrace{(x-y)(x+y)(x-y)-x^2(x+y)}_{\texttt{racc. f.c.}}=(x+y)[\underbrace{(x-y)^2-x^2}_{\texttt{diff. quad.}}]=(x+y)(x-y-x)(x-y+x)=-y(x+y)(2x-y)$
- $\underbrace{x^4+x^2y^2+y^4}_{\texttt{falso quad.non } 2^\circ \texttt{ grado}}=x^4+x^2y^2+y^4+x^2y^2-x^2y^2=\underbrace{x^4+2x^2y^2+y^4}_{\texttt{quad. bin}}-x^2y^2=\underbrace{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}_{\texttt{diff. quad.}}=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$

Esercizio 5.1.10.

- $x^4-y^6+6y^3-9$
- $x^2+xy+y^2+x^3-y^3$
- $y^2-3y+2+xy-2x$
- $a^2-4a^2x+4a^2x^2-(1-2x)^2$
- $y^3+x^3+6x^2+12x+8$
- $4x^2-9+4ax^2+12ax+9a$

5.2 Sintesi

Per facilitare la memorizzazione e l'applicazione delle tecniche di scomposizione, possiamo riassumerle e schematizzarle nel modo seguente:

- Raccoglimento a fattor comune
- Binomio:
  1. differenza di quadrati
  2. somma o differenza di cubi
  3. somma o differenza di due potenze ennesime($n > 3$)
- Trinomio:
  1. sviluppo del quadrato di binomio
  2. regola 'somma-prodotto'
- Quadrinomio:
  1. sviluppo del cubo di binomio
  2. raccoglimento parziale
- Polinomio con sei termini:
  1. sviluppo del quadrato di trinomio
  2. raccoglimento parziale
- Scomposizioni non standard
- Scomposizioni con la Regola di Ruffini

5.3 Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di polinomi

Definizione 5.3.1. Si dice massimo comun divisore (M.C.D.) di polinomi, il polinomio di grado massimo che è fattore di tutti i polinomi dati.

Definizione 5.3.2. Si dice minimo comune multiplo (m.c.m.) di polinomi, il polinomio di grado minimo che è multiplo di tutti i polinomi dati.

Dalle definizioni risulta evidente che per calcolare il M.C.D. e il m.c.m. di polinomi è necessario determinare i fattori irriducibili di ognuno di essi. Scomposti quindi in fattori tutti i polinomi:
il M.C.D. sarà il prodotto dei soli fattori comuni con il minimo esponente;
il m.c.m. sarà il prodotto di tutti i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente.

Osservazione. Poichè un polinomio non cambia grado e rimane un fattore di un altro polinomio se lo si moltiplica per una costante non nulla, a rigore (come già sottolineato per i monomi) dovremmo parlare di un M.C.D. (m.c.m.) anzichè del M.C.D. (m.c.m.).

Adottiamo anche in questo caso la stessa convenzione introdotta per il coefficiente del M.C.D. e m.c.m. di monomi.

Esempio 5.3.1.

- $P_1(x) = 18x^2 - 54x$, $P_2(x) = 2x^2 - 18$, $P_3(x) = 2x^2 - 12x + 18$
  Dopo aver determinato le scomposizioni:
  $P_1(x) = 18x(x-3)$, $P_2(x) = 2(x+3)(x-3)$, $P_3(x) = 2(x-3)^2$
  sarà:
  M.C.D.$(P_1(x),P_2(x),P_3(x))=\pm 2(x-3)$
  m.c.m.$(P_1(x),P_2(x),P_3(x))=\pm 18x(x-3)^2(x+3)$
- $P_1(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, $P_2(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 2(x+3)(x-2)$, $P_3(x) = 5x^2 - 20 = 5(x-2)(x+2)$
  M.C.D.$(P_1(x),P_2(x),P_3(x))=\pm(x-2)$
  m.c.m.$(P_1(x),P_2(x),P_3(x))=\pm 10(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$
- $P_1(x,y) = 8x^3 - y^3 = (2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$, $P_2(x,y) = 4x^2+4xy+y^2 = (2x+y)^2$, M.C.D.$(P_1(x,y),P_2(x,y))=\pm 1$
  m.c.m.$(P_1(x,y),P_2(x,y))=\pm(2x-y)(2x+y)^2(4x^2+2xy+y^2)$
- $P_1(x,y) = 3x^2 - 30x + 75 = 3(x-5)^2$, $P_2(x,y) = 5y + 10 - xy - 2x = (5-x)(y+2)$
  Così come sono scritti non si riconoscono fattori comuni.
  Possiamo però scrivere $P_2(x,y) = -(x-5)(y+2)$ e quindi
  M.C.D.$(P_1(x,y),P_2(x,y))=\pm(x-5)$
  m.c.m.$(P_1(x,y),P_2(x,y))=\pm 3(x-5)^2(y+2)$
  Avremmo potuto anche cambiare segno a $P_1(x,y)$ anzichè a $P_2(x,y)$ ottenendo
  $P_1(x,y) = 3[-(-x+5)]^2 = 3(5-x)^2$ e quindi
  M.C.D.$(P_1(x,y),P_2(x,y))=\pm(5-x)$
  m.c.m.$(P_1(x,y),P_2(x,y))=\pm 3(5-x)^2)(y+2)$
  ottenendo lo stesso risultato.
- $P_1(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x-3)^3$, $P_2(x) = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}x + \frac{4}{5}x^2 = \frac{1}{5}(3-2x)^2$
  Possiamo scegliere di cambiare $P_1(x)$ in $-(3-2x)^3$ oppure $P_2(x)$ in $\frac{1}{5}(2x-3)^2$ ottenendo in entrambi i casi :
  M.C.D.$(P_1(x),P_2(x))=\pm(2x-3)^2$
  m.c.m.$(P_1(x),P_2(x))=\pm(2x-3)^3$

Esercizio 5.3.1.

- $a^2 - 6a + 9$; $a^2 - 8a + 15$; $a^2 - 4a + 3$
- $25 - x^2$; $2x - 10$; $25 - 10x + x^2$
- $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$; $6x + 12y$; $x^2 - 4y^2$
- $4x^3 - 4$; $2x^2 - 4x + 2$; $6x^2 - 6$
- $10a - 10b - 6ax + 6bx$; $4a^2 - 4b^2$; $18x^2 - 60x + 50$

5.4 Esercizi riepilogativi

Esercizio 5.4.1.

1. $a^5 - a - 2 + 2a^4$

$$\left[(a+2)(a^2+1)(a+1)(a-1)\right]$$

2. $6a^2x + 11ax + 3x$

$$[x(2a+3)(3a+1)]$$

3. $2x^4 - 16xy^3$

$$\left[2x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2\right]$$

4. $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

$$\left[(x-1)(x^2-x+3)\right]$$

5. $8x^5 - 50x^3y^2$

$$\left[2x^3\,(2x-5y)\,(2x+5y)\right]$$

6. $2a^2b^2c + 2a^2bc^2 + 8a^2bc + 2ab^2c + 8abc + 2abc^2$

$$[2abc(a+1)(b+c+4)]$$

7. $2x^3 - 7x^2 + 3x$

$$[x(2x-1)(x-3)]$$

8. $\dfrac{1}{27}x^3 - \dfrac{1}{3}x^2y^2 + xy^4 - y^6$

$$\left[\left(\frac{1}{3}x - y^2\right)^3\right]$$

9. $16 - a^2 - b^2 + 2ab$

$$[(4+a-b)(4-a+b)]$$

10. $(a-2b)^2 + 2(a-2b)(3a+5b) + (3a+5b)^2$

$$\left[(4a+3b)^2\right]$$

11. $y^3 - 7y - 6$

$$[(y+1)(y-3)(y+2)]$$

12. $(x^3-27)(x+3) + (x^3+27)(x-3)$

$$\left[2(x+3)(x-3)(x^2+9)\right]$$

13. $9x^4 + 4y^2 + 25x^2y^2 - 12x^2y + 30x^3y - 20xy^2$

$$\left[(3x^2-2y+5xy)^2\right]$$

14. $x^2 - 2ax - 2a - 1$

$$[(x+1)(x-1-2a)]$$

15. $a^4 + 4a^2 - 32$

$$\left[(a+2)(a-2)(a^2+8)\right]$$

16. $6x^3 - x^2 - 11x + 6$

$$[(x-1)(2x+3)(3x-2)]$$

17. $t^6 + 26t^3 - 27$

$$\left[(t-1)(t^2+t+1)(t+3)(t^2-3t+9)\right]$$

18. $(5a^2x^3 - 10ax^3 + 5x^3)^2$

$$\left[25x^6(a-1)^2\right]$$

19. $\dfrac{1}{4} + y^2 + z^2 - y + z - 2yz$

$$\left[\left(\frac{1}{2} - y + z\right)^2\right]$$

20. $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$

$\left[\frac{1}{2}x(x-2)(x+1)\right]$

21. $x^4 - x^3 - 8x + 8$

$\left[(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)\right]$

22. $5x^3y^3 + \frac{625}{8}$

$\left[5\left(xy+\frac{5}{2}\right)\left(x^2y^2-\frac{5}{2}xy+\frac{25}{4}\right)\right]$

23. $3ax + 3xy + 2a + 2y$

$[(a+y)(3x+2)]$

24. $a^2b - 9ab^2 + 20b^3$

$[b(a-5b)(a-4b)]$

25. $a^8 - 2a^4 + 1$

$\left[(a^2+1)^2(a+1)^2(a-1)^2\right]$

26. $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

$\left[(x-3)(x-2)^2\right]$

27. $ax + 2bx + 3ay + 6by$

$[(a+2b)(x+3y)]$

28. $a^4(x^2+1) - 10a^4$

$\left[a^4(x+3)(x-3)\right]$

29. $16a^2b - \frac{1}{9}b$

$\left[b\left(4a-\frac{1}{3}\right)\left(4a+\frac{1}{3}\right)\right]$

30. $-12x^4 + 32x^2 - 16$

$\left[-4(x^2-2)(3x^2-2)\right]$

31. $8a^3b^3 - 6a^2b^2 + \frac{3}{2}ab - \frac{1}{8}$

$\left[\left(2ab-\frac{1}{2}\right)^3\right]$

32. $(2a-3b)^2 - (a-b)^2$

$[(3a-4b)(a-2b)]$

33. $-9m^3 + 12m^2n - 4mn^2$

$\left[-m(3m-2n)^2\right]$

34. $x^4 - 18x^2 + 81$

$\left[(x+3)^2(x-3)^2\right]$

35. $a^2x + a^2y - ax - ay - 2x - 2y$

$[(x+y)(a-2)(a+1)]$

36. $4x^5 - 15x^3 - 5x^2 + 15x + 9$

$\left[(x+1)^3(2x-3)^2\right]$

37. $x^6y^6 - 64$

$\left[(xy+2)(xy-2)(x^2y^2-xy+4)(x^2y^2+xy+4)\right]$

38. $\frac{27}{8}x^6 - \frac{125}{8}x^3$

$$\left[\frac{1}{8}x^3(3x-5)(9x^2+15x+25)\right]$$

39. $2x^4+5x^3+3x^2$

$$\left[x^2(x+1)(2x+3)\right]$$

40. $x^2+2x-3+5ax-5a$

$$[(x-1)(x+3+5a)]$$

41. $2y^4-5y^3+5y-2$

$$[(y+1)(y-1)(y-2)(2y-1)]$$

42. $x^2y-5xy+6y+x^2-4x+4$

$$[(x-2)(xy-3y+x-2)]$$

43. $70a^4+51a^2b-70b^2$

$$\left[(10a^2-7b)(7a^2+10b)\right]$$

44. y^6-7y^3-8

$$\left[(y-2)(y^2+2y+4)(y+1)(y^2-y+1)\right]$$

45. $8x^4+4x^3-6x^2-5x-1$

$$\left[(x-1)(2x+1)^3\right]$$

Capitolo 6

FRAZIONI ALGEBRICHE

6.1 Frazioni algebriche

Definizione 6.1.1. Si dice *frazione algebrica* il rapporto tra due espressioni algebriche

Sono esempi di frazioni algebriche:
$\dfrac{3a-b}{a+2}$, $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-4}$, $\dfrac{3ab^2}{c^5}$, x^2-2x (il denominatore è 1)

In questo tipo di espressioni in generale non è possibile attribuire alle lettere un qualsiasi valore perchè, essendo frazioni, non possono avere zero al denominatore. E' necessario, pertanto, determinare l'insieme dei valori che possono assumere le lettere; tale insieme viene chiamato *campo di esistenza* (C.E.) Per la frazione $\dfrac{3a-b}{a+2}$ dovendo imporre che il denominatore non sia zero, avremo la condizione $a+2\neq 0$ cioè $a\neq -2$. Quindi il campo di esistenza è $\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$.

Relativamente alla frazione $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-4}$, dovrà essere $x^2-4\neq 0$ cioè, scomponendo e applicando la legge di annullamento di un prodotto $(x-2)\cdot(x+2)\neq 0$ ovvero $x-2\neq 0$ e $x+2\neq 0$ quindi $x\neq +2$ e $x\neq -2$. Il campo di esistenza è dunque $\mathbb{Q}\setminus\{-2,+2\}$

E' opportuno osservare che, diversamente dal denominatore, il numeratore può annullarsi, rendendo nulla la frazione; i valori per i quali è zero il numeratore, non essendo da escludere, non vanno perciò determinati.

Una frazione algebrica può essere in alcuni casi semplificata trasformandola in un'altra *equivalente* applicando la proprietà invariantiva delle frazioni.

Data la frazione $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ per semplificarla procederemo nel modo seguente:

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{x+2}{x-3} \qquad\qquad C.E.\mathbb{Q}\setminus\{2,3\}$$

E' importante far notare che la frazione ottenuta $\dfrac{x+2}{x-3}$ deve conservare il campo di esistenza della frazione iniziale anche se potrebbe essere calcolata per $x=2$; le due frazioni sono perciò equivalenti solo per i valori delle lettere per i quali esistono entrambe.

In generale l'equivalenza tra frazioni va sempre riferita al loro campo di esistenza. Ad esempio le frazioni $\dfrac{x(x+1)}{2x}$ e $\dfrac{x+1}{2}$ non sono equivalenti per $x=0$ mentre lo sono per qualsiasi altro valore.

Esempio 6.1.1. Semplificare le seguenti frazioni: $\dfrac{3x^2-9x}{x^2-9}$, $\dfrac{a^2-ab}{a^2-2ab+b^2}$, $\dfrac{2x^3-6x^2+6x-2}{2x^2+2x-4}$

$\dfrac{3x^2-9x}{x^2-9}=\dfrac{3x\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}=\dfrac{3x}{x+3}$ C.E. $\mathbb{Q}\setminus\{\pm 3\}$

(E' consuetudine, anzichè scrivere il campo di esistenza, indicare le condizioni di esistenza (che continueremo ad abbreviare con C.E.) della frazione, nel modo seguente: $x \neq +3$, $x \neq -3$ (oppure $x \neq \pm 3$)

$$\frac{a^2-ab}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a\cancel{(a-b)}}{(a-b)^{\cancel{2}}} = \frac{a}{a-b} \qquad \text{C.E. } a \neq b$$

$$\frac{2x^3-6x^2+6x-2}{2x^2+2x-4} = \frac{2(x-1)^{\cancel{3}2}}{2\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{(x-1)^2}{x+2} \qquad \text{C.E. } x \neq 1;\ x \neq -2$$

Esercizio 6.1.1. Semplificare le seguenti frazioni:

- $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-x}$
- $\dfrac{xy+3x+4y+12}{y^2-9}$
- $\dfrac{a^3-8}{2a^2-3a-2}$
- $\dfrac{4b^3-4b^2}{2b^3-4b^2+2b}$
- $\dfrac{1-x^2}{x^3-3x^2+3x-1}$
- $\dfrac{y^2-3y+2}{y^2-y-2}$
- $\dfrac{x^2-10xy+25y^2}{25x^2y^2-10x^3y+x^4}$

6.2 Operazioni

Per operare con le frazioni algebriche si può procedere in modo analogo a quanto appreso con le frazioni numeriche tenendo presente che ora i fattori saranno quelli ottenuti attraverso la scomposizione dei polinomi. E' quindi sufficiente illustrare le operazioni con degli esempi.

1. Addizione algebrica

   Esempio 6.2.1.

   - $\dfrac{1-a}{a+1} - \dfrac{a^2-a}{a+1} =$ C.E. $a \neq -1$
     $\dfrac{(1-a)-(a^2-a)}{a+1} =$
     $\dfrac{1-a-a^2+a}{a+1} =$
     $\dfrac{1-a^2}{a+1} =$
     $\dfrac{(1-a)\cancel{(1+a)}}{\cancel{a+1}} = 1-a$
   - $\dfrac{18}{x^2-9} - \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{x}{x-3} =$
     $\dfrac{18}{(x-3)(x+3)} - \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{x}{x-3} =$ C.E. $x \neq \pm 3$
     $\dfrac{18-x(x-3)+x(x+3)}{(x-3)(x+3)} =$
     $\dfrac{18-x^2+3x+x^2+3x}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{6x+18}{(x-3)(x+3)} =$

$\dfrac{6\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}} =$

$\dfrac{6}{x-3}$

- $\dfrac{1-xy}{x^2+xy} + \dfrac{x+y}{x} - 1 =$

  $\dfrac{1-xy}{x(x+y)} + \dfrac{x+y}{x} - 1 =$ C.E. $x \neq 0$, $x \neq -y$

  $\dfrac{1-xy+(x+y)^2-x(x+y)}{x(x+y)} =$

  $\dfrac{1-xy+x^2+2xy+y^2-x^2-xy}{x(x+y)} =$

  $\dfrac{1+y^2}{x(x+y)}$

- (Importante) $\dfrac{3}{10-5y} - \dfrac{y}{y^2-4y+4} =$

  $\dfrac{3}{5(2-y)} - \dfrac{y}{(y-2)^2}$ C.E. $y \neq 2$

  poichè $2-y$ e $y-2$ sono fattori opposti, per calcolare il minimo comun denominatore è opportuno renderli uguali raccogliendo un segno '-' in uno dei due.(Ciò serve per cambiarlo di segno).

  Abbiamo quindi due possibilità:

  a) $\dfrac{3}{-5(y-2)} - \dfrac{y}{(y-2)^2} = -\dfrac{3}{5(y-2)} - \dfrac{y}{(y-2)^2} = \dfrac{-3(y-2)-5y}{5(y-2)^2} = \dfrac{-3y+6-5y}{5(y-2)^2} =$
  $\dfrac{-8y+6}{5(y-2)^2}$

  b) $\dfrac{3}{5(2-y)} - \dfrac{y}{[-(2-y)]^2} = \dfrac{3}{5(2-y)} - \dfrac{y}{(2-y)^2} = \dfrac{3(2-y)-5y}{5(2-y)^2} = \dfrac{6-3y-5y}{5(2-y)^2} = \dfrac{-8y+6}{5(2-y)^2}$

  Nei due casi abbiamo ovviamente ottenuto lo stesso risultato essendo $(2-y)^2 = (y-2)^2$

Dall'ultimo esempio ricaviamo la seguente regola pratica: qualora un fattore venga cambiato di segno dovrà essere cambiato il segno anche alla frazione che lo contiene solo se tale fattore figura con esponente dispari.

Esercizio 6.2.1. Eseguire le seguenti addizioni algebriche:

- $\dfrac{b-3}{b^3-b^2} - \dfrac{4+b^2}{b^4-b^3} + \dfrac{3b^2+4}{b^5-b^4}$
- $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{1-x}{2x+4} - \dfrac{x}{4-2x} - \dfrac{x^2-10}{x^2-4}$
- $\dfrac{8x^2-18y^2}{4x^2-12xy+9y^2} + \dfrac{24xy}{9y^2-4x^2} - \dfrac{4x^2-9y^2}{4x^2+12xy+9y^2}$
- $\dfrac{8x+16y}{2x^2-4xy+8y^2} - \dfrac{3x+3y}{x^2+3xy+2y^2} - \dfrac{18xy}{x^3+8y^3}$

2. Moltiplicazione

- $\dfrac{16x^4-1}{x^2-7x+6} \cdot \dfrac{x^2-6x}{4x^3+4x^2+x} =$

  $\dfrac{(4x^2+1)\cancel{(2x+1)}(2x-1)}{(x-1)\cancel{(x-6)}} \cdot \dfrac{\cancel{x}\cancel{(x-6)}}{\cancel{x}(2x+1)^{\cancel{2}}} =$

  $$C.E. x \neq 1; x \neq 6; x \neq 0; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(4x^2+1)(2x-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

- $$\frac{2x-4}{xy+3x}\cdot\frac{y^3+9y^2+27y+27}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2}{6y+18}=$$

  $$\frac{\cancel{2}\cancel{(x-2)}}{\cancel{x}\cancel{(y+3)}}\cdot\frac{(y+3)^{\cancel{3}}}{(x-2)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}}{{}_3\cancel{6}\cancel{(y+3)}}=$$

  $$C.E.x\neq 0; x\neq 2; y\neq -3$$

  $$\frac{x(y+3)}{3(x-2)}$$

- $$\frac{x^2-49}{27x^3+1}\cdot\frac{1}{7-x}\cdot(9x^2-3x+1)=$$

  $$\frac{(x-7)(x+7)}{(3x+1)\cancel{(9x^2-3x+1)}}\cdot\frac{1}{7-x}\cdot\cancel{(9x^2-3x+1)}=$$

  $$C.E.x\neq -\frac{1}{3}; x\neq 7$$

  per il fattore $9x^2-3x+1$ non sono state indicate condizioni perchè, come dimostreremo in seguito, i fattori irriducibili (somme di quadrati e falsi quadrati) se in una lettera non si annullano mai, se omogenei in due lettere si annullano solo quando esse sono contemporaneamente nulle.

  $$\frac{\cancel{(x-7)}(x+7)}{3x+1)}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x-7}}\right)=-\frac{x+7}{3x+1}$$

- $$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)=$$

  $$\frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2}\cdot\left[\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}\right]$$

  C.E. a, b non contemporaneamente nulli; $a\neq -b$; $a\neq +b$

  $$\frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2-ab+ab+b^2}{(a-b)(a+b)}$$

  $$\frac{\cancel{(a-b)(a+b)}}{\cancel{a^2+b^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2+b^2}}{\cancel{(a-b)(a+b)}}=1$$

Esercizio 6.2.2. Eseguire le seguenti moltiplicazioni:

- $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}\cdot\dfrac{x^2+5x}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25}$
- $3x\cdot\dfrac{x+y}{3x-3y}\cdot\dfrac{2xy-x^2-y^2}{x^3+xy^2+2x^2y}$
- $\dfrac{a^3+b^3}{4a^2+4b^2}\cdot\dfrac{2a^4-2b^4}{a^2-ab+b^2}\cdot\dfrac{1}{a^2-b^2}$
- $\dfrac{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}{2x^2+xy-y^2}\cdot\dfrac{2x^2-3xy+y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$

3. Potenza

- $\left(\dfrac{2x^2}{x+4}\right)^3 =$ $\qquad$ C.E.$x \neq -4$
  $\dfrac{8x^6}{(x+4)^3}$
- $\left(\dfrac{5x^2-9x-2}{36x^5-12x^4y+x^3y^2}\right)^4 =$
  $\left[\dfrac{(5x+1)(x-2)}{x^3(6x-y)^2}\right]^4 =$ $\qquad$ C.E.$x \neq 0; y \neq 6x$
  $\dfrac{(5x+1)^4(x-2)^4}{x^{12}(6x-y)^8}$
- $\left(\dfrac{y^2}{y^3+8} - \dfrac{y}{y^2-2y+4} + \dfrac{1}{y+2}\right)^2 \cdot \dfrac{xy^2+4xy+4x}{x(y^3-6y^2+12y-8)} =$
  $\left[\dfrac{y^2}{(y+2)(y^2-2y+4)} - \dfrac{y}{y^2-2y+4} + \dfrac{1}{y+2}\right]^2 \cdot \dfrac{\cancel{x}(y+2)^2}{\cancel{x}(y-2)^3} =$
  $C.E. y \neq -2;\ x \neq 0;\ y \neq 2$
  $\left[\dfrac{y^2-y^2-2y+y^2-2y+4}{(y+2)(y^2-2y+4)}\right]^2 \cdot \dfrac{(y+2)^2}{(y-2)^3} =$
  $\left[\dfrac{y^2-4y+4}{(y+2)(y^2-2y+4)}\right]^2 \cdot \dfrac{(y+2)^2}{(y-2)^3} =$
  $\left[\dfrac{(y-2)^2}{(y+2)(y^2-2y+4)}\right]^2 \cdot \dfrac{(y+2)^2}{(y-2)^3} =$
  $\dfrac{(y-2)^{\cancel{4}}}{\cancel{(y+2)^2}(y^2-2y+4)^2} \cdot \dfrac{\cancel{(y+2)^2}}{\cancel{(y-2)^3}} =$
  $\dfrac{y-2}{(y^2-2y+4)^2}$

Esercizio 6.2.3. Eseguire le seguenti potenze:

- $\left(\dfrac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$
- $\left(-\dfrac{a^2b^3}{1-2a+a^2}\right)^4$
- $\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}-1\right)^5$
- $\left\{\left[\dfrac{ab^2\,(a+b)^3}{-2x\,(x-y)}\right]^3\right\}^2$

4. Divisione

- $\dfrac{a^2+10a+25}{a^2-3a+2} : \dfrac{a^3+15a^2+75a+125}{3a^2-6a} =$
  $\dfrac{(a+5)^2}{(a-1)(a-2)} : \dfrac{(a+5)^3}{3a(a-2)} =$ $\qquad$ C.E.$a \neq 1; a \neq 2; a \neq 0$
  $\dfrac{\cancel{(a+5)^2}}{(a-1)\cancel{(a-2)}} \cdot \dfrac{3a\cancel{(a-2)}}{(a+5)^{\cancel{3}}} =$

Poichè invertendo la frazione c'è un nuovo fattore a denominatore, è necessario aggiungere la condizione di esistenza $a \neq -5$.(avremmo potuto, già nel passaggio precedente, imporre $a \neq -5$ in quanto, in una divisione, il divisore deve essere sempre diverso da zero)

$\frac{3a}{(a-1)(a+5)}$

- $\frac{3ax+6bx-ay-2by}{27x^3-y^3+9xy^2-27x^2y} : \frac{2by+ay+3ax+6bx}{-y^2+6xy-9x^2} =$

  $\frac{\cancel{(3x-y)}(a+2b)}{(3x-y)^{\cancel{3}2}} : \frac{(y+3x)(2b+a)}{-(y-3x)^2} =$ C.E.$y \neq 3x$; $\left(x \neq \frac{1}{3}y\right)$

  $\frac{\cancel{(a+2b)}}{(3x-y)^2} \cdot \frac{-(y-3x)^2}{(y+3x)\cancel{(2b+a)}} =$

  $C.E. y \neq -3x; a \neq -2b$

  $\frac{1}{\cancel{(3x-y)^2}} \cdot \frac{-\cancel{(3x-y)^2}}{(y+3x)} =$

  $-\frac{1}{y+3x}$

- $\frac{2x^2-x-1}{3} : \frac{8x^3+1}{x+3} \cdot \frac{(x+3)(4x^2-2x+1)}{x-1} =$

  $C.E. x \neq -3; x \neq 1$

  $\frac{(2x+1)(x-1)}{3} : \frac{(2x+1)(4x^2-2x+1)}{x+3} \cdot \frac{(x+3)(4x^2-2x+1)}{x-1} =$

  $\frac{\cancel{(2x+1)}\cancel{(x-1)}}{3} \cdot \frac{x+3}{\cancel{(2x+1)}\cancel{(4x^2-2x+1)}} \cdot \frac{(x+3)\cancel{(4x^2-2x+1)}}{\cancel{x-1}} =$

  $C.E. x \neq -\frac{1}{2}$

  $\frac{(x+3)^2}{3}$

- $\frac{\frac{a}{x^2}+\frac{x}{a^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ax}+\frac{1}{x^2}} =$

  $C.E. a \neq 0; x \neq 0$

  $\frac{\frac{a^3+x^3}{a^2x^2}}{\frac{x^2-ax+a^2}{a^2x^2}} =$

  $\frac{(a+x)\cancel{(a^2-ax+x^2)}}{\cancel{a^2x^2}} \cdot \frac{\cancel{a^2x^2}}{\cancel{x^2-ax+a^2}} =$

  $a+x$

- $\left(x+\frac{2-x}{1+2x}\right) : \left(1-\frac{1+2x}{2x-x^2}\right) \cdot \frac{1+2x}{2x} =$

  $\left(x+\frac{2-x}{1+2x}\right) : \left(1-\frac{1+2x}{x(2-x)}\right) \cdot \frac{1+2x}{2x} =$

  $C.E. x \neq -\frac{1}{2}; x \neq 0; x \neq 2$

$$\frac{x+2x^2+2-x}{1+2x}:\frac{2x-x^2-1-2x}{x(2-x)}\cdot\frac{1+2x}{2x}=$$
$$\frac{2x^2+2}{1+2x}:\frac{-x^2-1}{x(2-x)}\cdot\frac{1+2x}{2x}=$$
$$\frac{\cancel{2}\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{1+2x}}\cdot\frac{\cancel{x}(2-x)}{-\cancel{(x^2+1)}}\cdot\frac{\cancel{1+2x}}{\cancel{2}\cancel{x}}=$$
(non ci sono condizioni aggiunte perchè x^2+1 è sempre diverso da zero)
$$-(2-x)=$$
$$x-2$$

- $$\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2:\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right):\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)}:\left(1-\frac{2b}{a+b}\right)^2=$$

$$C.E. b\neq 0; a\neq 0; a\neq -b$$

$$\frac{\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2:\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2}{\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}:\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}:\left(\frac{a+b-2b}{a+b}\right)^2=$$
$$\frac{\left[\frac{(a-b)(a+b)}{ab}\right]^2:\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}}{\frac{(a+b)(a-b)\cancel{(a^2+b^2)}}{\cancel{a^2b^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2+b^2}}}:\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2=$$
$$\frac{\frac{(a-b)^2\cancel{(a+b)^2}}{\cancel{a^2b^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{(a+b)^2}}}{(a+b)(a-b)}:\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=$$

$$C.E. a\neq b$$

$$\frac{\cancel{(a-b)^2}}{\cancel{(a+b)}(a-b)}\cdot\frac{(a+b)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-b)^2}}=$$
$$\frac{a+b}{a-b}$$

Esercizio 6.2.4. Eseguire le seguenti divisioni:

- $\frac{x^3-49x}{x^2+14x+49}:\frac{x^2-14x+49}{2x^2-98}:(-4x^2)$
- $\frac{a^2+ab}{x^3+x^2y+2x^2+2xy}:\frac{a^3-ab^2}{x^3+4x+4x^2}$
- $\frac{a^6-b^6}{ax^2+bx^2}:\frac{\left(a^2+b^2\right)^2-a^2b^2}{x}$
- $\left(\frac{a-2}{b-1}\right)^2:\left(\frac{a^2-4}{2b-2}\right)^3$

6.3 Esercizi riepilogativi

Esercizio 6.3.1.

1. $\left(\frac{a}{5a^2-3a-2}+\frac{2a-1}{a^2-1}\right):\left[2+9a\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a^2-1}\right)\right]$

$$\left[\frac{1}{5a+2}\right]$$

2. $\left(\frac{15}{4x+12}-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{4x-4}\right):\left(\frac{3}{2x+2}-\frac{1}{2x-2}\right)$

$$\left[\frac{x-3}{x+3}\right]$$

3. $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{1-x}\right)\frac{1+x^2}{2}$

$$[-x]$$

4. $\left[\frac{a-3}{a^2+3a+2}:\left(\frac{2}{a+2}-\frac{3}{a+1}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a+1}\right):\frac{3a+1}{a^2-2a-3}\right]$

$$\left[-\frac{2a}{a+4}\right]$$

5. $\left(\frac{x+2y}{x-2y}+\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{2x^2+1+4y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{4y^2+1+4y}{3x^2-12y^2}$

$$\left[\frac{3(2y-1)}{2y+1}\right]$$

6. $\left(\frac{x-1}{2x^2+5x+3}-\frac{1-3x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{4x^2-9}{7x-2}$

$$\left[\frac{2x-3}{x-1}\right]$$

7. $\left(\frac{x^2-1}{x^3+x^2-4x-4}\cdot\frac{x-2}{x}-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x^3+x^2}{2x^2-3x-2}$

$$\left[\frac{3x}{4-x^2}\right]$$

8. $\left(\frac{x+5}{x^2+5x+6}+\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x+2}\right)^2:\left(\frac{1}{x+2}\right)^3$

$$[x+2]$$

9. $\left[\left(\frac{x}{y}+1\right)^2:\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x}{y}-1\right)^2:\left(\frac{x}{y}+1\right)+2+\frac{2x}{y}$

$$\left[\left(\frac{x+y}{y}\right)^2\right]$$

10. $\left(1+\frac{2y}{x-y}\right)\cdot\left[\left(1-\frac{2xy}{x^2+xy+y^2}\right):\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right]^2$

$$\left[\frac{x-y}{x+y}\right]$$

11. $\left[\left(\frac{3x^2-2}{x-1}+\frac{6x-2}{x-3}\right)\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{x+13}{x-3}\right]^2\cdot\left(1+\frac{x-2}{x-1}\right)^{-3}$

$$\left[\frac{x-1}{2x-3}\right]$$

12. $\left\{\left[\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{1-x}\right)(x^2-4x+3)-\frac{4}{3x-1}\right]\cdot\frac{1}{6}\right\}^2:\frac{x^2-2x+1}{3x^2-4x+1}$

$$\left[\frac{x-1}{3x-1}\right]$$

13. $\left(a+\frac{a}{a+3}+\frac{4}{a+3}\right)\cdot\left[\left(\frac{2}{a+1}-1+a\right)^2:\left(\frac{2+3a+a^2}{a^2+2a-3}\right)^2\right]:\left(\frac{2}{a+1}+a-1\right)^2$

$\left[\frac{(a+3)(a-1)^2}{(a+1)^2}\right]$

14. $\left(\frac{3m-n}{m+n}+\frac{m+2n}{m-n}+\frac{m(5n+m)}{n^2-m^2}\right)^2\left(1-\frac{2n}{m+n}\right)^{-3}$

$\left[\frac{9(m+n)}{m-n}\right]$

15. $\dfrac{\left[\frac{2}{x^2-1}+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{9}{x^3-x^2}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{x^2}{3x-3}-\frac{1}{1-x}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x}\right)}$

$\left[\frac{2x}{x^2-1}\right]$

16. $\left\{\frac{1}{x+2y}-\frac{1}{x^2+4y^2+4xy}\cdot\left[x-\frac{12y^2-2x^2-2xy}{x-2y}\right]\right\}:\left(\frac{1}{2y-x}+\frac{6y-x}{x^2-4y^2}\right)$

[1]

17. $\left(\frac{8a^2}{1+2a}-2a\right)\left(2a+\frac{1+4a-8a^3}{4a^2-1}\right)\left(\frac{2}{2a-1}+\frac{4}{2a+1}-2\right)^{-1}:\left(a-\frac{2a}{2a+1}\right)$

$\left[\frac{2a+1}{2a(3-2a)}\right]$

18. $\left[\frac{2x+y}{x-y}-\frac{x^2+5xy}{x^2-y^2}\right]^3:\frac{x^6+y^6-2x^3y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}+\frac{y-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$

[0]

19. $\left[\left(\frac{a}{2}-\frac{2a}{b^2}\right)^{-2}:\left(\frac{a}{2}-\frac{2a}{b^2}\right)^{-1}\right]:\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b^2-4}\right)$

[$2b$]

20. $\left[\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3-x}\right):\frac{5-2x}{x^2+3-4x}+\left(\frac{x-2}{1-x}\right)^{-2}\right]:\left[\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right]$

$\left[\frac{1}{x-2}\right]$

Esercizio 6.3.2. Calcolare il valore dell'espressione seguente per $x=9$:
$\left(\frac{1}{x^3+4x^2+x-6}-\frac{1}{x^3+6x^2+11x+6}\right):\left(x^4-5x^2+4\right)^{-1}+\frac{60}{9-x^2}$

$\left[\frac{1}{3}\right]$

Esercizio 6.3.3. Calcolare il valore dell'espressione seguente per $a=1$ e $b=-\frac{1}{6}$:
$\left(\frac{a-b}{4a^2-b^2}+\frac{2a}{2a^2+ab-b^2}-\frac{b}{2a^2+3ab+b^2}\right)\cdot\left(\frac{b^2-3a^2}{a^2}-1\right)$

[-6]

Capitolo 7

EQUAZIONI

7.1 Introduzione

Definizione 7.1.1. Si dice *equazione* una uguaglianza tra due espressioni algebriche.

Dette A e B le due espressioni algebriche, l'equazione si presenterà nella forma:

$$A = B$$

A e B si dicono rispettivamente primo e secondo membro dell'equazione.
Sono esempi di equazioni:

1. $2x + 1 = x - 3$ $\quad (A = 2x + 1, B = x - 3)$
2. $x^2 - 3 = 1$ $\quad (A = x^2 - 3, B = 1)$
3. $1 - x = 0$ $\quad (A = 1 - x, B = 0)$
4. $x = y + 1$ $\quad (A = x, B = y + 1)$
5. $x^2 + 2y = 5 - z$ $\quad (A = x^2 + 2y, B = 5 - z)$
6. $\dfrac{2x+3}{x-1} = 1 - \dfrac{1}{x}$ $\quad (A = \dfrac{2x+3}{x-1}, B = 1 - \dfrac{1}{x})$

Se in una equazione sostituiamo alle lettere presenti dei numeri, i due membri assumono anch'essi valori numerici.

Con riferimento all'esempio 1, se $x = 1$ otteniamo $A = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ e $B = 1 - 3 = -2$ dunque l'uguaglianza diventa $3 = -2$ ovviamente falsa; se $x = -4$ otteniamo, invece $-7 = -7$ che è una vera uguaglianza.

Con riferimento all'esempio 2 è facile constatare che l'uguaglianza risulta verificata per $x = 2$ e $x = -2$ mentre non lo è, ad esempio, per $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Con riferimento all'esempio 4, per stabilire se l'uguaglianza è verificata, è necessario attribuire dei valori numerici ad entrambe le lettere presenti, cioè una coppia ordinata di numeri (l'ordine è generalmente quello alfabetico):

se $x = 1$ e $y = 2 \Rightarrow 1 = 3 \Rightarrow$la coppia $(1, 2)$ non verifica l'uguaglianza
se $x = -5$ e $y = 0 \Rightarrow -5 = 1 \Rightarrow$la coppia $(-5, 0)$ non verifica l'uguaglianza
se $x = 2$ e $y = 1 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow$la coppia $(2, 1)$ verifica l'uguaglianza
se $x = 0$ e $y = -1 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$la coppia $(0, -1)$ verifica l'uguaglianza

Analogamente, nell'esempio 5, per stabilire se l'uguaglianza è verificata dovremo scegliere delle terne di numeri.

Definizione 7.1.2. Un numero (coppia, terna...) si dice *soluzione* di una equazione se, sostituito nei due membri, rende vera l'uguaglianza.

Definizione 7.1.3. *Risolvere* un'equazione significa determinare l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Poichè per risolvere le equazioni è necessario determinare dei particolari valori delle lettere, che inizialmente non conosciamo, attribuiamo ad esse il nome di *incognite* (solitamente vengono indicate con le ultime lettere dell'alfabeto).

E' opportuno osservare che:
se in una equazione figura una incognita, ogni soluzione è un numero, se figurano due incognite (tre incognite,..) ogni soluzione è una coppia (terna,...) ordinata.
Per determinare le soluzioni di una equazione è importante tenere presente l'insieme numerico al quale appartengono i valori che possono assumere le incognite. Se consideriamo l'equazione $3x^3 - x^2 = 12x - 4$ con $x \in \mathbb{Q}$ si può verificare che sono soluzioni i valori 2, -2, $1/3$; se diversamente si richiede che $x \in \mathbb{N}$, delle tre soluzioni verificate, è accettabile solo il 2. Quando non è specificato l'insieme numerico al quale riferirsi, conveniamo che esso sia: $\mathbb{Q}$ se figura una sola incognita, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,...) se figurano due incognite (tre incognite,...).

Con riferimento all'insieme S delle soluzioni, è possibile classificare una equazione come segue:

determinata $\Leftrightarrow$ l'insieme S non è vuoto ed ha cardinalità finita ($|S| \in \mathbb{N}^*$)

impossibile $\Leftrightarrow$ l'insieme S è vuoto ($|S| = 0$)

indeterminata $\Leftrightarrow$ l'insieme S ha cardinalità infinita

identità $\Leftrightarrow$ tutti i valori attribuibili alle incognite sono soluzioni

Con riferimento alla forma algebrica nella quale si presenta, una equazione si dice:

intera quando i suoi membri sono espressioni polinomiali

fratta quando almeno una incognita figura al denominatore.

Sono esempi di equazioni intere:

$$x^2 + 2x - 1 = (x-1)(2x+3)$$
$$x + \frac{2}{3}y = \frac{5x+1}{6}$$

Sono esempi di equazioni fratte:

$$\frac{x+1}{x} = 3 + x$$
$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+3}{x+2}$$
$$\frac{xy+3}{x-2} = \frac{y}{y+1}$$

Talvolta in una equazione compaiono delle lettere che rappresentano dei numeri assegnati, anche se non esplicitamente precisati; esse non vengono considerate incognite e sono dette *parametri* (solitamente vengono indicate con le prime lettere dell'alfabeto).

Con riferimento alle lettere presenti, un'equazione si dice:

letterale o parametrica se in essa compare almeno un parametro oltre alle incognite

numerica se non contiene altre lettere oltre alle incognite.

Sono esempi di equazioni letterali:

$$x + 3a = (x-1)^2 + 2ax + b$$

(una incognita: x, due parametri: a, b)

$$\frac{2x+5y}{k-3} = (k-2)y + kx$$

(due incognite: x, y, un parametro: k)

Definizione 7.1.4. Due equazioni si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Sono equivalenti le equazioni $x-3=0$ e $x-1=2$ in quanto è facile intuire che l'insieme delle soluzioni è $S=\{3\}$ per entrambe. Non sono equivalenti le equazioni $x^2-9=0$ e $x-3=0$ pur avendo entrambe 3 come soluzione, infatti non hanno lo stesso insieme di soluzioni essendo -3 soluzione di $x^2-9=0$, ma non di $x-3=0$.

Ci proponiamo ora di affrontare la risoluzione delle equazioni ed iniziamo con lo studio delle equazioni in una incognita.

7.2 Risoluzione di equazioni in una incognita

Il metodo per risolvere una equazione consiste nell'individuare una equazione ad essa equivalente della quale sia immediato determinare quante e quali siano le soluzioni.
Per arrivare a scrivere questa equazione equivalente ricorriamo ai *principi di equivalenza.*

Teorema 7.2.1 (Primo principio di equivalenza)**.** *Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di una equazione una stessa espressione algebrica (purchè esista per gli stessi valori per i quali esistono i due membri) si ottiene una equazione equivalente a quella iniziale.*

In sintesi: $A(x) = B(x)$ e $A(x) + E(x) = B(x) + E(x)$ sono equivalenti

Dimostrazione. Detti S_1 l'insieme delle soluzioni di $A(x) = B(x)$ e S_2 l'insieme delle soluzioni di $A(x) + E(x) = B(x) + E(x)$:
si ha che:

$$S_1 \subseteq S_2$$

infatti se $x_0 \in S_1 \Rightarrow A(x_0) = B(x_0) \Rightarrow A(x_0) + E(x_0) = B(x_0) + E(x_0)$ perchè somma di numeri uguali a due a due. Dunque $x_0 \in S_2$
ma anche:

$$S_2 \subseteq S_1$$

infatti se $x_0 \in S_2 \Rightarrow \underbrace{A(x_0) + E(x_0)}_{A_1(x_0)} = \underbrace{B(x_0) + E(x_0)}_{B_1(x_0)} \Rightarrow A_1(x_0) = B_1(x_0)$
$\Rightarrow A_1(x_0) - E(x_0) = B_1(x_0) - E(x_0)$ per differenza di numeri uguali a due a due
$\Rightarrow A(x_0) + E(x_0) - E(x_0) = B(x_0) + E(x_0) - E(x_0)$ cioè $A(x_0) = B(x_0)$ dunque $x_0 \in S_1$.
Poichè $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_1$ allora $S_1 = S_2$.

$\square$

Esempio 7.2.1. L'equazione:

$$\underbrace{3x+2}_{A(x)} = \underbrace{2x-1}_{B(x)}$$

applicando il primo principio è equivalente a:

$$\underbrace{3x+2}_{A(x)} + \underbrace{(-2x-2)}_{E(x)} = \underbrace{2x-1}_{B(x)} + \underbrace{(-2x-2)}_{E(x)}$$

ossia:

$$3x+2-2x-2 = 2x-1-2x-2$$

eseguendo i calcoli algebrici essa diventa:

$$x = -3$$

Poichè, in quest'ultima equazione, risulta evidente che l'insieme delle soluzioni è $S = \{-3\}$, possiamo concludere che S è l'insieme delle soluzioni anche dell'equazione di partenza.

Esempio 7.2.2. L'equazione:

$$x+2=8$$

applicando il primo principio è equivalente a:

$$x+2+(-2) = 8+(-2)$$

eseguendo i calcoli algebrici essa diventa:

$$x = 8-2$$

da cui:

$$x = 6 \quad \text{quindi} \quad S = \{6\}$$

Esempio 7.2.3. L'equazione:

$$x - x^2 + 1 = 5 - x^2$$

applicando il primo principio è equivalente a:

$$x - x^2 + 1 + x^2 - 1 = 5 - x^2 + x^2 - 1$$

eseguendo i calcoli algebrici essa diventa:

$$x = 5-1$$

da cui:

$$x = 4 \quad \text{quindi} \quad S = \{4\}$$

Un'analisi attenta degli ultimi due esempi ci permette di osservare e generalizzare facilmente due conseguenze pratiche del primo principio di equivalenza.

Principio del trasporto: Si ottiene una equazione equivalente se si trasporta un termine da un membro all'altro cambiandolo di segno.

Principio di cancellazione Si ottiene una equazione equivalente se si elimina (cancella) uno stesso termine da entrambi i membri.

Teorema 7.2.2 (Secondo principio di equivalenza)**.** *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione per una stessa espressione algebrica non nulla (purchè esista per gli stessi valori per i quali esistono i due membri) si ottiene una equazione equivalente a quella iniziale.*

In sintesi le uguaglianze:

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) \\ A(x) \cdot E(x) &= B(x) \cdot E(x) \\ \frac{A(x)}{E(x)} &= \frac{B(x)}{E(x)} \qquad \text{con } E(x) \neq 0 \end{aligned}$$

sono equivalenti.
E' sufficiente dimostrare l'equivalenza tra le prime due scritture in quanto la divisione è riconducibile alla moltiplicazione per il reciproco.

Dimostrazione. Detti S_1 l'insieme delle soluzioni di $A(x) = B(x)$ e S_2 l'insieme delle soluzioni di $A(x) \cdot E(x) = B(x) \cdot E(x)$:
si ha che:

$$S_1 \subseteq S_2$$

infatti se $x_0 \in S_1$ allora

$$A(x_0) = B(x_0)$$

e moltiplicando numeri uguali a due a due

$$A(x_0) \cdot E(x_0) = B(x_0) \cdot E(x_0)$$

Dunque $x_0 \in S_2$
ma anche:

$$S_2 \subseteq S_1$$

infatti se $x_0 \in S_2$ allora

$$A(x_0) \cdot E(x_0) = B(x_0) \cdot E(x_0)$$

applicando il principio del trasporto

$$\begin{aligned} A(x_0) \cdot E(x_0) - B(x_0) \cdot E(x_0) &= 0 \ . \\ E(x_0) \cdot (A(x_0) - B(x_0)) &= 0 \end{aligned}$$

e poichè $E(x_0) \neq 0$ per la legge di annullamento del prodotto deve essere

$$\begin{aligned} A(x_0) - B(x_0) &= 0 \\ A(x_0) &= B(x_0) \end{aligned}$$

dunque $x_0 \in S_1$.
Poichè $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_1$ allora $S_1 = S_2$. □

Esempio 7.2.4. L'equazione:

$$3x + 2 = x - 1$$

per il principio del trasporto è equivalente a:

$$3x - x = -1 - 2$$

eseguendo i calcoli algebrici diventa:

$$\underbrace{2x}_{A(x)} = \underbrace{-3}_{B(x)}$$

per il secondo principio è equivalente a:

$$2x \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{E(x)} = -3 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{E(x)}$$

da cui si ottiene:

$$x = -\frac{3}{2}$$

quindi:

$$S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

Esempio 7.2.5. L'equazione:

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{3}x + 1$$

può essere risolta in due modi:

(a) applicando il principio del trasporto è equivalente a:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{3}{4} + 1$$

eseguendo i calcoli algebrici diventa:

$$\frac{1}{6}x = \frac{7}{4}$$

applicando il secondo principio è equivalente a:

$$\frac{1}{\cancel{6}}x \cdot \cancel{6} = \frac{7}{\cancel{4}^{2}} \cdot \cancel{6}^{3}$$

da cui si ottiene:

$$x = \frac{21}{2} \quad \text{quindi} \quad S = \left\{\frac{21}{2}\right\}$$

(b) riducendo i due membri allo stesso denominatore diventa:

$$\frac{6x - 9}{12} = \frac{4x + 12}{12}$$

applicando il secondo principio è equivalente a:

$$\cancel{12} \cdot \frac{6x - 9}{\cancel{12}} = \frac{4x + 12}{\cancel{12}} \cdot \cancel{12}$$

ossia:

$$6x - 9 = 4x + 12$$

applicando il principio del trasporto è equivalente a:

$$6x - 4x = 9 + 12$$

eseguendo i calcoli algebrici diventa:

$$2x = 21$$

applicando il secondo principio è equivalente a:

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{21}{2}$$

da cui si ottiene:

$$x = \frac{21}{2}$$

(spesso si tralascia la scrittura insiemistica).

Definizione 7.2.1. Un' equazione si dice ridotta a *forma normale* quando si presenta nella forma: $P(x) = 0$ ove $P(x)$ è un polinomio.

Definizione 7.2.2. Il *grado* di una equazione è il grado del polinomio ottenuto dopo aver ridotto l'equazione a forma normale.

Esempio 7.2.6.

- $20x - 1 = 5x + 3$ portando tutti i termini a primo membro otteniamo la sua forma normale: $15x - 4 = 0$ dalla quale deduciamo che è di primo grado.
- $2x(x^2 - 1) - 2 = x^2(2x - 3)$ semplificando e portando a primo membro otteniamo la forma normale: $3x^2 - 2x - 2 = 0$ dalla quale si deduce che il grado è due.

Esercizio 7.2.1. Determinare il grado delle seguenti equazioni:

- $3x(x-1)^2 - 5(6x+5) = (2x+1)(2x-1) - (x+3)^2$
- $\frac{x-4}{5} - x \cdot \frac{x+4}{3} = x + 1$

7.3 Equazioni di primo grado

In questo paragrafo proponiamo la risoluzione, mediante alcuni esempi, di equazioni di primo grado: intere, fratte e letterali.

Equazioni intere

- L'equazione:

$$(x-2)^3 - 3x(2-x) = (x-1)^3 + 2$$

eseguendo i calcoli algebrici diventa:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 6x + 3x^2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2$$

applicando il principio di cancellazione e sommando i monomi simili si ottiene:

$$-3x^2 + 6x - 8 = -3x^2 + 3x + 1$$

applicando il principio di cancellazione e del trasporto si ha:

$$6x - 3x = 8 + 1$$

da cui:

$$3x = 9$$

applicando il secondo principio di equivalenza si ottiene:

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{3}}$$

ossia:

$$x = 3$$

L'equazione risolta ha una soluzione, è dunque determinata. Per controllare se la soluzione è corretta è sufficiente sostituire nel testo, all'incognita, il valore ottenuto constatando che l'equazione è verificata(questo controllo prende il nome di *verifica*):

$$\begin{gathered}(3-2)^2 - 3 \cdot 3(2-3) = (3-1)^3 + 2 \\ 1^3 - 9(-1) = 2^3 + 2 \\ 1 + 9 = 8 + 2 \\ 10 = 10\end{gathered}$$

- $2(3x-3)-(x+3)(4x-2)-2=(2x+1)^2-(3x-1)^2+(x-1)(x+2)$
  $6x-6-4x^2+2x-12x+6-2=4x^2+4x+1-9x^2+6x-1+x^2+2x-x-2$
  $-4x^2-6x=-4x^2+9x$
  $-15x=0$
  $x=0$ equazione determinata
- $\dfrac{x-5}{4}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+2}{3}\right)=x+\dfrac{1}{12}(x+1)$
  $\dfrac{x-5}{4}-\dfrac{x+2}{6}=x+\dfrac{x+1}{12}$
  $\dfrac{3x-15-2x-4}{12}=\dfrac{12x+x+1}{12}$
  $x-19=13x+1$
  $x-13x=19+1$
  $-12x=20$
  $x=-\dfrac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{12}^{3}}$
  $x=-\dfrac{5}{3}$ equazione determinata

  Osservazione.
  - Poichè il m.c.d. viene semplificato per il secondo principio di equivalenza, è possibile fare a meno di scriverlo.
  - Negli esempi finora esaminati abbiamo sempre isolato l'incognita trasportandola al primo membro. E' preferibile tuttavia fare in modo che l'incognita isolata abbia coefficiente positivo e quindi trasportarla nel membro più opportuno.
    Riferendoci all'ultimo esempio: da $x-19=13x+1$ si ricava, portando l'incognita a secondo membro, $-19-1=13x-x$ cioè $-20=12x$ da cui, applicando la proprietà simmetrica dell'uguaglianza, $12x=-20$ e quindi $x=-\dfrac{5}{3}$
- $2x(x+1)+(x-2)\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)=\left(2x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{7}{6}x$
  $2x^2+2x+2x^2-\dfrac{1}{2}x-4x+1=4x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{9}-\dfrac{7}{6}x$
  $4x^2-2x-\dfrac{1}{2}x+1=4x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{7}{6}x+\dfrac{1}{9}$ m.c.d.=18
  $-36x-9x+18=-24x-21x+2$
  $-45x+18=-45x+2$
  $0=-16$
  Poichè l'uguaglianza ottenuta non è mai verificata (non esiste alcun valore dell'incognita che rende uguali i due membri) possiamo concludere che l'equazione è impossibile ($\nexists x$ ovvero $S=\emptyset$)
- $\dfrac{2(x+1)(1-x)}{3}=(1-2x)^2-3(x-1)^2-3+\dfrac{1}{3}(17-5x^2)-2x$ m.c.d.=3
  $2(1-x^2)=3(1-4x+4x^2)-9(x^2-2x+1)-9+17-5x^2-6x$
  $2-2x^2=3-12x+12x^2-9x^2+18x-9-9+17-5x^2-6x$
  $-2x^2+2=-2x^2+2$

$0 = 0$

Poichè l'uguaglianza ottenuta è sempre verificata (qualsiasi valore dell'incognita rende uguali i due membri) possiamo concludere che l'equazione è una identità ($\forall x$ ovvero $S = \mathbb{Q}$)

- $\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{5} = 3 - 2x + \dfrac{(x^2-x+1)(x+1)}{3} - \dfrac{11-x^3}{15}$ m.c.d.=15

  $6(x^3-1) = 45 - 30x + 5(x^3+1) - 11 + x^3$

  $6x^3 - 6 = 45 - 30x + 5x^3 + 5 - 11 + x^3$

  $6x^3 - 6 = 6x^3 - 30x + 39$

  $30x = 45$

  $x = \dfrac{3}{2}$ equazione determinata

Esercizio 7.3.1.

- $(x-1)(x+1) + 3 - 2x = 3x + (x-1)^2$
- $(x-1)^3 + (2x-1)(2x+1) - (x-3)(x+2) = x(x+1)(x-2) + (2x-3)^2 - 3x^2 + 1$
- $\dfrac{3}{5}x + \dfrac{6}{15} + \dfrac{4}{15}x + 2 = \dfrac{x-5}{5} + \dfrac{2x}{3}$
- $\dfrac{2x+3}{4} + \dfrac{x+5}{6} + \dfrac{x}{2} - x = \dfrac{1+2x}{8} - \dfrac{2x-35}{24}$
- $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{(x-1)(x-2)}{2} = \dfrac{x-2}{2} - 2\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2$

<u>Equazioni fratte</u>

- $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2}{x-2}$ m.c.d.=$(x-1)(x-2)$; $C.E. x \neq 1, x \neq 2$

  $x - 2 = 2(x-1)$

  $x - 2 = 2x - 2$

  $x = 0$

  Nelle equazioni fratte bisogna controllare che la soluzione non contrasti le C.E. Nel nostro caso la soluzione è accettabile, dunque l'equazione è determinata.

- $\dfrac{x^2-2}{x^2-8x+7} - \dfrac{5-x}{7-x} = 1 + \dfrac{3-x}{x-1}$

  $\dfrac{x^2-2}{(x-7)(x-1)} + \dfrac{5-x}{x-7} = 1 + \dfrac{3-x}{x-1}$ m.c.d.=$(x-7)(x-1)$

  $C.E. x \neq 7, x \neq 1$

  $x^2 - 2 + (5-x)(x-1) = (x-7)(x-1) + (3-x)(x-7)$

  $x^2 - 2 + 5x - 5 - x^2 + x = x^2 - x - 7x + 7 + 3x - 21 - x^2 + 7x$

  $6x - 7 = 2x - 14$

  $4x = -7$

  $x = -\dfrac{7}{4}$ accettabile $\Rightarrow$ equazione determinata

- $\dfrac{2x+1}{x^2-3x} - \dfrac{x-3}{x^2+3x} = \dfrac{x}{x^2-9} + \dfrac{6}{9x-x^3}$

  $\dfrac{2x+1}{x(x-3)} - \dfrac{x-3}{x(x+3)} = \dfrac{x}{(x-3)(x+3)} - \dfrac{6}{x(x-3)(x+3)}$

$$\text{m.c.d.} = x(x-3)(x+3)\ ; \qquad C.E. x \neq 0, x \neq \pm 3$$

$(2x+1)(x+3) - (x-3)^2 = x^2 - 6$

$2x^2 + 6x + x + 3 - x^2 + 6x - 9 = x^2 - 6$

$x^2 + 13x - 6 = x^2 - 6$

$13x = 0$

$x = 0$ non accettabile $\Rightarrow$ equazione impossibile

- $\dfrac{x}{(x+2)(2x^2+3x-2)} - \dfrac{3}{x^2+4x+4} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{2x-1}$

  $\dfrac{x}{(x+2)^2(2x-1)} - \dfrac{3}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{2x-1}$

$$\text{m.c.d.} = (x+2)^2(2x-1)\ ; \quad C.E. x \neq -2, x \neq \frac{1}{2}$$

  $x - 3(2x-1) = (x+2)(2x-1) - 2(x+2)^2$

  $x - 6x + 3 = 2x^2 - x + 4x - 2 - 2x^2 - 8x - 8$

  $-5x + 3 = -5x - 10$

  $0 = -13$ equazione impossibile

- $\dfrac{5x^2-6x+1}{6x^3-18x^2+18x-6} - \dfrac{x+1}{3x^2-6x+3} = \dfrac{1}{2x-2}$

  $\dfrac{5x^2-6x+1}{6(x-1)^3} - \dfrac{x+1}{3(x-1)^2} = \dfrac{1}{2(x-1)}$

$$\text{m.c.d.} = 6(x-1)^3\ ; \quad C.E. x \neq 1$$

  $5x^2 - 6x + 1 - 2(x+1)(x-1) = 3(x-1)^2$

  $5x^2 - 6x + 1 - 2x^2 + 2 = 3x^2 - 6x + 3$

  $3x^2 + 3 = 3x^2 + 3$

  $0 = 0$ l'equazione è una identità

E' importante far notare che non tutti i razionali sono soluzioni, in quanto il numero 1 non è attribuibile all'incognita per le C.E.; per indicare le soluzioni dobbiamo scrivere quindi: $\forall x \neq 1$ ovvero $S = \mathbb{Q} - \{1\}$

Esercizio 7.3.2.

- $\dfrac{1}{x-1} = 1$
- $\dfrac{2x+1}{x+3} + \dfrac{2x-5}{6-x} + \dfrac{1}{x^2-3x-18} = 0$
- $\dfrac{2}{3} - \dfrac{x-3}{x} + \dfrac{x+2}{3x-1} = \dfrac{x-18}{18x^2-6x}$
- $\dfrac{5}{x^2+2x-15} + \dfrac{x+2}{3-x} = \dfrac{5-x}{x+5}$
- $\dfrac{6x}{x^2+4x+4} + \dfrac{x^3+8}{x^3+6x^2+12x+8} = 1$

Equazioni letterali

- $6x - a + (2a - x)^2 = 4(x + a) - (2a - x)(2a + x) + 8a(a - \frac{1}{2}x)$

  $6x - a + 4a^2 - 4ax + x^2 = 4x + 4a - 4a^2 + x^2 + 8a^2 - 4ax$

  $6x - a + 4a^2 = 4x + 4a + 4a^2$

  $2x = 5a$

  $x = \frac{5}{2}a$

  L'equazione ha una unica soluzione che dipende dal valore assunto dal parametro; se, ad esempio, $a = 2$ la soluzione è $x = 5$, se $a = -\frac{1}{2}$ la soluzione è $x = -\frac{5}{4}$,... In questo caso, attribuendo al parametro un qualunque valore numerico, otteniamo sempre una equazione determinata; altre volte può accadere che, per alcuni valori del parametro, l'equazione non sia determinata e quindi sia necessario classificarla mediante una opportuna discussione.

- $3x - 2k(1 + x) = x(1 + 2k) - 2x(k - 1)$

  $3x - 2k - 2kx = x + 2kx - 2kx + 2x$

  $3x - 2k - 2kx = 3x$

  $2kx = -2k$

  $kx = -k$ per poter dividere per k applicando il secondo principio di equivalenza, k deve essere diverso da zero:

  se $k \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{k}{k} \Rightarrow x = -1$ l'equazione è determinata.

  Resta da esaminare il caso $k = 0$: sostituendo nell'equazione $kx = -k$ otteniamo $0 = 0 \Rightarrow$ l'equazione è una identità.

- $2 + 2x = 3ax + a - a^2x$

  $a^2x - 3ax + 2x = a - 2$

  $x(a^2 - 3a + 2) = a - 2$

  $x(a - 2)(a - 1) = a - 2$

  se $a \neq 2$ e $a \neq 1 \Rightarrow x = \frac{a - 2}{(a - 2)(a - 1)} \Rightarrow x = \frac{1}{a - 1}$ equazione determinata

  se $a = 2 \Rightarrow 0 = 0$ identità

  se $a = 1 \Rightarrow 0 = -1$ impossibile

- $3abx = ab(x + 1) + a$

  $3abx = abx + ab + a$

  $2abx = ab + a$

  $2abx = a(b + 1)$

  se $a \neq 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow x = \frac{a(b + 1)}{2ab} \Rightarrow x = \frac{b + 1}{2b}$ equazione determinata

  se $a = 0 \Rightarrow 0 = 0$ identità

  se $b = 0 \Rightarrow 0 = a$ $\begin{cases} \text{se } a = 0 \Rightarrow \text{identità} \\ \text{se } a \neq 0 \Rightarrow \text{impossibile} \end{cases}$

- $x - b = ax - 2$

  $x - ax = b - 2$

  $x(1-a) = b - 2$

  se $a \neq 1 \Rightarrow x = \dfrac{b-2}{1-a}$ equazione determinata

  se $a = 1 \Rightarrow 0 = b - 2$ $\begin{cases} \text{se } b = 2 \Rightarrow \text{identità} \\ \text{se } b \neq 2 \Rightarrow \text{impossibile} \end{cases}$

- $\dfrac{a-2x}{a-1} - \dfrac{x+1}{a+1} + \dfrac{x}{a-1} = \dfrac{x-a}{a^2-1} - 1$

  $\dfrac{a-2x}{a-1} - \dfrac{x+1}{a+1} + \dfrac{x}{a-1} = \dfrac{x-a}{(a-1)(a+1)} - 1$ m.c.d.$= (a-1)(a+1)$

  $a \neq \pm 1$: questa non è una condizione di esistenza relativa all'incognita, da controllare per l'accettabilità della soluzione, essendo a un parametro. Per $a = 1$ o $a = -1$ l'equazione perde di significato.

  $(a-2x)(a+1) - (x+1)(a-1) + x(a+1) = x - a - (a+1)(a-1)$

  $a^2 + a - 2ax - 2x - ax - a + x + 1 + ax + x = x - a - a^2 + 1$

  $-x - 2ax + a^2 + a = -a^2$

  $x + 2ax = 2a^2 + a$

  $x(1+2a) = a(2a+1)$

  se $a \neq -\dfrac{1}{2}$ (e ovviamente $a \neq \pm 1$) $\Rightarrow x = \dfrac{a(2a+1)}{1+2a} \Rightarrow x = a$ equazione determinata

  se $a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 = 0$ identità.

- $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2a-1} + \dfrac{1}{(x-1)(2a-1)} = 0$ m.c.d. $= (x-1)(2a-1)$; $C.E. x \neq 1,\ a \neq \dfrac{1}{2}$

  (per $a = \dfrac{1}{2}$ l'equazione perde di significato)

  $2a - 1 - x + 1 + 1 = 0$

  $-x + 2a + 1 = 0$

  $x = 2a + 1$ perchè la soluzione sia accettabile deve essere $2a + 1 \neq 1 \Rightarrow a \neq 0$

  Quindi se $a \neq 0$ (e ovviamente $a \neq \dfrac{1}{2}$) l'equazione è determinata; se $a = 0$ l'equazione è impossibile.

Esercizio 7.3.3.

- $(a-3)x = a^2 - 9$
- $ab(1-x) + 2x = -3ax + (3a+2)(3a-2) - ab(x-1)$
- $\dfrac{1}{2}(a+b)^2 x = (2a-2b)\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x(a^2+b^2)$
- $\dfrac{x-1}{a-3} + \dfrac{x+1}{a-2} = \dfrac{4(a^2-6)-2}{a^2-5a+6}$
- $\dfrac{x-a}{a-b} + \dfrac{3x+2b}{a+b} - \dfrac{5b}{a+b} = \dfrac{bx-a^2}{a^2-b^2}$
- $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{3x}{x+1} = -\dfrac{3x^2}{1-x^2}$
- $\dfrac{1-b}{x} + \dfrac{2}{1-b} - \dfrac{1+b}{x} = \dfrac{2}{1+b}$

7.4 Particolari equazioni riconducibili a quelle di primo grado

Nelle equazioni di primo grado l'obiettivo è stato quello di isolare l'incognita; nel caso in cui ciò sia stato possibile, ovvero l'equazione sia risultata determinata, abbiamo sempre ottenuto un'unica soluzione.

Qualora l'equazione sia di grado superiore al primo una possibile strategia risolutiva consiste nel:
- portare l'equazione a forma normale
- scomporre in fattori il polinomio ottenuto
- determinare i valori che annullano i singoli fattori (detti *zeri* del polinomio).

Ciò permette di risolvere l'equazione in virtù della legge di annullamento di un prodotto.

Esempio 7.4.1. $x(x-1)=2$
$x^2-x=2$
$x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)=0$
$x-2=0 \Rightarrow x=2$
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Osservazione. Questa strategia risolutiva non è applicabile ad ogni equazione in quanto permette di determinare tutte le soluzioni solo se il polinomio della forma normale è scomponibile in fattori tutti di primo grado. Dell'equazione $x^3-2x-1=0$ possiamo determinare solo la soluzione $x=-1$ in quanto, scomponendo il polinomio, in $(x+1)(x^2-x-1)$ non riusciamo, con le tecniche sinora a nostra disposizione, a determinare gli zeri di x^2-x-1

Teorema 7.4.1. *Una equazione di grado n, ha al massimo n soluzioni.*

Dimostrazione.
Sia $P(x)=0$ l'equazione ridotta a forma normale con $P(x)$ di grado n per ipotesi. Se α è una soluzione dell'equazione, $x-\alpha$ è un fattore di primo grado di $P(x)$ per il Teorema di Ruffini.

Poichè $P(x)$ ha al massimo n fattori di primo grado, l'equazione ha al massimo n soluzioni. □

Esempio 7.4.2.

- $3x(x^2+10)=21x^2$
  $3x^3+30x=21x^2$
  $3x^3+30x-21x^2=0$
  $3x(x^2-7x+10)=0$
  $3x(x-2)(x-5)=0$
  $3x=0 \Rightarrow x=0$
  $x-2=0 \Rightarrow x=2$
  $x-5=0 \Rightarrow x=5$
  Quindi l'equazione ha tre soluzioni.
- $x^4=16$
  $x^4-16=0$
  $(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$
  $x-2=0 \Rightarrow x=2$
  $x+2=0 \Rightarrow x=-2$
  $x^2+4=0$ non ha soluzioni perchè somma di una quantità non negativa ed una positiva.
  Quindi l'equazione ha due soluzioni.

Osservazione. Nell'ultimo esempio abbiamo visto che il fattore x^2+4, che sappiamo essere irriducibile, non ha zeri. Questo risultato può essere esteso a tutti i polinomi irriducibili di grado superiore al primo (non abbiamo ancora gli strumenti per dimostrarlo). In particolare non hanno zeri i falsi quadrati e le somme di quadrati.

- $x^2(x+1)-4=(x+2)(x-2)-27$

  $x^3+x^2-4=x^2-4-27$

  $x^3+27=0$

  $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

  $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

  $x^2-3x+9=0$ non ha soluzioni (x^2-3x+9 è un falso quadrato)

  Quindi l'equazione ha una soluzione.

- $\dfrac{2x-1}{x-1}+\dfrac{4x-2}{x^2-4x+3}=\dfrac{3(x-1)}{3-x}$

  $\dfrac{2x-1}{x-1}+\dfrac{4x-2}{(x-1)(x-3)}=-\dfrac{3(x-1)}{x-3}$

  $$\text{m.c.d.}=(x-1)(x-3)\ ; \quad C.E. x\neq 1, x\neq 3$$

  $(2x-1)(x-3)+4x-2=-3(x-1)^2$

  $2x^2-6x-x+3+4x-2=-3x^2+6x-3$

  $2x^2-3x+1=-3x^2+6x-3$

  $5x^2-9x+4=0$

  $(5x-4)(x-1)=0$

  $5x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{4}{5}$

  $x-1=0 \Rightarrow x=1$ non accettabile

  Quindi l'equazione ha una soluzione.

- $4x+(4x-1)(x+2)=4x^2(x+3)+1$

  $4x+4x^2+8x-x-2=4x^3+12x^2+1$

  $4x^2+11x-2=4x^3+12x^2+1$

  $4x^3+8x^2-11x+3=0$

  $(x+3)(2x-1)^2=0$

  $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

  $$(2x-1)^2=0 \Rightarrow (2x-1)(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

  Quindi l'equazione ha tre soluzioni delle quali due coincidono con il valore $\dfrac{1}{2}$, ovvero l'equazione ha due soluzioni distinte.

- $(x-2)^3(x^2+1) = 2x(x-2)^3$
  $(x-2)^3(x^2+1) - 2x(x-2)^3 = 0$
  $(x-2)^3(x^2+1-2x) = 0$
  $(x-2)^3(x-1)^2 = 0$
  $(x-2)^3 = 0 \Rightarrow x = 2$ tre soluzioni coincidono con 2 in quanto:
  $(x-2)^3 = (x-2)(x-2)(x-2)$
  $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ due soluzioni coincidono con 1 in quanto:
  $(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$
  Quindi l'equazione ha due soluzioni distinte delle quali tre coincidono con il valore 2 e due con il valore 1; in totale ha dunque cinque soluzioni.

Definizione 7.4.1.
Si dice che α, soluzione di una equazione, ha *molteplicità* m se il polinomio della forma normale dell'equazione ha come fattore $(x-\alpha)^m$.
Se la molteplicità è uno , la soluzione si dice *semplice*.

Esempio 7.4.3.

- $x^2(x+7)(3x-1)^3 = 0$
  $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ con molteplicità due
  $x+7 = 0 \Rightarrow x = -7$ soluzione semplice
  $(3x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ con molteplicità tre.
  Quindi l'equazione ha sei soluzioni delle quali tre distinte.
- $x(x+1)^3 + \dfrac{3}{(x-2)^2} = \dfrac{3x-3}{x^2-4x+4} + \dfrac{3}{2-x}$
  $x(x+1)^3 + \dfrac{3}{(x-2)^2} = \dfrac{3x-3}{(x-2)^2} - \dfrac{3}{x-2}$
  m.c.d. $= (x-2)^2$; $\quad C.E. x \neq 2$
  $x(x+1)^3(x-2)^2 + 3 = 3x - 3 - 3x + 6$
  $x(x+1)^3(x-2)^2 + 3 = 3$
  $x(x+1)^3(x-2)^2 = 0$
  $x = 0 \Rightarrow x = 0$ soluzione semplice
  $(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$ con molteplicità tre
  $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ con molteplicità due, non accettabile.
  Quindi l'equazione ha quattro soluzioni di cui due distinte.

Esercizio 7.4.1.

- $x^3 = 4x$
- $(x+1)(25x^2+10x+1) = 0$
- $3x^2(8x^3+12x^2+6x+1) = (7x-2)(2x+1)^3$
- $\dfrac{3x}{x-2} + \dfrac{4}{x+3} - 2 = \dfrac{16x-2}{x^2-6+x}$
- $\dfrac{(x^2-6x+9)(x-1)}{x+1} \cdot \dfrac{3x+3}{x^2-2x-3} = \dfrac{4x+9}{x+1}$
- $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2x}{x+3} = \dfrac{10}{x^2+2x-3}$

7.5 Problemi di primo grado

Consideriamo l'equazione $2x = \frac{1}{2}x + 12$, essa può essere interpretata come la descrizione algebrica dell'affermazione: il doppio di un numero è pari alla sua metà aumentata di 12. Quest'ultima può essere la sintesi di un problema concreto quale ad esempio: determinare il peso di un sacco di farina sapendo che due sacchi pesano 12 chilogrammi in più di mezzo sacco.

Per rispondere a questo problema è sufficiente risolvere l'equazione iniziale; ottenuta la soluzione $x = 8$ possiamo concludere che un sacco di farina pesa 8 chilogrammi.

Una equazione, quindi, può essere interpretata come la descrizione algebrica di un problema. Ci proponiamo, in questo paragrafo, di partire, viceversa, da un problema per arrivare alla sua soluzione, determinando e risolvendo una equazione che ne sia la traduzione algebrica. Per fare questo è necessario, dopo aver letto con attenzione il testo del problema, individuare l'incognita (o le incognite) con le sue eventuali limitazioni (dette anche vincoli) e utilizzare i dati per scrivere l'equazione (o le equazioni) risolvente.

Proponiamo alcuni esempi di problemi risolvibili con una equazione ad una incognita di primo grado o di grado superiore, ma riconducibile al primo.

1. Determinare due numeri naturali consecutivi la cui somma sia 31.

   Il problema chiede di determinare due incognite (i due numeri naturali n_1, n_2) tuttavia essi sono esprimibili con una sola incognita; infatti, posto $n_1 = x$ il minore, il suo consecutivo è $n_2 = x + 1$.

   In questo caso come vincolo ricaviamo $x \in \mathbb{N}$. L' equazione risolvente è:

   $$x + (x + 1) = 31$$

   che ha per soluzione $x = 15$ ed è accettabile perchè soddisfa il vincolo.

   Possiamo concludere che i numeri naturali richiesti sono $n_1 = 15, n_2 = 16$.

   (Alla stessa conclusione saremmo arrivati ponendo $n_2 = x$ ed $n_1 = x - 1$, con il vincolo $x \in \mathbb{N}^*$), ma in tal caso l'equazione risolvente avrebbe avuto come soluzione $x = 16$)

2. Determinare due numeri naturali pari consecutivi il cui prodotto è 168.

   $n_1 = x$

   $n_2 = x + 2$

   $x \in \mathbb{N}$ (vincolo)

   $x(x + 2) = 168$

   $x^2 + 2x = 168$

   $x^2 + 2x - 168 = 0$

   $(x + 14)(x - 12) = 0$

   $x + 14 = 0 \Rightarrow x = -14$ non accettabile (vedi vincolo)

   $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow n_1 = 12, n_2 = 14$

3. Luca, Carlo e Anna sono tre fratelli. Carlo ha 10 anni più di Luca ed Anna ha il doppio dell'età di Luca. Determinare le loro età sapendo che il prodotto delle età dei maschi supera di 21 il prodotto delle età di Luca ed Anna.

   $e_L = x$ (x rappresenta l'età in anni)

   $e_C = x + 10$

   $e_A = 2x$

$x \in \mathbb{N}$ (vincolo)

$x(x+10) = x \cdot 2x + 21$

$x^2 + 10x = 2x^2 + 21$

$x^2 - 10x + 21 = 0$

$(x-3)(x-7) = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow e_L = 3, e_C = 13, e_A = 6$

$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow e_L = 7, e_C = 17, e_A = 14$

Osserviamo che questo problema ha due soluzioni possibili.

4. Dividere il numero 13 in due parti in modo che la differenza dei loro quadrati, diminuita di 42 valga 23.

   $n_1 = x$

   $n_2 = 13 - x$

   $0 \leq x \leq 13$ (vincolo)

   $x^2 - (13-x)^2 - 42 = 23$

   $x^2 - 169 + 26x - x^2 - 42 = 23$

   $26x - 211 = 23$

   $26x = 234$

   $x = 9 \Rightarrow n_1 = 9, n_2 = 4$

5. Determinare un numero di due cifre aventi per somma 11, sapendo che il numero dato, diminuito di 5 è uguale al triplo del numero ottenuto invertendo le cifre.

   Indichiamo con C_d e C_u rispettivamente la cifra delle decine e la cifra delle unità del numero n da determinare; è dunque $n = 10C_d + C_u$.

   $C_d = x$

   $C_u = 11 - x$

   $x \in \mathbb{N}$, $1 \leq x \leq 9$ (vincolo)

   $10x + (11-x) - 5 = 3[10(11-x) + x]$

   $10x + 11 - x - 5 = 330 - 30x + 3x$

   $9x + 6 = 330 - 27x$

   $36x = 324$

   $x = 9 \Rightarrow C_d = 9, C_u = 2$

   Il numero richiesto è 92

Esercizio 7.5.1.

- Determinare due numeri dispari consecutivi sapendo che la differenza dei loro quadrati è 56.
- In una banca lavorano 52 persone. I diplomati sono 7 in più dei laureati, mentre quelli senza diploma sono la metà dei laureati. Calcola il numero di laureati, diplomati e non diplomati della banca.
- Un animatore di un centro turistico vuole dividere un gruppo di 21 bambini in due squadre formate l'una dal doppio dei bambini dell'altra. Quanti bambini formano ogni squadra?
- In un negozio si sono vendute 27 paia di calzini, alcuni di lana, altri di cotone. Un paio di calzini di lana costa $7,5$ euro, di cotone 6 euro. Se l'incasso totale è stato di 180 euro quante paia di calzini di ogni tipo si sono vendute?
- Lucia raccoglie in un prato un mazzolino di trifogli e quadrifogli; sapendo che i trifogli sono 32 più del quintuplo dei quadrifogli e che in tutto ci sono 172 foglie, quanti sono i trifogli e i quadrifogli?

7.6 Esercizi riepilogativi

1.	$(x+2)(x+5)-(x+3)^2=(x+2)(x-1)-x(x+1)$	$[-3]$
2.	$(x+2)^3+x^3+8x^2=[x+2x(x+4)](x+3)-(x+2)^2-11x$	[impossibile]
3.	$(2-3x)^2-4x(2x-5)-4=x(x+4)$	$[0]$
4.	$2x+(x+2)^3-(x-1)^3=9(x+1)^2-7x$	[identità]
5.	$\dfrac{2x-3}{6}+\dfrac{2-x}{4}+\dfrac{3x+4}{5}=\dfrac{2x-1}{12}-\dfrac{3}{20}$	$[-2]$
6.	$\dfrac{(x+1)^3}{4}-\dfrac{(x+2)^3}{9}=\dfrac{x^3-4+x^2}{12}+\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{18}$	$\left[-\dfrac{3}{7}\right]$
7.	$(x+1)^2-4=2x+(x+2)(x-2)+1$	[identità]
8.	$(x-1)^3+(2x+1)(2x-1)-(x-3)(x+2)=x(x+1)(x-2)+(2x-3)^2-3x^2+1$	$\left[\dfrac{1}{3}\right]$
9.	$\dfrac{3}{5}x+\dfrac{6}{15}+\dfrac{4}{15}+2=\dfrac{x-5}{5}+\dfrac{2}{3}x$	[impossibile]
10.	$(2x-1)^3+6x(2x-1)=(2x-1)(4x^2+2x+1)$	[identità]
11.	$\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(x+2)(x-2)-2x}{3}=\dfrac{(x-3)^2}{6}+\dfrac{5x-1}{3}$	$\left[\dfrac{2}{3}\right]$
12.	$\dfrac{(x-2)(x+3)}{9}-\dfrac{(x+1)(x-4)}{6}=-\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{25x-36-8x^2}{18}$	[identità]
13.	$\dfrac{x-6}{5}-\dfrac{x-24}{6}+\dfrac{5x-144}{12}=\dfrac{x+4}{8}+\left(\dfrac{3}{4}x-19\right)-\left(\dfrac{5}{6}x-24\right)$	$[36]$
14.	$\dfrac{x^2}{x^3-8}+\dfrac{3}{x^2+2x+4}=\dfrac{1}{x-2}$	$[10]$
15.	$\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3x}{x^2+6x+9}=0$	[impossibile]

16. $\dfrac{2x}{1-2x}+\dfrac{2x+1}{2x-1}=\dfrac{2}{2x+1}$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

17. $\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}+\dfrac{x-2}{x^2+x-2}=\dfrac{1-2x}{4-x^2}$ $\left[-\dfrac{7}{3}\right]$

18. $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{3x^2-8}{4-x^2}$ [0]

19. $\dfrac{3x}{x-3}+\dfrac{x}{x-4}=\dfrac{(2x-1)^2-12}{x^2-7x+12}$ [1]

20. $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{x^2+2x+1}=4\left(-\dfrac{1+2x}{(x^2-1)^2}\right)$ [identità con $x \neq \pm 1$]

21. $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{2(x^2-3)}{x^2+2x}=\dfrac{3-x}{x}$ [impossibile]

22. $\dfrac{12(x+5)}{6x^2-11x-10}=\dfrac{10}{2x-5}-\dfrac{8}{3x+2}$ [0]

23. $\dfrac{3}{8x^2-36x+36}-\dfrac{2x+5}{12-4x}=\dfrac{x+5}{2x-3}$ [12]

24. $(3x-10)^2+36x-189=(2x-6)^2$ [± 5]

25. $x^2(x^2-5)=-4$ [$\pm 1 \ \pm 2$]

26. $x(x-3)(x+3)+12x=6x(x-1)$ [0 ; 3 con molt. due]

27. $(2x-1)(2x+1)+2(x-1)^3+3=x(2x-5)(x+3)$ [0 ; 7]

28. $(x-1)^2-3x(2-x)(x+2)=-2x(x+4)+1$ [0 ; -2 ; 1]

29. $\dfrac{5x-2}{(x-1)^2}+\dfrac{3x+4}{1-x}=\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}$ [0]

30. $\dfrac{3+x}{1+x}-\dfrac{34}{15}+\dfrac{1+x}{3+x}=0$ [2 ; -6]

31. $(x^2-6x+8)(x^2-12x+35)=0$ [2 ; 4 ; 5 ; 7]

32. $x^4-x^3-x+1=0$ [1 con molt. due]

33. $4x-13=\dfrac{13x-4}{x^2}$ $\left[-1\,;\ \dfrac{1}{4}\,;\ 4\right]$

Esercizio 7.6.1 (Equazioni letterali)**.**

1. $a(a-5)x+a(a+1)=-6(x-1)$

$$\left[a \neq 2,3 \quad x=\frac{a+3}{3-a} \quad ; \quad a=2 \quad \text{identità} \quad ; \quad a=3 \quad \text{impossibile}\right]$$

2. $(a+b)(x-2)+3a-2b=2b(x-1)$

$$\left[a \neq b \quad x=\frac{2b-a}{a-b} \quad ; \quad a=b=0 \quad \text{identità} \quad ; \quad a=b\neq 0 \quad \text{impossibile}\right]$$

3. $(x+a)^2-(x-a)^2+(a-4)(a+4)=a^2$

$$\left[a \neq 0 \quad x=\frac{4}{a} \quad ; \quad a=0 \quad \text{impossibile}\right]$$

4. $x(x+2)+3ax=b+x^2$

$$\left[a \neq -\frac{2}{3} \quad x=\frac{b}{2+3a} \quad ; \quad a=-\frac{2}{3} \text{ e } b=0 \quad \text{identità} \quad ; \quad a=-\frac{2}{3} \text{ e } b\neq 0 \quad \text{impossibile}\right]$$

5. $(x-a)^2 + b(2b+1) = (x-2a)^2 + b - 3a^2$

$$\left[a \neq 0 \quad x = -\frac{b^2}{a} \quad ; \quad a = 0 \text{ e } b = 0 \quad \text{identità} \quad ; \quad a = 0 \text{ e } b \neq 0 \quad \text{impossibile}\right]$$

6. $\dfrac{a^2-9}{a+2}x = a - 3$

$$\left[a \neq \pm 3 \text{ e } a \neq -2 \quad x = \frac{a+2}{a+3} \ ; \ a = 3 \text{ identità} \ ; \ a = -3 \text{ impossibile} \ ; \ a = -2 \text{ perde di significato}\right]$$

7. $\dfrac{x}{a-2} + \dfrac{x-2}{a+2} = \dfrac{4}{a^2-4}$

$$[a \neq \pm 2 \text{ e } a \neq 0 \quad x = 1 \ ; \ a = 0 \text{ identità} \ ; \ a = \pm 2 \text{ perde di significato}]$$

8. $\dfrac{x}{x-a} + \dfrac{1}{x+a} = 1$

$$\left[a \neq 0 \text{ e } a \neq -1 \quad x = -\frac{a(a-1)}{a+1} \ ; \ a = 0 \text{ oppure } a = -1 \text{ impossibile}\right]$$

9. $\dfrac{4}{3a-2} + 1 = \dfrac{19}{2x(2a-5)} + \dfrac{3}{2}$

$$\left[a \neq \pm\frac{2}{3} \text{ e } a \neq \frac{5}{2} \quad x = -\frac{3a-2}{2a-5} \ ; \ a = \frac{2}{3} \text{ oppure } a = \frac{5}{2} \text{ impossibile} \ ; \ a = -\frac{2}{3} \text{ identità}\right]$$

Esercizio 7.6.2 (Problemi di primo grado).

1. Un cane cresce ogni mese di $\frac{1}{3}$ della sua altezza. Se dopo 3 mesi dalla nascita è alto 64 cm, quanto era alto appena nato?

   [27 cm]

2. La massa di una botte colma di vino è di 192 kg mentre se la botte è riempita di vino per un terzo la sua massa è di 74 kg. Trovare la massa della botte vuota.

   [15 kg]

3. Carlo e Luigi percorrono in auto, a velocità costante un percorso di 400 chilometri ma in senso opposto. Sapendo che partono alla stessa ora dagli estremi del percorso e che Carlo corre a 120 km/h mentre Luigi viaggia a 80 km/h, calcolare dopo quanto tempo si incontrano.

   [2 ore]

4. Un fiorista ordina dei vasi di stelle di Natale che pensa di rivendere a 12 euro al vaso con un guadagno complessivo di 320 euro. Le piantine però sono più piccole del previsto, per questo è costretto a rivendere ogni vaso a 7 euro rimettendoci complessivamente 80 euro. Quanti sono i vasi comprati dal fiorista?

   [80]

5. Un contadino possiede 25 tra galline e conigli; determinare il loro numero sapendo che in tutto hanno 70 zampe.

   [15 galline e 10 conigli]

6. Un commerciante di mele e pere carica nel suo autocarro 130 casse di frutta per un peso totale di $23,5$ quintali. Sapendo che ogni cassa di pere e mele pesa rispettivamente 20 kg e 15 kg, determinare il numero di casse per ogni tipo caricate.

   [80 pere e 50 mele]

7. Determina due numeri uno triplo dell'altro sapendo che dividendo il maggiore aumentato di 60 per l'altro diminuito di 20 si ottiene 5.

   [240 ; 80]

8. Un quinto di uno sciame di api si posa su una rosa, un terzo su una margherita. Tre volte la differenza dei due numeri vola sui fiori di pesco, e rimane una sola ape che si libra qua e là nell'aria. Quante sono le api dello sciame?

   [15]

9. Per organizzare un viaggio di 540 persone un'agenzia si serve di 12 autobus, alcuni con 40 posti a sedere e altri con 52; quanti sono gli autobus di ciascun tipo?

   [7 autobus da 40 posti e 5 da 52]

10. Il papà di Paola ha venti volte l'età che lei avrà tra due anni e la mamma, cinque anni più giovane del marito, ha la metà dell'età che avrà quest'ultimo fra venticinque anni; dove si trova Paola oggi?

Parte II

GEOMETRIA

Capitolo 8

La geometria razionale

8.1 Logica elementare

In questo paragrafo introduttivo presenteremo alcuni concetti e notazioni che saranno diffusamente utilizzati nel seguito di questo corso di geometria. In particolare, cercheremo di connotare il concetto di *proposizione logica* e i principi fondamentali della cosiddetta *logica aristotelica*, senza la pretesa di esaurire tale argomento in modo rigoroso.

Nel seguito supporremo di aver fissato una volta per tutte un linguaggio qualsiasi, come, ad esempio, l'italiano, o la teoria degli insiemi, oppure il linguaggio matematico in generale. Di tali linguaggi converremo di utilizzare solo *frasi sintatticamente corrette e di senso compiuto*, che chiameremo **frasi ben formate**. Tutte le frasi ben formate non saranno ulteriormente studiate da un punto di vista sintattico, bensì verranno interpretate in base alla loro *verità* o *falsità*. I valori **vero** e **falso** non verranno esplicitamente definiti, ma saranno intesi come nozioni primitive che supporremo di essere sempre in grado di esplicitare in *modo oggettivo*, cioè non condizionate dal *giudizio soggettivo del singolo individuo*.

In base a tali premesse possiamo dare la seguente

Definizione 8.1.1. Si definisce **proposizione logica** una frase ben formata per cui *ha significato chiedersi se è vera o falsa.*

Le proposizioni logiche, o semplicemente proposizioni, devono soddisfare i **principi della logica aristotelica**, di seguito enunciati.

1. **Principio di non-contraddizione**: *una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.*

2. **Principio del terzo escluso**: *una proposizione deve essere o vera o falsa, non esiste una terza possibilità.*

Indicheremo le proposizioni con le lettere maiuscole dell'alfabeto: P, Q, R, e così via.

Le proposizioni possono essere:

- **proposizioni elementari o atomiche**: esse sono le proposizioni più semplici, le quali non possono essere scomposte in proposizioni di livello più semplice;

- **proposizioni composte o molecolari**: esse si ricavano dalla composizione di proposizioni atomiche.

Per legare le proposizioni atomiche in modo da ottenere le proposizioni molecolari si utilizzano i **connettivi logici**. Definiremo ora i connettivi logici che utilizzeremo diffusamente nel testo.

Definizione 8.1.2. Data la proposizione P, si definisce **negazione di** P la proposizione che assume valore di verità opposto rispetto a P. Notazione: $\overline{P}$, e si legge P *negato*.

Definizione 8.1.3. Date le proposizioni P e Q, si definisce **disgiunzione inclusiva** di P e Q la proposizione che risulta falsa solo nel caso in cui P e Q sono entrambe false, vera negli altri casi. Notazione: $P \vee Q$, e si legge P *vel* Q.

Definizione 8.1.4. Date le proposizioni P e Q, si definisce **disgiunzione esclusiva** di P e Q la proposizione che risulta vera nel caso in cui P e Q hanno valore di verità opposto, falsa negli altri casi. Notazione: $P\dot{\vee}Q$, e si legge P *aut* Q.

Definizione 8.1.5. Date le proposizioni P e Q, si definisce **congiunzione** di P e Q la proposizione che risulta vera solo nel caso in cui P e Q sono entrambe vere, falsa negli altri casi. Notazione: $P \wedge Q$, e si legge P *et* Q.

Definizione 8.1.6. Date le proposizioni P e Q, si definisce **implicazione materiale** da P a Q la proposizione che risulta falsa solo nel caso in cui P è vera e Q è falsa, vera negli altri casi. Notazione: $P \Longrightarrow Q$, e si legge *se* P, *allora* Q. La proposizione P si dice **premessa**, mentre la proposizione Q si dice **conclusione**.

Nel seguito, riguardo l'implicazione materiale, saremo interessati solo al caso in cui sia P che Q sono entrambe proposizioni vere, e parleremo di **deduzione logica** che indicheremo ancora col simbolo $\Longrightarrow$. La premessa verrà detta **ipotesi**, mentre la conclusione verrà detta **tesi**. Diremo altresì che P è **condizione sufficiente** per $P \Longrightarrow Q$, mentre Q è **condizione necessaria** per $P \Longrightarrow Q$.

Definizione 8.1.7. Date le proposizioni P e Q, si definisce **equivalenza logica** di P e Q la proposizione che risulta vera nel caso in cui sia P che Q hanno lo stesso valore di verità, falsa negli altri casi. Notazione: $P \Longleftrightarrow Q$, e si legge P *se, e solo se,* Q.

L'equivalenza logica è, pertanto, una doppia implicazione e si può intendere come la proposizione $P \Longrightarrow Q \quad \wedge \quad Q \Longrightarrow P$. Si possono ripetere le stesse considerazioni della deduzione logica, in quanto nel seguito studieremo solo il caso in cui sia P che Q sono vere. Entrambe le proposizioni sono sia condizione necessaria che sufficiente.

8.2 Concetti primitivi e definizioni

Gli oggetti di studio della geometria piana sono ovviamente le figure geometriche piane, quali le rette, i triangoli, i quadrati, e così via. Le figure geometriche, prima ancora di essere studiate, vanno descritte precisamente. Però non è possibile definire esplicitamente ogni oggetto allorché si voglia costruire un linguaggio rigoroso come quello matematico. Alcune figure geometriche, pertanto, *non saranno definite esplicitamente*, costituendo i cosiddetti **enti primitivi**, o **figure primitive**, della geometria.

Assumeremo che gli enti primitivi della geometria piana siano

- **piano**
- **retta**
- **punto**.

Solitamente denoteremo il piano con una lettera minuscola del alfabeto greco $\alpha, \beta, ...$, le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto latino $a, b, r, s, ...$, i punti con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino $A, B, C, ...$

Come si può osservare, la scelta delle figure che sono enti primitivi è caduta su oggetti particolarmente semplici e ben fissati nella nostra mente dall'intuizione. Attraverso essi sarà possibile *definire esplicitamente* le altre figure geometriche, dalle più semplici a quelle via via più complesse.

Quando definiremo esplicitamente una nuova figura geometrica seguiremo i seguenti criteri:

1. **descriveremo rigorosamente e nel modo più semplice la nuova figura geometrica a partire dagli enti primitivi o da altre figure già definite**;
2. **assegneremo ad essa un nome**.

Vediamo alcuni esempi.

Definizione 8.2.1. Due rette aventi un punto in comune si dicono **incidenti**.

La precedente è un esempio di definizione in cui vengono direttamente coinvolti gli enti primitivi retta e punto.

Definizione 8.2.2. Si definisce **parallelogramma** un quadrilatero avente i lati opposti a due a due paralleli.

In questa seconda definizione vengono coinvolti oggetti più complessi, i quadrilateri. Inoltre, si fa uso della relazione di parallelismo tra rette. Entrambi i concetti devono essere stati definiti in precedenza.

8.3 Postulati e teoremi

Una volta definita una figura geometrica si procede allo studio delle sue proprietà attraverso enunciati, che naturalmente speriamo essere veri. Per gli enti primitivi, non definiti esplicitamente, si enunceranno delle proposizioni particolari che verranno considerate come autoevidenti senza richiedere una verifica esplicita. Tali proposizioni sono i **postulati** o **assiomi** della geometria piana.

Un postulato è un enunciato della geometria che si assume identicamente vero senza che venga richiesta una verifica diretta.

Attraverso i postulati

1. elenchiamo le proprietà degli enti primitivi (non definiti esplicitamente), per cui alcuni postulati costituiscono *delle definizioni implicite* degli enti primitivi stessi; oppure
2. esprimiamo regole precise che ci aiuteranno a sviluppare la nostra teoria in modo rigoroso;
3. deduciamo le proprietà delle altre figure geometriche, ponendo altresì delle intrinseche limitazioni alle costruzioni geometriche possibili.

Il numero e la scelta dei postulati devono soddisfare le seguenti proprietà:

1. **coerenza**: non si possono enunciare postulati in contraddizione tra loro; inoltre, se da essi si deduce la proposizione P, non si può dedurre anche la proposizione $\overline{P}$, cioè la negazione di P;
2. **indipendenza**: un postulato non si deve dedurre da altri postulati.

Le proprietà delle figure geometriche definite esplicitamente andranno dedotte e verificate rigorosamente, dando vita ai **teoremi**.

Un teorema è un enunciato la cui validità è sancita da una sequenza di deduzioni detta dimostrazione.

Dall'enunciato di un teorema si distinguono

1. **le ipotesi**, proposizioni vere che costituiscono le premesse da cui partire;
2. **le tesi**, le proposizioni che vogliamo dedurre a partire dalle ipotesi.

La dimostrazione di un teorema è una sequenza ordinata di proposizioni, l'ultima delle quali è proprio la tesi. Ciascuna proposizione della dimostrazione si deduce logicamente o dai postulati, o dalle definizioni, o da teoremi precedentemente dimostrati, o da righe precedenti della dimostrazione stessa.

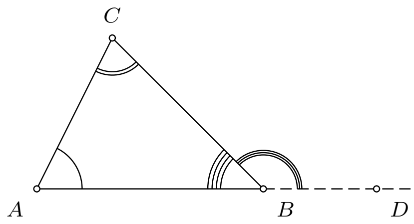
In questo corso le dimostrazioni verranno condotte come segue. Intanto verranno esplicitate ipotesi e tesi in modo preciso e completo, in relazione ad una figura costruita con estrema cura. Il blocco relativo alla vera e propria dimostrazione è suddiviso nelle seguenti tre colonne:

- la prima colonna riporterà un numero progressivo per ogni passo;
- la seconda colonna conterrà una certa proposizione;
- la terza colonna la giustificazione rigorosa della validità della proposizione, con eventuali riferimenti a righe precedenti, definizioni, assiomi, teoremi precedentemente dimostrati, regole pratiche.

Alle volte, però, le dimostrazioni verranno condotte in modo discorsivo perché non si prestano al tipo di esposizione descritto in precedenza.

Vediamo un esempio esplicativo, senza avere la pretesa di una immediata comprensione

Teorema 8.3.1. *In ogni triangolo, ciascun angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti.*



$D\widehat{B}C \cong A\widehat{C}B + B\widehat{A}C$

Hp: $D\widehat{B}C$ angolo esterno triangolo ABC
Th: $D\widehat{B}C \cong A\widehat{C}B + B\widehat{A}C$

Dimostrazione. Prolunghiamo il lato AB dalla parte di B.

1.	$D\widehat{B}C + A\widehat{B}C \cong \pi$	angoli adiacenti
2.	$A\widehat{B}C + A\widehat{C}B + B\widehat{A}C \cong \pi$	teorema degli angoli interni
3.	$D\widehat{B}C \cong A\widehat{C}B + B\widehat{A}C$	1., 2., supplementari di uno stesso angolo

□

Come si può notare la fine di una dimostrazione è indicata da un quadratino vuoto sulla destra.

La struttura della dimostrazione illustrata in precedenza è quella di una dimostrazione detta **diretta**: a partire dalle ipotesi, in modo diretto, attraverso tutti i passaggi descritti, si giunge alla verifica delle tesi.

Esiste, però, anche una dimostrazione indiretta, detta **dimostrazione per assurdo**, la quale si può descrivere nel modo seguente. Indichiamo con *Hp* le ipotesi e con *Th* la tesi del nostro teorema. Supponiamo ora di negare la validità della tesi e procediamo ad analizzare le conseguenze logiche di tale assunzione. In generale esse porteranno ad uno dei seguenti casi:

- un postulato risulta falso;
- le *Hp* risultano false;
- due righe sono logicamente incompatibili;
- un teorema precedentemente dimostrato risulta falso.

Evidentemente ciò non è possibile per il principio di non contraddizione, in quanto una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa. Pertanto le conseguenze dell'assunzione che *Th* è falsa ci portano ad una contraddizione, o come altrimenti si dice, ad un assurdo. L'assurdo è nato dall'aver supposto la tesi falsa, quindi, per il principio del terzo escluso, essa dovrà essere vera, concludendo in questo modo la dimostrazione del teorema.

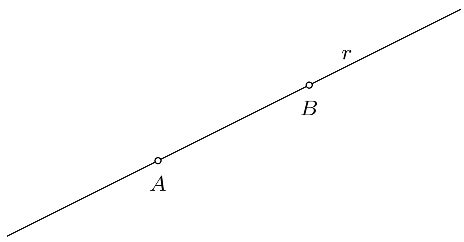
Capitolo 9

I Postulati della Geometria

In questo capitolo presenteremo la maggior parte dei postulati della Geometria euclidea, i rimanenti verranno enunciati più avanti quando si renderà necessario introdurli. Lo studio dei postulati è di fondamentale importanza per la comprensione dello sviluppo che daremo all'intero corso. Essi, come già sottolineato nel precedente capitolo, stabiliscono in modo preciso le proprietà degli enti primitivi, e, con le regole logiche elementari, permettono di dare un fondamento rigoroso alle proprietà delle figure geometriche che studieremo e dimostreremo. **Tutte le figure geometriche saranno sempre intese come insiemi di punti**.

9.1 Postulati di appartenenza

Postulato 1. *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*



Il postulato asserisce che una retta è univocamente determinata da due punti. Essa è, intuitivamente, come l'avete sempre immaginata, vale a dire come *un oggetto geometrico rappresentabile attraverso l'uso di un righello.*

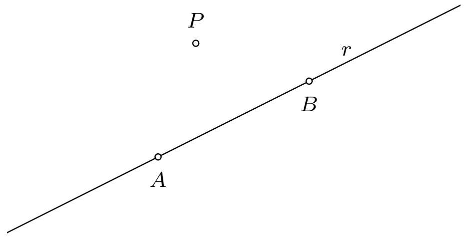
Postulato 2. *Ogni retta contiene almeno due punti distinti.*

In effetti dedurremo che la retta contiene infiniti punti.

I punti che appartengono ad una retta si dicono *allineati.* Dal primo postulato si deduce che due punti sono sempre allineati.

Postulato 3. *Esistono almeno tre punti non allineati.*

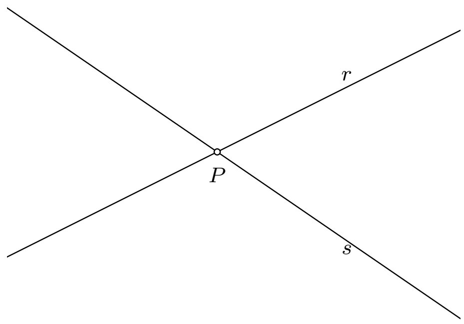
Pertanto, considerata una retta r, esiste sicuramente un punto $P \notin r$.



Teorema 9.1.1. *Due rette distinte r ed s hanno al massimo un punto in comune.*

Hp: $r \neq s$

Th: $r \cap s = \{P\} \quad \dot{\vee} \quad r \cap s = \emptyset$



Dimostrazione. Se le due rette non hanno punti in comune, allora segue immediatamente la tesi. Supponiamo che $r \cap s \neq \emptyset$.

1.	Per assurdo $r \cap s = \{P, Q\}$	
2.	$P \in r \quad \wedge \quad P \in s$	1., definizione intersezione
3.	$Q \in r \quad \wedge \quad Q \in s$	1., definizione intersezione
4.	$r = s$	2., 3., postulato di appartenenza della retta
5.	$r \neq s$	Hp
6.	Contraddizione	4., 5.
7.	$r \cap s = \{P\}$	6.

□

Definizione 9.1.1. Due rette aventi un punto in comune si dicono **incidenti**.

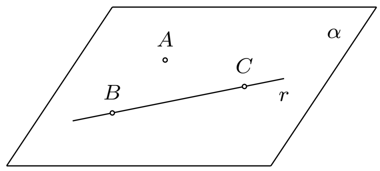
Postulato 4. *Per tre punti distinti e non allineati passa uno ed un solo piano.*

Il piano è, pertanto, univocamente determinato da tre punti distinti, purché non appartengano alla stessa retta.

Postulato 5. *Se una retta ha due punti in comune col piano, allora è interamente contenuta nel piano.*

Dai postulati di appartenenza si deducono i seguenti risultati.

Teorema 9.1.2. *Una retta r ed un punto $A \notin r$ individuano univocamente un piano α.*



Hp: r, A tali che $A \notin r$

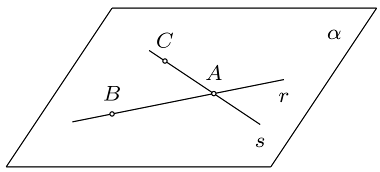
Th: esiste α unico contenente r e A

Dimostrazione. .

1.	r, A tali che $A \notin r$	Hp
2.	esistono $B, C \in r$ distinti	postulato di appartenenza della retta
3.	A, B, C tre punti distinti e non allineati	1., 2.
4.	esiste α unico	3., postulato di appartenenza del piano

□

Teorema 9.1.3. *Due rette incidenti r ed s individuano univocamente un piano α.*



Hp: $r \neq s \quad \wedge \quad r \cap s = \{A\}$

Th: esiste α unico

Dimostrazione. .

1.	$r \cap s = \{A\}$	Hp
2.	esistono $B, A \in r$ distinti	postulato di appartenenza della retta
3.	esistono $C, A \in s$ distinti	postulato di appartenenza della retta
4.	A, B, C tre punti distinti e non allineati	2., 3.
5.	esiste α unico	3., postulato di appartenenza del piano

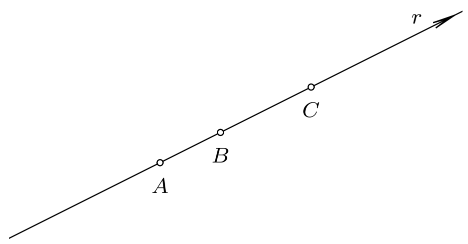
□

9.2 Postulati dell'ordine

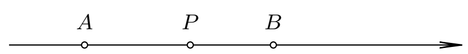
Intuitivamente possiamo pensare di stabilire un verso di percorrenza sulla retta, in modo tale che resti definita una relazione di precedenza tra punti. Questa operazione ricorda quella di ordinamento dei numeri. Il seguente postulato chiarisce la situazione ed enuncia le proprietà della relazione così costruita.

Postulato 6 (Postulato della relazione di precedenza)**.** *Su una retta è possibile prefissare due orientamenti opposti. Una volta fissato uno dei due versi, resta definita una relazione di precedenza tra punti, denotata col simbolo* $\prec$ *o col simbolo* $\succ$*, di modo che* $A \prec B$ *significa* A precede B, *mentre* $B \succ A$ *significa* B segue A. *La scelta del verso è arbitraria. La relazione di precedenza gode delle seguenti proprietà, qualunque siano i punti* A*,* B *e* C *della retta:*

1. ***Proprietà di tricotomia****: una sola tra le seguenti proposizioni è vera*
$$A = B \qquad A \prec B \qquad B \prec A$$
2. ***Proprietà transitiva***
$$(A \prec B \quad \wedge \quad B \prec C) \quad \Longrightarrow \quad A \prec C$$

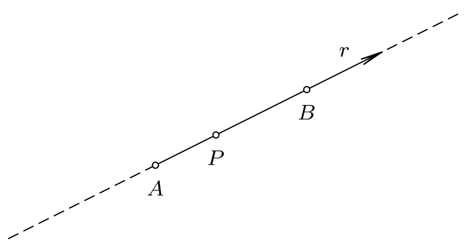


Postulato 7 (Postulato di densità)**.** *Sia* r *una retta orientata e siano* A *e* B *due suoi punti distinti, con* $A \prec B$*. Allora esiste un punto* $P \in r$*, distinto da* A *e* B*, tale che* $A \prec P \prec B$ *.*



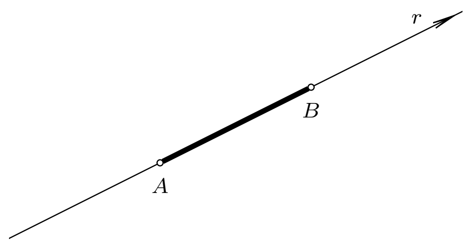
Postulato 8 (Postulato di illimitatezza della retta)**.** *Sia* r *una retta orientata e sia* P *un suo qualsiasi punto. Allora esiste un punto* $A \in r$ *tale che* $A \prec P$*, ed esiste un punto* $B \in r$ *tale che* $P \prec B$*.*

Il postulato di illimitatezza esprime la seguente idea intuitiva: *la retta non ha né un inizio né una fine*. Diremo che essa è un **insieme illimitato di punti**.



Cominciamo ora a definire i sottoinsiemi della retta.

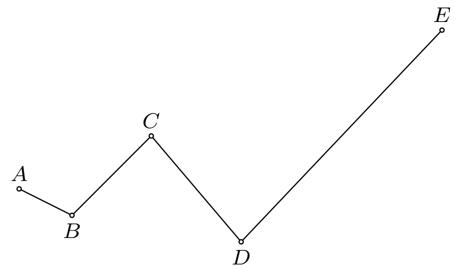
Definizione 9.2.1. Siano r una retta orientata, $A \prec B$ due suoi punti. Si definisce **segmento di estremi** A **e** B la parte di retta costituita da tutti i punti $P \in r$ tali che $A \prec P \prec B$, oppure $P = A$, oppure $P = B$. Se $A = B$, il segmento si dice **nullo**, ed è costituito da un unico punto.



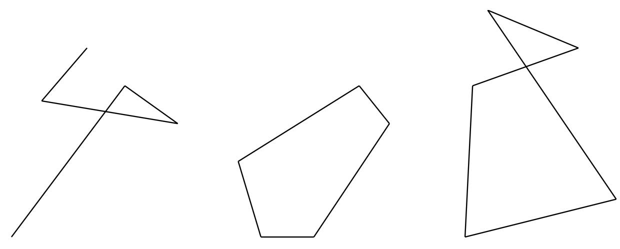
Il segmento di estremi A e B si denota coi simboli AB o BA indifferentemente. La retta che contiene il segmento si chiama **sostegno**. Poiché ogni segmento non nullo è chiaramente univocamente determinato dai suoi estremi, è sempre possibile individuare il suo sostegno in base al postulato di illimitatezza e al primo postulato di appartenenza della retta, che stabilisce che una retta è univocamente determinata da due punti distinti.

Definizione 9.2.2. Due segmenti si dicono **consecutivi** se hanno un estremo in comune. Due segmenti si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e se hanno lo stesso sostegno, cioé giacciono sulla stessa retta.

Definizione 9.2.3. Si definisce **poligonale** l'unione di due o più segmenti non nulli consecutivi. I segmenti che costituiscono la poligonale si chiamano **lati**, gli estremi si chiamano **vertici**.



Definizione 9.2.4. Una poligonale si dice **chiusa** se tutti i suoi vertici sono estremi di due lati consecutivi, altrimenti si dice **aperta**. Una poligonale si dice **intrecciata** se due suoi lati non consecutivi hanno intersezione non vuota, altrimenti si dice **semplice**.

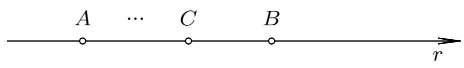


La poligonale $ABCDE$ è aperta semplice, mentre le poligonali della figura precedente sono rispettivamente aperta intrecciata, chiusa semplice e chiusa intrecciata. Nel seguito di questo corso considereremo esclusivamente poligonali chiuse semplici.

Definizione 9.2.5. Si definisce poligono la parte di piano individuata da una poligonale chiusa semplice. I lati e i vertici della spezzata sono rispettivamente i lati e i vertici del poligono. Si definisce *diagonale* del poligono ogni segmento individuato da due vertici non consecutivi.

Nel seguito, intenderemo *poligono di n lati* la parte di piano limitata *i cui confini* sono stabiliti dagli n lati del poligono, lati compresi. La parte del poligono che non include i punti dei lati sarà la sua *parte interna.*

Teorema 9.2.1. *Sia AB un segmento non nullo. Allora esso contiene infiniti punti.*



Dimostrazione. Siano A e B gli estremi distinti del segmento con $A \prec B$. Dall'assioma di densità, esiste un punto C diverso dagli estremi tale che $A \prec C \prec B$; applicando ancora l'assioma di densità, tra A e C esiste il punto D, distinto da essi, tale che $A \prec D \prec C$; e così via, applicando ripetutamente il postulato di densità. □

Pertanto, un segmento o contiene un unico punto (segmento nullo) o contiene infiniti punti. Inoltre, il fatto che ogni segmento ha sempre una retta come sostegno conduce al seguente

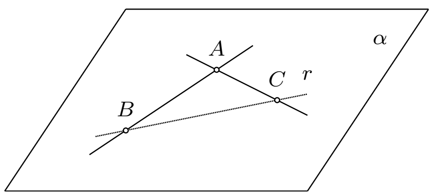
Corollario 9.2.1. *La retta è un insieme infinito di punti.*

Dimostrazione. Ogni segmento non nullo è un sottoinsieme di una retta (sostegno). Poiché il segmento è un insieme infinito di punti, segue la tesi. □

Osserviamo che la proprietà di essere un insieme illimitato è più forte di quella di essere un insieme infinito. Schematicamente

$$\begin{aligned} illimitato &\implies infinito \\ infinito &\not\Longrightarrow illimitato \end{aligned}$$

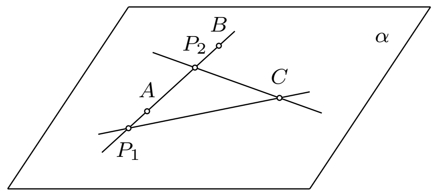
Teorema 9.2.2. *Per un punto A del piano passano infinite rette.*



Dimostrazione. Il piano è univocamente determinato da un punto A e da una retta r tale che $A \notin r$. La retta r contiene infiniti punti tutti distinti da A, per cui è possibile costruire infinite rette passanti per A e per ciascun punto di r, in base al postulato di appartenenza della retta. □

Definizione 9.2.6. Sia C un punto del piano, l'insieme delle infinite rette passanti per C si dice **fascio proprio di rette di centro** C.

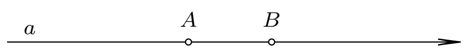
Teorema 9.2.3. *Il piano contiene infiniti punti e infinite rette.*



Dimostrazione. Basterà dimostrare che il piano contiene infinite rette. Il piano è univocamente determinato da tre punti distinti e non allineati A, B e C, in base al postulato di appartenenza del piano. I punti A e B individuano univocamente la retta AB, la quale giace completamente sul piano perché ha i punti A e B in comune con esso. Ciascuna retta (sono infinite) individuata da un qualunque punto $P \in AB$ e dal punto C giace completamente nel piano perché ha in comune con esso i punti P e C. Contenendo il piano infinite rette, esso contiene anche infiniti punti in quanto ogni retta contiene infiniti punti. □

Introduciamo ora un altro sottoinsieme della retta.

Definizione 9.2.7. Sia r una retta orientata e sia P un suo punto. Si definisce **semiretta di origine** P ciascuna parte in cui il punto P suddivide la retta. L'origine P appartiene ad entrambe le semirette, le quali si dicono **semirette opposte**.



Le semirette verranno denotate con le lettere minuscole dell'alfabeto; altre volte si indicheranno come AB dove la prima lettera A indica l'origine della semiretta, mentre la seconda indica un qualunque punto della semiretta diverso dall'origine.

Corollario 9.2.2. *La semiretta è un insieme infinito di punti.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

9.3 Postulato di partizione del piano

Postulato 9. *Siano dati il piano α e la retta r contenuta in esso. Allora la retta r suddivide il piano α in due parti α_1 e α_2 aventi le seguenti proprietà:*

- *per ogni coppia di punti $A, B \in \alpha_1$ tali che $A, B \notin r$, il segmento AB è interamente contenuto in α_1 e $AB \cap r = \emptyset$;*
- *per ogni coppia di punti $A \in \alpha_1$ e $B \in \alpha_2$ tali che $A, B \notin r$, il segmento AB ha intersezione ridotta ad un unico punto con la retta r.*

Definizione 9.3.1. Le parti α_1 e α_2 dell'assioma precedente si dicono **semipiani**. La retta r, parte comune dei due semipiani, si dice **origine** dei semipiani.

Si deduce facilmente che anche i semipiani sono insiemi infiniti di punti. Inoltre, essi sono da una parte limitati dalla propria origine, mentre dall'altra sono illimitati.

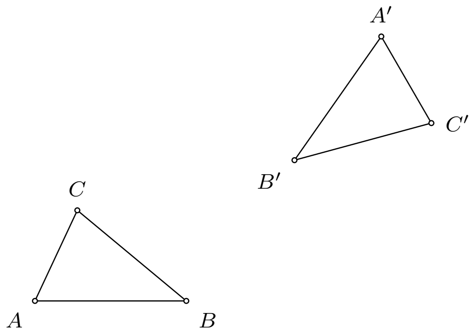
9.4 Postulati di congruenza

In matematica è opportuno utilizzare il simbolo di uguaglianza '=' con molta attenzione. Abbiamo in precedenza convenuto di pensare le figure geometriche come insiemi di punti, ragion per cui bisogna essere coerenti col linguaggio della teoria degli insiemi. In particolare, richiamiamo la seguente definizione.

Definizione 9.4.1. Due insiemi A e B si dicono **uguali** se hanno gli stessi elementi.

Nella geometria intuitiva si è soliti considerare uguali due figure che hanno le stesse dimensioni, anche se sono costituite da punti diversi del piano. Tutto ciò non è in accordo con la definizione data in precedenza, se vogliamo procedere con rigore.

Definizione 9.4.2. Un **movimento rigido** è una procedura ideale che porta una figura geometrica da una posizione del piano ad un'altra senza che ne vengano modificate le dimensioni. Due figure $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ che si sovrappongono perfettamente mediante un movimento rigido sono dette **congruenti** o **isometriche** e si scrive $\mathscr{F} \cong \mathscr{F}'$.

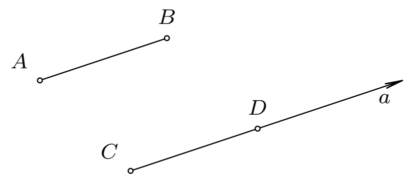


Si deduce che due figure geometriche uguali sono congruenti, ma due figure congruenti non sono necessariamente uguali. Tutto ciò è riassunto dallo schema

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}' \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{F} \cong \mathscr{F}'$$
$$\mathscr{F} \cong \mathscr{F}' \quad \not\Longrightarrow \quad \mathscr{F} = \mathscr{F}'$$

I postulati di congruenza sanciscono le proprietà della relazione di congruenza, nonché stabiliscono regole sulla composizione di figure geometriche di base, quali segmenti e angoli.

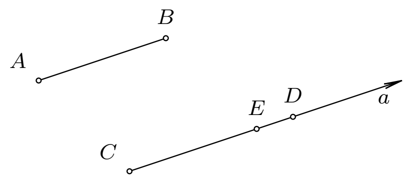
Postulato 10. *Siano dati un segmento AB ed una semiretta orientata a di origine C. Allora esiste un unico punto $D \in a$ tale che $AB \cong CD$.*



$AB \cong CD$

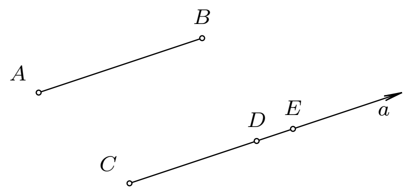
Il postulato stabilisce una regola per il confronto tra segmenti. Si stabilisce quanto segue.

1. Se il punto E è tale che $C \prec E \prec D$, allora CE è **minore** di AB, notazione $CE < AB$;



$AB < CD$

2. se il punto E è tale che $C \prec D \prec E$, allora CE è **maggiore** di AB, notazione $CE > AB$.

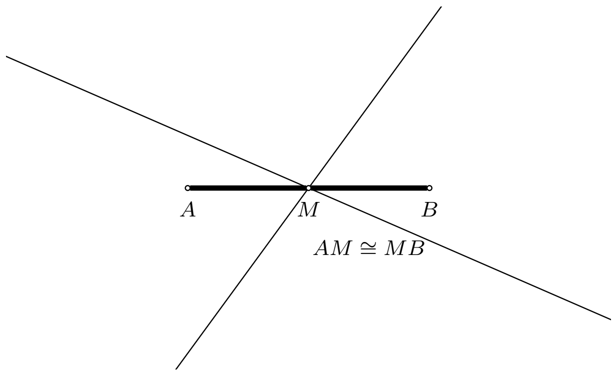


$AB > CD$

Postulato 11. *Siano AB, CD, EF tre segmenti. $AB \cong CD$ se, e solo se, $CD \cong AB$; se $AB \cong CD$ e $CD \cong EF$, allora $AB \cong EF$.*

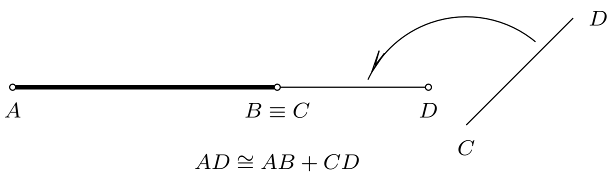
Il postulato asserisce semplicemente che la relazione di congruenza tra segmenti gode delle proprietà **simmetrica** e **transitiva**. Inoltre, prendendo $AB \cong EF$, dalle due proprietà precedenti si deduce che ogni segmento è congruente a sé stesso, per cui la relazione di congruenza tra segmenti gode dell'ulteriore proprietà **riflessiva**.

Definizione 9.4.3. Si definisce **punto medio** di un segmento non nullo il punto interno M tale $AM \cong MB$. Ogni retta del fascio proprio di centro M diversa dal sostegno AB si dice **mediana** del segmento AB.



Possiamo ora esporre come costruire in modo effettivo l'unione o somma di due segmenti, in sintonia con i postulati di congruenza enunciati in precedenza.

Siano AB e CD due segmenti. Con un movimento rigido trasportiamo il secondo segmento in modo tale che $C \equiv B$ e si ottengano due segmenti adiacenti. Il segmento AD così ottenuto si dice il **segmento somma** di AB e CD. Resta così definita l'operazione di **addizione** tra segmenti, la quale gode delle usuali proprietà, vale a dire associativa, commutativa, dell'elemento neutro (il segmento nullo).



La differenza $AB-CD$ di segmenti verrà definita a patto che non si verifichi la condizione $AB < CD$. Consideriamo, pertanto, tali segmenti con la condizione posta:

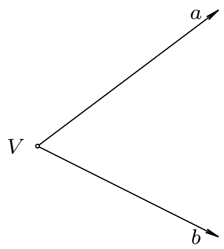
- se $AB \cong CD$, allora si conviene di assumere che la differenza $AB - CD$ sia il segmento nullo;
- se $AB > CD$, allora con un movimento rigido trasportiamo il secondo segmento in modo tale che $C \equiv A$ e i due segmenti abbiano lo stesso sostegno; per l'ipotesi fatta risulta $A \prec D \prec B$. Il segmento DB è il **segmento differenza** di AB e CD.

Resta così definita un'operazione di **sottrazione** tra segmenti, con la ipotizzata limitazione. Ovviamente $AB \cong CD + DB$.

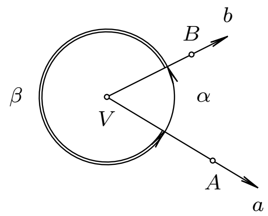
Postulato 12. *Siano A, B, e C tre punti della retta orientata r tali che $A \prec B \prec C$, e siano D, E, e F tre punti della retta orientata s tali che $D \prec E \prec F$. Se $AB \cong DE$ e $BC \cong EF$, allora $AC \cong DF$. Inoltre, se $AC \cong DF$ e $AB \cong DE$, allora $BC \cong EF$.*

Il postulato asserisce che segmenti che sono somma o differenza di segmenti congruenti sono a loro volta congruenti.

Definizione 9.4.4. Siano a e b due semirette orientate aventi la stessa origine V. Si definisce **angolo** ciascuna parte in cui le semirette dividono il piano. Il punto V si chiama **vertice** e le semirette **lati** dell' angolo, i cui punti sono comuni alle due parti.



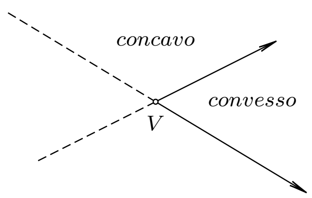
Con riferimento alla definizione precedente, siano dati i punti $A \in a$ e $B \in b$. Si converrà di orientare i due angoli individuati in *senso antiorario*.



In base alla figura, l'angolo α avrà come primo lato a e come secondo lato b, di contro l'angolo β avrà come primo lato b e come secondo lato a. Essi verranno denotati entrambi con $A\widehat{V}B$, purché non sorgano dubbi, dal contesto, a quale angolo ci si riferisca.

Per **parte interna** di un angolo intenderemo i punti dell'angolo che non appartengono ai suoi lati. Per **parte esterna** dell'angolo intenderemo i punti che non appartengono all'angolo.

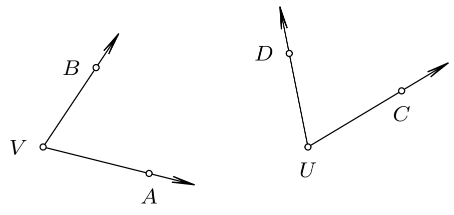
Definizione 9.4.5. Si definisce **angolo convesso** l'angolo che verifica la seguente proprietà: per ogni coppia di punti interni A e B, l'intero segmento AB è interno ad esso. Altrimenti si dice **angolo concavo**.



Definizione 9.4.6. Si definisce **angolo interno** di un poligono ciascun angolo avente come lati le semirette che contengono due suoi lati consecutivi.

Definizione 9.4.7. Un poligono si dice **convesso** se i suoi angoli interni sono tutti convessi, altrimenti si dice **concavo**.

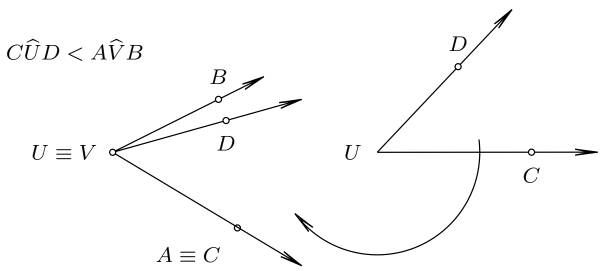
Postulato 13. *Siano dati un angolo $A\widehat{V}B$ ed una semiretta orientata UD di origine U. Allora esiste, in ciascuno dei due semipiani di origine UD, un'unica semiretta orientata UC di origine U tale che $A\widehat{V}B \cong C\widehat{U}D$.*



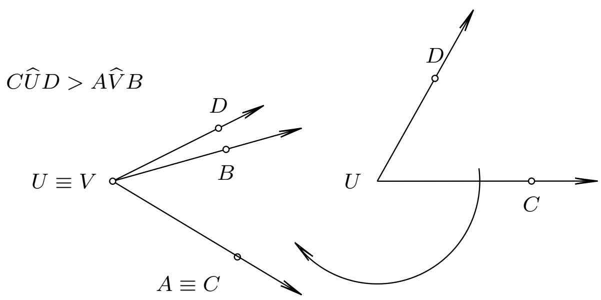
$A\widehat{V}B \cong C\widehat{U}D$

Il postulato stabilisce una regola per il confronto tra angoli. Si stabilisce quanto segue.

1. Se la semiretta UD è interna all'angolo $A\widehat{V}B$, allora l'angolo $C\widehat{U}D$ è **minore** dell'angolo $A\widehat{V}B$, notazione $C\widehat{U}D < A\widehat{V}B$;



2. se la semiretta UD è esterna all'angolo $A\widehat{V}B$, allora l'angolo $C\widehat{U}D$ è **maggiore** dell'angolo $A\widehat{V}B$, notazione $C\widehat{U}D > A\widehat{V}B$



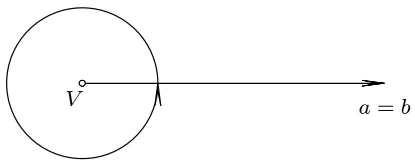
Postulato 14. *Siano dati tre angoli α, β e γ. $\alpha \cong \beta$ se, e solo se, $\beta \cong \alpha$; se $\alpha \cong \beta$ e $\beta \cong \gamma$, allora $\alpha \cong \gamma$.*

Il postulato asserisce semplicemente che la relazione di congruenza tra angoli gode delle proprietà **simmetrica** e **transitiva**. Inoltre, prendendo $\alpha \cong \beta$, dalle due proprietà precedenti si deduce che ogni angolo è congruente a sé stesso, per cui la relazione di congruenza tra angoli gode dell'ulteriore proprietà **riflessiva**.

Definizione 9.4.8. Due angoli si dicono **consecutivi** se hanno il vertice ed un solo lato in comune.

Cominciamo ora a definire alcuni angoli particolari.

Definizione 9.4.9. Si definisce **angolo giro** l'angolo avente come lati due semirette coincidenti e costituito da tutti i punti del piano.



I punti delle due semirette sovrapposte individuano il cosiddetto **angolo nullo**, il quale è l'unico angolo che ha parte interna vuota. In base alla definizione l'angolo giro è costituito da tutti i punti del piano.

Possiamo ora esporre come costruire in modo effettivo l'unione o somma di due angoli, in sintonia con i postulati di congruenza enunciati in precedenza.

Siano α un angolo di primo lato a e secondo lato b con vertice V (indicato con $a\widehat{V}b$), β un angolo di primo lato c e secondo lato d con vertice W(indicato con $c\widehat{W}d$). Con un movimento rigido trasportiamo il secondo angolo in modo tale che $V = W$ e $c = b$; si ottiene così un angolo γ di vertice V, primo lato a e secondo lato b (indicato con $a\widehat{V}d$), detto **angolo somma** di α e β. **Conveniamo che sia possibile ottenere angoli somma di altri angoli che siano maggiori di un angolo giro**. Resta così definita un'operazione di **addizione** tra angoli per cui valgono le usuali proprietà, vale a dire associativa, commutativa, proprietà dell'elemento neutro (angolo nullo). Si scriverà $\gamma = \alpha + \beta$.

La **differenza** $\alpha - \beta$ di angoli verrà definita a patto che non si verifichi la condizione $\alpha < \beta$. Facendo riferimento alle notazioni precedenti

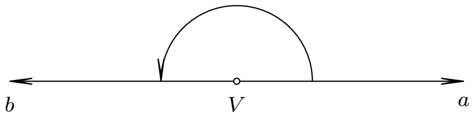
- se $\alpha \cong \beta$, allora $\alpha - \beta$ è congruente all'angolo nullo;
- se $\alpha > \beta$, allora con un un movimento rigido trasportiamo il secondo angolo in modo tale che $V \equiv W$ e $c \equiv a$, per cui sicuramente la semiretta d è interna all'angolo α; si considera così l'angolo δ di vertice V, primo lato c e secondo lato b (indicato con $d\widehat{V}b$), detto **angolo differenza** di α e β.

Resta così definita un'operazione di **sottrazione** tra angoli, con la ipotizzata limitazione.

Postulato 15. *Dati gli angoli α, β, α' e β', se $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$, allora $\alpha + \beta \cong \alpha' + \beta'$. Se $\alpha \not< \beta$ e $\alpha' \not< \beta'$ e se $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$, allora $\alpha - \beta \cong \alpha' - \beta'$.*

Il postulato asserisce che angoli che sono somma o differenza di angoli congruenti sono a loro volta congruenti.

Definizione 9.4.10. Si definisce **angolo piatto** l'angolo avente come lati due semirette opposte, cioé l'una il prolungamento dell'altra.

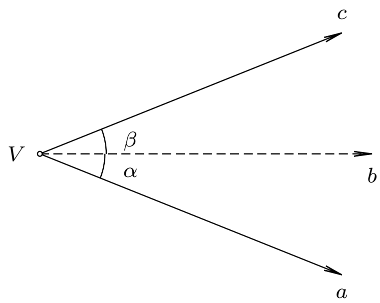


In base alla definizione ciascun angolo piatto è un semipiano, per cui si ottiene immediatamente il seguente

Corollario 9.4.1. *Ciascun angolo piatto è congruente alla metà di un angolo giro. Pertanto tutti gli angoli piatti sono congruenti.*

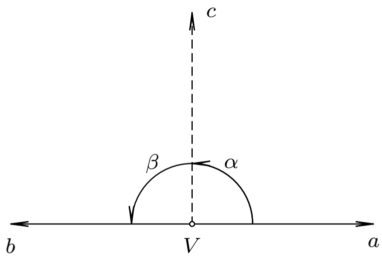
Dimostrazione. Infatti, con un movimento rigido si ottiene che i due semipiani sono perfettamente sovrapponibili. □

Definizione 9.4.11. Sia dato un angolo di vertice V. Si definisce **bisettrice dell'angolo** la semiretta di origine V che divide l'angolo in due parti congruenti.



$\alpha \cong \beta$

Definizione 9.4.12. Dato un angolo piatto e condotta la sua bisettrice, ciascun angolo che si viene a determinare si dice **angolo retto**.

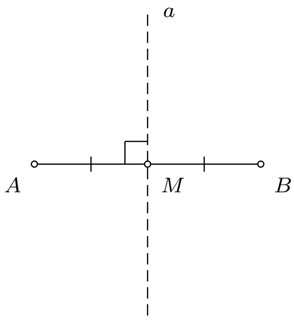


$\alpha \cong \beta$

Pertanto, ciascun angolo retto è congruente alla metà di un angolo piatto. Per estensione, due rette incidenti che formano quattro angoli retti si dicono **perpendicolari**. Studieremo in maggior dettaglio la relazione di perpendicolarità tra rette in un prossimo capitolo.

Conveniamo di utilizzare le seguenti notazioni. Un qualunque angolo piatto verra indicato con la lettera greca π; di conseguenza l'angolo giro verrà denotato con 2π, mentre ogni angolo retto verrà denotato con $\frac{\pi}{2}$.

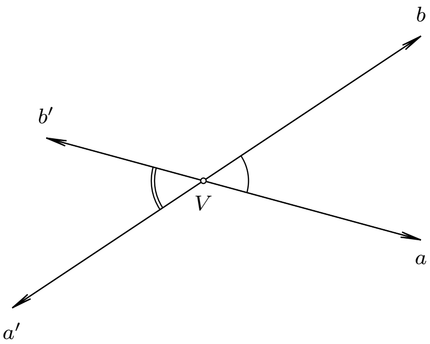
Definizione 9.4.13. Si definisce **asse** del segmento AB la retta a che è perpendicolare al segmento nel suo punto medio.



Vediamo ora di definire particolari relazioni su coppie di angoli.

Definizione 9.4.14. Due angoli si dicono **complementari** se la loro somma è congruente ad un angolo retto; due angoli si dicono **supplementari** se la loro somma è congruente ad un angolo piatto.

Definizione 9.4.15. Due angoli si dicono **opposti al vertice** se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.



É evidente che due rette incidenti individuano due coppie di angoli opposti al vertice.

Stabiliamo le seguenti notevoli proprietà.

Teorema 9.4.1. *Angoli complementari di uno stesso angolo sono congruenti.*

Hp: $\alpha + \beta \cong \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad \alpha + \gamma \cong \frac{\pi}{2}$

Th: $\beta \cong \gamma$

Dimostrazione. .

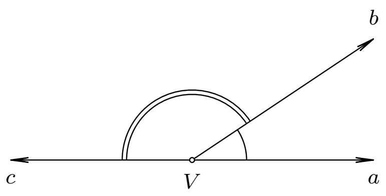
1.	$\alpha + \beta \cong \frac{\pi}{2}$	Hp
2.	$\alpha + \gamma \cong \frac{\pi}{2}$	Hp
3.	$\alpha + \beta \cong \alpha + \gamma$	1., 2., proprietà transitiva
4.	$\beta \cong \gamma$	3., differenza di angoli congruenti

□

Allo stesso modo si dimostra

Teorema 9.4.2. *Angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti.*

Definizione 9.4.16. Due angoli consecutivi si dicono **adiacenti** se sono anche supplementati.



La relazione di consecutività tra due angoli è più generale della relazione di adiacenza, come illustrato dal seguente schema

$$\alpha \quad e \quad \beta \quad adiacenti \quad \Longrightarrow \quad \alpha \quad e \quad \beta \quad consecutivi$$

$$\alpha \quad e \quad \beta \quad consecutivi \quad \not\Longrightarrow \quad \alpha \quad e \quad \beta \quad adiacenti$$

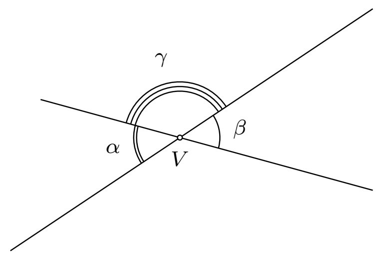
Allo stesso modo

$$\alpha \quad e \quad \beta \quad adiacenti \quad \Longrightarrow \quad \alpha \quad e \quad \beta \quad supplementari$$

$$\alpha \quad e \quad \beta \quad supplementari \quad \not\Longrightarrow \quad \alpha \quad e \quad \beta \quad adiacenti$$

in quanto due angoli supplementari possono occupare parti di piano arbitrarie.

Teorema 9.4.3. *Angoli opposti al vertice sono congruenti.*



$\alpha \cong \beta$

Hp: α e β angoli opposti al vertice

Th: $\alpha \cong \beta$

Dimostrazione. Indichiamo con γ l'angolo adiacente sia ad α che a β.

1.	$\alpha + \gamma \cong \pi$	angoli adiacenti
2.	$\beta + \gamma \cong \pi$	angoli adiacenti
3.	$\alpha + \gamma \cong \beta + \gamma$	1., 2., proprietà transitiva
4.	$\alpha \cong \beta$	3., supplementari di uno stesso angolo

□

Esercizi

1. Disegnare un segmento AB noti l'estremo A ed il suo punto medio M.
2. Siano AB e BC due segmenti adiacenti e congruenti; siano M e N i punti medi rispettivamente di AB e BC. Dimostrare che $AB \cong MN$.
3. Siano AB e BC due segmenti adiacenti tali che $AB < BC$, e siano M e N i loro rispettivi punti medi. Dimostrare che $AB < MN$ e che $MN < BC$.
4. Siano α e β due angoli adiacenti. Dimostrare che le loro bisettrici sono lati di un angolo retto.
5. Siano r e s due rette incidenti e siano α, β e γ, δ le due coppie di angoli opposti al vertice individuate da r e s. Dimostrare che le rette sostegno delle bisettrici delle due coppie di angoli sono perpendicolari.
6. Disegnare un angolo $A\widehat{O}B$ e la sua bisettrice OC, quindi disegnare un secondo angolo $B\widehat{O}D$, consecutivo al primo, e la sua bisettrice OE. Dimostrare che $A\widehat{O}D \cong 2C\widehat{O}E$.
7. Dimostrare che le bisettrici di due angoli opposti al vertice hanno lo stesso sostegno, cioé sono semirette opposte.
8. Disegnare un angolo concavo $b\widehat{O}a$ e la sua bisettrice d. Dimostrare che la semiretta opposta a d è la bisettrice dell'angolo convesso $a\widehat{O}b$.
9. Disegnare gli angoli consecutivi $a\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}c$, quindi le loro rispettive bisettrici d ed e. Dimostrare che se gli angoli $d\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}e$ sono complementari, allora gli angoli $a\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}c$ sono adiacenti.
10. Disegnare due angoli consecutivi $a\widehat{V}b$ e $b\widehat{V}c$ e le loro bisettrici d ed e. Supposto che le bisettrici siano perpendicolari, dimostrare che, presi due due punti qualunque rispettivamente sulle semirette a e c, essi sono allineati con V.

Capitolo 10

I criteri di congruenza per i triangoli

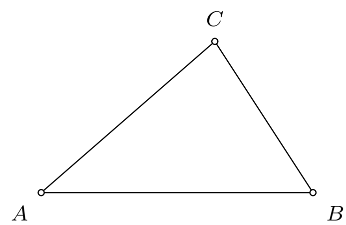
In questo capitolo studieremo una delle figure geometriche più importanti: il triangolo. La conoscenza delle definizioni e delle proprietà che riguardano i triangoli sono fondamentali per lo studio delle figure geometriche più complesse. In particolare, i criteri di congruenza dei triangoli costituiranno una tecnica molto potente nella conduzione delle dimostrazioni nel seguito di questo corso.

10.1 Definizione e classificazione dei triangoli

Definizione 10.1.1. Si definisce **triangolo** un poligono avente tre lati.

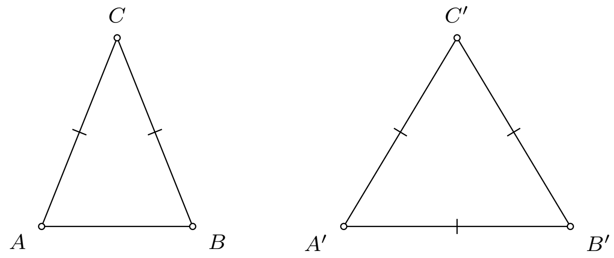
Ogni triangolo ha tre vertici e tre angoli interni. Sulla base di caratteristiche particolari di lati e angoli è possibile classificare i triangoli.

Definizione 10.1.2. Si definisce **triangolo scaleno** un triangolo in cui non ci sono lati congruenti.



Il triangolo scaleno è evidentemente il triangolo più generale e ogni proprietà valida per esso sarà ereditata da ogni altro triangolo particolare, con gli opportuni aggiustamenti. Si vedrà più avanti che in un triangolo scaleno non ci sono angoli congruenti.

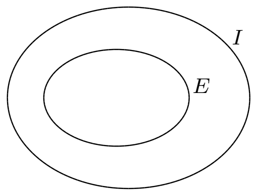
Definizione 10.1.3. Si dice **triangolo isoscele** un triangolo avente almeno due lati congruenti. Un triangolo isoscele in cui tutti e tre i lati sono congruenti è detto **triangolo equilatero.**



Osservazione: Risulta evidente che la deduzione

$$ABC \quad \text{equilatero} \quad \Longrightarrow \quad ABC \quad \text{isoscele}$$

risulta corretta, mentre quella inversa no. La situazione può essere illustrata attraverso il seguente diagramma di Eulero-Venn, nel quale E rappresenta l'insieme dei triangoli equilateri, I quello dei triangoli isosceli.

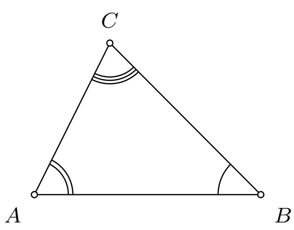


In un triangolo isoscele, l'angolo formato dai due lati congruenti è detto *angolo al vertice*, il lato che si oppone all'angolo al vertice *base canonica* o semplicemente *base.* , gli angoli adiacenti alla base canonica *angoli alla base.*

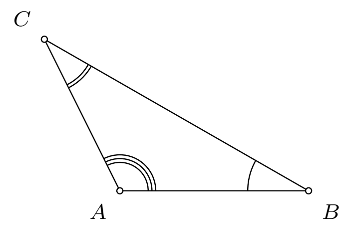
In un triangolo equilatero, ciascun angolo può essere riguardato sia come angolo alla base, sia come angolo al vertice.

Classifichiamo, ora, i triangoli sulla base degli angoli.

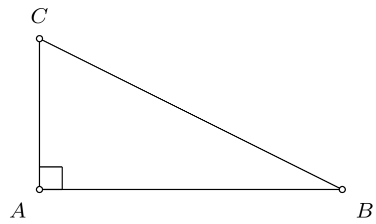
Definizione 10.1.4. Si definisce **triangolo acutangolo** un triangolo in cui tutti gli angoli sono acuti, cioé minori di un angolo retto.



Definizione 10.1.5. Si definisce **triangolo ottusangolo** un triangolo avente un angolo ottuso, cioé maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto.

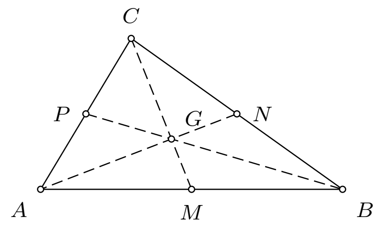


Definizione 10.1.6. Un triangolo con un angolo retto si dice **triangolo rettangolo**. I lati dell'angolo retto sono denominati **cateti**, il terzo lato **ipotenusa**.



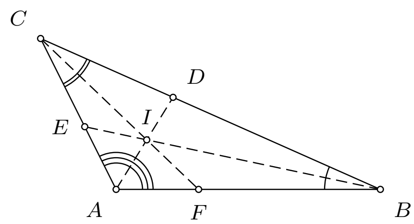
Definizione 10.1.7. In un triangolo, si definisce **mediana** di un lato, il segmento avente per estremi il punto medio del lato e il vertice ad esso opposto.

Le mediane di un triangolo sono tre; proveremo che si incontrano in un punto detto **baricentro**, che per ogni triangolo è un punto interno.



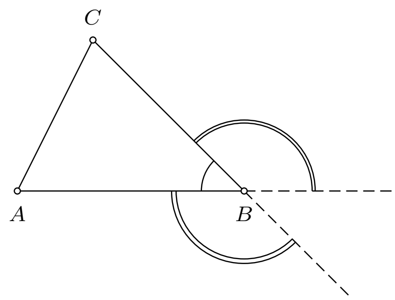
Definizione 10.1.8. In un triangolo, si definisce **bisettrice** di un angolo interno, il segmento di bisettrice dell'angolo stesso, condotto dal suo vertice e avente come secondo estremo un punto del lato opposto.

Le bisettrici di un triangolo sono tre; proveremo che si incontrano in un punto detto **incentro**, che per ogni triangolo è un punto interno.



A ciascun angolo interno di un triangolo si associa una coppia di angoli, come segue.

Definizione 10.1.9. In un triangolo, si definisce **angolo esterno** associato ad un angolo interno, ciascuno dei due angoli adiacenti ad esso, formati da uno dei suoi lati e dal prolungamento dell'altro.



Angoli esterni associati all'angolo interno $A\widehat{B}C$

Il fatto che gli angoli esterni associati ad un angolo interno siano due può sembrare una complicazione, ma essa viene immediatamente fugata dalla figura precedente che ispira il seguente

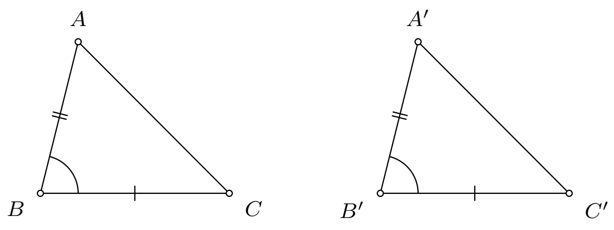
Teorema 10.1.1. *Gli angoli esterni associati ad un angolo interno sono congruenti.*

Dimostrazione. Sono opposti al vertice. □

10.2 I criteri di congruenza dei triangoli

La congruenza conserva sia le dimensioni che la forma delle figure geometriche. In particolare, due triangoli sono congruenti se ciascun lato del primo è congruente al lato corrispondente del secondo, e così anche per gli angoli. Occorre pertanto confrontare tra loro sei informazioni per ciascun triangolo. I criteri di congruenza dei triangoli ci assicurano, invece, che sono sufficienti tre informazioni per ciascun triangolo, a patto che siano opportune.

Teorema 10.2.1 (Primo criterio di congruenza)**.** *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo da essi formato, allora essi sono congruenti.*

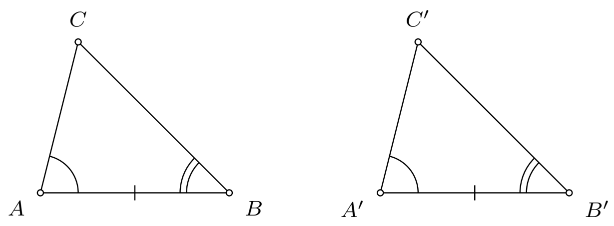


Hp: $AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge \widehat{B} \cong \widehat{B'}$

Th: $ABC \cong A'B'C'$

Dimostrazione. Con un movimento rigido trasportiamo il triangolo $A'B'C'$ come segue. Poiché $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, trasportiamo l'angolo $\widehat{B'}$ sopra l'angolo $\widehat{B}$, in modo che B' vada su B. Siccome $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, anche A' cade su A e C' su C. Avendo i tre vertici coincidenti, i due triangoli risultano congruenti. □

Teorema 10.2.2 (Secondo criterio di congruenza)**.** *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli e il lato tra essi compreso, allora essi sono congruenti.*



Hp:$AB \cong A'B' \wedge \widehat{A} \cong \widehat{A'} \wedge \widehat{B} \cong \widehat{B'}$

Th: $ABC \cong A'B'C'$

Dimostrazione. Con un movimento rigido trasportiamo il triangolo $A'B'C'$ come segue. Poiché $AB \cong A'B'$, $A'B'$ si sovrappone a AB; siccome $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, la retta $A'C'$ si sovrappone ad AC, il lato $B'C'$ si sovrappone a BC; sapendo che due rette incidenti s'incontrano in un solo punto, si deduce che anche il vertice C' si sovrappone a C. Avendo i tre vertici coincidenti, i due triangoli risultano congruenti. □

Nel prossimo capitolo enunceremo e dimostreremo il terzo criterio di congruenza.

Come già accennato, i criteri di congruenza dei triangoli saranno uno strumento potente per condurre gran parte delle dimostrazioni di questo corso. In particolare, diamo le seguenti regole pratiche, delle quali alcune sono un'immediata conseguenza dei postulati di congruenza.

Regola pratica 1. *Se si desidera dimostrare che due segmenti sono congruenti, allora si considerano due triangoli che hanno quei segmenti come lati, si dimostra che i due triangoli sono congruenti, quindi si applica la seguente*

Regola pratica 2. *In triangoli congruenti, ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti.*

Regola pratica 3. *Se si desidera dimostrare che due angoli sono congruenti, allora si considerano due triangoli che hanno quegli angoli come angoli interni, si dimostra che i due triangoli sono congruenti, quindi si applica la seguente*

Regola pratica 4. *In triangoli congruenti, a lati congruenti si oppongono angoli congruenti.*

Regola pratica 5. *Se $AB \cong CD$ e $EF \cong GH$, allora $AB + EF \cong CD + GH$ e $AB - EF \cong CD - GH$, allorquando la differenza tra segmenti ha significato in base alle regole in merito già definite.*

Regola pratica 6. *Se $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{D}$, allora $\widehat{A} + \widehat{C} \cong \widehat{B} + \widehat{D}$ e $\widehat{A} - \widehat{C} \cong \widehat{B} - \widehat{D}$, allorquando la somma e la differenza tra angoli hanno significato, in base alle regole in merito già stabilite.*

Nelle dimostrazioni dei teoremi, l'applicazione dei criteri di congruenza sarà evidenziata con le diciture abbreviate **1° c.c.**, **2° c.c.**; nei prossimi capitoli introdurremo il terzo criterio di congruenza e il secondo criterio generalizzato di congruenza che verranno abbreviati come **3° c.c.**, **2° c.c.g.**.

Esercizi

1. Sia C un punto della bisettrice dell'angolo convesso $X\widehat{O}Y$ e A e B due punti dei lati OX e OY dell'angolo tali che $OA \cong OB$. Dimostra che i triangoli BCO e ACO sono congruenti.

2. Sia ABC un triangolo. Sulla bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$ considera due punti D ed E tali che $AD \cong AB$ e $AE \cong AC$. Dimostra che $BE \cong DC$.

3. Si disegni due triangoli congruenti ABC e $A'B'C'$. Sui lati congruenti AB e $A'B'$, si considerino i punti D e D' in modo che $AD \cong A'D'$. Dimostrare che gli angoli $C\widehat{D}B$ e $C'\widehat{D'}B'$ sono congruenti.

4. Si disegni un angolo $A\widehat{V}B$ e la sua bisettrice VC. Da un punto E della bisettrice si tracci una retta che forma con la bisettrice due angoli retti. Questa retta interseca i lati dell'angolo nei punti A e B. Dimostrare che $AO \cong BO$.

5. Disegna il triangolo ABC, con $AB > AC$. Traccia la bisettrice AD dell'angolo $\widetilde{A}$. Dal punto D traccia una semiretta che formi con la bisettrice stessa un angolo congruente all'angolo $A\widehat{D}C$. Tale semiretta incontra AB nel punto E. Dimostra che CD e DE sono congruenti.

6. Si disegni i triangoli congruenti ABC e $A'B'C'$. Dimostrare che le bisettrici di due angoli congruenti sono congruenti.

7. Sia ABC un triangolo, e sia AK la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$. Da K si conduca una retta che formi due angoli retti con AK e che incontri la retta AB in D e la retta AC in E. Dimostra che il triangolo ADE è isoscele.

8. Si consideri il triangolo ABC. Si prolunghi il lato AB, dalla parte di B, di un segmento $BE \cong AB$ e il lato BC, dalla parte di B, di un segmento $BF \cong BC$; si congiunga E con F. Considerati il punto medio M di AC e il punto medio N di EF, dimostrare che B è sul segmento MN.

9. Siano AB un segmento ed M il suo punto medio. Si disegni la retta r tale che $M \in r$, e su di essa si individuino i segmenti congruenti MC ed MD, in semipiani opposti rispetto alla retta AB. Congiunti A con D e B con C, si dimostri $AMD \cong MBC$.

10. Si disegnino due angoli consecuti e congruenti $a\widehat{V}b$ e $b\widehat{V}c$ e le rispettive bisettrici d ed e. Sulle semirette a e b si scelgano rispettivamente i punti A e B tali che $VA \cong VB$. Sulle bisettrici d e e si scelgano rispettivamente i punti C e D tali che $VC \cong VD$. Si congiungano A con C e B con D. Dimostrare che $V\widehat{A}C \cong V\widehat{B}C \cong V\widehat{B}D$.

11. Si disegni il triangolo ABC, con $AB > AC$, e si conduca la bisettrice AD dell'angolo $\widehat{A}$. Da D si conduca la semiretta a che forma con la bisettrice b un angolo congruente a $A\widehat{D}C$, e la semiretta a interseca il lato AB in E. Si dimostri che $CD \cong DE$.

12. Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C; si prolunghino i lati AC e BC, dalla parte della base AB, di due segmenti AD e BE tali che $AD \cong BE$. Si dimostri che il punto $\{F\} = AE \cap BD$ appartiene alla bisettrice dell'angolo $A\widehat{C}B$.

13. Due triangolo isosceli e rettangoli in C ABC e CED sono tali che $ABC \cap CED = \{C\}$. Sapendo che l'angolo $B\widehat{C}D$ è acuto, si dimostri che $AD \cong BE$.

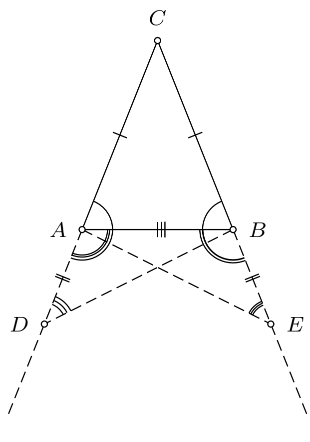
Capitolo 11

Proprietà fondamentali dei triangoli

11.1 Prime proprietà dei triangoli isosceli

In questo paragrafo enunceremo e dimostreremo importanti proprietà che caratterizzano i triangoli isosceli. Cominciamo col notissimo

Teorema 11.1.1 (Teorema diretto per i triangoli isosceli)**.** *In ogni triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti.*



Hp: $AC \cong BC$
Th: $A\widehat{B}C \cong B\widehat{A}C$

Dimostrazione. Costruzione: prolunghiamo i lati AC e BC, dalla parte di A e di B, e scegliamo rispettivamente su tali prolungamenti due punti D ed E tali che $AD \cong BE$; congiungiamo, quindi, B con D, A con E.

1. Consideriamo i triangoli BCD e ACE

2.	$AC \cong BC$	Hp
3.	$AD \cong BE$	costruzione
4.	$CD \cong CE$	2., 3., somma di segmenti congruenti
5.	$\widehat{C}$ in comune	figura
6.	$BCD \cong ACE$	2., 4., 5., 1° c.c.
7.	$AE \cong BD$	6., si oppongono ad angoli congruenti
8.	$A\widehat{D}B \cong A\widehat{E}B$	6., si oppongono a lati congruenti
9.	$C\widehat{A}E \cong C\widehat{B}D$	6., si oppongono a lati congruenti
10.	Consideriamo i triangoli ABD e ABE	
11.	$ABD \cong ABE$	3., 7., 8., 1° c.c.
12.	$B\widehat{A}E \cong A\widehat{B}D$	11., si oppongono a lati congruenti
13.	$A\widehat{B}C \cong B\widehat{A}C$	8., 12., differenza di angoli congruenti

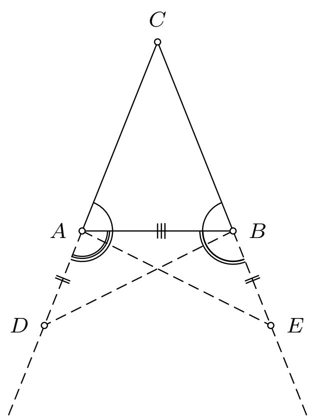
□

Corollario 11.1.1. *I triangoli equilateri sono equiangoli, cioè hanno tutti e tre gli angoli congruenti.*

Dimostrazione. Semplice esercizio. □

Vale anche il viceversa del teorema diretto.

Teorema 11.1.2 (Teorema inverso per i triangoli isosceli)**.** *Ogni triangolo con due angoli congruenti è isoscele.*



Hp: $A\widehat{B}C \cong B\widehat{A}C$

Th: ABC *isoscele*

Dimostrazione. Si utilizza la stessa costruzione del teorema diretto.

1.	Consideriamo ABD e ABE	
2.	$C\widehat{A}D \cong C\widehat{B}E \cong \pi$	figura
3.	$A\widehat{B}C \cong B\widehat{A}C$	Hp
4.	$B\widehat{A}D \cong A\widehat{B}E$	2., 3., supplementari di angoli congruenti

5.	$AD \cong BE$	costruzione
6.	AB in comune	figura
7.	$ABD \cong ABE$	4., 5., 6., 1° c.c.
8.	$AE \cong BD$	7., si oppongono ad angoli congruenti
9.	$A\widehat{E}B \cong A\widehat{D}B$	7., si oppongono a lati congruenti
10.	$A\widehat{B}D \cong B\widehat{A}E$	7., si oppongono a lati congruenti
11.	$C\widehat{A}E \cong C\widehat{B}D$	3., 10., somma di angoli congruenti
12.	Consideriamo CDB e CAE	
13.	$CDB \cong CAE$	8., 9., 11., 2° c.c.
14.	$AC \cong BC$	13., si oppongono ad angoli congruenti
15.	ABC isoscele	14., definizione triangolo isoscele

□

Corollario 11.1.2. *Un triangolo equiangolo è anche equilatero.*

Dimostrazione. Chiaro. □

Osservazione: I teoremi diretto e inverso per i triangoli isosceli si possono riassumere dicendo che: *un triangolo è isoscele se, e solo se, gli angoli alla base sono congruenti* (simbolo $\Longleftrightarrow$). Pertanto, fermo restando che la definizione di triangolo isoscele è quella già data, possiamo esprimerla in maniera alternativa come: *triangolo isoscele è quel triangolo che ha almeno due angoli congruenti.* L'estensione ai triangoli equilateri è evidente.

Siamo ora in grado di esplicitare la dimostrazione del terzo criterio di congruenza.

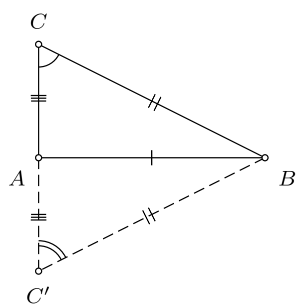
Teorema 11.1.3 (Terzo criterio di congruenza)**.** *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre lati, allora essi sono congruenti.*

Hp: $AB \cong A'B' \quad \wedge \quad BC \cong B'C' \quad \wedge \quad AC \cong A'C'$

Th: $ABC \cong A'B'C'$

Dimostrazione. La dimostrazione analizza tre casi distinti.

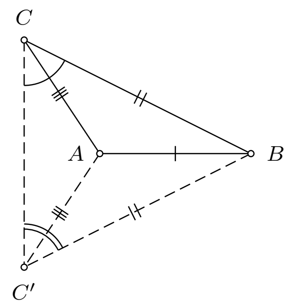
1. Con un movimento rigido, muoviamo il triangolo $A'B'C'$ in modo tale che $A'B'$ si sovrapponga ad AB, in quanto $AB \cong A'B'$, i punti C e C' siano in semipiani opposti rispetto ad AB, e C, A, C' siano allineati.



1. $AC \cong AC' \quad \wedge \quad BC \cong BC'$ Hp

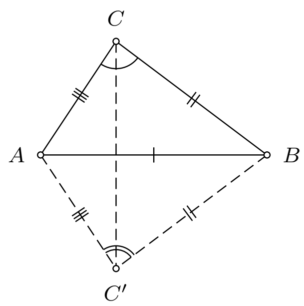
2.	Consideriamo il triangolo $CC'B$	
3.	$CC'B$ triangolo isoscele	2., def. triangolo isoscele
4.	$A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$	3., teorema diretto triangoli isosceli
5.	$ABC \cong ABC'$	1., 4., 1° c.c.

2. Con un movimento rigido, muoviamo il triangolo $A'B'C'$ in modo tale che $A'B'$ si sovrapponga ad AB, in quanto $AB \cong A'B'$, i punti C e C' siano in semipiani opposti rispetto ad AB, e CC' intersechi AB in un punto sul prolungamento di AB stesso, dalla parte di A.



1.	$AC \cong AC' \quad \wedge \quad BC \cong BC'$	Hp
2.	Consideriamo il triangolo $CC'B$	
3.	$CC'B$ triangolo isoscele	1., def. triangolo isoscele
4.	$C\widehat{C'}B \cong C'\widehat{C}B$	3., teorema diretto triangoli isosceli
5.	Consideriamo $CC'A$	
6.	$CC'A$ triangolo isoscele	1., def. triangolo isoscele
7.	$C\widehat{C'}A \cong C'\widehat{C}A$	3., teorema diretto triangoli isosceli
8.	$A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$	4., 7., differenza di angoli congruenti
9.	$ABC \cong ABC'$	1., 8., 1° c.c.

3. Con un movimento rigido, muoviamo il triangolo $A'B'C'$ in modo tale che $A'B'$ si sovrapponga ad AB, in quanto $AB \cong A'B'$, i punti C e C' siano in semipiani opposti rispetto ad AB, CC' intersechi AB in un punto interno ad AB stesso.



1.	$AC \cong AC' \quad \wedge \quad BC \cong BC'$	Hp
2.	Consideriamo il triangolo $CC'B$	
3.	$CC'B$ triangolo isoscele	1., def. triangolo isoscele
4.	$C\widehat{C'}B \cong C'\widehat{C}B$	3., teorema diretto triangoli isosceli
5.	Consideriamo $C'CA$	
6.	$C'CA$ triangolo isoscele	1., def. triangolo isoscele
7.	$C\widehat{C'}A \cong C'\widehat{C}A$	3., teorema diretto triangoli isosceli
8.	$A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$	4., 7., somma di angoli congruenti
9.	$ABC \cong ABC'$	1., 8., 1° c.c.

□

Esercizi

1. Dimostrare che due triangoli, che hanno congruenti due lati e la mediana relativa ad uno dei due, sono congruenti.

2. Disegnare due segmenti congruenti AB e DE. Costruire su essi due triangoli equilateri ABC e DEF. Si dimostri che i triangoli sono congruenti. Si può dimostrare ancora la congruenza se si costruiscono sui due segmenti due triangoli isosceli?

3. Nel triangolo isoscele ABC, di base AB, prolunga i lati CA e CB dalla parte della base. La bisettrice dell'angolo supplementare di $\widehat{A}$ incontra il prolungamento del lato BC nel punto E. La bisettrice dell'angolo supplementare di $\widehat{B}$ incontra il prolungamento del lato AC nel punto F. Dimostra che $ABF \cong ABE$.

4. Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia minore del lato obliquo. Prolunga il lato CA, dalla parte di A, di un segmento AE congruente alla differenza fra il lato obliquo e la base. Prolunga poi la base AB, dalla parte di B, di un segmento $BF \cong AE$. Congiungi F con C ed E. Dimostra che $CF \cong EF$.

5. Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C; si prendano sui prolungamenti di AB due punti D ed E tali che $AD \cong BE$. Si dimostri che $ADC \cong BEC$ e $AEC \cong BDC$.

6. Sui lati congruenti del triangolo isoscele ABC, di vertice C, disegna due segmenti congruenti CE e CF. Congiungi E con B, poi A con F; indica con D il loro punto d'intersezione. Dimostra che anche il triangolo ABD è isoscele.

7. Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Si conducano le bisettrici degli angoli alla base e sia E il loro punto d'incontro. Dimostrare che il triangolo ABE è isoscele.

8. Sui due lati obliqui del triangolo isoscele ABC, di base AB, disegna, esternamente al triangolo, i triangoli equilateri BCD e ACE. Congiungi A con D e B con E, poi indica con F il punto intersezione dei segmenti ottenuti. Dimostra che

   a) $AD \cong BE$

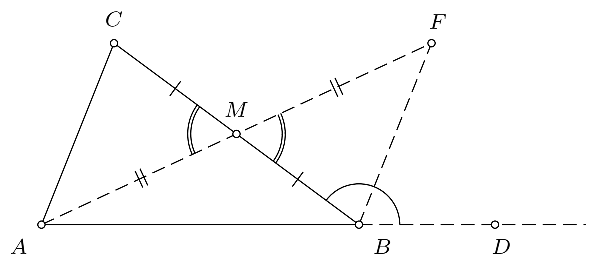
   b) CF è bisettrice di $A\widehat{C}B$.

9. Disegna un triangolo isoscele ABC, di base BC e l'angolo $\widehat{A}$ acuto. Traccia le altezze BH e CK relative, rispettivamente, ai lati AC e AB e prolunga tali altezze, dalla parte di H e K, dei segmenti $HB' \cong BH$ e $KC' \cong CK$. Sia A' il punto d'intersezione della retta BC' con la retta $B'C$. Dimostra che
   a) $ABC \cong AC'B \cong AB'C$
   b) il triangolo $A'B'C'$ è isoscele.
10. Siano dati due triangoli isosceli aventi ordinatamente congruenti un lato e la base. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti.
11. Si consideri un angolo $a\widehat{O}b$; siano A, B due punti del lato a e siano C, D due punti del lato b tali che $OA \cong OC$ e $OB \cong OD$. Si congiungano A con D e B con C e sia $\{E\} = AD \cap BC$. Si dimostri che il punto E appartiene alla bisettrice dell'angolo $a\widehat{O}b$.

11.2 Il primo teorema dell'angolo esterno

Nel paragrafo 10.1 abbiamo introdotto il concetto di angolo esterno di un triangolo. Conosciamo già la relazione che sussiste tra un angolo interno e la coppia di angoli esterni ad esso associati: l'angolo interno e ognuno degli angoli esterni sono adiacenti. Ci chiediamo ora se sussistono relazioni tra ciascun angolo esterno e gli angoli interni ad esso non adiacenti. La risposta è affermativa ed è stabilita dai due teoremi dell'angolo esterno, e, in questo paragrafo, enunciamo e dimostriamo solo il primo.

Teorema 11.2.1 (Primo teorema dell'angolo esterno)**.** *In ogni triangolo, un angolo esterno è maggiore di ciascun angolo interno ad esso non adiacente.*

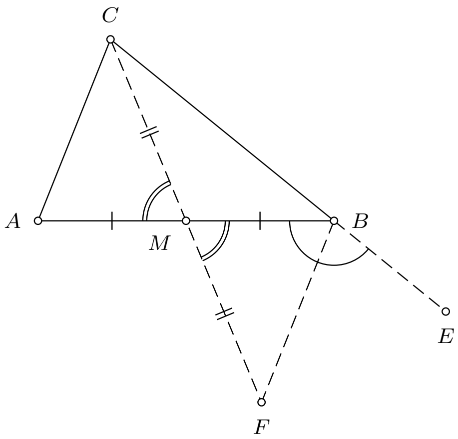


Hp: $A\widehat{B}C + C\widehat{B}D \cong \pi$

Th: $C\widehat{B}D > A\widehat{C}B$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che $C\widehat{B}D > A\widehat{C}B$. Costruzione: Consideriamo il punto medio M del lato BC, conduciamo la semiretta AM, di origine A, e su di essa individuiamo il punto F tale che $AM \cong MF$, per cui F è interno all'angolo esterno $C\widehat{B}D$. Congiungiamo F con B.

1.	$C\widehat{B}D > C\widehat{B}F$	F interno a $C\widehat{B}D$
2.	Consideriamo i triangoli ACM e BFM	
3.	$CM \cong MB$	per costruzione
4.	$AM \cong MF$	per costruzione
5.	$A\widehat{M}C \cong B\widehat{M}F$	angoli opposti al vertice
6.	$ACM \cong BFM$	3., 4., 5., 1° c. c.
7.	$M\widehat{B}F \cong A\widehat{C}B$	6., si oppongono a lati congruenti
8.	$C\widehat{B}D > A\widehat{C}B$	1., 7.



Dimostriamo, infine, che $A\widehat{B}E > C\widehat{A}B$. Costruzione: Consideriamo il punto medio M del lato AB, conduciamo la semiretta CM, di origine C, e su di essa individuiamo il punto F tale che $CM \cong MF$, per cui F è interno all'angolo esterno $A\widehat{B}E$. Congiungiamo F con B.

Hp: $A\widehat{B}C + A\widehat{B}E \cong \pi$

Th: $A\widehat{B}E > C\widehat{A}B$

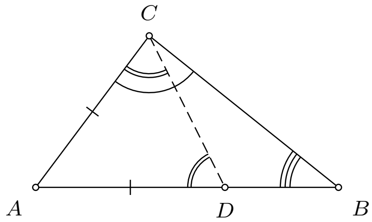
1.	$A\widehat{B}E > A\widehat{B}F$	F interno a $A\widehat{B}E$
2.	Consideriamo i triangoli ACM e BFM	
3.	$AM \cong MB$	per costruzione
4.	$CM \cong MF$	per costruzione
5.	$A\widehat{M}C \cong B\widehat{M}F$	angoli opposti al vertice
6.	$ACM \cong BFM$	3., 4., 5., 1° c. c.
7.	$M\widehat{B}F \cong C\widehat{A}B$	6., si oppongono a lati congruenti
8.	$A\widehat{B}E > C\widehat{A}B$	1., 7.

□

11.3 Teoremi delle disuguaglianze triangolari

Nel precedente paragrafo abbiamo dedotto che in un triangolo isoscele a lati congruenti si oppongono angoli congruenti, e viceversa. Ci chiediamo ora se è possibile determinare una relazione tra un lato e l'angolo opposto in un triangolo scaleno. La risposta è affermativa ed è stabilita dai seguenti teoremi.

Teorema 11.3.1. *Consideriamo un triangolo che non sia equilatero. Allora a lato maggiore si oppone angolo maggiore.*



Hp: $AC < AB$

Th: $A\widehat{B}C < A\widehat{C}B$

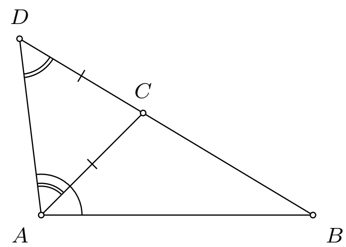
Dimostrazione. Poiché $AC < AB$, si considera un punto D interno al segmento AB tale che $AC \cong AD$.

1.	$A\widehat{C}D < A\widehat{C}B$	CD interno all'angolo $A\widehat{C}B$, per costruzione
2.	Consideriamo il triangolo ACD	
3.	$AC \cong AD$	costruzione
4.	ACD isoscele	3., def. triangolo isoscele
5.	$A\widehat{C}D \cong A\widehat{D}C$	4., teorema diretto triangoli isosceli
6.	$A\widehat{D}C < A\widehat{C}B$	1., 5.
7.	Consideriamo il triangolo BCD	
8.	$A\widehat{D}C > A\widehat{B}C$	1° teorema dell'angolo esterno
9.	$A\widehat{B}C < A\widehat{C}B$	6., 8., proprietà transitiva del $<$

□

Le proprietà che seguono sono i noti teoremi della disuguaglianza triangolare, già studiati in maniera intuitiva durante la scuola media.

Teorema 11.3.2 (Primo Teorema della disuguaglianza triangolare)**.** *In ogni triangolo, un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*



Hp: ABC triangolo, AB lato qualunque

Th: $AB < AC + BC$

Dimostrazione. Costruzione: prolunghiamo il lato BC, dalla parte di C, di un segmento $CD \cong AC$; congiungiamo D con A.

1.	Per assurdo $AB \geq AC + BC$	
2.	$AC \cong CD$	costruzione
3.	ACD isoscele	2., definizione triangolo isoscele
4.	$A\widehat{D}C \cong D\widehat{A}C$	3., teorema diretto triangoli isosceli
5.	$AB > CD + BC$	1., 2.
6.	$AB > BD$	5., somma segmenti adiacenti
7.	Consideriamo ABD	
8.	$A\widehat{D}B > D\widehat{A}B$	6., a lato maggiore si oppone angolo maggiore
9.	$D\widehat{A}B \cong D\widehat{A}C + C\widehat{A}B$	unione di angoli consecutivi
10.	$A\widehat{D}B < D\widehat{A}B$	9.
11.	Contraddizione	8., 10.
12.	Per assurdo $AB \cong AC + BC$	
13.	ABD triangolo isoscele di base AD	12., def. triangolo isoscele
14.	$D\widehat{A}B \cong A\widehat{D}B$	13., teorema diretto triangoli isosceli
15.	Contraddizione	10., 14.
16.	$AB < AC + BC$	11., 15.

□

Teorema 11.3.3 (Secondo Teorema della disuguaglianza triangolare)**.** *In ogni triangolo, un lato è maggiore della differenza degli altri due, qualora quest'ultima abbia significato.*

Hp: ABC triangolo, AB lato qualunque, $BC > AC \quad \dot{\vee} \quad BC \cong AC$

Th: $AB > BC - AC$

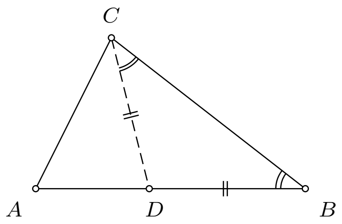
Dimostrazione. Con riferimento alla dimostrazione e alla figura del primo teorema della disuguaglianza triangolare

1.	$BC < AB + AC$	primo teorema disuguaglianza triangolare
2.	$AC \cong AC$	proprietà riflessiva
3.	$BC - AC < AB + AC - AC$	compatibilità di $<$ con $-$
4.	$BC - AC < AB$	3.

□

Vale anche il viceversa del teorema 11.3.1

Teorema 11.3.4. *Consideriamo un triangolo che non sia equiangolo. Allora ad angolo maggiore si oppone lato maggiore.*



Hp: $A\widehat{B}C < A\widehat{C}B$

Th: $AC < AB$

Dimostrazione. Costruzione: Poiché $A\widehat{B}C < A\widehat{C}B$, conduciamo la semiretta di origine C, che incontra AB in D, tale che $D\widehat{C}B \cong A\widehat{B}C$.

1.	Consideriamo BCD	
2.	$D\widehat{C}B \cong A\widehat{B}C$	costruzione
3.	BCD isoscele	2., teorema inverso triangoli isosceli
4.	$CD \cong BD$	3., definizione triangolo isoscele
5.	Consideriamo ADC	
6.	$AC < AD + CD$	primo teorema disuguaglianza triangolare
7.	$AB \cong AD + DB$	somma segmenti adiacenti
8.	$AB \cong AD + CD$	4., 7.,
9.	$AC < AB$	6., 8.

□

Esercizi

1. Dimostrare che in ogni triangolo la somma dei tre lati è sempre maggiore del doppio di un lato.
2. Disegnare un triangolo ABC tale che $AB > AC$ e la mediana AM di BC. Dimostrare che $A\widehat{M}C < A\widehat{M}B$.
3. Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Fissare sul lato AC un punto E. Dimostrare che $AE < BE$.
4. Consideriamo il triangolo ABC isoscele sulla base AB e un punto D sul prolungamento di BC dalla parte di B. Dimostrare che $C\widehat{A}B > B\widehat{D}A$.
5. Disegnare un triangolo ABC e un punto E interno al triangolo. Si ongiunga E con i vertici B e C. Dimostrare che $B\widehat{E}C > B\widehat{A}C$.
6. Dati i triangoli ABC e DEF con $AC > DE$, $\widehat{A} > \widehat{B}$ e $\widehat{F} > \widehat{D}$, dimostrare che $BC > FE$.
7. Nel triangolo ABC scegliere a caso tre punti, D su AB, E su BC e F su AC. Dimostrare che la somma dei lati del triangolo DEF è minore della somma dei lati del triangolo ABC.

8. Il triangolo ABC, isoscele e acutangolo, ha il lato obliquo congruente a quello di un triangolo rettangolo isoscele $A'B'C'$.. Dimostrare che le basi di detti triangoli sono diverse. Si puo eseguire la dimostrazione anche nel caso in cui il primo triangolo sia ottusangolo?

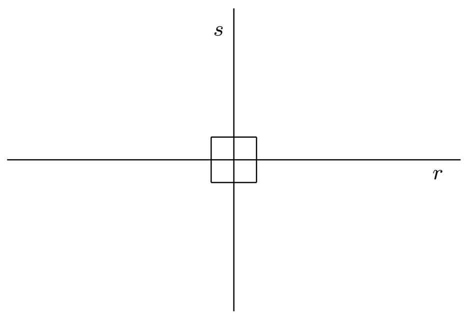
Capitolo 12

Perpendicolarità

12.1 Definizioni e prime applicazioni

In questa sezione definiremo la relazione di perpendicolarità tra rette. Essa è fondamentale per le procedure di costruzione con riga e compasso, quindi per la costruzione di una vasta categoria di figure geometriche.

Definizione 12.1.1. Due rette incidenti r ed s si dicono **perpendicolari** se dividono il piano in quattro angoli congruenti. Notazione: $r \perp s$. Il punto d'intersezione si chiamma **piede**.



Si deduce immediatamente che i quattro angoli congruenti sono retti.

La relazione di perpendicolarità tra rette gode solo della seguente proprietà:

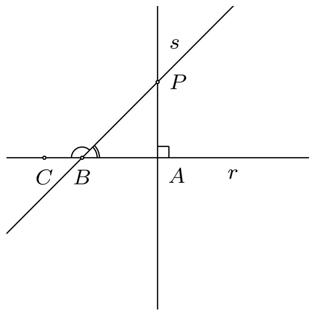
$$r \perp s \iff s \perp r$$

detta **proprietà simmetrica**, essendo r ed s rette del piano.

Estendiamo ora il concetto di perpendicolarità a semirette e segmenti.

Definizione 12.1.2. Due semiretterette si dicono **perpendicolari** se le le loro rette sostegno sono perpendicolari. Allo stesso modo, due segmenti si dicono **perpendicolari** se le le loro rette sostegno sono perpendicolari.

Teorema 12.1.1. *Sia data una retta r e sia P un punto, su di essa o esterno; allora è unica la retta s passante per P e perpendicolare a r.*



Hp: $P \notin r \quad \wedge \quad P \in s \quad \wedge \quad r \perp s$

Th: s unica

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema solo nel caso specificato nelle ipotesi, cioé $P \notin r$. Costruzione: sia A il punto d'incontro della retta s con la retta r. Tracciamo per P una retta t che incontra r in B.

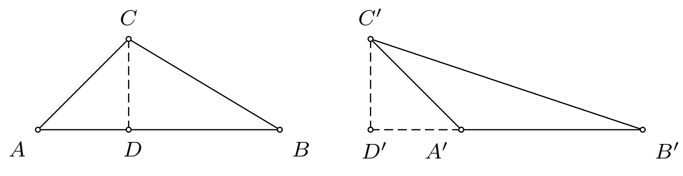
1.	Per assurdo $t \neq s$ con $t \perp r$	
2.	$P\widehat{A}B \cong \pi/2$	Hp
3.	$P\widehat{B}C \cong \pi/2$	1.
4.	$P\widehat{A}B \cong P\widehat{B}C$	2., 3., proprietà transitiva
5.	Consideriamo il triangolo BAP	
6.	$P\widehat{B}C > P\widehat{A}B$	1° teorema dell'angolo esterno
7.	Contraddizione	3., 6.
8.	s unica	

□

Ciascun lato di un triangolo può essere riguardato come base del triangolo stesso. Ha senso, pertanto, la seguente

Definizione 12.1.3. In un triangolo, si definisce **altezza relativa ad un lato (base)**, il segmento perpendicolare alla base condotto ad essa dal vertice opposto, il cui secondo estremo è il piede della perpendicolare stessa.

Ogni triangolo ha tre altezze, ciascuna relativa ad un lato. Solo nel caso dei triangoli ottusangoli le altezze relative ai due lati dell'angolo ottuso si costruiscono esternamente ad esso, utilizzando i prolungamenti dei lati stessi. Inoltre, proveremo che le tre altezze si incontrano in un punto, esterno al triangolo solo per i triangoli ottusangoli, interno per tutti gli altri.



In un triangolo rettangolo, i cateti sono perpendicolari e ciascuno di essi è altezza relativa all'altro. La terza altezza è denominata **altezza relativa all'ipotenusa**.

Per i triangoli rettangoli è possibile enunciare i criteri di congruenza in modo semplificato, poiché essi hanno la caratteristica di avere un angolo retto.

Teorema 12.1.2. ***(Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli)*** *Se due triangoli rettangoli hanno ordinatamente congruenti due lati qualunque, oppure un lato qualunque e un angolo diverso da quello retto, allora essi sono congruenti.*

Dimostrazione. Esplicitarla come esercizio nei seguenti semplici casi: due cateti ordinatamente congruenti, un lato qualunque ed un angolo acuto ordinatamente congruenti. □

12.2 Le simmetrie centrale e assiale

Lo studio delle simmetrie è molto importante in Geometria. In questo paragrafo studieremo le rappresentazioni delle simmetrie centrale e assiale e le definizioni che daremo saranno *operative*, vale a dire stabiliranno una procedura precisa per cui, a partire da una data figura, sarà possibile costruire, con riga e compasso, la figura simmetrica. Proveremo che le simmetrie centrale e assiale sono isometrie, cioé conservano le dimensioni.

Diamo intanto la seguente

Definizione 12.2.1. Sia O un punto del piano; si definisce **circonferenza** di **centro** O l'insieme dei punti del piano P equidistanti da O. Ciascuno dei segmenti OP, al variare di P sulla cironferenza, si chiama **raggio** della circonferenza.

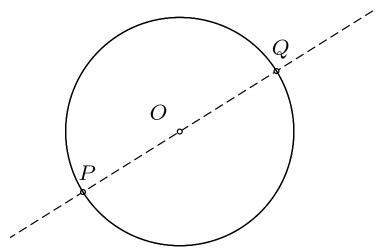
Studieremo in modo approfondito la circonferenza nel secondo anno di corso.

Definizione 12.2.2. Siano dati un punto O, detto *centro di simmetria*, ed un punto qualsiasi P del piano. Si definisce *simmetrico di P rispetto a O* il punto Q ottenuto come segue:

1° si traccia la retta OP

2° si descrive la circonferenza di centro O e raggio OP

3° si individua l'intersezione Q della circonferenza con la retta OP, dalla parte opposta a P rispetto a O.



$\sigma_O(P) = Q$

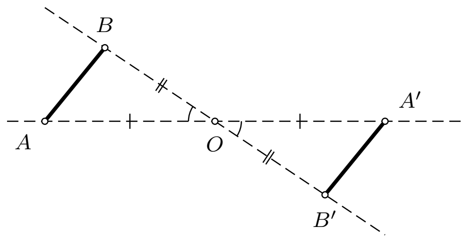
In una simmetria centrale, il centro di simmetria è l'unico punto del piano che ha come simmetrico sé stesso.

Osservazione: Per costruire il simmetrico di un segmento AB si determinano i simmetrici dei due estremi A e B ottenendo, rispettivamente, A' e B', quindi $A'B'$ è il simmetrico del segmento dato. Per un qualunque poligono di n lati si procede in modo analogo determinando il simmetrico di ogni singolo vertice ottenendo così il poligono simmetrico.

Stabiliamo la seguente notazione. In generale, per denotare che la figura geometrica G è simmetrica della figura F rispetto al centro di simmetria O, si scrive $\sigma_O(F) = G$. É evidente che, in base alla definizione operativa, risulta $\sigma_O(G) = F$, cioè la figura simmetrica di G rispetto ad O è la figura F.

É fondamentale la seguente proprietà.

Teorema 12.2.1. *La simmetria centrale è un'isometria, cioé il simmetrico di un segmento è un segmento congruente al primo.*



Hp: $AO \cong OA' \wedge BO \cong OB'$

Th: $AB \cong A'B'$

Dimostrazione. La figura precedente illustra la costruzione del simmetrico di AB rispetto ad O.

1.	Consideriamo i triangoli AOB e $A'OB'$	
2.	$AO \cong OA'$	Hp
3.	$BO \cong OB'$	Hp
4.	$A\widehat{O}B \cong A'\widehat{O}B'$	angoli opposti al vertice
5.	$AOB \cong A'OB'$	2., 3., 4., 1° c. c.
6.	$AB \cong A'B'$	5., si oppongono ad angoli congruenti

□

Nel capitolo sul parallelismo dimostreremo che i due segmenti sono anche paralleli. In generale, *in una simmetria centrale ad ogni retta corrisponde una retta parallela alla prima.*

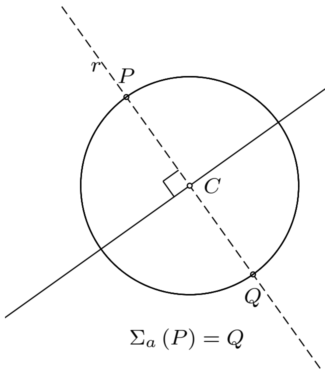
Vediamo ora la definizione operativa di simmetria assiale.

Definizione 12.2.3. Siano dati una retta a, detta *asse di simmetria*, ed un punto qualsiasi P del piano. Si definisce *simmetrico di P rispetto ad a* il punto Q ottenuto come segue:

1° si traccia la retta r perpendicolare ad a e passante per P

2° si individua l'intersezione $a \cap r = \{C\}$

3° si determina il simmetrico Q di P rispetto a C.

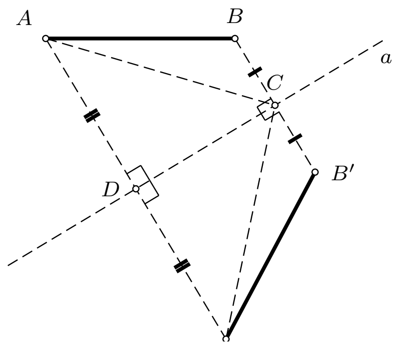


In una simmetria assiale, ogni punto dell'asse di simmetria ha come simmetrico sé stesso.

Le argomentazioni dell'osservazione precedente valgono anche per la simmetria assiale.

Stabiliamo la seguente notazione. In generale, per denotare che la figura geometrica G è simmetrica della figura F rispetto all'asse di simmetria a, si scrive $\Sigma_a(F) = G$. É evidente che, in base alla definizione operativa, risulta $\Sigma_a(G) = F$, cioè la figura simmetrica di G rispetto ad a è la figura F.

Teorema 12.2.2. *La simmetria assiale è un'isometria, cioé il simmetrico di un segmento è un segmento congruente al primo.*



Hp: $AD \cong DA' \wedge BC \cong CB'$

Th: $AB \cong A'B'$

Dimostrazione. Costruiamo il simmetrico $A'B'$ di AB rispetto all'asse a. Siano C e D i punti d'intersezione rispettivamente con le perpendicolari per B e A all'asse. Tracciamo i segmenti AC e $A'C$.

1.	Consideriamo i triangoli ACD e $A'CD$	
2.	CD	in comune
3.	$AD \cong DA'$	Hp
4.	$A\widehat{D}C \cong A'\widehat{D}C \cong \frac{\pi}{2}$	Hp
5.	$ACD \cong A'CD$	2., 3., 4., 1° c. c.
6.	$AC \cong A'C$	5., si oppongono ad angoli congruenti
7.	$A\widehat{C}D \cong A'\widehat{C}D$	5., si oppongono a lati congruenti
8.	Consideriamo i triangoli ACB e $A'CB'$	
9.	$BC \cong CB'$	Hp
10.	$B\widehat{C}D \cong B'\widehat{C}D \cong \frac{\pi}{2}$	Hp
11.	$A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C}B'$	10., 7., differenza di angoli congruenti
12.	$ACB \cong A'CB'$	6., 9., 11., 1° c. c.
13.	$AB \cong A'B'$	12., si oppongono ad angoli congruenti

□

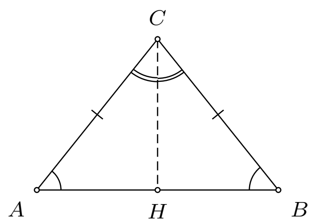
Definizione 12.2.4. Una figura geometrica F è dotata di centro di simmetria O se risulta $\sigma_O(F) = F$, cioè la figura simmetrica rispetto ad O di F è F stessa.

Definizione 12.2.5. Una figura geometrica F è dotata di asse di simmetria a se risulta $\Sigma_a(F) = F$, cioè la figura simmetrica rispetto ad a di F è F stessa.

12.3 Ulteriori proprietà dei triangoli isosceli

Ritorniamo ad occuparci dei triangoli isosceli, enunciando importanti proprietà che giustificano un gran numero di costruzioni geometriche.

Teorema 12.3.1. *In ogni triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base, la mediana della base e la bisettrice dell'angolo al vertice coincidono.*



Hp: $AC \cong BC \land CH \perp AB$

Th: $AH \cong HB \land A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$

Dimostrazione. .

1. Consideriamo i triangoli AHC e BHC

2.	$A\widehat{H}C \cong B\widehat{H}C \cong \pi/2$	Hp
3.	CH in comune	figura
4.	$AC \cong BC$	Hp
5.	$AHC \cong BHC$	2., 3., 4., criterio di congruenza dei triangoli rettangoli
6.	$AH \cong HB$	5., terzi lati
7.	$A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$	5., 6., si oppongono a lati congruenti

□

Hp: $AC \cong BC \wedge AH \cong HB$

Th: $CH \perp AB \wedge A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$

Dimostrazione. .

1.	Consideriamo i triangoli AHC e BHC	
2.	$AH \cong HB$	Hp
3.	CH in comune	figura
4.	$AC \cong BC$	Hp
5.	$AHC \cong BHC$	2., 3., 4., 3° c.c.
6.	$A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$	5., si oppongono a lati congruenti
7.	$A\widehat{H}C \cong B\widehat{H}C$	5., si oppongono a lati congruenti
8.	$A\widehat{H}C + B\widehat{H}C \cong \pi$	angoli adiacenti
9.	$A\widehat{H}C \cong B\widehat{H}C \cong \pi/2$	7., 8.
10.	$CH \perp AB$	9.

□

Hp: $AC \cong BC \wedge A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$

Th: $CH \perp AB \wedge AH \cong HB$

Dimostrazione. .

1.	Consideriamo i triangoli AHC e BHC	
2.	CH in comune	figura
3.	$AC \cong BC$	Hp
4.	$A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$	Hp
5.	$AHC \cong BHC$	2., 3., 4., 1° c.c.
6.	$AH \cong HB$	5., si oppongono ad angoli congruenti
7.	$A\widehat{H}C \cong B\widehat{H}C$	5., si oppongono a lati congruenti
8.	$A\widehat{H}C + B\widehat{H}C \cong \pi$	angoli adiacenti
9.	$A\widehat{H}C \cong B\widehat{H}C \cong \pi/2$	7., 8.
10.	$CH \perp AB$	9.

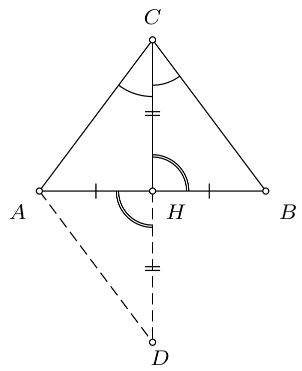
□

Vale anche il viceversa.

Teorema 12.3.2. *Se in un triangolo ABC*

1. *l'altezza relativa ad AB e la mediana di AB coincidono, oppure*
2. *l'altezza relativa ad AB e la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$ coincidono, oppure*
3. *la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$ e la mediana di AB coincidono*

allora il triangolo è isoscele di base AB.



Hp: $AH \cong HB \wedge A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$

Th: ABC triangolo isoscele

Dimostrazione. Le dimostrazioni dei primi due asserti sono semplici esercizi, ragion per cui dimostreremo solo il terzo. Costruzione: con riferimento alla figura precedente, prolunghiamo la bisettrice CH, dalla parte di H, di un segmento $HD \cong CH$, quindi congiungiamo A con D.

1.	Consideriamo i triangoli AHD e BHC	
2.	$AH \cong HB$	Hp
3.	$CH \cong HD$	costruzione
4.	$A\widehat{H}D \cong B\widehat{H}C$	angoli opposti al vertice
5.	$AHD \cong BHC$	2., 3., 4., 1° c.c.
6.	$A\widehat{D}H \cong B\widehat{C}H$	5., si oppongono a lati congruenti
7.	$BC \cong AD$	5., si oppongono ad angoli congruenti
8.	$A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$	Hp
9.	$A\widehat{D}H \cong A\widehat{C}H$	6., 8., proprietà transitiva
10.	ADC triangolo isoscele	9., teorema inverso triangoli isosceli

11.	$AC \cong AD$	10., def. triangolo isoscele
12.	$AC \cong BC$	7., 11., proprietà transitiva
13.	ABC triangolo isocele	12., def. triangololo isoscele

□

Da queste caratterizzazioni dei triangoli isosceli discende immediatamente che gli unici triangoli dotati di asse di simmetria sono proprio i triangoli isosceli. In particolare, i triangoli equilateri sono dotati di tre assi di simmetria.

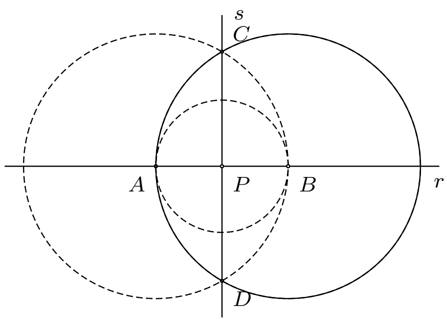
12.4 Costruzioni con riga e compasso

In questo paragrafo esporremo le procedure operative per effettuare alcune costruzioni con **riga e compasso**. Con la riga sarà consentito solo tracciare linee, ma non effettuare misure.

Evisentemente una circonferenza è univocamente determinata dal suo centro e dal suo raggio. Circonferenze con raggi congruenti sono congruenti.

Esercizio 12.4.1. Data la retta r e dato il punto P, costruire la retta s perpendicolare ad r e passante per P.

- 1° caso: $P \in r$
  1. Si punta il compasso in P e con apertura arbitraria si descrive una circonferenza;
  2. si individuano i punti d'intersezione A e B della retta r con la circonferenza;
  3. si punta il compasso in A e con apertura AB si descrive una circonferenza;
  4. si punta il compasso in B e con apertura BA si descrive una circonferenza;
  5. si individuano i punti d'intersezione C e D delle due circonferenze;
  6. si conduce la retta CD: essa è la retta s perpendicolare ad r e passante per P.



- 2° caso: $P \notin r$
  1. Si punta il compasso in P e si descrive una circonferenza che incontra la retta r nei punti didtinti A e B;
     si ripetono i passi 3., 4., 5., 6., del caso precedente.

Nel prossimo capitolo studieremo il parallelismo tra rette. Anticipiamo la seguente

Definizione 12.4.1. Due rette r e s si dicono **parallele** se si verifica una delle seguenti condizioni

$$r = s$$

$$r \cap s = \emptyset$$

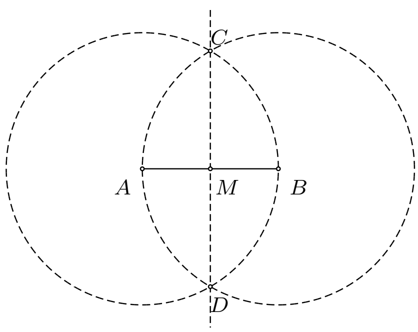
Esercizio 12.4.2. Data la retta r e dato il punto P, costruire la retta s parallela ad r e passante per P.

- 1° caso: $P \in r$. Non si descrive alcuna costruzione in quanto $s = r$.
- 2° caso: $P \notin r$
  1. Si costruisce la retta t perpendicolare ad r utilizzando la costruzione del problema precedente (2° caso);
  2. si costruisce la retta s perpendicolare ad t utilizzando la costruzione del problema precedente (1° caso);
     la retta s così costruita è parallela alla retta r di partenza.

Dimostreremo nel capitolo sul parallelismo la proprietà: *due rette perpendicolari ad una stessa retta sono tra loro parallele*, da cui si deduce che *esiste la retta parallela ad una retta data passante per un determinato punto*.

Esercizio 12.4.3. Dato il segmento non nullo AB, costruire il suo punto medio M.

1. Si punta il compasso in A con apertura AB e si descrive una circonferenza;
2. si punta il compasso in B con apertura BA e si descrive una circonferenza;
3. siano C e D i punti d'intersezione delle due circonferenze;
4. si conduce ls retta CD;
5. si determina il punto d'intersezione M tra il segmento AB e la retta CD: esso è il punto medio del segmento.



Nella costruzione precedente, la retta CD è anche asse del segmento AB. Pertanto è gia risolto il seguente

Esercizio 12.4.4. Dato il segmento non nullo AB, costruire il suo asse.

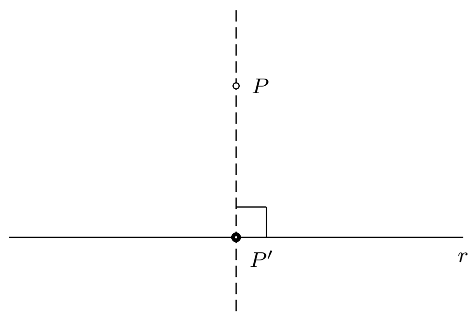
Infine, analizziamo una costruzione che riguarda gli angoli.

Esercizio 12.4.5. Dato l'angolo $a\widehat{V}b$, costruire la sua bisettrice.

1. Si punta il compasso nel vertice V e si descrive una circonferenza di raggio arbitrario;
2. si individuano i punti d'intersezione A e B della circonferenza rispettivamente con i lati dell'angolo a e b;
3. si conduce il segmento AB;
4. si costruisce il punto medio M del segmento AB;
5. si conduce la semiretta VM di origine V: essa è la bisettrice dell'angolo $a\widehat{V}b$.

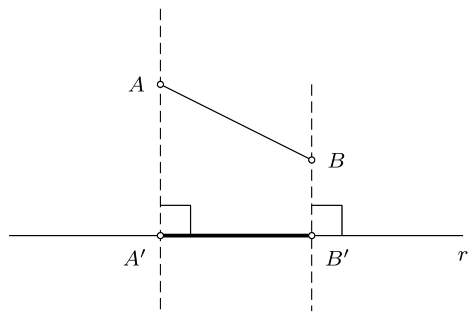
Siamo ora in grado di definire il concetto di proiezione ortogonale.

Definizione 12.4.2. Siano assegnati un punto P ed una retta r. Si definisce **proiezione ortogonale** di P su r il piede della retta perpendicolare ad r condotta da P.

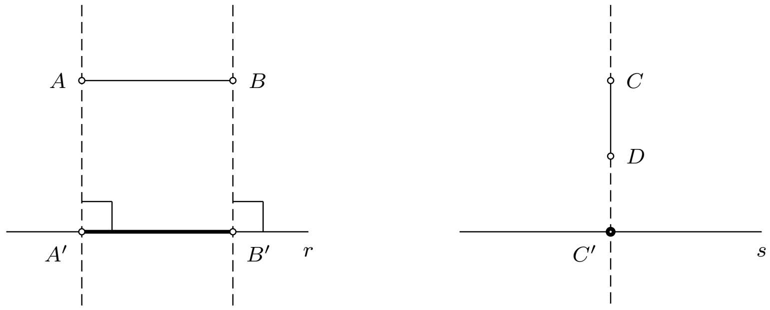


La proiezione ortogonale di un punto è sempre un punto. Se $P \in r$, allora la proiezione ortogonale di P è il punto stesso.

Definizione 12.4.3. Siano assegnati un segmento AB ed una retta r. Si definisce **proiezione ortogonale** di AB su r il segmento contenuto in r i cui estremi sono i piedi delle rette perpendicolari ad r condotte da A e B.



Se il segmento è tale che il suo sostegno non è incidente la retta, allora la sua proiezione ortogonale è un segmento ad esso congruente. Se il segmento è perpendicolare alla retta, allora la sua proiezione ortogonale è un punto della retta. Se il segmento è contenuto nella retta, allora esso e la sua proiezione coincidono.



12.5 Luoghi geometrici

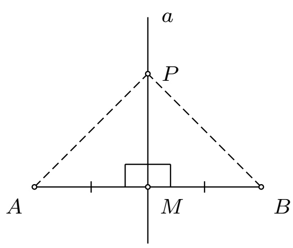
Esistono figure geometriche che si possono descrivere attraverso una proprietà comune a tutti i loro punti.

Definizione 12.5.1. Si definisce **luogo geometrico** l'insieme di tutti e soli i punti del piano che soddisfano una data proprietà.

I luoghi geometrici che caratterizzeremo in questo paragrafo sono l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo.

Teorema 12.5.1. *Siano AB un segmento e a il suo asse. Allora un punto P è sull'asse a se, e solo se, è equidistante dagli estremi A e B del segmento.*

In altre parole: *l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.*



$\Longrightarrow$)

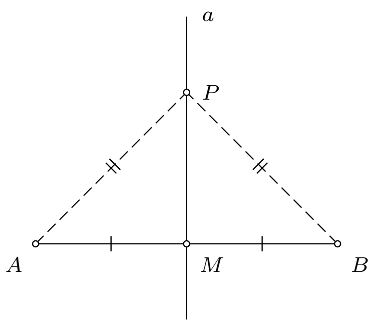
Hp: a asse di $AB \quad \wedge \quad P \in a$

Th: $PA \cong PB$

Dimostrazione. Sia M il punto medio di AB.

1.	Consideriamo il triangolo ABP	
2.	PM mediana di AB	Hp, a asse di AB
3.	$PM \perp AB$	Hp, a asse di AB
4.	PM altezza relativa ad AB	3.
5.	ABP triangolo isoscele di base AB	2., 4., teorema di caratterizzazione triangoli isosceli
6.	$PA \cong PB$	5., def. triangolo isoscele

□



$\Longleftarrow$)

Hp: $P \in a \quad \wedge \quad PA \cong PB$

Th: a asse di AB

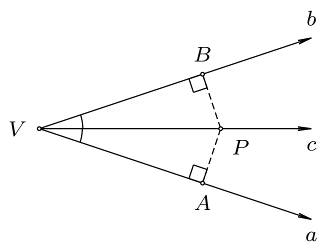
Dimostrazione. Sia M il punto medio di AB.

1.	Consideriamo il triangolo ABP	
2.	$PA \cong PB$	Hp
3.	ABP triangolo isoscele di base AB	2., def. triangolo isoscele
4.	PM mediana di AB	M punto medio di AB
5.	PM altezza relativa ad AB	3., 4., teorema caratterizzazione triangoli isosceli
6.	$PM \perp AB$	Hp, 5.
7.	a asse di AB	4., 6., def. di asse di un segmento

□

Teorema 12.5.2. *Siano $a\widehat{V}b$ un angolo e c la sua bisettrice. Allora un punto P è sulla bisettrice c se, e solo se esso è eqidistante dai lati a e b dell'angolo.*

In altre parole: *la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.*



$\Longrightarrow$)

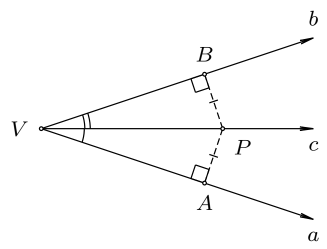
Hp: c bisettrice di $a\widehat{V}b \quad \wedge \quad P \in c$

Th: P equidistante da a e b

Dimostrazione. Costruzione: Da $P \in c$ conduciamo le perpendicoari ai lati a e b dell'angolo rispettivamente in A e in B.

1.	Consideriamo i triangoli AVP e BVP	
2.	$V\widehat{B}P \cong V\widehat{A}P \cong \frac{\pi}{2}$	costruzione
3.	AVP e BVP triangoli rettangoli	2., def. triangolo rettangolo
4.	VP in comune	figura
5.	$A\widehat{V}P \cong B\widehat{V}P$	Hp, c bisettrice di $A\widehat{V}B$
6.	$AVP \cong BVP$	3., 4., 5., criterio di congruenza triangoli rettangoli
7.	$AP \cong BP$	6., si oppongono ad angoli congruenti
8.	P equidistante da a e b	7.

□



$\Longleftarrow$)

Hp: $P \in c$ equidistante da a e b

Th: c bisettrice di $a\widehat{V}b$

Dimostrazione. Costruzione: identica alla prima parte della dimostrazione.

1.	Consideriamo i triangoli AVP e BVP	
2.	$V\widehat{B}P \cong V\widehat{A}P \cong \frac{\pi}{2}$	costruzione
3.	AVP e BVP triangoli rettangoli	2., def. triangolo rettangolo
4.	$AP \cong BP$	Hp
5.	VP in comune	figura
6.	$AVP \cong BVP$	3., 4., 5., criterio di congruenza triangoli rettangoli
7.	$A\widehat{V}P \cong B\widehat{V}P$	6., si oppongono a lati congruenti
8.	c bisettrice di $A\widehat{V}P$	7., def. bisettrice di un angolo

□

Esercizi

1. Dimostrare che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

2. Sia ABC un triangolo qualunque e sia CH l'altezza relativa ad AB. Si prolunghi l'altezza CH, dalla parte di H, di un segmento $HD \cong CH$ e si congiunga D con A e B. Dimostrare che i triangoli ADC e DBC sono isosceli.

3. Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Prolunghiamo il lato AC, dalla parte di C, di un segmento $CD \cong AC$, quindi congiungiamo D con B. Sia, ora, M il punto medio del segmento BD. dimostrare che $CM \perp BD$.

4. Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C. Si consideri l'angolo esterno relativo all'angolo interno $\widehat{C}$ e si dimostri che la sua bisettrice è perpendicolare all'altezza relativa alla base AB.

5. Dimostrare che in triangolo equilatero le bisettrici degli angoli interni coincidono con le mediane e le altezze.

6. Dal punto P della bisettrice dell'angolo $a\widehat{O}b$ condurre due semirette che formano angoli congruenti con la bisettrice, in semipiani opposti rispetto ad essa. La prima semiretta incontra il lato a in A mentre la seconda incontra il lato b in B. Dimostrare che la bisettrice OP è asse del segmento AB.

7. Sui lati a e b dell'angolo convesso $a\widehat{O}b$ si scelgano rispettivamente due punti A e B tali che $OA \cong OB$. Da A si conduca il segmento perpendicolare a b in C, e da B il segmento perpendicolare ad a in D. I segmenti AC e BD s'incontrano in E. Dimostrare che OE è bisettrice dell'angolo $a\widehat{O}b$.

8. Dimostrare che un triangolo è isoscele se, e solo se, è dotato almeno di un asse di simmetria. In particolare, dimostrare che un triangolo è equilatero se, e solo se, è dotato di tre assi di simmetria.

9. Sia ABC un triangolo qualunque e sia CH l'altezza relativa ad AB. Si prolunghi l'altezza CH, dalla parte di H, di un segmento $HD \cong CH$ e si congiunga D con A e B. Dimostrare che il quadrilatero $ADBC$ é dotato di asse di simmetria.

10. Dimostrare che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un cateto e l'ipotenusa.

Capitolo 13

Parallelismo

In questa sezione studieremo uno dei concetti più affascinanti e controversi della geometria: il parallelismo. Esso ci introduce allo studio di figure geometriche di grande interesse, alla deduzione di proprietà generali utili allo studio di figure di ulteriore complessità, in particolare i quadrilateri notevoli.

13.1 Definizioni e Postulato delle parallele

Definizione 13.1.1. Due rette r e s si dicono *parallele* se si verifica una delle seguenti condizioni

$$r = s$$

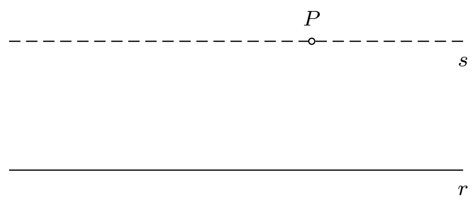
$$r \cap s = \emptyset$$

Se r e s sono parallele, allora si scrive $r \| s$.

Osservazione. Dalla definizione si intuisce che due rette parallele o sono coincidenti, oppure non hanno alcun punto in comune.

Euclide introdusse nei suoi *Elementi* un postulato alquanto misterioso e tutt'altro che ovvio. Esso verrà enunciato nella sua forma originale nel paragrafo sui criteri di parallelismo; è noto come **V postulato di Euclide** in quanto negli *Elementi* appariva come il quinto postulato in ordine cronologico. Nel XVIII secolo il fisico e matematico scozzese John Playfair introdusse un postulato meno enigmatico e più intuitivo rispetto al V postulato di Euclide, che da allora in poi è stato assunto come equivalente al postulato di Euclide, anche se, in effetti, esprime una proprietà più forte, cioè lo implica ma non vale il viceversa. Esso è denominato **postulato delle parallele** o **postulato di Playfair**.

Postulato 16 (Postulato delle parallele)**.** *Siano r una retta e P un punto esterno ad essa; allora è unica la retta s parallela a r e passante per il punto P.*



Il postulato di Playfair esprime unicità: ogni altra retta passante per P sarà incidente la retta r.
Il seguente teorema esprime le proprietà della relazione di parallelismo tra rette.

Teorema 13.1.1 (Proprietà del parallelismo)**.** *La relazione di parallelismo tra rette gode delle seguenti proprietà:*

R)	$r \| r$	*proprietà riflessiva*
S)	$r \| s \Longleftrightarrow s \| r$	*proprietà simmetrica*
T)	$(r \| s \wedge s \| t) \Longrightarrow r \| t$	*proprietà transitiva*

Dimostrazione. R) La proprietà riflessiva discende direttamente dalla definizione di rette parallele, vale a dire: una retta è parallela a sé stessa.

S) Supponiamo che le due rette siano distinte. Allora

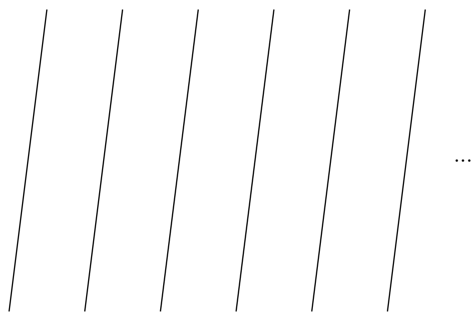
$$r \| s \Longleftrightarrow r \cap s = \emptyset \Longleftrightarrow s \cap r = \emptyset \Longleftrightarrow s \| r$$

in quanto l'intersezione tra insiemi gode della proprietà commutativa.

T) Supponiamo che le tre rette siano distinte. Per assurdo, sia $r \cap t = \{P\}$; allora risulta sia $P \in r$ che $P \in t$. Pertanto per il punto P esterno alla retta s passano due rette distinte r e t parallele ad essa, in contraddizione con il postulato delle parallele. Si conclude che $r \cap t = \emptyset$, e quindi $r \| s$.

□

Definizione 13.1.2. Si definisce **fascio improprio di rette** l' insieme di tutte le rette parallele tra loro.

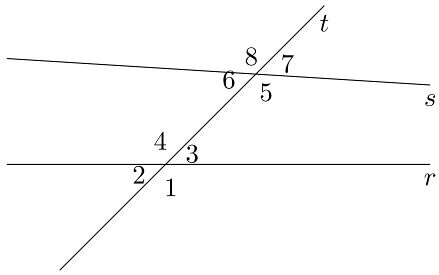


É possibile estendere la nozione di parallelismo a semirette e segmenti, con la dovuta attenzione.

Definizione 13.1.3. Due semirette si dicono parallele se le rette sostegno sono parallele. Due segmenti si dicono paralleli se le rette sostegno sono parallele.

13.2 Criteri di parallelismo

In questo paragrafo vogliamo studiare le figure che vengono a determinarsi quando consideriamo una coppia di rette qualsiasi r ed s che incontrano entrambe una terza retta t. Si parla di *coppie di rette tagliate da una trasversale.* Come è facile immaginare, tali rette individuano una serie di angoli i cui vertici sono i quattro punti d'intersezione della trasversale con ciascuna delle altre due rette. Tali angoli, a coppie, assumono una precisa denominazione. Osserviamo attentamente la seguente figura.

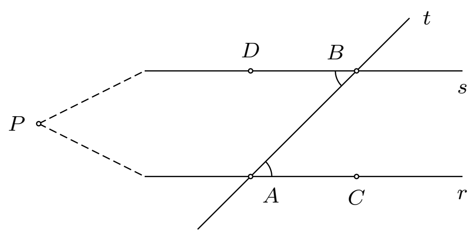


Definizione 13.2.1. Siano date le rette r ed s tagliate dalla trasversale t come in figura. Esse individuano otto angoli che, a coppie, vengono denominati come segue (tra parentesi gli acronimi relativi):

1. le coppie di angoli $(3, 6)$ e $(4, 5)$ si dicono **angoli alterni interni (a.a.i.)**;
2. le coppie di angoli $(1, 8)$ e $(2, 7)$ si dicono **angoli alterni esterni (a.a.e.)**;
3. le coppie di angoli $(3, 5)$ e $(4, 6)$ si dicono **angoli coniugati interni (a.c.i.)**;
4. le coppie di angoli $(1, 7)$ e $(2, 8)$ si dicono **angoli coniugati esterni (a.c.e.)**;
5. le coppie di angoli $(1, 5)$, $(3, 7)$, $(2, 6)$ e $(4, 8)$ si dicono **angoli corrispondenti (a.c.)**.

Il nostro studio ora si concentra sull'analisi del seguente problema. Considerate due rette r ed s tagliate dalla trasversale t ci chiediamo quali sono le condizioni sulle coppie di angoli della definizione 1.4. affinché r ed s siano parallele, e viceversa. La risposta a tale quesito risiede nei seguenti teoremi.

Teorema 13.2.1 (Teorema fondamentale)**.** *Siano date due rette r ed s tagliate dalla trasversale t. Se coppie di angoli alterni interni sono congruenti, allora le rette r ed s sono parallele.*



Hp: $B\widehat{A}C \cong A\widehat{B}D$

Th: $r \| s$

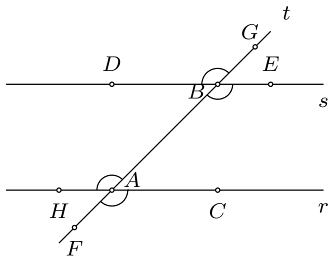
Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per assurdo.

1.	Per assurdo $r \cap s = \{P\}$	
2.	Consideriamo il triangolo ABP	
3.	$B\widehat{A}C \cong A\widehat{B}D$	Hp
4.	$B\widehat{A}C > A\widehat{B}D$	1° teorema angolo esterno
5.	Contraddizione	3., 4.
6.	$r \| s$	5.

□

Dal teorema fondamentale seguono immediatamente i seguenti teoremi.

Teorema 13.2.2. *Siano date due rette r ed s tagliate dalla trasversale t. Se coppie di angoli alterni esterni sono congruenti, allora le rette r ed s sono parallele.*



Hp: $F\widehat{A}C \cong D\widehat{B}G$

Th: $r \| s$

Dimostrazione. .

1.	$F\widehat{A}C \cong D\widehat{B}G$	Hp
2.	$F\widehat{A}C \cong H\widehat{A}B$	angoli opposti al vertice
3.	$D\widehat{B}G \cong E\widehat{B}A$	angoli opposti al vertice
4.	$H\widehat{A}B \cong E\widehat{B}A$	2., 3., transitività congruenza
5.	$r \| s$	4., teorema fondamentale

□

Teorema 13.2.3. *Siano date due rette r ed s tagliate dalla trasversale t. Se coppie di angoli coniugati interni (rispettivamente esterni) sono supplementari, allora le rette r ed s sono parallele.*

Hp: $C\widehat{A}B + A\widehat{B}E \cong \pi$

Th: $r \| s$

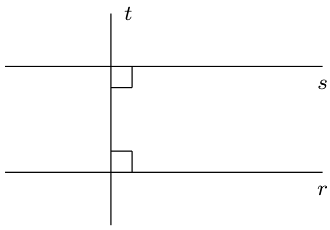
Dimostrazione. Dimostriamo il teorema utilizzando come ipotesi solo una coppia di angoli coniugati interni, riferendoci alla figura precedente.

1.	$C\widehat{A}B + A\widehat{B}E \cong \pi$	Hp
2.	$H\widehat{A}B + C\widehat{A}B \cong \pi$	angoli adiacenti

4.	$H\widehat{A}B \cong E\widehat{B}A$	1., 2., differenza di angoli congruenti
5.	$r \| s$	4., teorema fondamentale

□

Corollario 13.2.1. *Se le rette r ed s sono entrambe perpendicolari ad una retta t, allora esse sono parallele.*



Dimostrazione. Gli angoli coniugati interni formati dalle rette r ed s tagliate dalla trasversale t sono entrambi retti, quindi supplementari. □

Enunciamo, ora, la versione originale del V postulato di Euclide.

Postulato 17 (V postulato di Euclide)**.** *Se due rette r ed s formano con una trasversale t angoli coniugati interni non supplementari, allora esse s'incontrano nel semipiano di origine t che contiene gli angoli coniugati interni la cui somma è minore di un angolo piatto.*

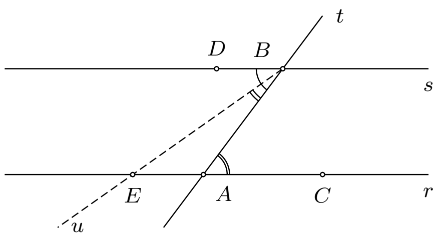
Per circa duemila anni si è pensato che tale proprietà si potesse dedurre dagli altri postulati, ma a cavallo dei secoli XVIII e XIX si è finalmente provato che il postulato delle parallele è indipendente dagli altri assiomi. Si possono, però, costruire geometrie in cui questo postulato non vale, o per quanto attiene l'esistenza della retta parallela s o per la sua unicità. Queste geometrie vengono denominate **geometrie non-euclidee**. Di contro, la geometria che studiate in questo corso, per cui vale il postulato di Playfair, e quindi il V postulato di Euclide, è denominata **geometria euclidea**.

Teorema 13.2.4. *Siano date due rette r ed s tagliate dalla trasversale t. Se coppie di angoli corrispondenti sono congruenti, allora le rette r ed s sono parallele.*

La dimostrazione è un semplice esercizio.

Il fatto notevole è che vale il viceversa delle proposizioni precedentemente dimostrate.

Teorema 13.2.5 (Teorema inverso del fondamentale)**.** *Siano date due rette parallele r ed s tagliate dalla trasversale t; allora coppie di angoli alterni interni sono congruenti.*



Hp: $r \| s$

Th: $B\widehat{A}C \cong A\widehat{B}D$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo di negare la tesi, per cui possiamo pensare $B\widehat{A}C < A\widehat{B}D$. Si conduca per B la semiretta u in modo che $B\widehat{A}C \cong E\widehat{B}A$. In virtù del postulato delle parallele la semiretta u non può essere parallela a r, per cui sia E il punto d'intersezione tra r e u. Considerato il triangolo ABE, risulta che $B\widehat{A}C$ è un suo angolo esterno. La condizione $B\widehat{A}C \cong E\widehat{B}A$ contraddice il 1° teorema dell'angolo esterno. Conclusione: $B\widehat{A}C \cong A\widehat{B}D$. □

Corollario 13.2.2. *Siano date due rette parallele r ed s tagliate dalla trasversale t; allora coppie di angoli alterni esterni sono congruenti.*

Corollario 13.2.3. *Siano date due rette parallele r ed s tagliate dalla trasversale t; allora coppie di angoli coniugati interni ed esterni sono supplementari.*

Corollario 13.2.4. *Siano date due rette parallele r ed s tagliate dalla trasversale t; allora coppie di angoli corrispondenti sono congruenti.*

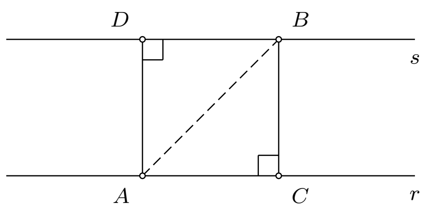
Le dimostrazioni dei corollari sono semplici esercizi.
Possiamo riassumere le proprietà viste nel modo seguente.

Teorema 13.2.6 (Criteri di parallelismo)**.** *Siano date due rette r ed s tagliate dalla trasversale t; allora $r \| s$ se, e solo se, si verifica una delle seguenti condizioni*

1. *coppie di angoli alterni interni sono congruenti;*
2. *coppie di angoli alterni esterni sono congruenti;*
3. *coppie di angoli coniugati interni ed esterni sono supplementari;*
4. *coppie di angoli corrispondenti sono congruenti.*

Teorema 13.2.7. *Siano date due rette parallele r ed s. Allora tutti i segmenti aventi estremi sulle rette e ad esse perpendicolari sono congruenti.*

In altre parole, due rette parallele hanno tra loro distanza costante.



Hp: $r \| s, \quad AD \perp r, s \quad BC \perp r, s$

Th: $AD \cong BC$

Dimostrazione. Con riferimento alla figura precedente

1. Conduciamo il segmento AB

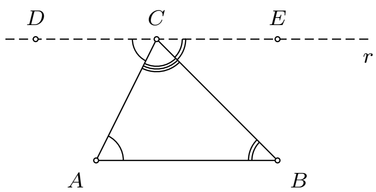
2.	Consideriamo i triangoli ABC e ABD	
3.	$r \parallel s$	Hp
4.	$AD \perp r, s \quad BC \perp r, s$	Hp
5.	ABC e ABD triangoli rettangoli	4.
6.	AB in comune	
7.	$C\widehat{A}B \cong D\widehat{B}A$	a.a.i. formati da $r \parallel s$ e AB
8.	$ABC \cong ABD$	5., 6., 7., 2° c.c.g.
9.	$AD \cong BC$	8., si oppongono ad angoli congruenti

□

13.3 Teorema degli angoli interni di un triangolo

Vedremo in questo paragrafo diverse applicazioni importanti dei criteri di parallelismo. Cominciamo subito con uno dei più noti teoremi sui triangoli.

Teorema 13.3.1. *In ogni triangolo, la somma degli angoli interni è congruente ad un angolo piatto.*



Hp: ABC triangolo qualunque

Th: $A\widehat{B}C + A\widehat{C}B + B\widehat{A}C \cong \pi$

Dimostrazione. Conduciamo per C la retta r parallela al lato AB, che per il V postulato di Euclide è unica.

1.	$AB \parallel r$	costruzione
2.	$B\widehat{A}C \cong D\widehat{C}A$	a.a.i. formati da $AB \parallel r$ e AC
3.	$A\widehat{B}C \cong E\widehat{C}B$	a.a.i. formati da $AB \parallel r$ e BC
4.	$D\widehat{C}A + E\widehat{C}B + A\widehat{C}B \cong \pi$	figura
5.	$A\widehat{B}C + A\widehat{C}B + B\widehat{A}C \cong \pi$	2., 3., 4.

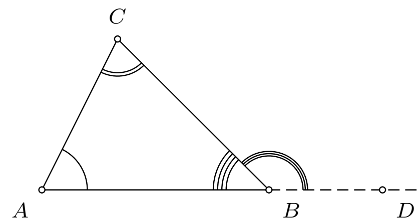
□

Pertanto, la conoscenza di due angoli di un triangolo individua univocamente il terzo angolo.
Conseguenze immediate sono i seguenti corollari.

Corollario 13.3.1 (Secondo criterio di congruenza generalizzato)**.** *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli e un lato qualunque, allora essi sono congruenti.*

Dimostrazione. In base al teorema degli angoli interni si può applicare il secondo criterio di congruenza. □

Corollario 13.3.2 (Secondo teorema dell'angolo esterno)**.** *In ogni triangolo, ciascun angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti.*



$D\widehat{B}C \cong A\widehat{C}B + B\widehat{A}C$

Hp: $D\widehat{B}C$ angolo esterno triangolo ABC

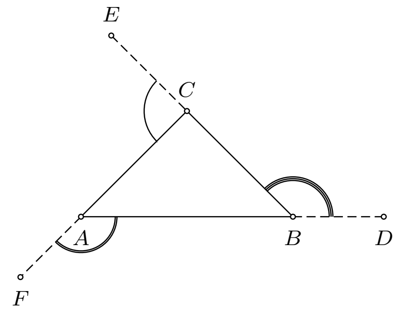
Th: $D\widehat{B}C \cong A\widehat{C}B + B\widehat{A}C$

Dimostrazione. Prolunghiamo il lato AB dalla parte di B.

1.	$D\widehat{B}C + A\widehat{B}C \cong \pi$	angoli adiacenti
2.	$A\widehat{B}C + A\widehat{C}B + B\widehat{A}C \cong \pi$	teorema degli angoli interni
3.	$D\widehat{B}C \cong A\widehat{C}B + B\widehat{A}C$	1., 2., differenza di angoli congruenti

□

Corollario 13.3.3. *In ogni triangolo, la somma degli angoli esterni è congruente a due angoli piatti.*



Hp: $D\widehat{B}C$, $A\widehat{C}E$, $B\widehat{A}F$ angoli esterni triangolo ABC

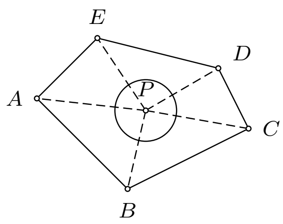
Th: $D\widehat{B}C + A\widehat{C}E + B\widehat{A}F \cong 2\pi$

Dimostrazione. Prolunghiamo i lati AB, dalla parte di B, BC, dalla parte di C, CA, dalla parte di A.

1.	$D\widehat{B}C + A\widehat{B}C \cong \pi$	angoli adiacenti
2.	$A\widehat{C}E + A\widehat{C}B \cong \pi$	angoli adiacenti
3.	$B\widehat{A}F + C\widehat{A}B \cong \pi$	angoli adiacenti
4.	$D\widehat{B}C + A\widehat{B}C + A\widehat{C}E + A\widehat{C}B +$ $+B\widehat{A}F + C\widehat{A}B \cong 3\pi$	1., 2., 3., somma membro a membro
5.	$A\widehat{B}C + A\widehat{C}B + C\widehat{A}B \cong \pi$	teorema degli angoli interni
6.	$D\widehat{B}C + A\widehat{C}E + B\widehat{A}F \cong 2\pi$	4., 5., differenza di angoli congruenti

□

Teorema 13.3.2. *La somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è congruente a $n-2$ angoli piatti.*



Hp: $ABCDE...$ poligono convesso di n lati

Th: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + ... \cong (n-2)\,\pi$

Dimostrazione. La figura precedente rappresenta un pentagono per fissare le idee, noi ragioniamo pensando che esso abbia n lati, con $n > 3$. Congiungiamo il punto interno P con i vertici del poligono, si vengono a determinare n triangoli. La somma degli angoli interni di tutti i triangoli è congruente a $n\pi$; per ottenere la somma degli angoli interni del poligono dobbiamo sottrarre alla somma precedente l'angolo giro di vertice P. Si ottiene, pertanto, $n\pi - 2\pi$, da cui la tesi.

□

Applicando il teorema precedente, si ottiene che la somma degli angoli interni di un qualunque quadrilatero è congruente a $(4-2)\,\pi \cong 2\pi$, mentre per un ottagono convesso $(8-2)\,\pi \cong 6\pi$.

Corollario 13.3.4. *La somma degli angoli esterni di un qualunque poligono convesso è congruente a due angoli piatti.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esercizi

1. Dimostrare che in triangolo rettangolo gli angoli diversi dall'angolo retto sono acuti. Dimostrare, inoltre, che non può esistere un triangolo rettangolo equilatero.
2. Sia ABC un triangolo e sia CH la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$. Da un punto $D \neq H$ del lato AB si conduca la retta r parallela alla bisettrice CH. Si dimostri che la retta r interseca le rette AC e BC in due punti che hanno la stessa distanza dal vertice C.

3. Dato il triangolo ABC, sia P il punto d'intersezione delle bisettrici degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$. Condurre per P la retta parallela al lato AB, che incontra i lati AC e BC nei punti E ed F rispettivamente. Dimostrare che $EF \cong AE + BF$.

4. Due segmenti AB e CD hanno il punto medio M in comune. Dimostrare che le rette AC e BD sono parallele.

5. Dagli estremi di un segmento AB, nello stesso semipiano rispetto alla retta AB, condurre due segmenti AC e BD paralleli. Dimostrare che, se $CD \| AB$, allora $AC \cong BD$.

6. Sia ABC un triangolo equilatero e sia r la retta bisettrice degli angoli esterni di vertice A. Dimostrare che $r \| BC$.

7. In un triangolo isoscele ABC di base AB, siano M e N rispettivamente i punti medi di AC e BC. Dimostrare che $MN \| AB$.

8. Dimostrare che, in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa lo divide in due triangoli che hanno tra loro e col triangolo di partenza gli angoli ordinatamente congruenti.

9. Sulle rette parallele r e s scegliere rispettivamente due segmenti congruenti AB e CD, congiungere A con C e B con D. Provare che i segmenti AC e BD sono sia paralleli che congruenti.

10. Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C è parallela alla base AB.

Capitolo 14

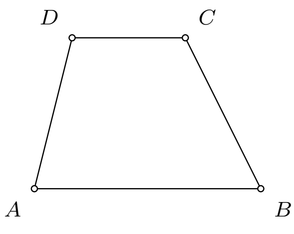
Quadrilateri notevoli

In questa sezione affronteremo lo studio dei trapezi e dei parallelogrammi. Le proprietà di tali figure, note come *quadrilateri notevoli*, si deducono facilmente applicando i criteri di parallelismo studiati nel capitolo precedente.

In particolare studieremo i parallelogrammi speciali, vale a dire rombo, rettangolo e quadrato. Classificheremo i parallelogrammi in base alla cosiddetta *gerarchia dei parallelogrammi*, procedendo dal generale al particolare nello spirito del sistema ipotetico-deduttivo.

14.1 Il trapezio

Definizione 14.1.1. Si definisce trapezio ogni quadrilatero avente due lati opposti paralleli. I due lati paralleli si dicono rispettivamente base minore e base maggiore, gli altri due si dicono lati obliqui.

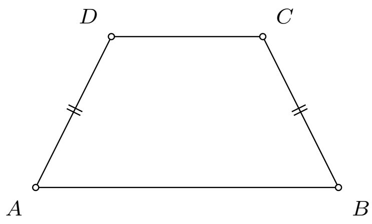


Teorema 14.1.1. *In ogni trapezio, gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono supplementari.*

Esercizio 14.1.1. Dimostrare il teorema precedente.

Come per i triangoli, esistono trapezi speciali, i quali hanno proprietà più interessanti dei trapezi generali.

Definizione 14.1.2. Un trapezio si dice **isoscele** se ha i lati obliqui congruenti.

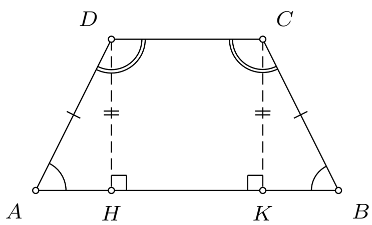


Le proprietà sugli angoli interni che enunceremo ricordano quelle relative ad un triangolo isoscele, con le ovvie differenze determinate dalla diversa forma geometrica.

Teorema 14.1.2. *In ogni trapezio isoscele, gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.*

Hp: $AB \| CD \quad AD \cong BC$

Th: $D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}C \quad A\widehat{D}C \cong B\widehat{C}D$



Dimostrazione. Costruzione: si conduca da D il segmento $DH \perp AB$ e da C il segmento $CK \perp AB$.

1.	Consideriamo AHD e CKB	
2.	$AD \cong BC$	Hp
3.	$DH \cong CK$	costruzione, distanza tra rette parallele costante
4.	$A\widehat{H}D \cong B\widehat{K}C \cong \frac{\pi}{2}$	costruzione
5.	$AHD \cong CKB$	2., 3., 4., c.c. triangoli rettangoli
6.	$D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}C$	5., si oppongono a lati congruenti
7.	$D\widehat{A}B + A\widehat{D}C \cong \pi$	Hp, adiacenti ad AD
8.	$A\widehat{B}C + B\widehat{C}D \cong \pi$	Hp, adiacenti a BC
9.	$A\widehat{D}C \cong B\widehat{C}D$	6., 7., 8., supplementari di angoli congruenti

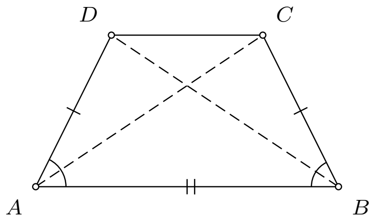
□

Dal precedente teorema si deduce il seguente

Corollario 14.1.1. *In ogni trapezio isoscele, le diagonali sono congruenti.*

Hp: $AB \| CD \quad AD \cong BC$

Th: $AC \cong BD$



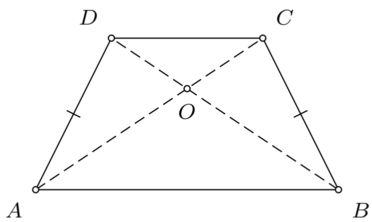
Dimostrazione. Tracciamo le diagonali AC e BD.

1.	Consideriamo ABD e ABC	
2.	AB in comune	figura
3.	$AD \cong BC$	Hp
4.	$D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}C$	Hp, angoli alla base maggiore
5.	$ABD \cong ABC$	2., 3., 4., 1° c.c.
6.	$AC \cong BD$	5., si oppongono ad angoli congruenti

□

Le diagonali incontrandosi, supponiamo nel punto O, dividono il trapezio in quattro triangoli, a due a due opposti rispetto ad O, che soddisfano le seguenti proprietà.

Teorema 14.1.3. *Le diagonali di un trapezio isoscele, incontrandosi nel punto O, lo dividono in quattro triangoli, dei quali due triangoli sono isosceli e aventi gli angoli ordinatamente congruenti, mentre gli altri due triangoli sono congruenti.*



Più precisamente, osservando la figura, i triangoli AOB e COD sono isosceli e hanno gli angoli ordinatamente congruenti, mentre i triangoli AOD e BOC sono congruenti.

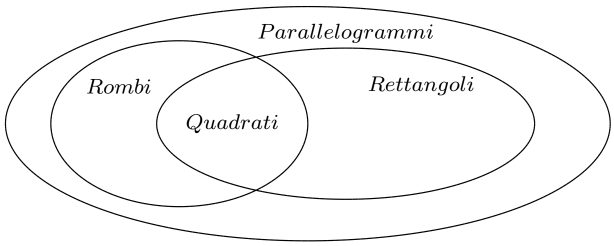
Esercizio 14.1.2. Dimostrare il teorema 14.1.3.

Con riferimento all'ultima figura, s'intuisce che un trapezio isoscele non è dotato di centro di simmetria, perché, in caso contrario, il punto O sarebbe punto medio di entrambe le diagonali. Però ci chiediamo se esso non sia dotato di asse di simmetria.

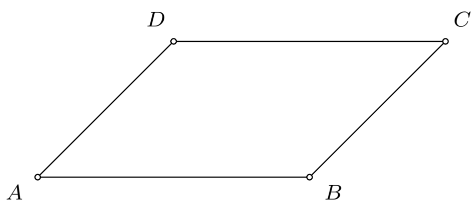
Teorema 14.1.4. *In ogni trapezio isoscele, l'asse comune delle due basi è asse di simmetria del trapezio. Tale asse passa per il punto d'intersezione delle diagonali.*

14.2 Il parallelogramma

Lo studio dei parallelogrammi è importante perché costituisce una solida premessa allo studio dei rombi, dei rettangoli e dei quadrati, figure geometriche dotate di forti proprietà che trovano applicazione in numerosi problemi di grande interesse. I rombi, i rettangoli e i quadrati sono dei particolari parallelogrammi, come sintetizzato dal seguente diagramma, che riproduce la gerarchia dei parallelogrammi.

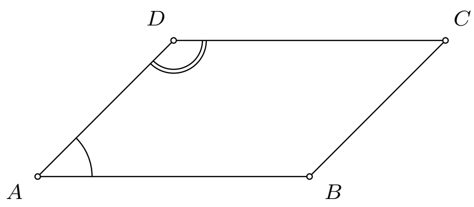


Definizione 14.2.1. Si definisce parallelogramma un quadrilatero avente i lati opposti a due a due paralleli.



Le proprietà dei parallelogrammi si deducono facilmente utilizzando i criteri di parallelismo.

Teorema 14.2.1. *In ogni parallelogramma, gli angoli adiacenti ad un lato sono supplementari.*



Hp: $AB \| CD \quad BC \| AD$

Th: $\widehat{A} + \widehat{D} \cong \pi$

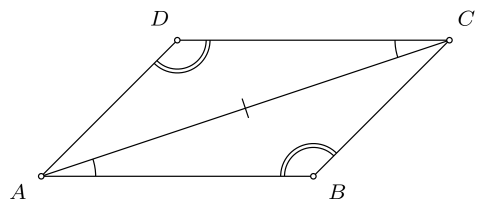
Dimostrazione. Sono coppie di angoli coniugati interni. □

Esercizio 14.2.1. Sia $ABCD$ un parallelogramma; si conducano le bisettrici degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, adiacenti al lato AB, che s'incontrano nel punto E. Dimostrare che il triangolo ABE è rettangolo.

Teorema 14.2.2. *In ogni parallelogramma, gli angoli opposti sono congruenti.*

Esercizio 14.2.2. Dimostrare il teorema precedente.

Teorema 14.2.3. *In ogni parallelogramma, ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti.*



Hp: $AB \| CD \quad BC \| AD$

Th: $ABC \cong ACD$

Dimostrazione. .

1.	Consideriamo ABC e ACD	
2.	AC in comune	figura
3.	$A\widehat{B}C \cong A\widehat{D}C$	angoli opposti parallelogramma
4.	$B\widehat{A}C \cong A\widehat{C}D$	a.a.i. formati da $AB \| CD$ e AC
5.	$ABC \cong ACD$	2., 3., 4., 2° c.c.g.

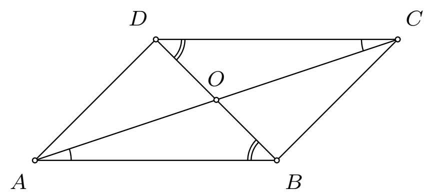
□

Teorema 14.2.4. *I lati opposti di un parallelogramma sono congruenti.*

Esercizio 14.2.3. Dimostrare il corollario.

Il teorema che segue è di fondamentale importanza nella deduzione di una proprietà notevole dei parallelogrammi.

Teorema 14.2.5 (Teorema delle diagonali)**.** *In ogni parallelogramma, le diagonali hanno lo stesso punto medio.*



Hp: $AB \| CD \quad BC \| AD$

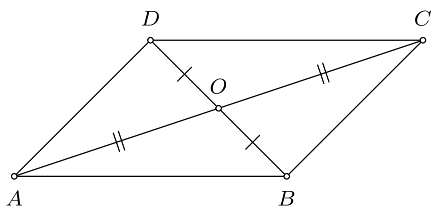
Th: $AO \cong OC \quad \wedge \quad BO \cong OD$

Dimostrazione. .

1.	Consideriamo ABO e CDO	
2.	$AB \cong CD$	lati opposti parallelogramma
3.	$A\widehat{B}O \cong C\widehat{D}O$	a.a.i. formati da $AB \| CD$ e BD
4.	$B\widehat{A}O \cong D\widehat{C}O$	a.a.i. formati da $AB \| CD$ e AC
5.	$ABC \cong ACD$	2., 3., 4., 2° c.c.
6.	$AO \cong OC \quad \wedge \quad BO \cong OD$	5., si oppongono ad angoli congruenti

□

Corollario 14.2.1. *Ogni parallelogramma è dotato di centro di simmetria, esso è il punto d'incontro delle diagonali.*



Hp: $AB \| CD \quad BC \| AD \quad AC \cap BD = \{O\}$

Th: O centro di simmetria $ABCD$

Dimostrazione. Nella dimostrazione che segue si farà riferimento alla figura relativa al Teorema delle diagonali.

1.	Consideriamo $ABCD$	
2.	$AC \cap BD = \{O\}$	Hp
3.	$O \in AC$	2.
4.	$AO \cong OC$	Teorema delle diagonali
5.	$\sigma_O(A) = C$	def. operativa simmetria centrale
6.	$O \in BD$	2.
7.	$BO \cong OD$	Teorema delle diagonali
8.	$\sigma_O(B) = D$	def. operativa simmetria centrale
9.	$\sigma_O(ABCD) = ABCD$	4., 7., i parallelogrammi hanno gli stessi vertici
10.	O centro di simmetria $ABCD$	9.

□

Ci chiediamo, ora, quali sono le condizioni affinché un quadrilatero sia un parallelogramma. Vedremo che le condizioni necessarie enunciate in precedenza sono anche condizioni sufficienti.

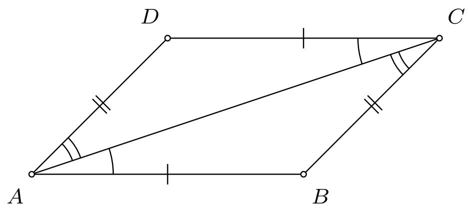
Teorema 14.2.6. *Un quadrilatero avente gli angoli adiacenti ad uno stesso lato supplementari è un parallelogramma.*

Esercizio 14.2.4. Dimostrare il teorema precedente.

Teorema 14.2.7. *Un quadrilatero avente coppie di angoli opposti congruenti è un parallelogramma.*

Esercizio 14.2.5. Dimostrare il teorema precedente.

Teorema 14.2.8. *Un quadrilatero avente coppie di lati opposti congruenti è un parallelogramma.*



Hp: $AB \cong CD \quad AD \cong BC$

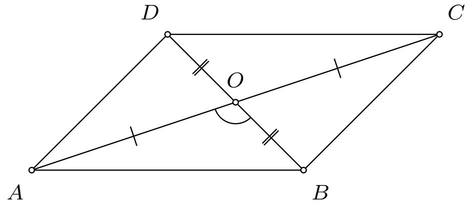
Th: $ABCD$ parallelogramma

Dimostrazione. Conduciamo la diagonale AC.

1.	Consideriamo ABC e ACD	
2.	$AB \cong CD$	Hp
3.	AC in comune	figura
4.	$AD \cong BC$	Hp
5.	$ABC \cong ACD$	2., 3., 4., 3° c.c.
6.	$A\widehat{C}B \cong A\widehat{D}C$	5., si oppongono a lati congruenti
7.	$AD \parallel BC$	6., criterio di parallelismo
8.	$C\widehat{A}B \cong A\widehat{C}D$	5., si oppongono a lati congruenti
9.	$AB \parallel CD$	8., criterio di parallelismo
10.	$ABCD$ parallelogramma	7., 9., def. parallelogramma

□

Teorema 14.2.9. *Sia $ABCD$ un quadrilatero con le diagonali aventi lo stesso punto medio. Allora esso è un parallelogramma.*



Hp: $AO \cong OC \quad \wedge \quad BO \cong OD$

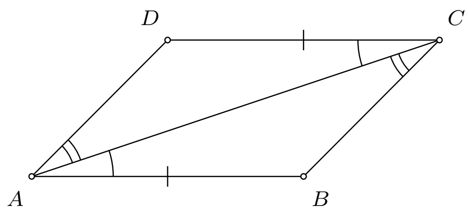
Th: $ABCD$ parallelogramma

Dimostrazione. Tracciamo le diagonali AC e BD che si incontrano in O.

1.	Consideriamo ABO e OCD	
2.	$AO \cong CO$	Hp
3.	$DO \cong BO$	Hp
4.	$A\widehat{O}B \cong C\widehat{O}D$	angoli opposti al vertice
5.	$ABO \cong OCD$	2., 3., 4., 1° c.c.
6.	$O\widehat{D}C \cong O\widehat{B}A$	5., si oppongono a lati congruenti
7.	$AB \parallel CD$	6., criterio di parallelismo
8.	$AB \cong CD$	5., si oppongono ad angoli congruenti
9.	$ABCD$ parallelogramma	6., 7., due lati opposti paralleli e congruenti

□

Teorema 14.2.10. *Un quadrilatero avente due lati opposti sia paralleli che congruenti è un parallelogramma.*



Hp: $AB \parallel CD \quad AB \cong CD$

Th: $ABCD$ parallelogramma

Dimostrazione. Conduciamo la diagonale AC.

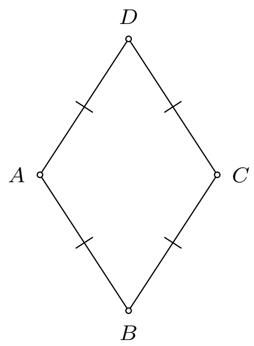
1.	Consideriamo ABC e ACD	
2.	$AB \cong CD$	Hp
3.	AC in comune	figura
4.	$C\widehat{A}B \cong A\widehat{C}D$	ang. alt. int. formati da $AB \parallel CD$ e AC
5.	$ABC \cong ACD$	2., 3., 4., 1° c.c.
6.	$A\widehat{C}B \cong A\widehat{D}C$	5., si oppongono a lati congruenti
7.	$AD \parallel BC$	6., criterio di parallelismo
8.	$ABCD$ parallelogramma	Hp, 7., def. parallelogramma

□

14.3 Il rombo

Definizione 14.3.1. Si definisce rombo ogni quadrilatero equilatero.

Pertanto, il rombo è un quadrilatero con tutti i lati congruenti.



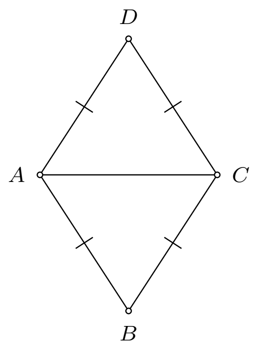
Si deduce immediatamente il seguente

Corollario 14.3.1. *Il rombo è un parallelogramma.*

Esercizio 14.3.1. Dimostrare il corollario precedente.

Il rombo ha, pertanto, tutte le proprietà dei parallelogrammi.

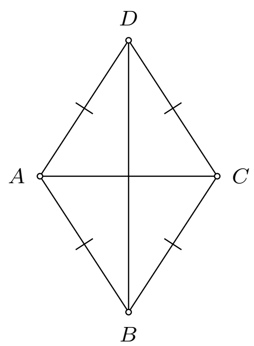
Corollario 14.3.2. *In ogni rombo, ciascuna diagonale lo divide in due triangoli isosceli congruenti.*



Esercizio 14.3.2. Dimostrare il corollario precedente.

Segue la seguente importante proprietà.

Teorema 14.3.1. *Le diagonali di un rombo sono perpendicolari e bisettrici degli angoli opposti.*



Hp: $AB \cong BC \cong CD \cong DA$

Th: $AC \perp BD$, AC bisettrice $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$, BD bisettrice $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$

Dimostrazione. Tracciamo le diagonali AC e BD che si incontrano in O.

1.	Consideriamo ACD	
2.	$AD \cong CD$	Hp
3.	ACD triangolo isoscele	2.
4.	$AO \cong CO$	Teorema delle diagonali
5.	DO mediana AC	4.
6.	DO altezza relativa AC	proprietà triangoli isosceli
7.	$AC \perp BD$	6.
8.	DO bisettrice $\widehat{D}$	proprietà triangoli isosceli

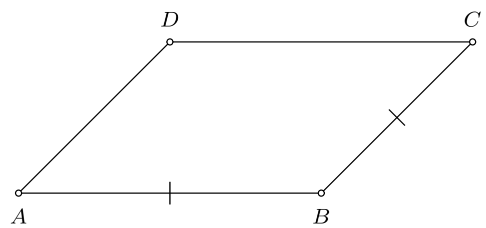
Il completamento della dimostrazione è un semplice esercizio. □

Analizziamo la dimostrazione precedente. I triangoli isosceli congruenti ACD e ABC hanno la base AC in comune; tenuto conto che le rispettive altezze AO e BO sono contenute nella retta BD, i due triangoli hanno lo stesso asse di simmetria. Un ragionamento analogo può essere ripetuto per i triangoli isosceli congruenti ABD e BCD. Pertanto, segue il seguente

Corollario 14.3.3. *Le diagonali di un rombo sono suoi assi di simmetria.*

Vediamo quali sono le condizioni sufficienti affinché un quadrilatero sia un rombo.

Teorema 14.3.2. *Un parallelogramma con due lati consecutivi congruenti è un rombo.*



Hp: $ABCD$ parallelogramma, $AB \cong BC$

Th: $ABCD$ rombo

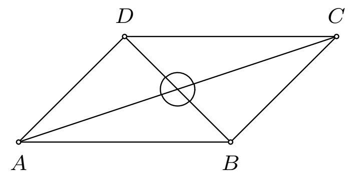
Dimostrazione. .

1.	$AB \cong CD \quad \wedge \quad BC \cong AD$	Hp, lati opposti parallelogramma
2.	$AB \cong BC$	Hp
3.	$AB \cong BC \cong CD \cong DA$	1., 2., proprietà transitiva
4.	$ABCD$ rombo	3., definizione rombo

□

Esercizio 14.3.3. Dimostrare che un quadrilatero con le diagonali perpendicolari non è necessariamente un rombo.

Teorema 14.3.3. *Un parallelogramma con le diagonali perpendicolari è un rombo.*



Hp: $ABCD$ parallelogramma, $AC \perp BD$

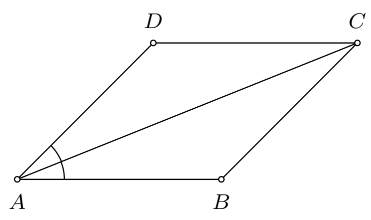
Th: $ABCD$ rombo

Dimostrazione. Tracciamo le diagonali AC e BD che si incontrano in O.

1.	Consideriamo AOB e AOD	
2.	$A\widehat{O}B \cong A\widehat{O}D \cong \frac{\pi}{2}$	Hp
3.	AO in comune	figura
4.	$BO \cong DO$	Hp, Teorema delle diagonali
5.	$AOB \cong AOD$	2., 3., 4., 1° c.c.
6.	$AB \cong AD$	5., si oppongono ad angoli congruenti
7.	$ABCD$ rombo	5., Hp, lati consecutivi congruenti

□

Teorema 14.3.4. *Un parallelogramma avente una diagonale bisettrice di un angolo è un rombo.*



Hp: $ABCD$ parallelogramma, $D\widehat{A}C \cong C\widehat{A}B$

Th: $ABCD$ rombo

Dimostrazione. Tracciamo la diagonale AC.

1.	Consideriamo ACD	
2.	$D\widehat{A}C \cong C\widehat{A}B$	Hp
3.	$D\widehat{A}B \cong D\widehat{C}B$	Hp, angoli opposti parallelogramma
4.	$B\widehat{A}C \cong D\widehat{C}A$	Hp, a.a.i. formati da $AB \| CD$ e AC

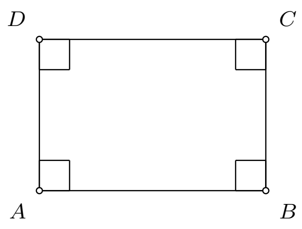
5.	$D\widehat{A}C \cong D\widehat{C}A$	2.,4., proprietà transitiva
6.	ACD isoscele	5., teorema inverso triangoli isosceli
7.	$AD \cong DC$	6., definizione triangolo isoscele
8.	$ABCD$ rombo	7., Hp, lati consecutivi congruenti

□

14.4 Il rettangolo

Definizione 14.4.1. Si definisce rettangolo ogni quadrilatero equiangolo.

Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente ad un angolo piatto, gli angoli di un rettangolo sono tutti retti.



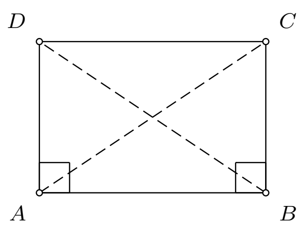
Si deduce immediatamente il seguente

Corollario 14.4.1. *Il rettangolo è un parallelogramma.*

Esercizio 14.4.1. Dimostrare il corollario precedente.

Il rettangolo ha, pertanto, tutte le proprietà dei parallelogrammi.

Teorema 14.4.1. *Le diagonali di un rettangolo sono congruenti.*



Hp: $ABCD$ rettangolo

Th: $AC \cong BD$

Dimostrazione. Tracciamo le diagonali AC e BD.

1.	Consideriamo DAB e ABC	
2.	$D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}C$	Hp, definizione rettangolo
3.	$AD \cong BC$	lati opposti rettangolo
4.	AB in comune	figura
5.	$DAB \cong ABC$	2., 3., 4., 1° c.c.
6.	$AC \cong BD$	5., si oppongono ad angoli congruenti

□

Consideriamo un rettangolo $ABCD$, le sue diagonali AC e BD s'incontrano nel punto O, centro di simmetria. L'asse del lato AB coincide ovviamente con l'asse del lato CD. Poiché un rettangolo è un parallelogramma, le diagonali si tagliano scambievolmente a metà, pertanto, per il teorema precedente, si ha che $AO \cong BO$. Si deduce che i due triangoli isosceli congruenti ABO e DOC hanno lo stesso asse di simmetria, che è l'asse di simmetria comune ai lati opposti del rettangolo AB e CD. Ripetendo argomentazione analoga per i lati opposti AD e BC, e i triangoli isosceli congruenti DAO e COB, si deducono le seguenti proprietà.

Teorema 14.4.2. *Siano $ABCD$ un rettangolo, AC e BD le diagonali che s'incontrano nel punto O; siano, inoltre, M, N, P e Q rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD e DA; allora*

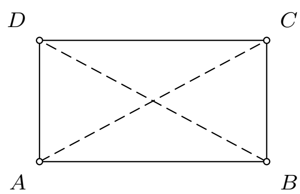
1. *i triangoli ABO e DOC sono triangoli isosceli congruenti;*
2. *i triangoli DAO e COB sono triangoli isosceli congruenti;*
3. *$MP \cap NQ = \{O\}$;*
4. *le rette MP e NQ sono assi di simmetria del rettangolo.*

Un quadrilatero avente le diagonali congruenti non è necessariamente un rettangolo. L'alunno diligente non mancherà di verificarlo.

Teorema 14.4.3. *Se un parallelogramma ha almeno un angolo retto, allora è un rettangolo.*

Dimostrazione. Semplice esercizio. □

Teorema 14.4.4. *Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo.*



Hp: $ABCD$ parallelogramma, $AC \cong BD$

Th: $ABCD$ rettangolo

Dimostrazione. Tracciamo le diagonali AC e BD.

1.	Consideriamo DAB e ABC	
2.	$AD \cong BC$	lati opposti parallelogramma
3.	AB in comune	figura
4.	$AC \cong BD$	Hp
5.	$DAB \cong ABC$	2., 3., 4., 3° c.c.
6.	$D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}C$	5. Si oppongono a lati congruenti
7.	$D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$	Hp, a.c.i. formati da $AD \parallel BC$ e AB
8.	$D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}C \cong \frac{\pi}{2}$	6., 7.
9.	$ABCD$ rettangolo	8., parallelogramma con almeno un angolo retto

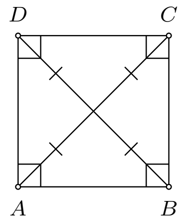
□

Teorema 14.4.5. *In un triangolo rettangolo, la mediana dell'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.*

14.5 Il quadrato

Definizione 14.5.1. Si definisce quadrato ogni quadrilatero sia equilatero che equiangolo.

Il quadrato è, pertanto, l'unico poligono regolare di quattro lati. Le sue proprietà sono il compendio di tutte le proprietà dei parallelogrammi studiati finora, con l'aggiunta di caratteristiche ancora più esclusive.



Teorema 14.5.1. *Il quadrato è sia parallelogramma, sia rombo, sia rettangolo.*

Esercizio 14.5.1. Dimostrare il corollario precedente.

Facendo tesoro di quanto studiato nei precedenti tre paragrafi, i teoremi che enunceremo sono immediata conseguenza di proprietà già dimostrate. Pertanto, lo studente diligente non mancherà di esplicitarne completamente le dimostrazioni, lasciate per esercizio.

Corollario 14.5.1. *Siano $ABCD$ un quadrato, AC e BD le diagonali che s'incontrano nel punto O; siano, inoltre, M, N, P e Q rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD e DA; allora*

1. *le diagonali dividono il quadrato in quattro triangoli rettangoli isosceli congruenti;*
2. *il quadrato ha quattro assi di simmetria; essi sono le diagonali e le rette MP e NQ.*

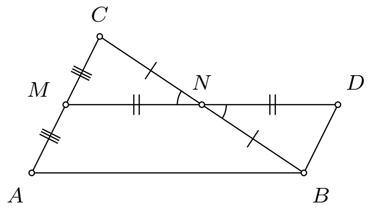
Corollario 14.5.2. *Un parallelogramma è un quadrato se ha*

1. *le diagonali congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo;*
2. *le diagonali perpendicolari e congruenti.*

14.6 I teoremi dei punti medi

In questo paragrafo dimostreremo importanti proprietà che riguardano i triangoli e i quadrilateri. Esse si deducono utilizzando le proprietà dei parallelogrammi.

Teorema 14.6.1 (Primo teorema dei punti medi per i triangoli)**.** *In ogni triangolo, la retta passante per i punti medi di due lati è parallela al terzo lato. Inoltre, il segmento staccato su di essa da tali punti medi è congruente alla metà del terzo lato.*



Hp: ABC triangolo $\wedge AM \cong CM \wedge CN \cong BN$

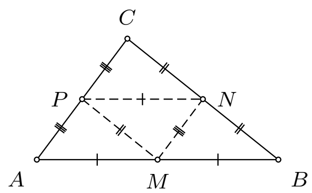
Th: $MN \parallel AB \wedge MN \cong \frac{1}{2}AB$

Dimostrazione. Costruzione: condotta la retta MN, si individua su di essa un punto D tale che $MN \cong ND$; si congiunge, quindi, D con B.

1.	Consideriamo i triangoli MNC e BND	
2.	$CN \cong BN$	Hp
3.	$MN \cong ND$	costruzione
4.	$M\widehat{N}C \cong B\widehat{N}D$	angoli opposti al vertice
5.	$MNC \cong BND$	2., 3., 4., 1° c.c.
6.	$C\widehat{M}N \cong B\widehat{D}N$	5., si oppongono a lati congruenti
7.	$AM \parallel BD$	6., criteri parallelismo
8.	$CM \cong BD$	5.,si oppongono ad angoli congruenti
9.	$AM \cong CM$	Hp
10.	$AM \cong BD$	8., 9.,proprietà transitiva
11.	$ABDM$ parallelogramma	7.,10., lati opposti paralleli e congruenti
12.	$MN \parallel AB$	11., definizione di parallelogramma
13.	$MD \cong AB$	11., lati opposti parallelogramma
14.	$MN \cong \frac{1}{2}MD$	costruzione
15.	$MN \cong \frac{1}{2}AB$	13.,14., proprietà transitiva

□

Corollario 14.6.1 (Secondo teorema dei punti medi per i triangoli)**.** *Siano ABC un triangolo e M, N, P i punti medi rispettivamente di AB, BC, AC. allora i quattro triangoli MNP, AMP, MBN, NCP sono tutti congruenti tra loro.*



Hp: ABC triangolo $\wedge AM \cong BM \wedge BN \cong CN \wedge CP \cong PA$

Th: $MNP \cong AMP \cong MBN \cong NCP$

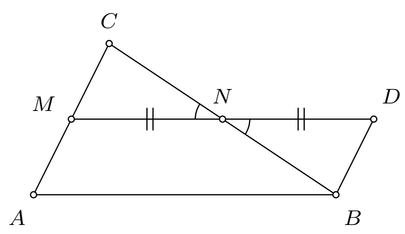
Dimostrazione. Dal teorema dei punti medi per i triangoli segue che i quattro triangoli hanno i lati ordinatamente congruenti; pertanto, per il 3° c.c., essi sono congruenti. □

I lati dei quattro triangoli sono ordinatamente congruenti alla metà dei lati del triangolo ABC; inoltre i cinque triangoli hanno gli angoli ordinatamente congruenti. Ha senso, pertanto, dare la seguente

Definizione 14.6.1. Il triangolo ABC si dice **congruente al doppio** del triangolo DEF se i lati di ABC sono ordinatamente congruenti al doppio dei lati di DEF, e gli angoli di ABC sono ordinatamente congruenti agli angoli di DEF. Notazione: $ABC \cong 2DEF$.

Vale anche il viceversa del primo teorema dei punti medi.

Teorema 14.6.2. *In ogni triangolo ABC, se la retta parallela al lato AB che incontra i lati AC in M e BC in N stacca il segmento $MN \cong \frac{1}{2}AB$, allora M è punto medio di AC e N è punto medio di BC.*



Hp: $MN \parallel AB \wedge MN \cong \frac{1}{2}AB$

Th: $AM \cong MC \wedge BN \cong NC$

Dimostrazione. Costruzione: si individui sulla retta MN il punto D tale che $MN \cong ND$; quindi si congiunga D con B.

1.	Consideriamo $ABDM$	
2.	$MN \cong ND$	costruzione
3.	$MN \cong \frac{1}{2}AB$	Hp
4.	$AB \cong MD$	2., 3.
5.	$MN \parallel AB$	Hp
6.	$ABDM$ parallelogramma	4., 5., lati opposti paralleli e congruenti
7.	$AM \parallel BD \wedge AM \cong BD$	6., lati opposti parallelogramma
8.	Consideriamo MNC e BDN	
9.	$M\widehat{N}C \cong D\widehat{N}B$	angoli opposti al vertice
10.	$C\widehat{M}N \cong N\widehat{D}B$	a.a.i. formati da $AM \parallel BD$ e MD
11.	$MNC \cong BDN$	2.,9.,10., 2° c.c.
12.	$BN \cong NC$	11., si oppongono ad angoli congruenti
13.	$MC \cong BD$	11., si oppongono ad angoli congruenti
14.	$AM \cong MC$	7.,13., proprietà transitiva

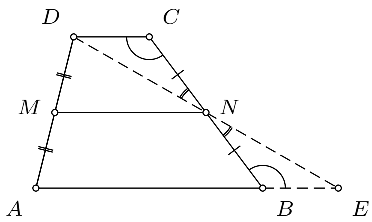
□

In modo analogo si dimostra la seguente proprietà:

Teorema 14.6.3. *In un triangolo , se la parallela ad un lato è condotta per il punto medio di un secondo lato, allora essa incontra il terzo lato nel suo punto medio.*

Esercizio 14.6.1. Dimostrare il teorema precedente.

Teorema 14.6.4. *In ogni trapezio, la retta passante per i punti medi dei lati obliqui è parallela alle basi.*



Hp: $ABCD$ trapezio $\wedge AM \cong MB \wedge BN \cong NC$

Th: $MN \| AB \quad \wedge \quad MN \| CD$

Dimostrazione. Costruzione: conduciamo la semiretta DN che incontra la retta AB in E.

1.	Consideriamo i triangoli CDN e BEN	
2.	$BN \cong NC$	Hp
3.	$C\widehat{N}D \cong B\widehat{N}E$	angoli opposti al vertice
4.	$AB \| CD$	Hp, basi del trapezio
5.	$D\widehat{C}N \cong N\widehat{B}E$	angoli alterni interni formati da $AB \| CD$ e BC
6.	$CDN \cong BEN$	2., 3., 5., 2° c.c.
7.	$DN \cong NE$	6., si oppongono ad angoli congruenti
8.	Consideriamo il triangolo AED	
9.	$AM \cong MD$	Hp
10.	$MN \| AB$	2., 9., teorema dei punti medi per i triangoli
11.	$AB \| CD$	def. trapezio
12.	$MN \| CD$	10., 11., proprietà transitiva

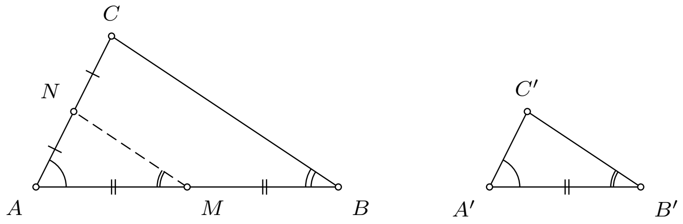
□

Allo stesso modo è possibile provare il seguente

Teorema 14.6.5. *In ogni parallelogramma, la retta passante per i punti medi di due lati opposti è parallela agli altri due lati.*

Abbiamo già accennato in un precedente capitolo che le mediane di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto, detto **baricentro**. Per dimostrare tale proprietà utilizzeremo il seguente teorema che costituisce una condizione sufficiente affinché un triangolo sia congruente al doppio di un altro triangolo.

Teorema 14.6.6 (Criterio del triangolo doppio)**.** *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli tali che $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ e $AB \cong 2A'B'$. allora il triangolo ABC è congruente al doppio del triangolo $A'B'C'$.*



Hp: $\widehat{A} \cong \widehat{A'} \quad \wedge \quad \widehat{B} \cong \widehat{B'} \quad \wedge \quad AB \cong 2A'B'$

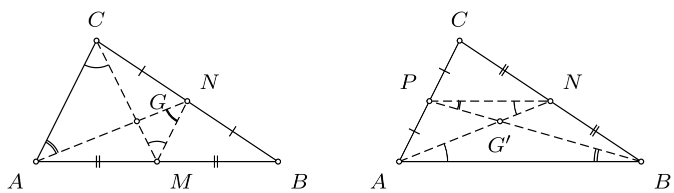
Th: $ABC \cong 2A'B'C'$

Dimostrazione. Costruzione: siano M ed N rispettivamente i punti medi di AB e AC; si congiunga, quindi, M con N.

1.	Consideriamo il triangolo ABC	
2.	$AB \cong 2AM$	costruzione, M punto medio di AB
3.	$AC \cong 2AN$	costruzione, N punto medio di AC
4.	$MN \parallel BC \quad \wedge \quad BC \cong 2MN$	2., 3., primo teorema dei punti medi
5.	$ABC \cong 2AMN$	2., 3., 4.
6.	$A\widehat{M}N \cong \widehat{B}$	4., angoli corrispondenti formati da $BC \parallel MN$ e AB
7.	Consideriamo i triangoli AMN e $A'B'C'$	
8.	$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$	Hp
9.	$\widehat{B} \cong \widehat{B'}$	Hp
10.	$\widehat{B'} \cong A\widehat{M}N$	6., 9., proprietà transitiva
11.	$AB \cong 2A'B'$	Hp
12.	$AM \cong A'B'$	2., 11., metà stesso segmento AB
13.	$AMN \cong 2A'B'C'$	8., 10., 12., 2° c.c.
14.	$ABC \cong 2A'B'C'$	5., 13.

□

Teorema 14.6.7 (Teorema del baricentro)**.** *Le mediane di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto G. Inoltre, il punto G divide ciascuna mediana in due parti tali che quella che contiene il vertice del triangolo è congruente al doppio dell'altra.*



Hp: $AM \cong MB\widehat{A'} \quad \wedge \quad BN \cong NC \quad \wedge \quad AP \cong PC$

Th: $AN \cap BP \cap CM = \{G\}$

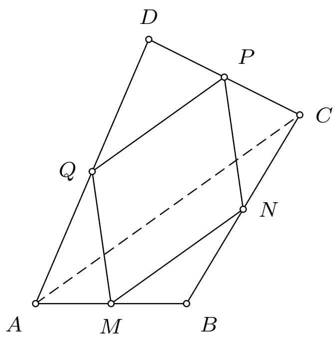
Dimostrazione. Costruzione: dapprima si considerino le mediane AN e CM che s'incontrano nel punto G, poi le mediane AN e BP che s'incontrano in G'.

1.	$AM \cong MB\widehat{A'} \quad \wedge \quad BN \cong NC$	Hp
2.	$MN \| AC \quad \wedge \quad AC \cong 2MN$	1., primo teorema dei punti medi
3.	Consideriamo i triangoli AGC e MNG	
4.	$A\widehat{C}G \cong G\widehat{M}N$	2., angoli alterni interni formati da $MN\|AC$ e CM
5.	$C\widehat{A}G \cong G\widehat{N}M$	2., angoli alterni interni formati da $MN\|AC$ e AN
6.	$AGC \cong 2MNG$	2., 4., 5.
7.	$AG \cong 2GN \quad \wedge \quad CG \cong 2GM$	6.
8.	$AP \cong PC \quad \wedge \quad BN \cong NC$	Hp
9.	consideriamo i triangoli $AG'B$ e NPG'	
10.	$NP\|AB \quad \wedge \quad AB \cong 2NP$	8., primo teorema dei punti medi
11.	$A\widehat{B}G' \cong G'\widehat{P}N$	8., angoli alterni interni formati da $MN\|AC$ e CM
12.	$B\widehat{A}N \cong G'\widehat{N}P$	8., angoli alterni interni formati da $MN\|AC$ e AN
13.	$AG'B \cong 2NPG'$	8., 11., 12.
14.	$AG' \cong 2G'N \quad \wedge \quad BG' \cong 2G'P$	13.
15.	$G = G'$	7., 14.
16.	$AN \cap BP \cap CM = \{G\}$	15.

□

Passiamo ora a dimostrare una proprietà dei quadrilateri alquanto sorprendente.

Teorema 14.6.8 (Dei punti medi per i quadrilateri)**.** *Il quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un quadrilatero qualunque è un parallelogramma.*



Hp: $ABCD$ quadrilatero $\wedge\, AM \cong MB \wedge BN \cong NC \wedge CP \cong PD \wedge DQ \cong QA$

Th: $MNPQ$ parallelogramma

Dimostrazione. Costruzione: si conduca la diagonale AC del quadrilatero $ABCD$.

1.	Consideriamo il triangolo ABC	
2.	$AM \cong MB$	Hp
3.	$BN \cong NC$	Hp
4.	$MN \parallel AC \wedge MN \cong \frac{1}{2}AC$	1.,2., 3., teorema dei punti medi
5.	Consideriamo il triangolo ACD	
6.	$AQ \cong QD$	Hp
7.	$CP \cong PD$	Hp
8.	$QP \parallel AC \wedge QP \cong \frac{1}{2}AC$	5.,6.,7., teorema dei punti medi per i triangoli
9.	$MN \parallel QP \wedge MN \cong QP$	4.,8., proprietà transitiva di parallelismo e congruenza
10.	$MNPQ$ parallelogramma	9., lati opposti paralleli e congruenti

□

Esercizio 14.6.2. Dimostrare che il parallelogramma che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un rombo (rispettivamente un rettangolo) è un rettangolo (rispettivamente un rombo). Estendere il risultato ai quadrati.

Esercizi

1. Dato un parallelogramma $ABCD$, dimostrare che i vertici opposti B e D sono equidistanti dalla diagonale AC.

2. Sia $ABCD$ un parallelogramma ed E il punto medio del lato AB. Le rette DE e BC si incontrano in T. Dimostrare che $DBTA$ è un parallelogramma.

3. Dato un parallelogramma $ABCD$, si prendano sui lati opposti AB e CD due segmenti congruenti AE e CF. Dimostrare che $DEBF$ è un parallelogramma.

4. Sia $ABCD$ un parallelogramma; le bisettrici degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ s'incontrano nel punto $F \in CD$. Dimostrare che $AB \cong 2BC$.

5. Nel trapezio $ABCD$ le bisettrici degli angoli alla base maggiore si incontrano nel punto E della base minore. Dimostrare che la base minore è congruente alla somma dei lati obliqui. Supposto, infine, che il trapezio sia isoscele, dimostrare che E è punto medio della base minore.

6. Dimostrare che, se un parallelogramma ha le altezze relative a due lati consecutivi congruenti, allora esso è un rombo.

7. Dimostrare che, se in un trapezio le bisettrici degli angoli adiacenti alla base minore s'intersecano in un punto della base maggiore, allora la base maggiore è congruente alla somma dei lati obliqui.

8. Sia dato un rombo $ABCD$ e sia O il punto d'intersezione delle diagonali. Prendiamo un punto E appartenente al segmento AO ed un punto F appartenente al segmento CO tali che i segmenti AE e CF siano congruenti. Dimostrare che il quadrilatero $EBFD$ è un rombo.

9. Dato un trapezio isoscele $ABCD$ con le diagonali perpendicolari, dimostrare che il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati del trapezio è un quadrato.

10. Sia dato un triangolo ABC e sia AL la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$. Sia P il punto d'intersezione con il lato AC della retta per L parallela al lato AB e sia Q il punto d'intersezione con il lato AB della retta per L parallela al lato AC. dimostrare che il quadrilatero $LPAQ$ è un rombo.

11. Disegna un triangolo isoscele FAD di base FA. Prolunga il lato FD di un segmento DC congruente a FD, congiungi C con A.

    - Dimostra che il triangolo FAC è rettangolo.
    - Indica con M il punto medio di AC e congiungi M con D. Dimostra che DM è contenuto nell'asse del segmento AC.
    - Con centro in A e raggio AD traccia un arco che incontra il prolungamento di DM nel punto B. Dimostra che il quadrilatero $ABCD$ è un rombo.

Parte III

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Numeri - Funzioni - Coordinatore progetto - Matematica 5
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

Settembre 2011

Dipartimento di Matematica
ITIS V.Volterra
San Donà di Piave