

ALGEBRA DEGLI EVENTI

Appunti introduttivi al Calcolo Combinatorio e al Calcolo delle Probabilità

Classe Terza

a cura di Franca Gressini
Novembre 2008

Conosciamo tante algebre....

-quella **letterale** (gli oggetti sono monomi, polinomi...)
-quella **booleana** (gli oggetti sono proposizioni...)
-quella **insiemistica** (gli oggetti sono insiemi...)

...ne aggiungiamo un'altra

....vogliamo ora definirne una che ha per
oggetti gli *eventi* →

ALGEBRA DEGLI EVENTI

... MA CHE COSA SONO GLI
EVENTI ?

Un po' di definizioni

- **Fenomeno** : tutto ciò che accade e/o che si realizza
- **Prova o esperimento** : osservazione del fenomeno
- **EVENTO** : esito della prova

L'Universo

Si chiama

UNIVERSO (U)

l'insieme degli esiti (casi) elementari
dell'esperimento.

Esempio 1

Esperimento: lancio di una moneta

Universo= { T,C }

Esempio 2

Esperimento: lancio di un dado

Universo= { 1,2,3,4,5,6 }

Lo Spazio degli Eventi

Si chiama

SPAZIO DEGLI EVENTI ($\mathcal{P}(U)$)

l'insieme di tutti i sottoinsiemi dell'universo.

In pratica è l'insieme degli eventi che si formano con tutte le possibili combinazioni degli esiti elementari dell'universo.

Per determinare $\mathcal{P}(U)$ basta quindi eseguire l'operazione insiemistica di costruzione dell'insieme delle parti dell'insieme U

Un esempio

Dato l'universo : $\mathbf{U} = \{ 1,2,3,4 \}$,

si costruisce :

$$\mathcal{P}(\mathbf{U}) = \{ \Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \mathbf{U} \}.$$

Si osservi che se \mathbf{U} ha n elementi,

allora $\mathcal{P}(\mathbf{U})$ ha 2^n elementi.

Osservazioni

Si noti che nello spazio degli eventi sono presenti due eventi particolari:

- **l'evento vuoto Φ**

corrisponde all'evento impossibile che, essendo privo di elementi, *non si realizza mai*

- **l'evento U**

corrisponde all'evento certo che, contenendo tutti i casi elementari dell'universo, *si realizza necessariamente*

Tutti gli altri eventi sono **incerti o possibili** perchè contengono solo alcuni casi elementari dell'universo e quindi *possono realizzarsi oppure no*

Realizzazione di un evento

Un evento si realizza
quando
si verifica
uno
dei suoi casi

Classificazione degli eventi

...in base alla loro realizzazione....

- **EVENTO IMPOSSIBILE** : non può mai realizzarsi
- **EVENTO POSSIBILE O INCERTO** : può realizzarsi
- **EVENTO CERTO** : si realizza necessariamente

...in base alla loro natura....

- **EVENTO SEMPLICE** : costituito da un solo caso
(per esempio {2})
- **EVENTO COMPOSTO**: costituito da più casi
(per esempio {2,3,4})

Una precisazione importante

Non dobbiamo confondere:
gli **esiti elementari** dell'universo
e
gli **eventi semplici** dello spazio degli eventi.

Infatti, nell'esempio precedente:

un **esito** è : 2 oppure 4

un **evento semplice** invece è: {2} oppure {4}

Quindi risulta : $2 \neq \{2\}$

Le operazioni con gli eventi

Abbiamo visto che sul piano formale gli eventi si rappresentano come insiemi.

Ebbene, anche le operazioni ricalcano quelle dell'insiemistica e sono :

UNIONE

INTERSEZIONE

NEGAZIONE

DIFFERENZA

Unione di eventi

Dati due eventi A e B, l'**unione** si indica con :

A U B

L'unione di eventi è un **evento** costituito da **tutti** i casi che appartengono ad **almeno uno** dei due eventi

Un'altra classificazione degli eventi

Due eventi A e B si dicono :

- **esaustivi**

se la loro **unione** è completa , cioè restituisce l'intero universo **U** :

$$A \cup B = U$$

Intersezione di eventi

Dati due eventi A e B, l'**intersezione** si indica con :

$$A \cap B$$

L'intersezione di eventi è un **evento** costituito da **tutti** i casi che appartengono ad **entrambi** gli eventi

Un'ulteriore classificazione degli eventi

Due eventi A e B si dicono :

- **incompatibili**

se **non possono** realizzarsi insieme, cioè se **non hanno** casi in comune, cioè se risulta :

$$A \cap B = \Phi$$

- **compatibili**

se **possono** realizzarsi insieme, cioè se **hanno** casi in comune, cioè se risulta :

$$A \cap B \neq \Phi$$

Negazione di un evento

Dato l'evento E , l'evento **negato** di E (o complementare o contrario) si indica con :

$$\overline{E}$$

Il negato di un evento è un **evento** costituito da **tutti** i casi di U che **non appartengono** ad E

Differenza di eventi

Dati due eventi A e B, la **differenza** si indica con :

$$A \setminus B$$

La differenza di eventi è un **evento** costituito da **tutti** i casi di **A** che **non** appartengono a **B**

Partizione dell'Universo o sistema completo di eventi

Data una famiglia di eventi $E_i \in P(U)$, essa forma

una **partizione di U**

se i suoi eventi risultano :

non vuoti – disgiunti – esaustivi

cioè:

$$E_i \neq \Phi \forall i$$

$$E_i \cap E_j = \Phi \forall i, j$$

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots \cup E_n = U$$

Esperimenti composti

Si dice

composto

un esperimento costituito da :

- più prove uguali ripetute
- più prove diverse

Le prove che costituiscono un esperimento composto si chiamano anche :

fasi dell'esperimento

Le fasi si dicono **indipendenti** se non si influenzano reciprocamente

Universo composto

L'universo di un esperimento composto è dato dal :

prodotto cartesiano

degli universi corrispondenti alle singole fasi.

Esempio

Un esperimento è composto dall'estrazione di un gettone dall'urna dell'esercizio citato in precedenza e il lancio di una moneta.

Si ha pertanto:

$U_1 = \{ 1,2,3,4 \}$ universo della fase : *estrazione dall'urna*

$U_2 = \{ T, C \}$ universo della fase : *lancio della moneta*

L'universo composto è dato da :

$$U = U_1 \times U_2 = \{ (1,T), (1,C), (2,T), (2,C), (3,T), (3,C), (4,T), (4,C) \}$$

Rappresentazioni grafiche

Per rappresentare un universo composto è molto utile usare dei grafici tipo :

- **diagrammi cartesiani**

(utili per esperimenti **con solo due** fasi)

- **tabelle a più entrate**

(utili per esperimenti **con solo due** fasi)

- **diagrammi ad albero**

(particolarmente utili per esperimenti **con più di due** fasi)

fine della presentazione